Lógica intuitiva

Una **proposición** es una afirmación que debe ser cierta o falsa (aunque no lo sepamos).

Ejemplos:

A : Los murciélagos son aves

B : El sol brilla

C : No hay vida extraterrestre

D : $3>5$

E : Los triángulos tienen 3 lados

Una **proposición** es una afirmación que debe ser cierta o falsa (aunque no lo sepamos).

Ejemplos:

A : Los murciélagos son aves (falsa)

B : El sol brilla (cierta)

C : No hay vida extraterrestre (no sabemos)

D : $3>5$ (falsa)

E : Los triángulos tienen 3 lados (cierta)

Dos proposiciones son **equivalentes** si significan lo mismo.

Ejemplos:

A es menor que B equivale a B es mayor que A

10 es múltiplo de 5 equivale a 5 es divisor de 10

X es hijo de Y equivale a Y es padre o madre de X

Las proposiciones pueden combinarse de muchas maneras para obtener otras proposiciones

La **negación** de una proposición P es la proposición que dice que P es falsa, se le denota por $\neg$P y se dice "no P".

B : El sol brilla	$\neg$B : El sol no brilla
C : No hay vida extraterrestre	$\neg$C : Hay vida extraterrestre
D : $3 > 5$	$\neg$D : $3 \leq 5$
E : Los triángulos tienen 3 lados	$\neg$E : Los triángulos no tienen 3 lados

Observar que $\neg P$ es verdadera cuando P es falsa y $\neg P$ es falsa cuando P es verdadera.

La negación de P consiste de *todas las alternativas* a P, así que la negación de la negación de P es P.

Ejemplo.

E : Los triángulos tienen 3 lados

$\neg E$: Los triángulos no tienen 3 lados

$\neg\neg E$: Los triángulos sí tienen 3 lados

La **conjunción** de dos proposiciones P y Q es la proposición que dice que *las dos* son verdaderas, se le denota por $P \wedge Q$ y se dice "P y Q".

Ejemplos:

$A \wedge B$: *Los murciélagos son aves y el sol brilla*

La **conjunción** de dos proposiciones P y Q es la proposición que dice que *las dos* son verdaderas, se le denota por $P \wedge Q$ y se dice “P y Q”.

Ejemplos:

$A \wedge B$: *Los murciélagos son aves y el sol brilla*

Si $F : x \leq y$, $G : x \geq y$ entonces $F \wedge G : x = y$

La **disyunción** de dos proposiciones P y Q es la proposición que dice que *al menos una* de ellas es verdadera, se le denota por $P \vee Q$ y se dice “P o Q”.

Ejemplos:

$A \vee B$: *Los murciélagos son aves o el sol brilla*

La **disyunción** de dos proposiciones P y Q es la proposición que dice que *al menos una* de ellas es verdadera, se le denota por $P \vee Q$ y se dice "P o Q".

Ejemplos:

$A \vee B$: *Los murciélagos son aves o el sol brilla*

Si $H : x<y$, $I : x>y$ entonces $H \vee I : x \neq y$

Observar que la “o” en $P \vee Q$ es *inclusiva*:

o ocurre P o ocurre Q o ocurren ambas.

Ejemplo:

si J : *6 es múltiplo de 2* K : *6 es múltiplo de 3*

$J \vee K$:

Observar que la "o" en $P \vee Q$ es *inclusiva*:

o ocurre P o ocurre Q o ocurren ambas.

Ejemplo:

si J : *6 es múltiplo de 2* K : *6 es múltiplo de 3*

$J \vee K$: *6 es múltiplo de 2 o de 3*   es verdadera

¿Como es la negación de una conjunción?

$P \wedge Q$ dice que ocurre P y también ocurre Q

Negar que ocurre P y ocurre Q equivale a afirmar que o no ocurre P o no ocurre Q, es decir

$$\neg(P \wedge Q) = \neg P \vee \neg Q$$

Ejemplo:

$A \wedge B$: *Los murciélagos son aves* ***y*** *el sol brilla*.

$\neg(A \wedge B)$:

¿Como es la negación de una conjunción?

$P \wedge Q$ dice que ocurre P y también ocurre Q

Negar que ocurre P y ocurre Q equivale a afirmar que o no ocurre P o no ocurre Q, es decir

$$\neg(P \wedge Q) = \neg P \vee \neg Q$$

Ejemplo:

$A \wedge B$: *Los murciélagos son aves* ***y*** *el sol brilla*.

$\neg(A \wedge B)$: *Los murciélagos no son aves* ***o*** *el sol no brilla*.

¿Como es la negación de una disyunción?

$P \vee Q$ afirma que o ocurre P o ocurre Q, o ambas.

Negar que o ocurre P o ocurre Q equivale a afirmar que ni ocurre P ni ocurre Q, es decir

$$\neg(P \vee Q) = \neg P \wedge \neg Q$$

Ejemplo:

$A \vee B$: *Los murciélagos son aves* ***o*** *el sol brilla*

$\neg(A \vee B)$:

¿Como es la negación de una disyunción?

$P \vee Q$ afirma que o ocurre P o ocurre Q, o ambas.

Negar que o ocurre P o ocurre Q equivale a afirmar que ni ocurre P ni ocurre Q, es decir

$$\neg(P \vee Q) = \neg P \wedge \neg Q$$

Ejemplo:

$A \vee B$: *Los murciélagos son aves* ***o*** *el sol brilla*

$\neg(A \vee B)$: *Los murciélagos no son aves* ***y*** *el sol no brilla*

La **condicional** $P \rightarrow Q$ es la proposición que dice que si se cumple P entonces se cumple Q, se lee "si P entonces Q".

Ejemplos.

Si P : *n es múltiplo de 4* y Q : *n es par*

$P \rightarrow Q$:

La **condicional** $P \rightarrow Q$ es la proposición que dice que si se cumple P entonces se cumple Q, se lee “si P entonces Q”.

Ejemplos.

Si P : *n es múltiplo de 4* y Q : *n es par*

$P \rightarrow Q$: *Si n es múltiplo de 4 entonces n es par*

$Q \rightarrow P$:

La **condicional** $P \rightarrow Q$ es la proposición que dice que si se cumple P entonces se cumple Q, se lee "si P entonces Q".

Ejemplos.

Si P : *n es múltiplo de 4* y Q : *n es par*

$P \rightarrow Q$: *Si n es múltiplo de 4 entonces n es par*

$Q \rightarrow P$: *Si n es par entonces n es múltiplo de 4*

La **condicional** $P \rightarrow Q$ es la proposición que dice que si se cumple P entonces se cumple Q, se lee “si P entonces Q”.

Ejemplos.

Si P : *n es múltiplo de 4* y Q : *n es par*

$P \rightarrow Q$: *Si n es múltiplo de 4 entonces n es par*

$Q \rightarrow P$: *Si n es par entonces n es múltiplo de 4*

$\neg P \rightarrow \neg Q$:

La **condicional** $P \rightarrow Q$ es la proposición que dice que si se cumple P entonces se cumple Q, se lee "si P entonces Q".

Ejemplos.

Si P : *n es múltiplo de 4* y Q : *n es par*

$P \rightarrow Q$: *Si n es múltiplo de 4 entonces n es par*

$Q \rightarrow P$: *Si n es par entonces n es múltiplo de 4*

$\neg P \rightarrow \neg Q$: *Si n no es múltiplo de 4 entonces n no es par*

La **condicional** $P \rightarrow Q$ es la proposición que dice que si se cumple P entonces se cumple Q, se lee "si P entonces Q".

Ejemplos.

Si P : *n es múltiplo de 4* y Q : *n es par*

$P \rightarrow Q$: *Si n es múltiplo de 4 entonces n es par* (verdadera)

$Q \rightarrow P$: *Si n es par entonces n es múltiplo de 4* (falsa)

$\neg P \rightarrow \neg Q$: *Si n no es múltiplo de 4 entonces n no es par*

(falsa)

$P \rightarrow Q$ y $\neg P \rightarrow \neg Q$ no son equivalentes !

$P \to Q$ *no dice* ni que P ni que Q sean ciertas, solo dice que si P es cierta entonces Q es cierta.

Negar que si P es cierta entonces Q es cierta equivale a decir que P es cierta pero Q no lo es, o sea que

$$\neg(P \to Q) = P \wedge \neg Q$$

$P \rightarrow Q$ *no dice* ni que P ni que Q sean ciertas, solo dice que si P es cierta entonces Q es cierta.

Negar que si P es cierta entonces Q es cierta equivale a decir que P es cierta pero Q no lo es, o sea que

$$\neg(P \rightarrow Q) = P \wedge \neg Q$$

Ejemplo:

$Q \rightarrow P$: *Si n es par entonces n es múltiplo de 4*

$\neg(Q \rightarrow P)$:

$P \rightarrow Q$ *no dice* ni que P ni que Q sean ciertas, solo dice que si P es cierta entonces Q es cierta. .

Negar que si P es cierta entonces Q es cierta equivale a decir que P es cierta pero Q no lo es, o sea que

$$\neg(P \rightarrow Q) = P \wedge \neg Q$$

Ejemplo:

$Q \rightarrow P$: *Si n es par entonces n es múltiplo de 4*

$\neg(Q \rightarrow P)$: *n es par y n no es múltiplo de 4*

Recordar que la negación de la negación equivale a la proposición original, así que

$$P \rightarrow Q \quad = \quad \neg P \vee Q \quad = \quad \neg Q \rightarrow \neg P$$

Así que las siguientes proposiciones son equivalentes:

$P \rightarrow Q$: *Si n es múltiplo de 4 entonces n es par*

$\neg P \vee Q$:

$\neg Q \rightarrow \neg P$:

Recordar que la negación de la negación equivale a la proposición original, así que

$$P \rightarrow Q \quad = \quad \neg P \vee Q \quad = \quad \neg Q \rightarrow \neg P$$

Así que las siguientes proposiciones son equivalentes:

$P \rightarrow Q$: *Si n es múltiplo de 4 entonces n es par*

$\neg P \vee Q$: *n no es múltiplo de 4 o n es par*

$\neg Q \rightarrow \neg P$:

Recordar que la negación de la negación equivale a la proposición original, así que

$$P \rightarrow Q \quad = \quad \neg P \vee Q \quad = \quad \neg Q \rightarrow \neg P$$

Así que las siguientes proposiciones son equivalentes:

$P \rightarrow Q$: *Si n es múltiplo de 4 entonces n es par*

$\neg P \vee Q$: *n no es múltiplo de 4 o n es par*

$\neg Q \rightarrow \neg P$: *Si n no es par entonces n no es múltiplo de 4*

¿Cuales de las siguientes proposiciones son equivalentes?

A. *Si sonríes te alegras*

B. *Si no sonríes no te alegras*

C. *Si no te alegras no sonríes*

D. *Si te alegras sonríes*

E. *Te alegras o no sonríes*

F. *No te alegras o sonríes*

¿Cuales de las siguientes proposiciones son equivalentes?

A. *Si sonríes te alegras* $A \rightarrow C$

B. *Si no sonríes no te alegras* $\neg A \rightarrow \neg C$

C. *Si no te alegras no sonríes* $\neg C \rightarrow \neg A$

D. *Si te alegras sonríes* $C \rightarrow A$

E. *Te alegras o no sonríes* $A \vee \neg C$

F. *No te alegras o sonríes* $\neg A \vee C$

¿Cuales de las siguientes proposiciones son equivalentes?

A. *Si sonríes te alegras* $A \rightarrow C$

B. *Si no sonríes no te alegras* $\neg A \rightarrow \neg C$

C. *Si no te alegras no sonríes* $\neg C \rightarrow \neg A$

D. *Si te alegras sonríes* $C \rightarrow A$

E. *Te alegras o no sonríes* $A \vee \neg C$

F. *No te alegras o sonríes* $\neg A \vee C$

A, C y F son equivalentes B, D y E son equivalentes

Los conectores lógicos $\neg, \wedge, \vee, \rightarrow$ pueden combinarse de muchas maneras para obtener proposiciones mas complicadas. La **doble condicional** $P \leftrightarrow Q$ dice que si P es cierta entonces Q es cierta y que si Q es cierta entonces P es cierta. Se le denota por $P \leftrightarrow Q$ y se lee "P si y solo si Q".

$$P \leftrightarrow Q = (P \rightarrow Q) \wedge (Q \rightarrow P)$$

Ejemplo:

$F \leftrightarrow G$: *Dos triángulos son semejantes si y solo si sus lados son proporcionales*

Un Juego

Sabemos que la condicional $\square$ puede expresarse como combinación de $\neg$ y $\vee$: $P \rightarrow Q = \neg P \vee Q$

¿Se podrá expresar $\square$ como combinación de $\neg$ y $\wedge$?

¿Se podrán expresar $\vee$ y $\wedge$ como combinaciones de $\neg$ y $\rightarrow$?

Significados y cuantificadores

El lenguaje cotidiano puede ser ambiguo, pero al considerar una proposición su significado debe quedar totalmente claro.

Todos los perros no ladran no es nada claro:

Podría interpretarse de distintas maneras como
No todas los perros ladran o como *Ningún perro ladra*.

Los perros tienen 4 patas puede querer decir que como especie los perros tienen 4 patas (lo que es cierto) o que cada perro individualmente tiene 4 patas (lo que es falso)

.

Algunos números no tienen raíz cuadrada es ambiguo porque no especifica a que clase de números se refiere y la verdad o falsedad de la afirmación depende de eso.

En matemáticas no puede haber ambiguedad, todo debe quedar perfectamente claro, de modo que no quepa duda de la veracidad o falsedad de las afirmaciones-

Al afirmar algo en matemáticas se entiende que es cierto sin excepción alguna.

Ejemplos:

Los números pares mayores que 2 son suma de 2 números primos

significa

Si n es un numero par y n>2 entonces n es suma de 2 números primos

Dos rectas con la misma pendiente son paralelas

significa

Si L y M son dos rectas y L y M tienen la misma pendiente, entonces L y M son paralelas

Para precisar el significado de las afirmaciones, usamos **cuantificadore**s que significan exactamente lo siguiente:

Cuantficador	*Significado*	*Notación*
Todos	*no existe ninguno que no*	$\forall$ (para todo)
Algún o **algunos**	*existe al menos uno*	$\exists$ (existe)
Ningún	*no existe ninguno que si*	$\exists$ (no existe)

Ejemplo 1

Las aves vuelan =

Todos los aves vuelan =

No existen aves que no vuelen

Esta aa afirmación es falsa: aunque casi todas las aves vuelan, con una que no vuele basta.

Ejemplo 2

Todos los marcianos son verdes =

No existen marcianos que no sean verdes

Al afirmar que todos los marcianos son verdes **no** afirmamos que los marcianos existen, sólo que no hay marcianos de otro color!

Si sabemos que los marcianos no existen la afirmación es cierta.

Ejemplo 3

Algunas estrellas brillan =

Existen estrellas que brillan =

Al menos una estrella brilla

Al afirmar que algunas estrellas brillan **no** afirmamos que algunas estrellas no brillen!

Tampoco que haya mas de una estrella que brille

Ejemplo 4

Ningún político es honesto =

No existen políticos honestos

Probablemente falso: basta conque haya uno honesto en el mundo

¿Verdadero o falso?

Algunos triángulos tienen 3 lados

Verdadero

Todas las rectas con la misma pendiente son paralelas

Falso (2 rectas con la misma pendiente son paralelas, a menos que sean la misma recta)

Todos los números pares son suma de 2 números primos

Nadie sabe si es cierto o falso. Es cierto para todos los números menores que 4,000,000,000,000,000,000 (conjetura Goldbach)

Negaciones con cuantificadores

Observar como son las negaciones de algunas proposiciones:

A : *Todas las aves vuelan*

$\neg A$:

Negaciones con cuantificadores

Observar como son las negaciones de algunas proposiciones:

A : *Todas las aves vuelan*

$\neg$A : *Algunas aves no vuelan*

Negaciones con cuantificadores

Observar como son las negaciones de algunas proposiciones:

B : *Ningún mamífero vuela*

$\neg$B :

Negaciones con cuantificadores

Observar como son las negaciones de algunas proposiciones:

B : *Ningún mamífero vuela*

$\neg$ B : *Algunos mamíferos vuelan*

Negaciones con cuantificadores

Observar como son las negaciones de algunas proposiciones:

C : *Algunas estrellas brillan*

$\neg C$:

Negaciones con cuantificadores

Observar como son las negaciones de algunas proposiciones:

C : *Algunas estrellas brillan*

$\neg$C : *Ninguna estrella brilla*

Negaciones con cuantificadores

Observar como son las negaciones de algunas proposiciones:

D: *Algunos polinomios no tienen raíces*

$\neg D$:

Negaciones con cuantificadores

Observar como son las negaciones de algunas proposiciones:

D: *Algunos polinomios no tienen raíces*

$\neg$D : *Todos los polinomios tienen raíces*

Negaciones con cuantificadores

Observar como son las negaciones de algunas proposiciones:

E: *Para todo número real x,* $x < x^2$

$\neg E$:

Negaciones con cuantificadores

Observar como son las negaciones de algunas proposiciones:

E: *Para todo número real x*, $x < x^2$

$\neg$E : *Existe un número real x tal que* $x \geq x^2$

¿Cual es la negación de las siguiente proposición?

P : *Los números pares mayores que 2 son suma de 2 números primos*

¿Cual es la negación de las siguiente proposición?

P : *Los números pares mayores que 2 son suma de 2 números primos*

P afirma que *todos los números pares mayores que 2 son suma de 2 números primos,* asi que la negación de P es

┐P: *Existen números pares mayores que 2 que no son suma de 2 números primos*

¿Y cual es la negación de las siguiente proposición?

P : Q : *Dos rectas con la misma pendiente son paralelas*

¿Y cual es la negación de las siguiente proposición?

P : Q : *Dos rectas con la misma pendiente son paralelas*

P afirma que *todas loas rectas con la misma pendiente son paralelas,* asi que la negación de P es

┐P: *Existen 2 rectas con la misma pendiente que no son paralelas*

Ejercicio (en equipos)

Escriban las negaciones de las siguientes proposiciones

A : *Todos los hombres son mortales*

B : *Ninguna araña tiene 6 patas*

C : *Algunos números primos son pares*

D : *Algunos polinomios no tienen raíces*

E : *Si a y b son dos números reales y* $a < b$ *entonces* $a^2 < b^2$