

Demostraciones

Una **demostración** es un *argumento lógico* en el que cada paso esta plenamente justificado y es una consecuencia lógica inmediata de los anteriores.

Una **demostración** es un *argumento lógico* en el que cada paso esta plenamente justificado y es una consecuencia lógica inmediata de los anteriores.

En matemáticas **todo** se demuestra.

Una **demostración** es un *argumento lógico* en el que cada paso esta plenamente justificado y es una consecuencia lógica inmediata de los anteriores.

En matemáticas **todo** se demuestra.

Para demostrar cualquier cosa debemos partir de cosas que suponemos que son ciertas (las **hipótesis**) y de ahí debemos llegar (usando argumentos lógicos) a lo que queremos demostrar (la **conclusión**).

Una **demostración** es un *argumento lógico* en el que cada paso esta plenamente justificado y es una consecuencia lógica inmediata de los anteriores.

En matemáticas **todo** se demuestra.

Hay métodos de demostración **directos** (*por pasos*) y también **indirectos** (*por contrapositiva o por contradicción*) aunque a veces se combinan.

Demostraciones directas (por pasos):

Como $(p \rightarrow r) \wedge (r \rightarrow q) \Rightarrow (p \rightarrow q)$
entonces podemos demostrar $p \rightarrow q$ mostrando
que $p \rightarrow r$ y que $r \rightarrow q$ donde r es cualquier
otra proposición.

Demostraciones directas (por pasos):

Como $(p \rightarrow r) \wedge (r \rightarrow q) \Rightarrow (p \rightarrow q)$
entonces podemos demostrar $p \rightarrow q$ mostrando
que $p \rightarrow r$ y que $r \rightarrow q$ donde r es cualquier
otra proposición.

Mas generalmente, para demostrar que si pasa A
entonces pasa Z, podemos hacerlo *por pasos*
buscando una serie de proposiciones, C, D, E, ...
tales que podamos demostrar que si pasa A
entonces pasa B, si pasa B entonces pasa C, si
pasa C entonces pasa D.... hasta terminar en Z.

Demostrar que si algunos A son B y ningún B es C
entonces algunos A no son C .

Demostrar que si algunos A son B y ningún B es C entonces algunos A no son C .

Hipótesis 1: Existe x tal que x es A y x es B .

Hipótesis 2: Si y es B entonces y no es C

Por demostrar: Existe z tal que z es A y z no es C

Demostrar que si algunos A son B y ningún B es C entonces algunos A no son C .

Hipótesis 1: Existe x tal que x es A y x es B .

Hipótesis 2: Si y es B entonces y no es C

Por demostrar: Existe z tal que z es A y z no es C

Demostración (directa):

Por la hipótesis 1 existe x tal que x es A y x es B

Como x es B entonces por la hipótesis 2 x no es C

Así que x es A y x no es C , que es lo que se quería demostrar. $\square$

Demostrar que el cuadrado de un entero par es par.

Demostrar que el cuadrado de un entero par es par.

Hipótesis: n es un entero par

Por demostrar: n^2 es par

Demostrar que el cuadrado de un entero par es par.

Hipótesis: n es un entero par

Por demostrar: n^2 es par

Demostración (directa):

Por la hipótesis n es un entero par

Entonces $n=2m$ para algún entero m

$$\text{Entonces } n^2 = (2m)^2 = 4m^2$$

Por lo tanto $n^2 = 2(2m^2)$ lo que dice que n^2 es par. $\square$

Demostraciones contrapositivas:

Como $\mathbf{p \rightarrow q}$ es equivalente a $\neg \mathbf{q} \rightarrow \neg \mathbf{p}$
entonces podemos demostrar $\mathbf{p \rightarrow q}$
demostrando la *contrapositiva* $\neg \mathbf{q} \rightarrow \neg \mathbf{p}$

Demostraciones contrapositivas:

Como $p \rightarrow q$ es equivalente a $\neg q \rightarrow \neg p$
entonces podemos demostrar $p \rightarrow q$
demostrando la *contrapositiva* $\neg q \rightarrow \neg p$

Para demostrar que si pasa A entonces tiene que pasar B podemos **suponer** que B no pasa y mostrar que entonces tampoco pasa A.

Demostrar que si algunos A no son B y todos los C son B entonces algunos A no son C

Demostrar que si algunos A no son B y todos los C son B entonces algunos A no son C

Hipótesis 1: Existe x tal que x es A y x no es B

Hipótesis 2: Si y es C entonces y es B

Por demostrar: Existe z tal que z es A y z no es C

Demostrar que si algunos A no son B y todos los C son B entonces algunos A no son C

Hipótesis 1: *Existe x tal que x es A y x no es B*

Hipótesis 2: *Si y es C entonces y es B*

Por demostrar: *Existe z tal que z es A y z no es C*

Demostración (contrapositiva):

Supongamos que la conclusión es falsa, es decir que
no existe z tal que z es A y z no es C

Demostrar que si algunos A no son B y todos los C son B entonces algunos A no son C

Hipótesis 1: Existe x tal que x es A y x no es B

Hipótesis 2: Si y es C entonces y es B

Por demostrar: Existe z tal que z es A y z no es C

Demostración (contrapositiva):

Supongamos que la conclusión es falsa, es decir que no existe z tal que z es A y z no es C

Esto significa que si z es A entonces z es C .

Así que si z es A entonces por la hipótesis 2 z es B .

Por lo tanto no existe z tal que z es A y z no es B lo que niega la hipótesis 1. $\square$

Demostrar que si el cuadrado de un número entero es impar, entonces el número es impar.

Demostrar que si el cuadrado de un número entero es impar, entonces el número es impar.

Hipótesis: n es un numero entero y n^2 es impar

Por demostrar: n es impar

Demostrar que si el cuadrado de un número entero es impar, entonces el número es impar.

Hipótesis: n es un numero entero y n^2 es impar

Por demostrar: n es impar

Demostración (contrapositiva):

Supongamos que la conclusión es falsa
es decir que n es par.

Demostrar que si el cuadrado de un número entero es impar, entonces el número es impar.

Hipótesis: n es un numero entero y n^2 es impar

Por demostrar: n es impar

Demostración (contrapositiva):

Supongamos que la conclusión es falsa
es decir que n es par.

Entonces $n=2m$ para algún entero m

Por lo tanto $n^2=(2m)^2 = 4m^2 = 2(2m^2)$

esto dice que n^2 es par lo que niega la hipótesis. $\square$

Demostraciones por contradicción:

Si **r** es cualquier proposición *falsa*, entonces

p $\rightarrow$ **q** es equivalente a **p** $\wedge$ $\neg$ **q** $\rightarrow$ **r**

Demostraciones por contradicción:

Si r es cualquier proposición *falsa*, entonces

$p \rightarrow q$ es equivalente a $p \wedge \neg q \rightarrow r$

así que podemos demostrar $p \rightarrow q$ demostrando

$$p \wedge \neg q \rightarrow r$$

Demostrar que si todos los A son B y ningún B es C entonces ningún A es C .

Demostrar que si todos los A son B y ningún B es C entonces ningún A es C .

Hipotesis 1: Si x es A entonces x es B

Hipotesis 2: Si y es B entonces y no es C

Por demostrar: Si z es A entonces z no es C

Demostrar que si todos los A son B y ningún B es C entonces ningún A es C .

Hipotesis 1: Si x es A entonces x es B

Hipotesis 2: Si y es B entonces y no es C

Por demostrar: Si z es A entonces z no es C

Demostración (por contradicción):

Supongamos que la conclusión es falsa, es decir que existe un z tal que z es A y z es C

Demostrar que si todos los A son B y ningún B es C entonces ningún A es C .

Hipotesis 1: Si x es A entonces x es B

Hipotesis 2: Si y es B entonces y no es C

Por demostrar: Si z es A entonces z no es C

Demostración (por contradicción):

Supongamos que la conclusión es falsa, es decir que existe un z tal que z es A y z es C

Como z es A entonces por la hipótesis 1 z es B

Como z es B entonces por la hipótesis 2 z no es C

que contradice nuestra suposición inicial. $\square$

Demostrar que no existen 2 números naturales m y n tales que $m/n = \sqrt{2}$.

Demostrar que no existen 2 números naturales m y n tales que $m/n = \sqrt{2}$.

Demostración (por contradicción)

Supongamos que la conclusión es falsa, es decir que existen m y n tales que $m/n = \sqrt{2}$

Demostrar que no existen 2 números naturales m y n tales que $m/n = \sqrt{2}$.

Demostración (por contradicción)

Supongamos que la conclusión es falsa, es decir que existen m y n tales que $m/n = \sqrt{2}$

Podemos suponer que m y n no son ambos pares o podríamos simplificar m/n .

Si $m/n = \sqrt{2}$ entonces $m^2/n^2 = 2$ así que $m^2 = 2n^2$

Como $m^2 = 2n^2$ entonces m^2 es par, así que m es par.

Demostrar que no existen 2 números naturales m y n tales que $m/n = \sqrt{2}$.

Demostración (por contradicción)

Supongamos que la conclusión es falsa, es decir que existen m y n tales que $m/n = \sqrt{2}$

Podemos suponer que m y n no son ambos pares o podríamos simplificar m/n .

Si $m/n = \sqrt{2}$ entonces $m^2/n^2 = 2$ así que $m^2 = 2n^2$

Como $m^2 = 2n^2$ entonces m^2 es par, así que m es par.

$m = 2m'$ para algún número natural m'

Así que $(2m')^2 = 2n^2$

por lo tanto $4m'^2 = 2n^2$ o sea $2m'^2 = n^2$

Por lo tanto n^2 es par, así que n es par.

Demostrar que no existen 2 números naturales m y n tales que $m/n = \sqrt{2}$.

Demostración (por contradicción)

Supongamos que la conclusión es falsa, es decir que existen m y n tales que $m/n = \sqrt{2}$

Podemos suponer que m y n no son ambos pares o podríamos simplificar m/n .

Si $m/n = \sqrt{2}$ entonces $m^2/n^2 = 2$ así que $m^2 = 2n^2$

Como $m^2 = 2n^2$ entonces m^2 es par, así que m es par.

$m = 2m'$ para algún número natural m'

Así que $(2m')^2 = 2n^2$

por lo tanto $4m'^2 = 2n^2$ o sea $2m'^2 = n^2$

Por lo tanto n^2 es par, así que n es par.

Así que m y n son pares lo que contradice la suposición. $\square$

En matemáticas todo se demuestra

Las cosas que creemos que son ciertas pero no han sido demostradas se llaman **conjeturas**.

Las cosas ya demostradas se llaman **teoremas**
(los resultados parciales, que se demuestran como pasos para demostrar un teorema se llaman **lemas**)

En matemáticas todo se demuestra

Las cosas que creemos que son ciertas pero no han sido demostradas se llaman **conjeturas**.

En matemáticas todo se demuestra

Las cosas que creemos que son ciertas pero no han sido demostradas se llaman **conjeturas**.

Las cosas ya demostradas se llaman **teoremas**
(los resultados parciales, que se demuestran como pasos para demostrar un teorema se llaman **lemas**).

A las consecuencias lógicas de los teoremas las llamamos **corolarios**.

Supongamos que m y n son números enteros y que su producto mn es divisible entre 3

¿Que podremos concluir?

Conjetura. Si m y n son números enteros y mn es divisible entre 3, entonces m o n son divisibles entre 3.

Conjetura. Si m y n son números enteros y mn es divisible entre 3, entonces m o n son divisibles entre 3.

Hipótesis 1: m y n son enteros

Hipótesis 2: mn es divisible entre 3

Por demostrar: m es divisible entre 3 o n es divisible entre 3

Conjetura. Si m y n son números enteros y mn es divisible entre 3, entonces m o n son divisibles entre 3.

Hipótesis 1: m y n son enteros

Hipótesis 2: mn es divisible entre 3

Por demostrar: m es divisible entre 3 o n es divisible entre 3

Demostración?

Conjetura. Si m y n son números enteros y mn es divisible entre 3, entonces m o n son divisibles entre 3.

Hipótesis 1: m y n son enteros

Hipótesis 2: mn es divisible entre 3

Por demostrar: m es divisible entre 3 o n es divisible entre 3

Demostración?

Conjetura. Si m y n son números enteros y mn es divisible entre 3, entonces m o n son divisibles entre 3.

Hipótesis 1: m y n son enteros

Hipótesis 2: mn es divisible entre 3

Por demostrar: m es divisible entre 3 o n es divisible entre 3

Demostración por contrapositiva ?

Conjetura. Si m y n son números enteros y mn es divisible entre 3, entonces m o n son divisibles entre 3.

Hipótesis 1: m y n son enteros

Hipótesis 2: mn es divisible entre 3

Por demostrar: m es divisible entre 3 o n es divisible entre 3

Demostración por contrapositiva ?

Supongamos que la conclusión es falsa, es decir que m no es divisible entre 3 y n no es divisible entre 3

Conjetura. Si m y n son números enteros y mn es divisible entre 3, entonces m o n son divisibles entre 3.

Hipótesis 1: m y n son enteros

Hipótesis 2: mn es divisible entre 3

Por demostrar: m es divisible entre 3 o n es divisible entre 3

Demostración por contrapositiva ?

Supongamos que la conclusión es falsa, es decir que

m no es divisible entre 3 y n no es divisible entre 3

($m = 3a+1$ o $m=3a+2$) y ($n = 3b+1$ o $n=3b+2$)

Conjetura. Si m y n son números enteros y mn es divisible entre 3, entonces m o n son divisibles entre 3.

Hipótesis 1: m y n son enteros

Hipótesis 2: mn es divisible entre 3

Por demostrar: m es divisible entre 3 o n es divisible entre 3

Demostración por contrapositiva ?

Supongamos que la conclusión es falsa, es decir que

m no es divisible entre 3 y n no es divisible entre 3

($m = 3a+1$ o $m=3a+2$) y ($n = 3b+1$ o $n=3b+2$)

Hay 4 casos:

$m = 3a+1$ y $n = 3b+1$

$m = 3a+2$ y $n = 3b+1$

$m = 3a+1$ y $n = 3b+2$

$m = 3a+2$ y $n = 3b+2$

Conjetura. Si m y n son números enteros y mn es divisible entre 3, entonces m o n son divisibles entre 3.

Hipótesis 1: m y n son enteros

Hipótesis 2: mn es divisible entre 3

Por demostrar: m es divisible entre 3 o n es divisible entre 3

Demostración por contrapositiva ?

Supongamos que la conclusión es falsa, es decir que

m no es divisible entre 3 y n no es divisible entre 3

($m = 3a+1$ o $m=3a+2$) y ($n = 3b+1$ o $n=3b+2$)

Hay 4 casos:

$$m = 3a+1 \text{ y } n = 3b+1 \rightarrow mn = (3a+1)(3b+1) = 3(3ab+a+b)+1$$

$$m = 3a+2 \text{ y } n = 3b+1 \rightarrow mn = (3a+2)(3b+1) = 3(3ab+a+2b)+2$$

$$m = 3a+1 \text{ y } n = 3b+2 \rightarrow mn = (3a+1)(3b+2) = 3(3ab+2a+b)+2$$

$$m = 3a+2 \text{ y } n = 3b+2 \rightarrow mn = (3a+2)(3b+2) = 3(3ab+2a+2b+1)+1$$

Supongamos que L , M y N son rectas en el plano y que sabemos que L y M son paralelas y que M y N son paralelas.

¿Que podremos concluir?

Conjetura. Si L , M y N son rectas en el plano, L y M son paralelas y M y N son paralelas entonces L y N son paralelas.

Conjetura. Si L , M y N son rectas en el plano, L y M son paralelas y M y N son paralelas entonces L y N son paralelas.

Hipótesis 1: L , M , N son rectas

Hipótesis 2: L es paralela a M

Hipótesis 3: M es paralela a N

Por demostrar: L es paralela a N

Conjetura. Si L , M y N son rectas en el plano, L y M son paralelas y M y N son paralelas entonces L y N son paralelas.

Hipótesis 1: L , M , N son rectas

Hipótesis 2: L es paralela a M

Hipótesis 3: M es paralela a N

Por demostrar: L es paralela a N

Demostración ?

Conjetura. Si L , M y N son rectas en el plano, L y M son paralelas y M y N son paralelas entonces L y N son paralelas.

Hipótesis 1: L , M , N son rectas

Hipótesis 2: L es paralela a M

Hipótesis 3: M es paralela a N

Por demostrar: L es paralela a N

Demostración directa?

Conjetura. Si L , M y N son rectas en el plano, L y M son paralelas y M y N son paralelas entonces L y N son paralelas.

Hipótesis 1: L , M , N son rectas

Hipótesis 2: L es paralela a M

Hipótesis 3: M es paralela a N

Por demostrar: L es paralela a N

Demostración ?

Por hip 2 L es paralela a M

Por hip 3 M es paralela a N

¿Y luego?

Conjetura. Si L , M y N son rectas en el plano, L y M son paralelas y M y N son paralelas entonces L y N son paralelas.

Hipótesis 1: L , M , N son rectas

Hipótesis 2: L es paralela a M

Hipótesis 3: M es paralela a N

Por demostrar: L es paralela a N

Demostración ?

Por hip 2 L es paralela a M es decir L no toca a M

Por hip 3 M es paralela a N es decir M no toca a N

¿Y luego, por que L no toca a N ?