Geometría Euclidiana

En el siglo III AC, Euclides de Alejandría y sus discípulos escribieron **Los Elementos**, que era una colección de libros en los que se organizaban y expandían los conocimientos matemáticos de entonces alrededor de la geometría, dándoles una estructura lógica.

La idea era partir de muy pocas suposiciones “obvias” y usar la lógica para deducir todo lo demás.
Esta es la base de todas las matemáticas modernas.

Los Elementos contienen *definiciones* (lo que significan las cosas), *nociones comunes* (en lo que estamos de acuerdo) y *postulados* o *axiomas* (las cosas que se asumen como ciertas) seguidas por construcciones, proposiciones, teoremas y demostraciones.

Algunas definiciones:

- Un *punto* es lo que no tiene partes.
- Una *línea* es una longitud sin anchura.
- Una *línea recta* es una línea que yace por igual respecto de los puntos que están en ella.
- Los extremos de una linea son puntos.
- El *ángulo* entre dos líneas que se cruzan es la inclinación que hay de una a otra.

Mas definiciones:

- Un *círculo* es una figura bordeada por una línea tal que todas las líneas rectas que van de un punto del plano a la línea tienen la misma longitud.
- Si dos líneas se cruzan de modo que los ángulos adyacentes son iguales, los ángulos se llaman *rectos* y las líneas se llaman *perpendiculares*.
- *Rectas paralelas* son aquellas que, estando en un mismo plano, nunca se cruzan.
- Y *muchas mas* ...

Nociones comunes:

- Dos cosas que son iguales a una tercera son iguales entre si.
- Si a cosas iguales se añaden cosas iguales, los resultados son iguales.
- Las cosas que coinciden entre sí son iguales entre sí.
- El total es mayor que una parte.

Postulados o Axiomas:

1. Por dos puntos distintos pasa una y solo una línea recta

2. Las líneas rectas se pueden extender indefinidamente.

3. Se puede dibujar un círculo con cualquier centro y de cualquier radio.

4. Todos los ángulos rectos son iguales.

5. Si una línea recta cruza a dos líneas rectas de modo que los ángulos internos de un mismo lado suman menos que dos ángulos rectos, entonces las dos rectas se cruzarán de ese lado.

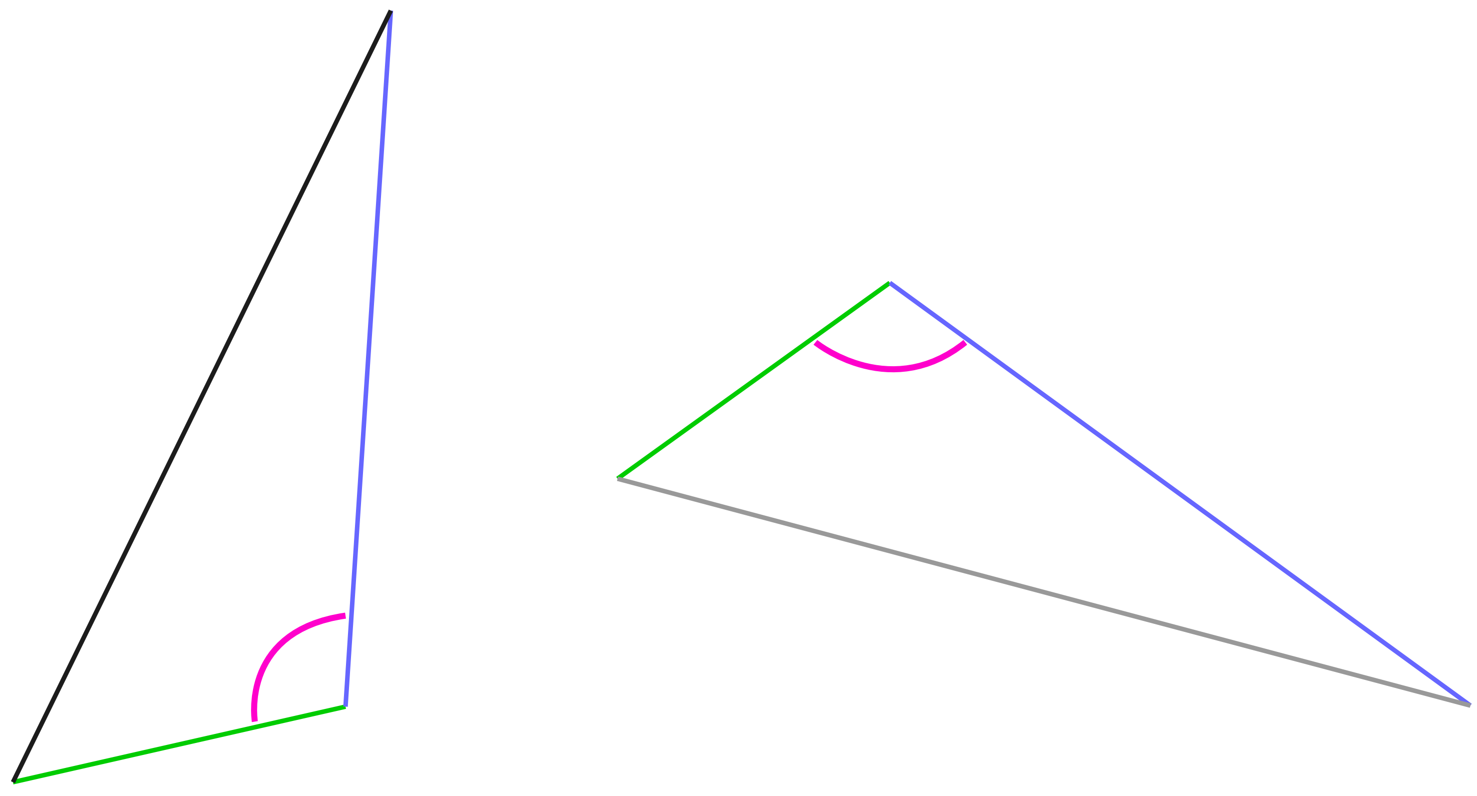
Los elementos no son perfectos: hay algunas cosas que no se mencionan y que hacen falta para probar muchos de los teoremas.

Un axioma faltante:

- Las figuras en un plano se pueden desplazar, girar y reflejar sin cambiar su forma (sin afectar longitudes, ángulos ni áreas).

Algunos teoremas de los elementos

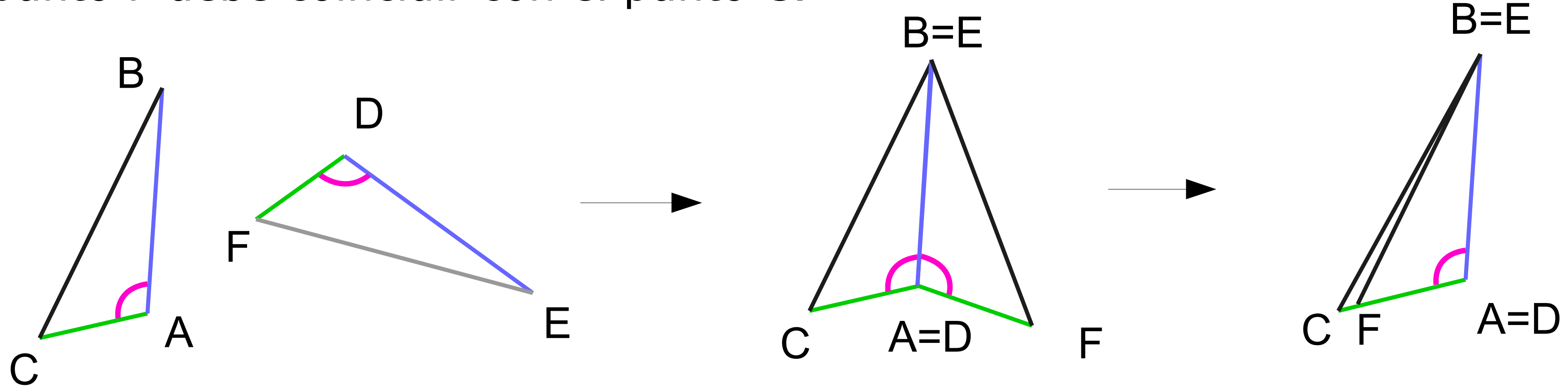
Proposición 1.4 (LAL) *Si dos triángulos tienen dos lados y el ángulo entre ellos iguales entonces los otros lados y los otros ángulos también son iguales.*



Proposición 1.4 (LAL) *Si dos triángulos tienen dos lados y el ángulo entre ellos iguales entonces los otros lados y los otros ángulos también son iguales.*

Demostración. Si ABC y DEF son dos triángulos con AB=DE, AC=DF y los ángulos BAC y EDF son iguales.

Podemos desplazar al triángulo DEF de modo que el lado DE coincida con el lado AB. Y podemos hacer que F quede del mismo lado que C reflejando en AB. Entonces el ángulo EDF coincide con el ángulo BAC, así que la linea DF coincide con la linea AC, y como AC =DF entonces el punto F debe coincidir con el punto C.



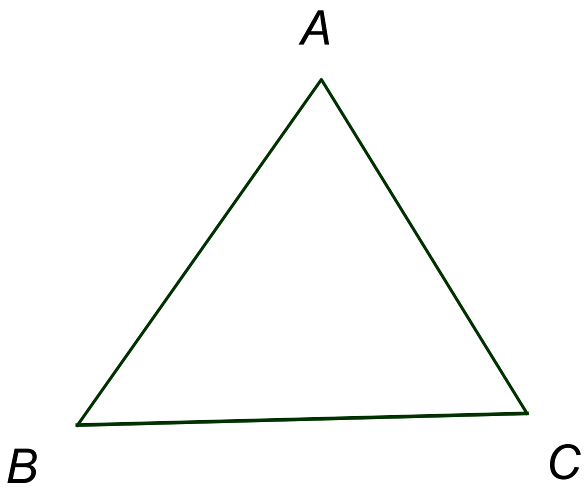
Proposición 1.4 (LAL) *Si dos triángulos tienen dos lados y el ángulo entre ellos iguales entonces los otros lados y los otros ángulos también son iguales.*

Demostración. Si ABC y DEF son dos triángulos con AB=DE, AC=DF y los ángulos BAC y EDF son iguales.

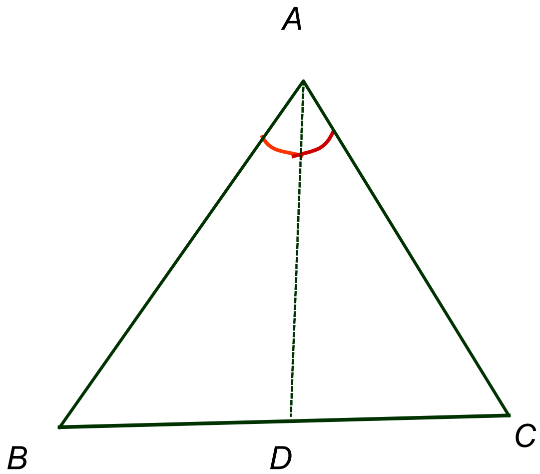
Podemos desplazar al triángulo DEF de modo que el lado DE coincida con el lado AB. Y podemos hacer que F quede del mismo lado que C reflejando en AB. Entonces el ángulo EDF coincide con el ángulo BAC, así que la linea DF coincide con la linea AC, y como AC =DF entonces el punto F debe coincidir con el punto C.

Entonces por el **postulado 1** la línea BC debe coincidir con la línea EF, así que los dos triángulos coinciden y por lo tanto sus 3 lados y sus 3 ángulos son iguales. •

Proposición 1.5 (Pons Asinorum) *Si un triángulo tiene dos lados iguales entonces los ángulos opuestos a esos lados son iguales.*

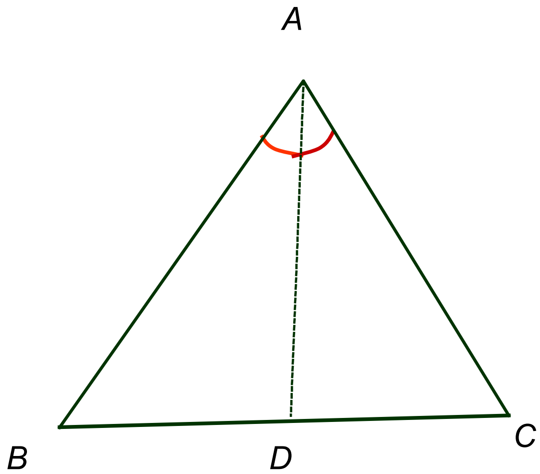


Proposición 1.5 (Pons Asinorum) *Si un triángulo tiene dos lados iguales entonces los ángulos opuestos a esos lados son iguales.*



Demostración. Supongamos que el triángulo ABC tiene lados AB y AC iguales. Dibujar la bisectriz del ángulo BAC, y sea D el punto donde la bisectriz corta al lado BC.

Proposición 1.5 (Pons Asinorum) *Si un triángulo tiene dos lados iguales entonces los ángulos opuestos a esos lados son iguales.*

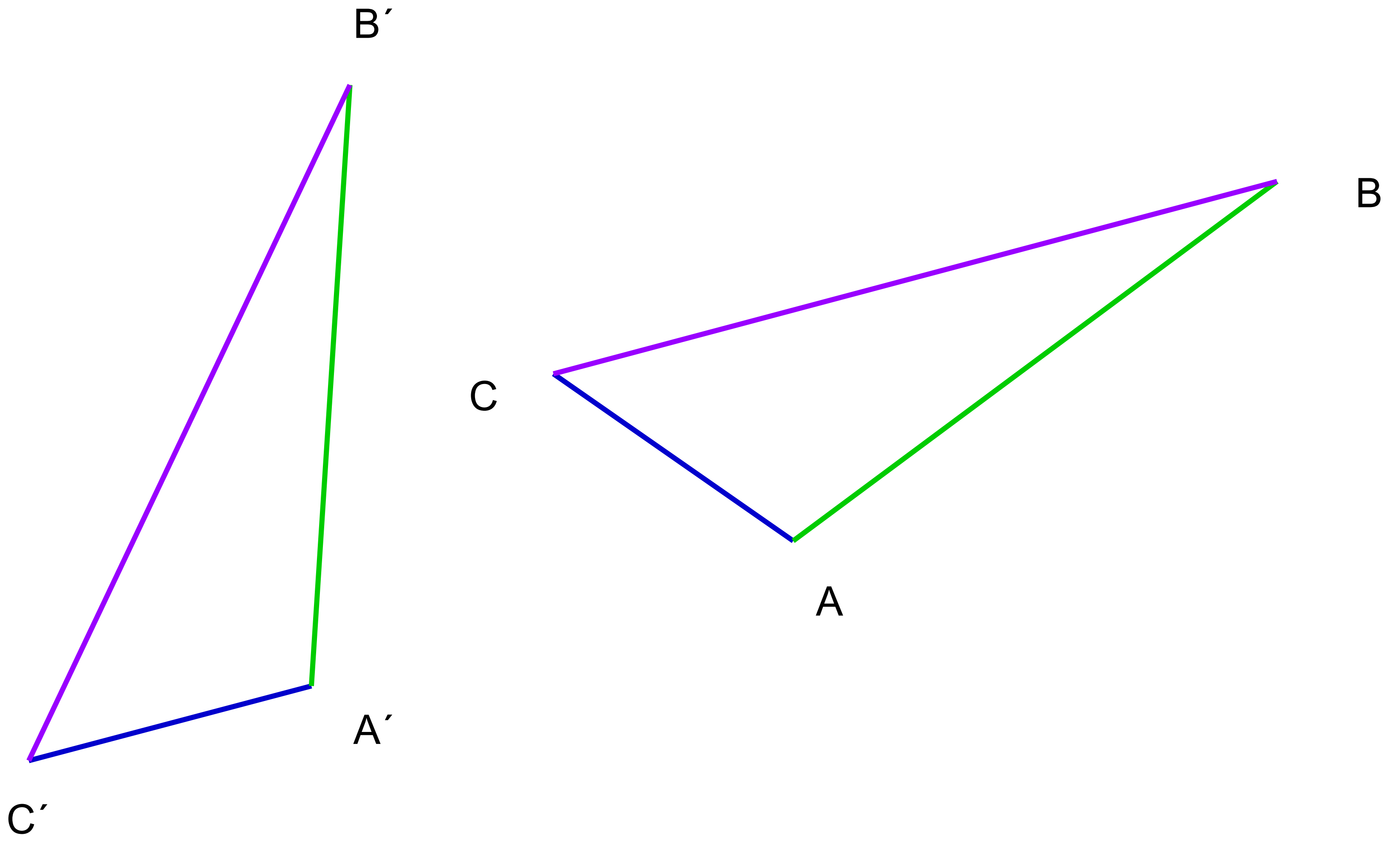


Demostración. Supongamos que el triángulo ABC tiene lados AB y AC iguales. Dibujar la bisectriz del ángulo BAC, y sea D el punto donde la bisectriz corta al lado BC.

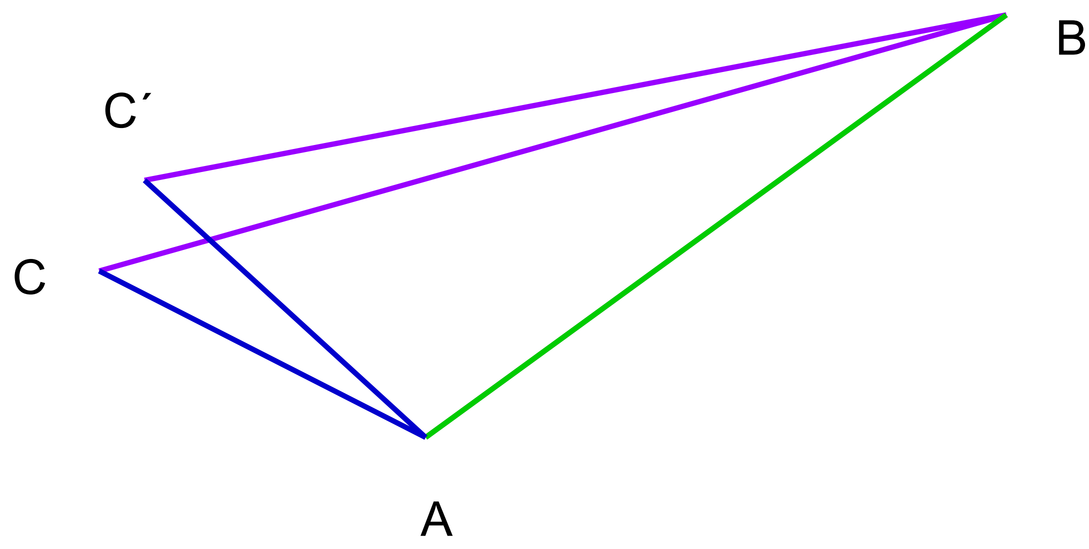
Entonces los triángulos ABD y ACD tienen 2 lados iguales y los ángulos entre ellos iguales.

Así que por la **proposición 1.4** los ángulos ABD y ACD son iguales. •

Proposición 1:8. (LLL) *Si dos triángulos tienen sus lados iguales entonces tienen ángulos iguales.*

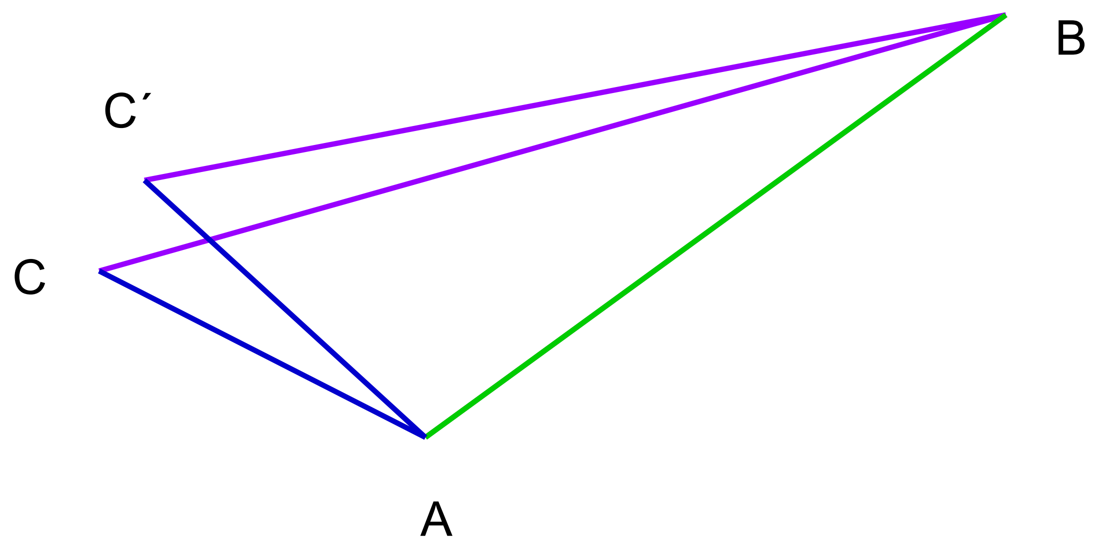


Proposición 1:8. (LLL) *Si dos triángulos tienen sus lados iguales entonces tienen ángulos iguales.*



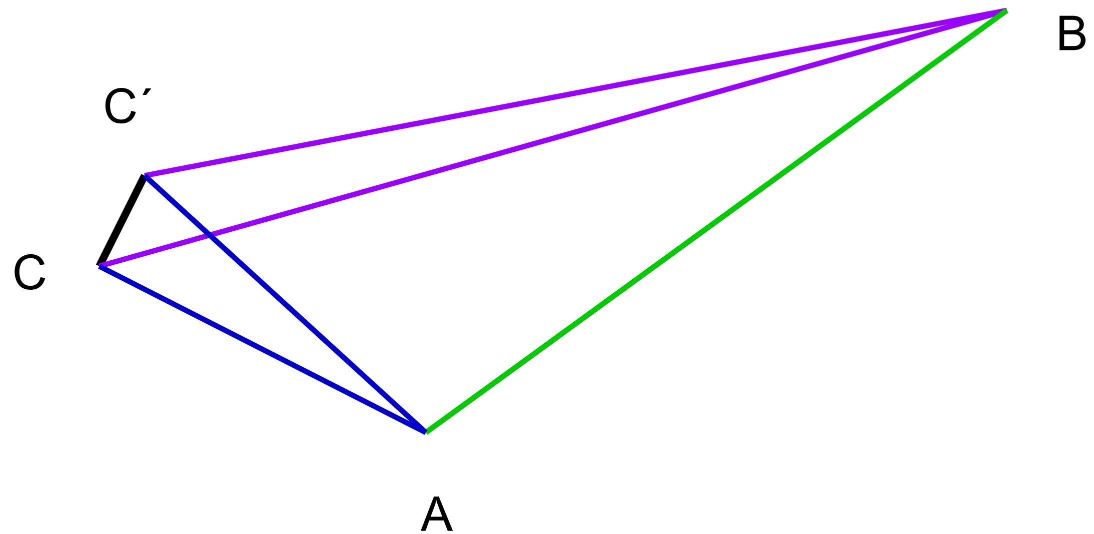
Demostración. Si ABC y A'B'C' son dos triángulos tales que AB=A´B´, AC=A´C´ y BC=B´C´, entonces podemos desplazar A´B´C´ para que A' coincida con A, B' coincida con B y además C' y C queden del mismo lado del segmento AB.

Proposición 1:8. (LLL) *Si dos triángulos tienen sus lados iguales entonces tienen ángulos iguales.*



Si C' coincide con C entonces por el **postulado 1** los lados coinciden, así que los ángulos son iguales y ya acabamos.

Proposición 1:8. (LLL) *Si dos triángulos tienen sus lados iguales entonces tienen ángulos iguales.*

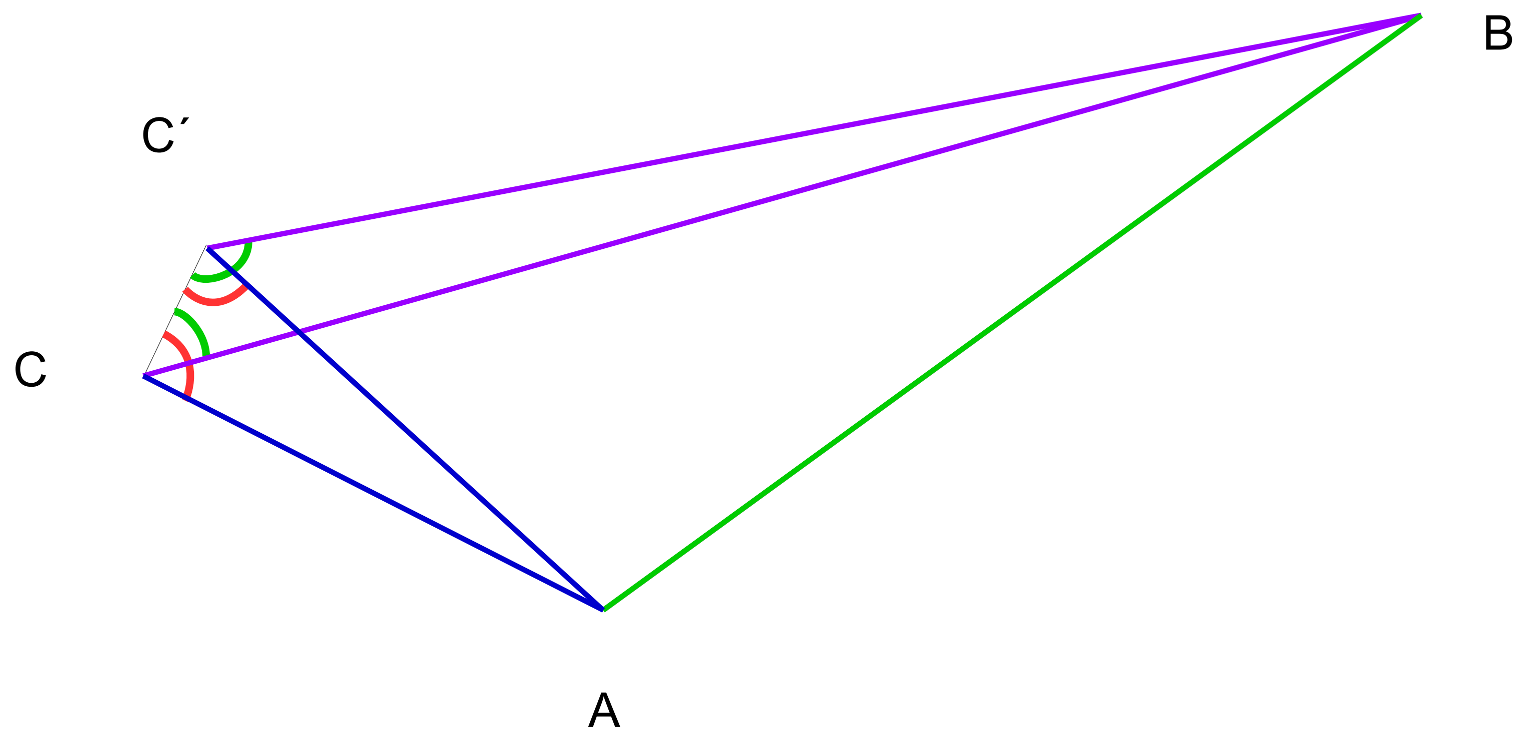


Supongamos ahora que C' no coincide con C.

Como AC=A'C' entonces el triángulo ACC´es isósceles.

Y como BC=BC′ entonces el triángulo BCC´ es isósceles.

Proposición 1:8. (LLL) *Si dos triángulos tienen sus lados iguales entonces tienen ángulos iguales.*



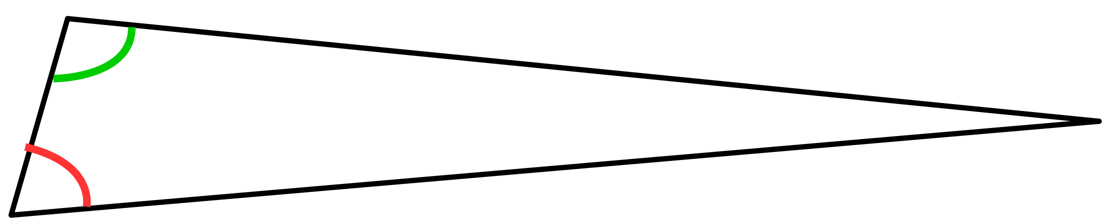
Como AC=A'C' entonces por (P1.5) ∠ACC' = ∠AC'C.

Y como BC=BC′ entonces por (P1.5) ∠BC′C = ∠BCC'.

Pero ∠BCC′ < ∠ACC´ mientras que ∠BC´C > ∠AC´C.

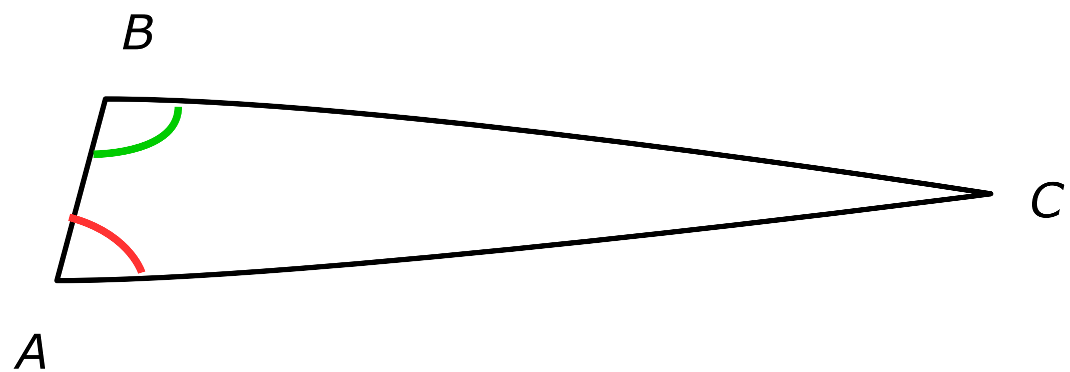
Las desigualdades se contradicen, así que C' debe coincidir con C. •

Proposición 1:17 *En un triángulo, la suma de dos ángulos es menor que 2 ángulos rectos.*



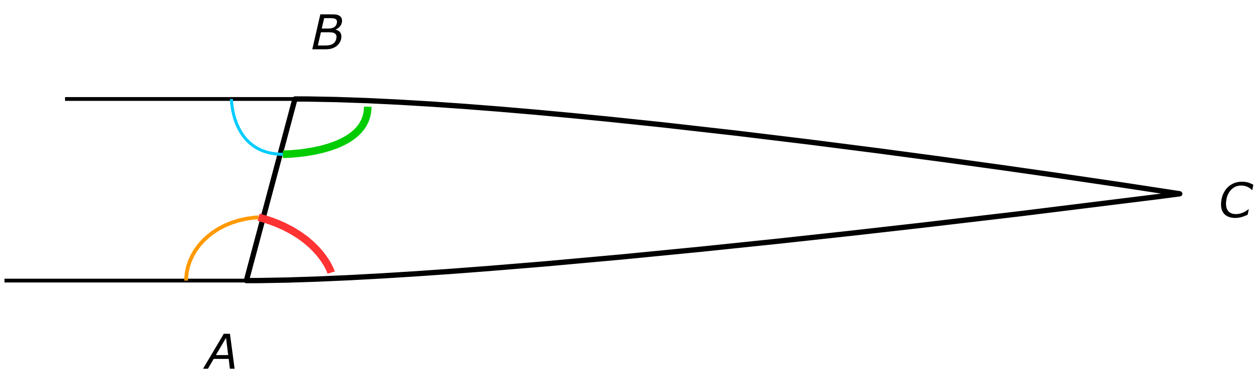
Proposición 1:17 *En un triángulo, la suma de dos ángulos es menor que 2 ángulos rectos*

Demostración. Por contradicción.
Supongamos que en el triángulo ABC los ángulos $\angle ABC$ y $\angle BAC$ suman mas de 2 rectos.



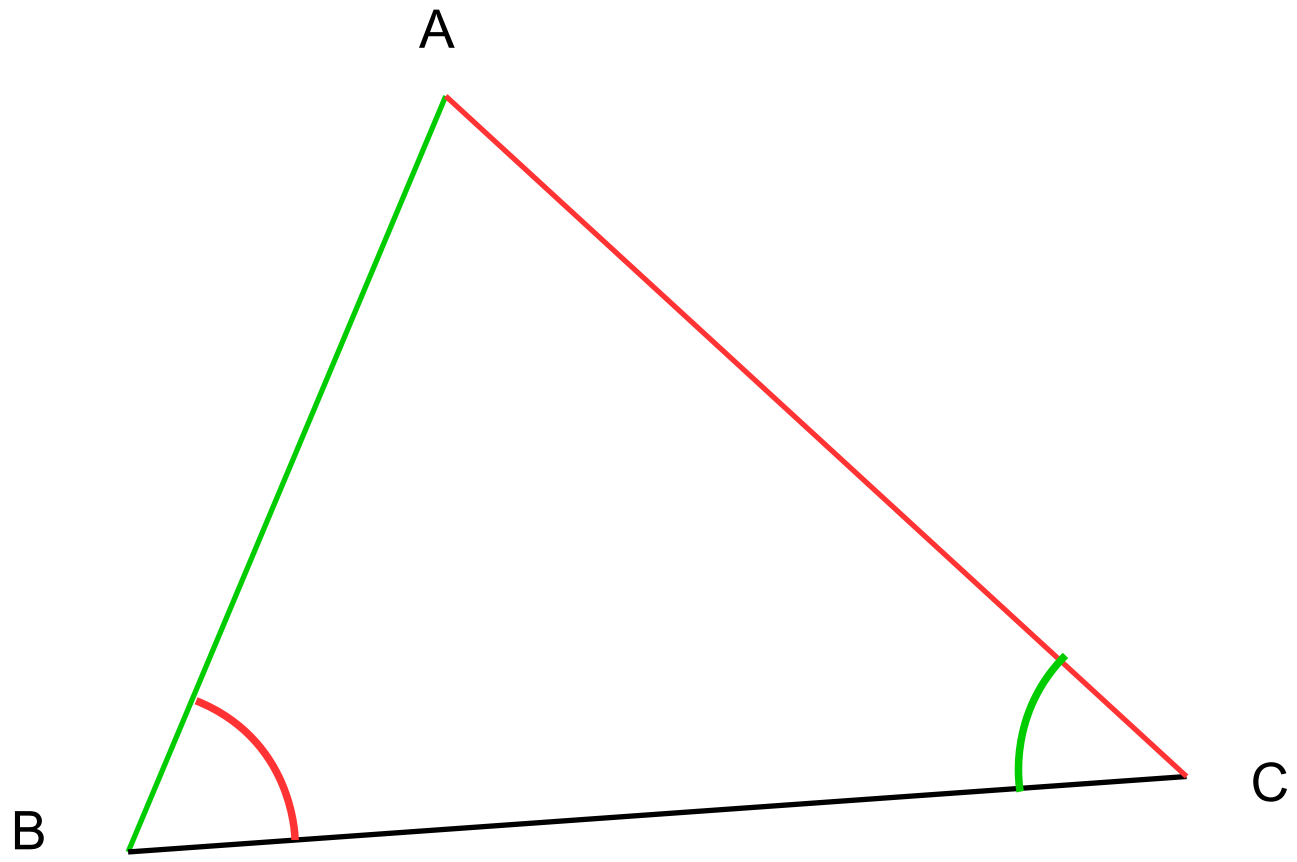
Proposición 1:17 *En un triángulo, la suma de dos ángulos es menor que 2 ángulos rectos*

Demostración. Por contradicción.
Supongamos que en el triángulo ABC los ángulos ∠ABC y ∠BAC suman mas de 2 rectos.

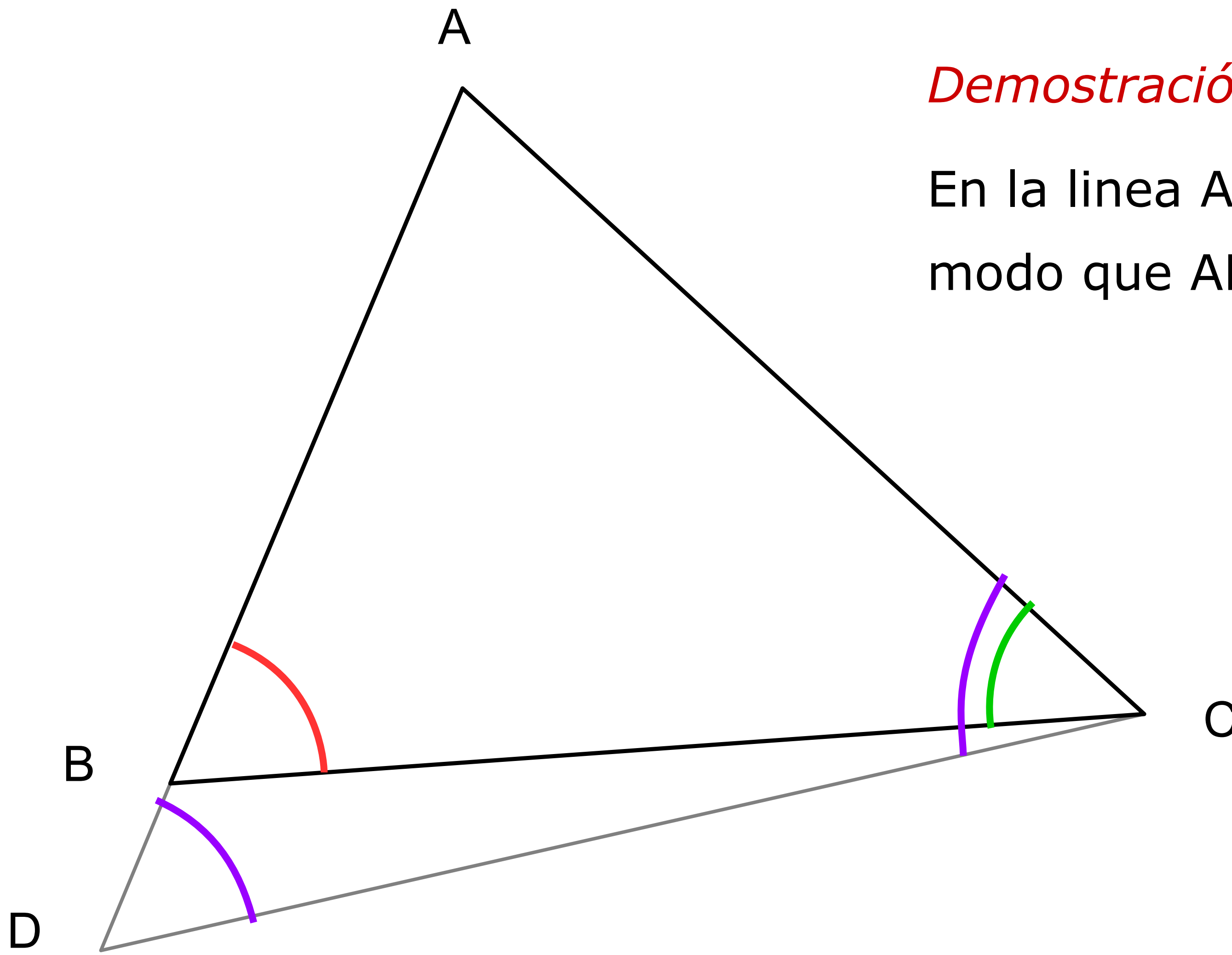


Si extendemos las líneas AC y BC entonces los ángulos del otro lado de la linea AB suman menos de 2 rectos. Por el postulado 5 las líneas se cruzan del otro lado de AB, pero entonces las lineas se cruzan en 2 puntos, contradiciendo al postulado 1. •

Proposición 1:18 *En un triángulo, el ángulo opuesto al lado mayor es mayor* (*Si* AC > AB *entonces* $\angle ABC > \angle ACB$)



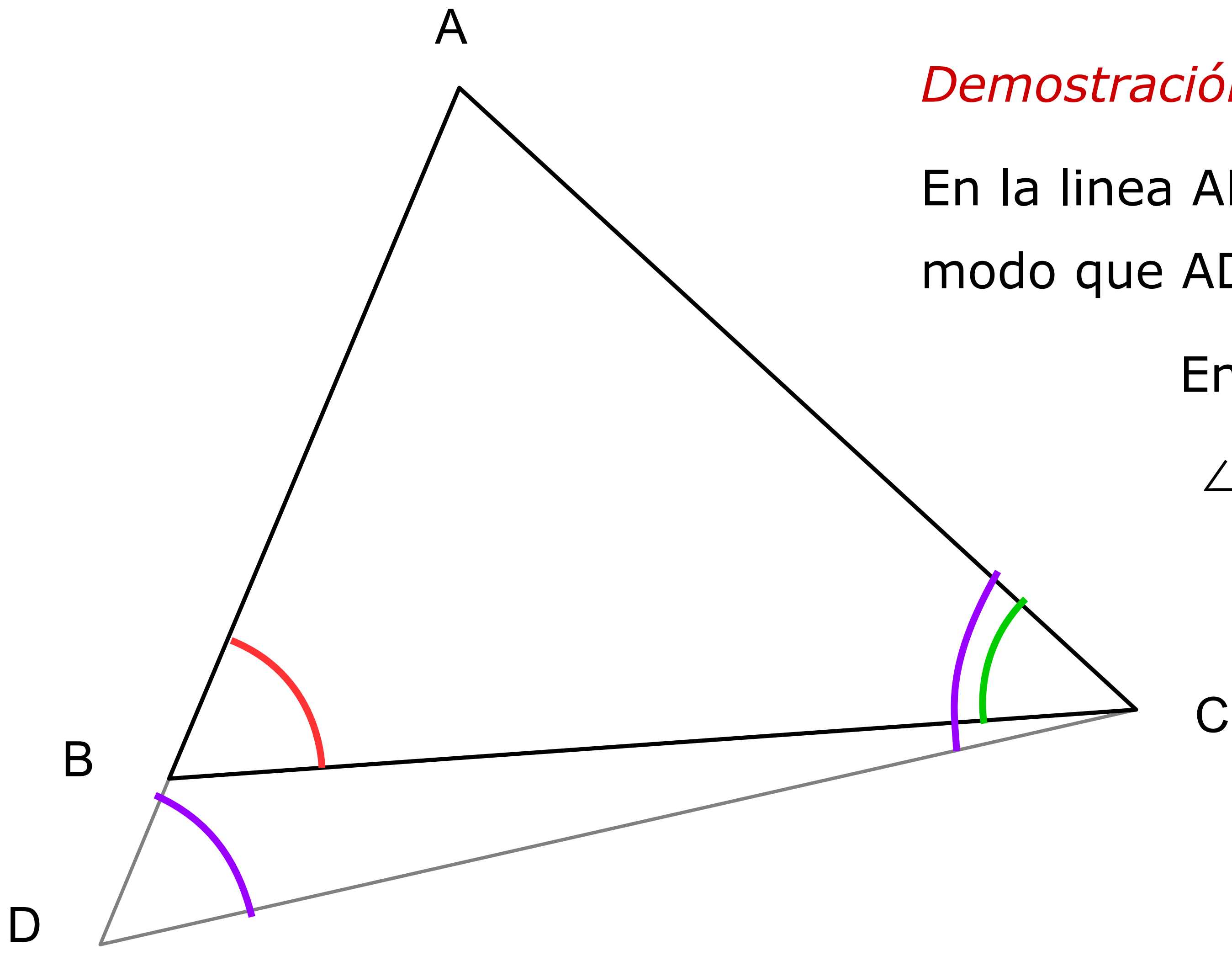
Proposición 1:18 *En un triángulo, el ángulo opuesto al lado mayor es mayor.*



Demostración.

En la linea AB elegir D de modo que AD = AC

Proposición 1:18 *En un triángulo, el ángulo opuesto al lado mayor es mayor.*



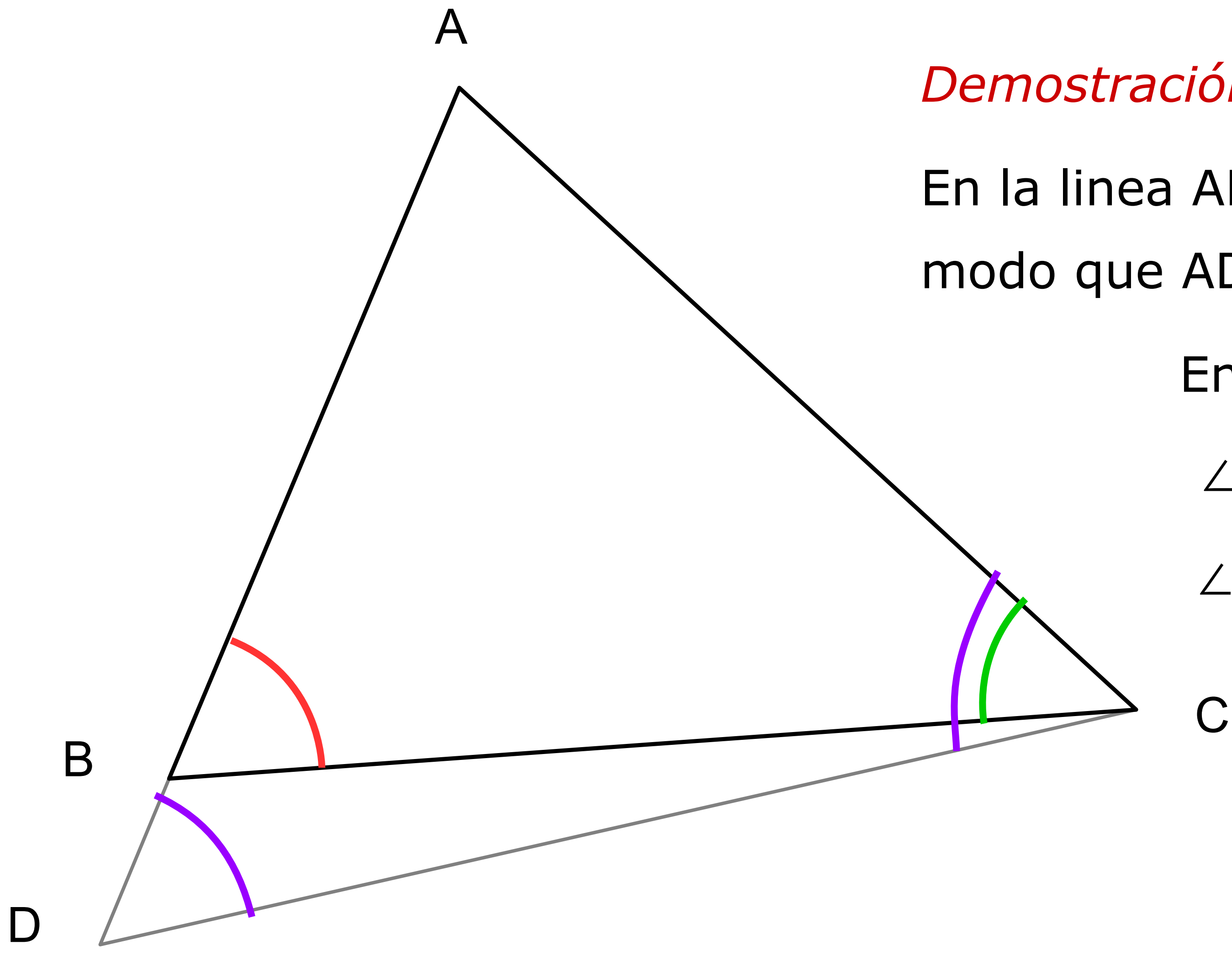
Demostración.

En la linea AB elegir D de modo que AD = AC

Entonces por 1.5

$\angle ADC = \angle ACD$

Proposición 1:18 *En un triángulo, el ángulo opuesto al lado mayor es mayor.*



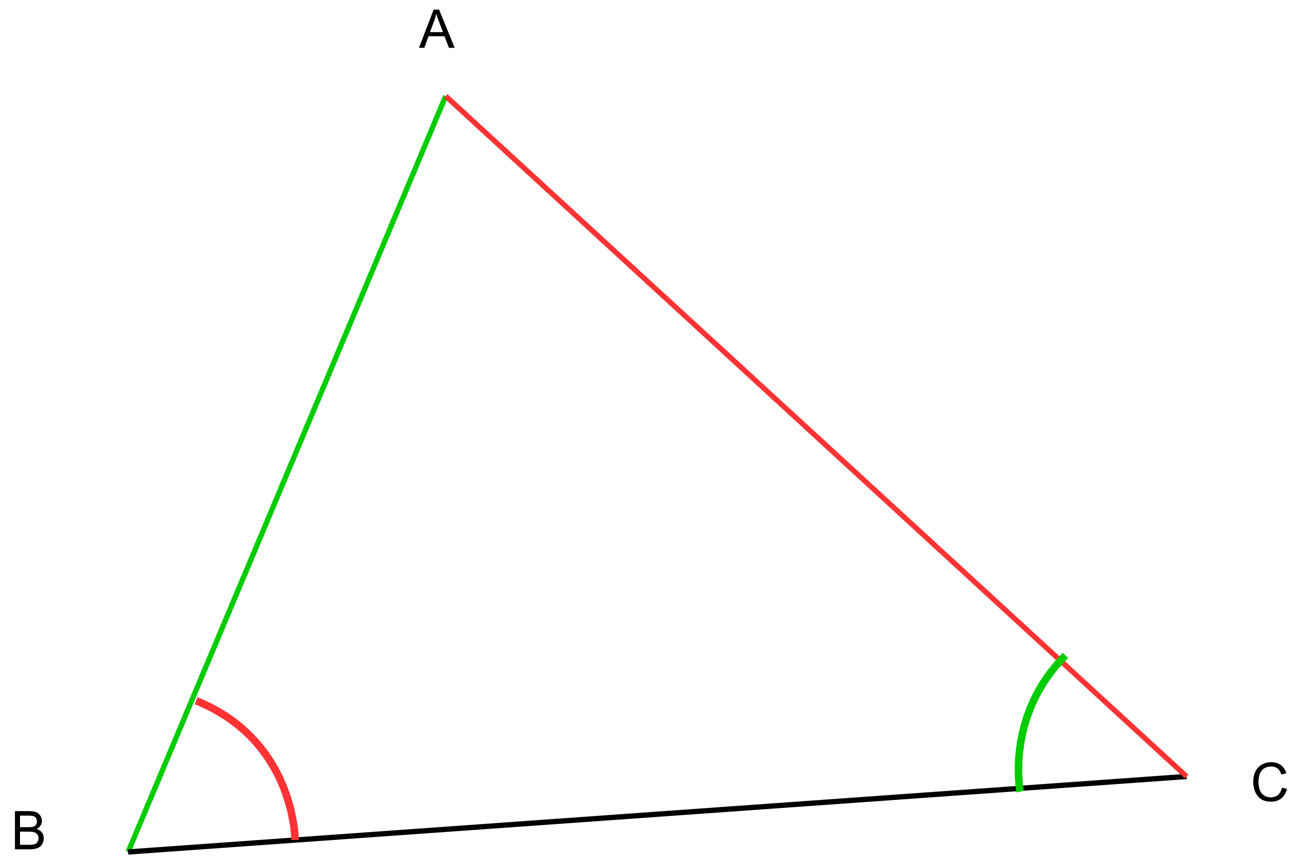
Demostración.

En la linea AB elegir D de modo que AD = AC

Entonces por 1.5

$$\angle ADC = \angle ACD$$
$$\wedge \qquad\qquad \vee$$
$$\angle ABC \qquad \angle ACB$$

Proposición 1:19 *En un triángulo, el lado opuesto al ángulo mayor es mayor* (*Si* ∠ABC > ∠ACB *entonces* AC > AB)



Esta proposición es la recíproca de 1:18

Proposición 1:19 *En un triángulo, el lado opuesto al ángulo mayor es mayor* (*Si* $\angle ABC > \angle ACB$ *entonces* $AC > AB$)

Demostración. Por contrapositiva.

Supongamos que la conclusión no se cumple

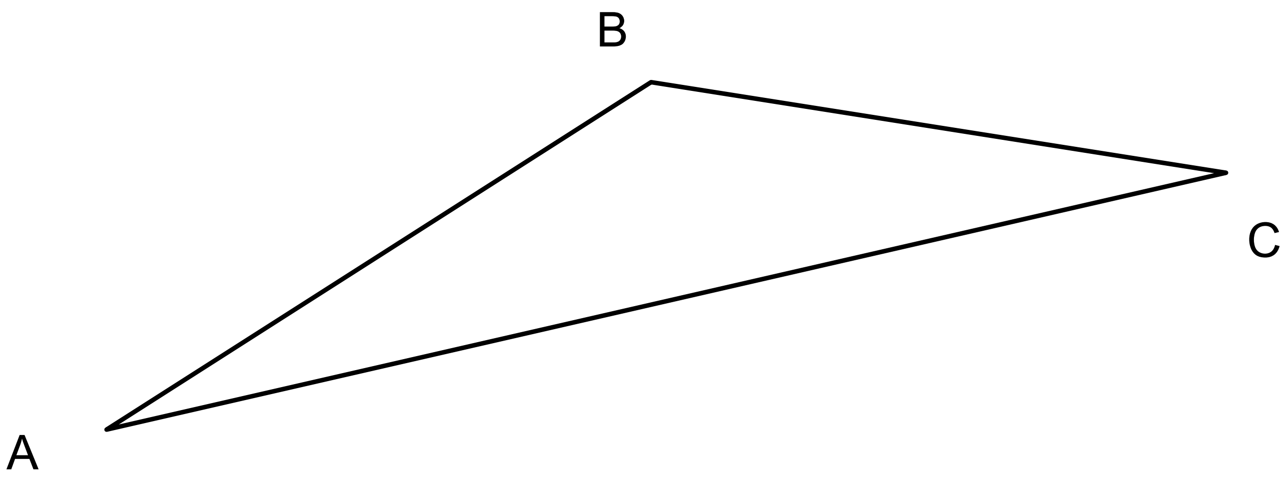
o sea que $AC \leq AB$

Si $AC = AB$ entonces por **1.5** $\angle ABC = \angle ACB$

Y si $AC < AB$ entonces por **1.18** $\angle ABC < \angle ACB$

Así que en ambos casos $\angle ABC \leq \angle ACB$, por lo que la hipótesis no se cumple. •

Proposición 1:20 *En un triángulo, la suma de dos lados es mayor que el tercer lado.*

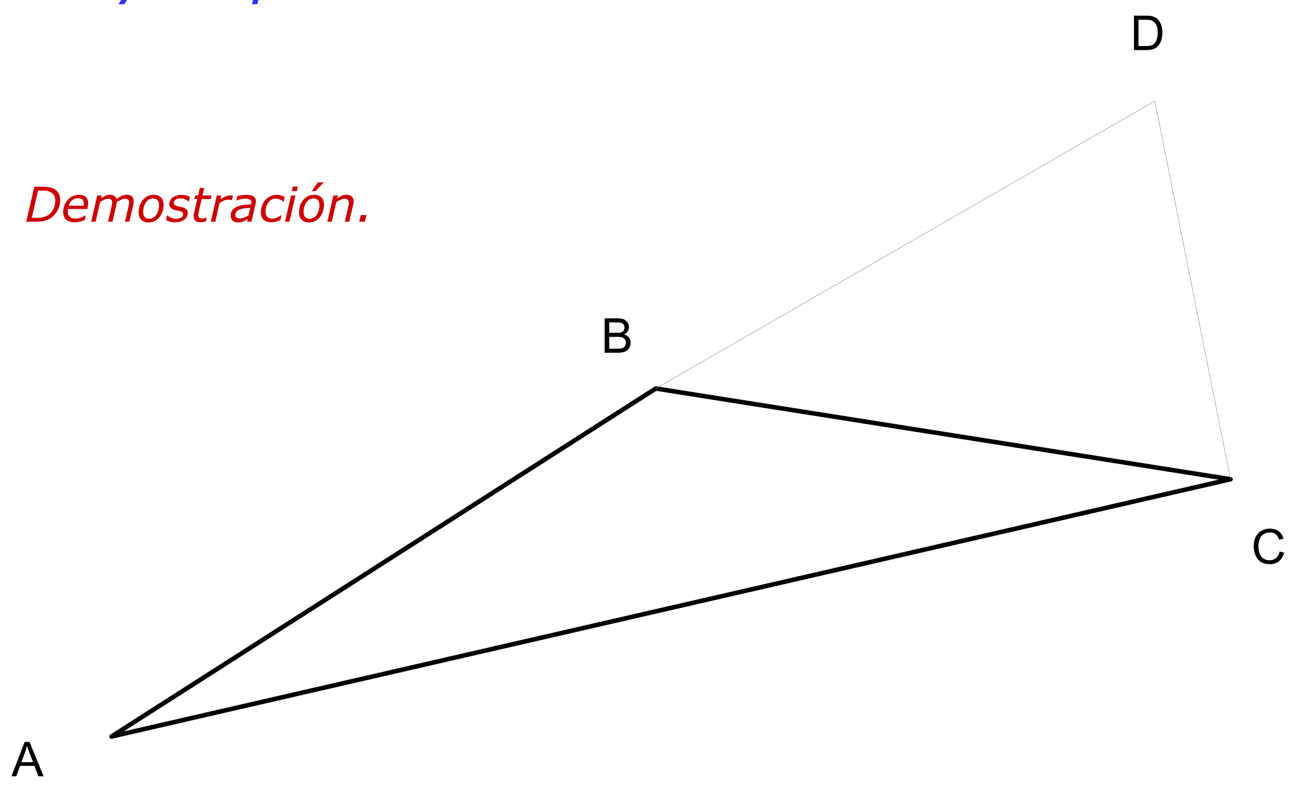


AB + BC > AC

Esta es la *desigualdad del triángulo*

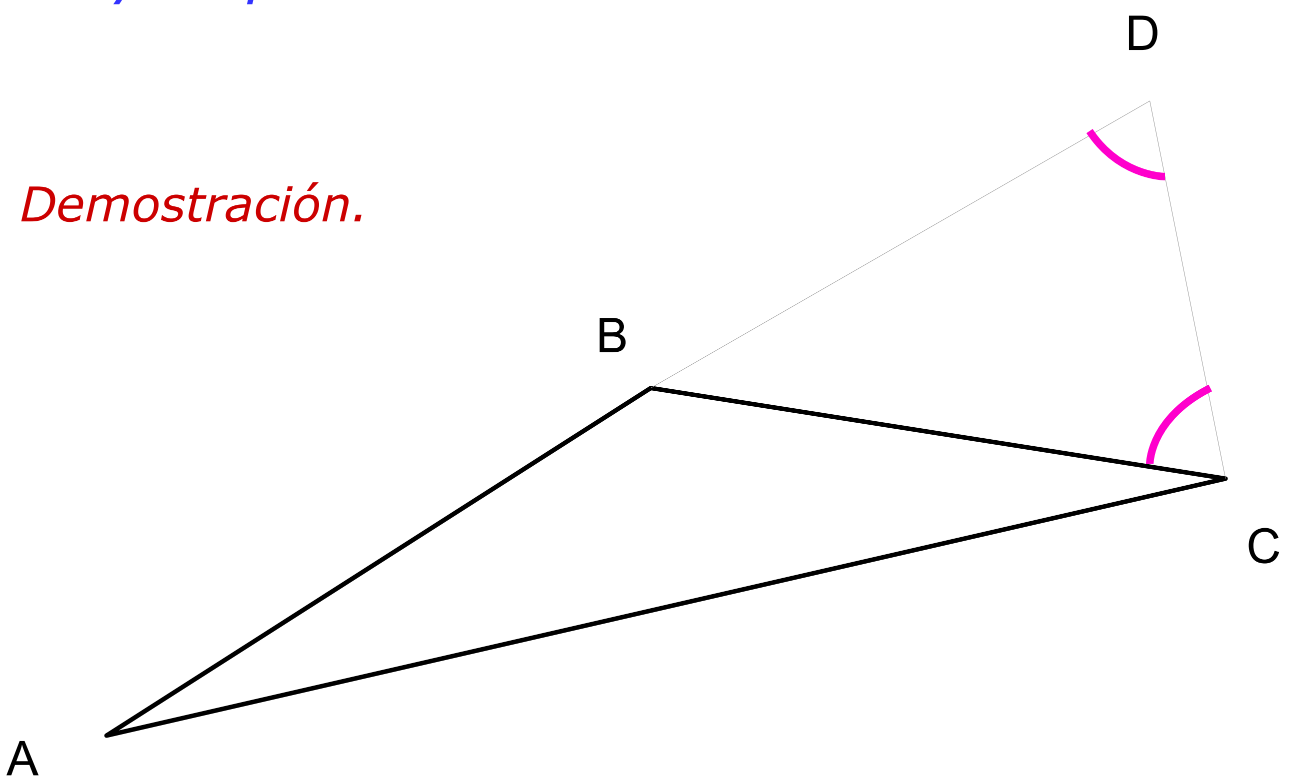
Proposición 1:20 *En un triángulo, la suma de dos lados es mayor que el tercer lado.*

Demostración.



En la linea AB dibujar D de modo que BD=BC

Proposición 1:20 *En un triángulo, la suma de dos lados es mayor que el tercer lado.*

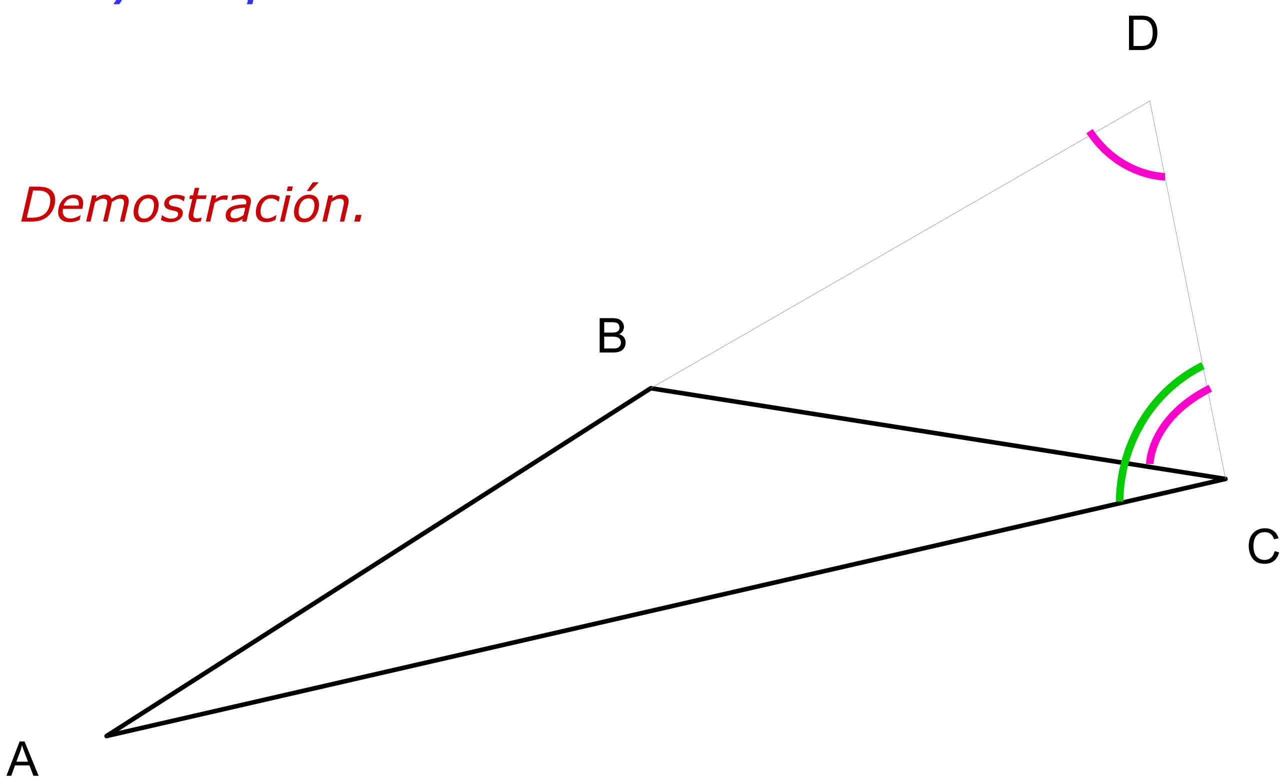


Demostración.

Como BD=BC entonces ∠BDC = ∠DCB

Proposición 1:20 *En un triángulo, la suma de dos lados es mayor que el tercer lado.*

Demostración.



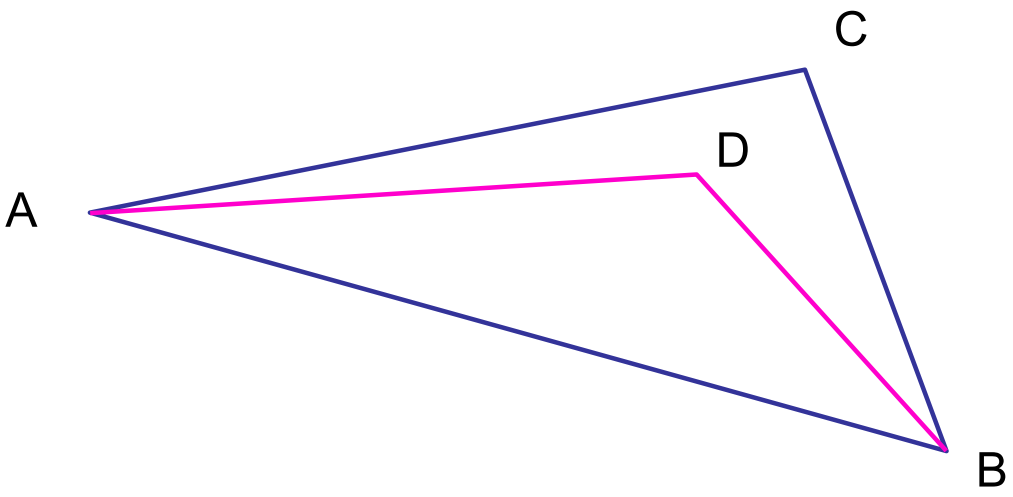
Como BD=BC entonces $\angle BDC = \angle DCB$

$$\begin{array}{ccc} \angle BDC & = & \angle DCB \\ \parallel & & \wedge \\ \angle ADC & & \angle DCA \end{array}$$

Así que por **1.18** se tiene que AC < AD = AB+BC •

Ejercicio

Sea ABC un triángulo y D es un punto en su interior.



a. ¿Es cierto que $AD < AC$ y que $BD < BC$?

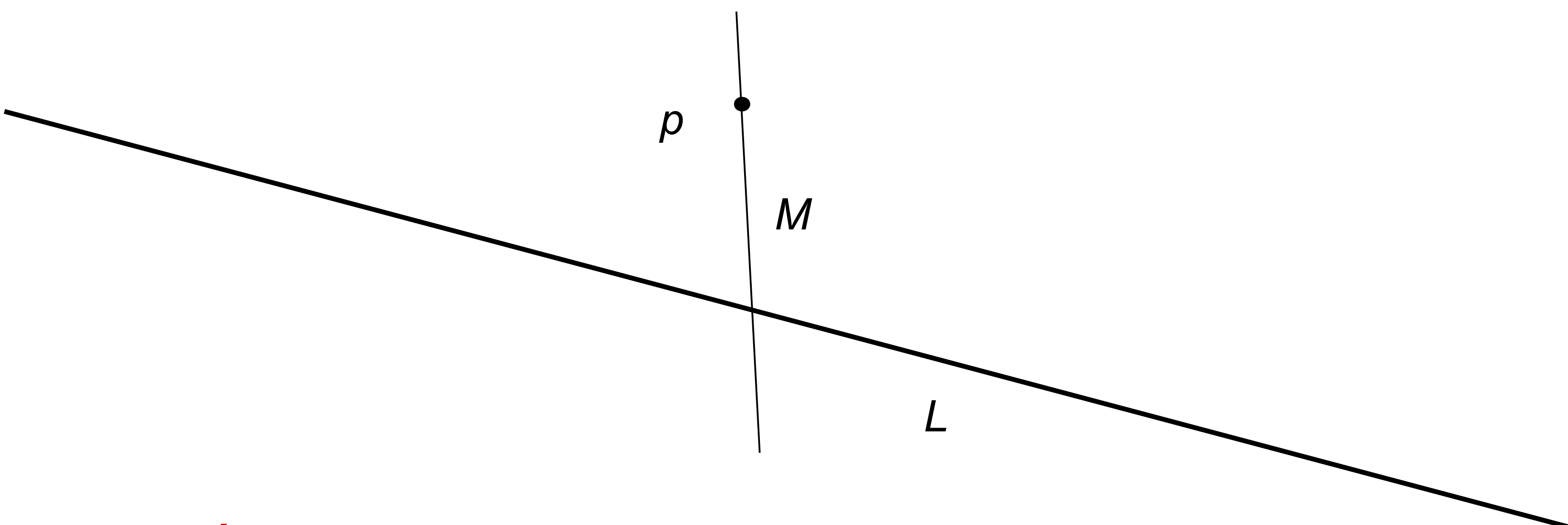
b. ¿Es cierto que $AD+DB < AC+CB$?

c. ¿Es cierto que $\angle ADB < \angle ACB$?

d. ¿Que pasa con esas desigualdades si D esta fuera del triángulo?

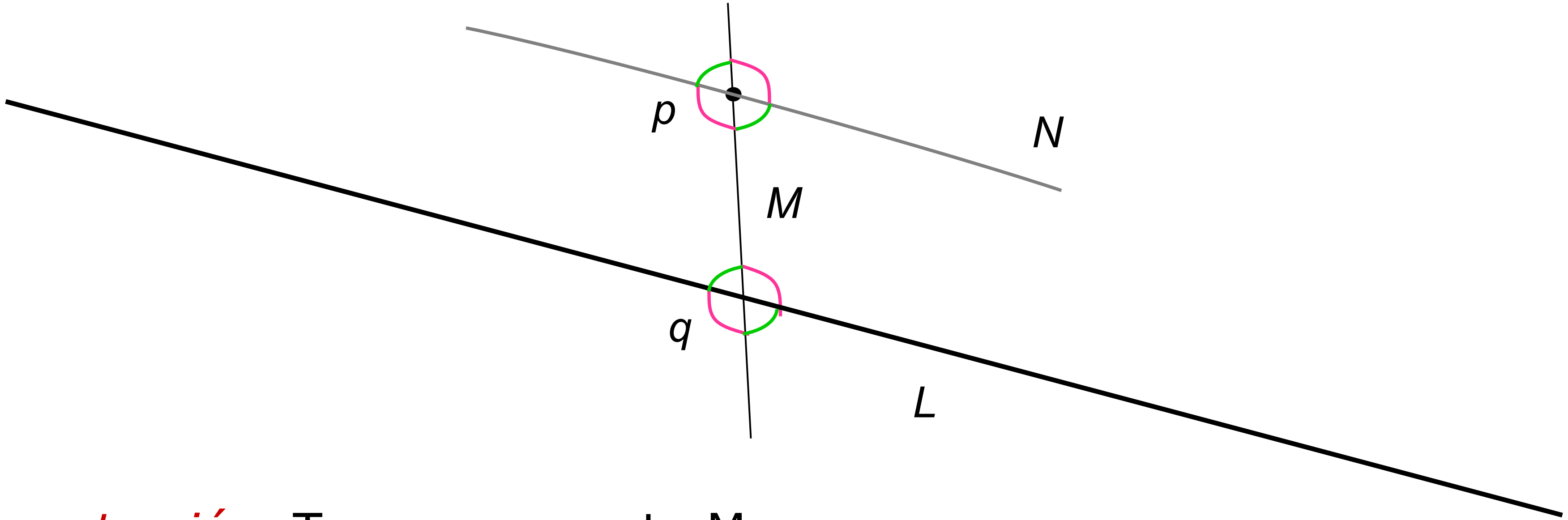
Proposición 1:31 *Si p es un punto fuera de una recta L, entonces existe una recta paralela L que pasa por p.*

Proposición 1:31 *Si p es un punto fuera de una recta L, entonces existe una recta paralela L que pasa por p.*



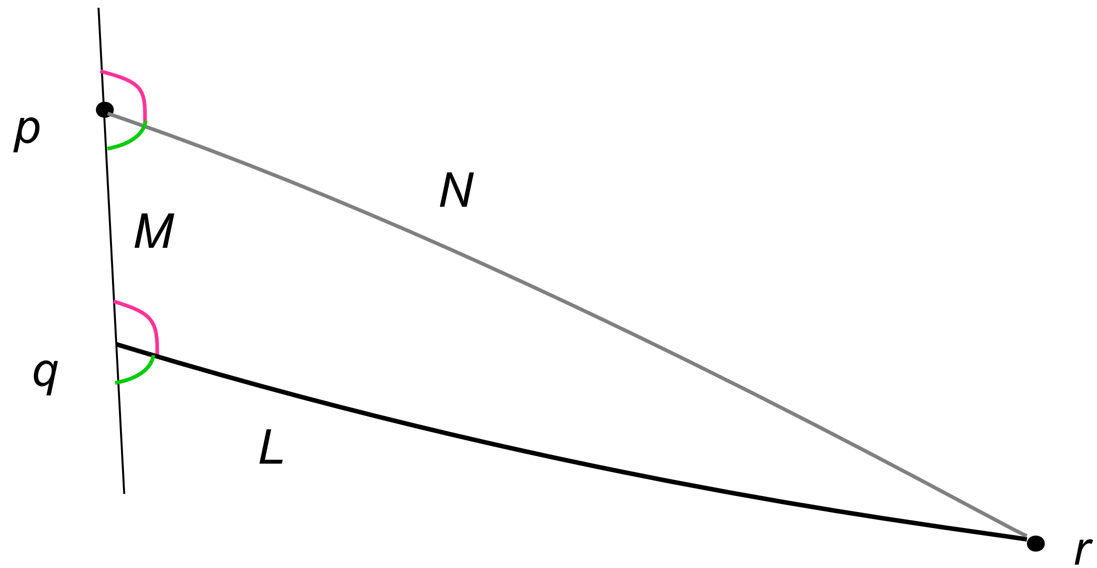
Demostración. Trazar una recta M que pase por p y cruce a L

Proposición 1:31 *Si p es un punto fuera de una recta L, entonces existe una recta paralela L que pasa por p.*



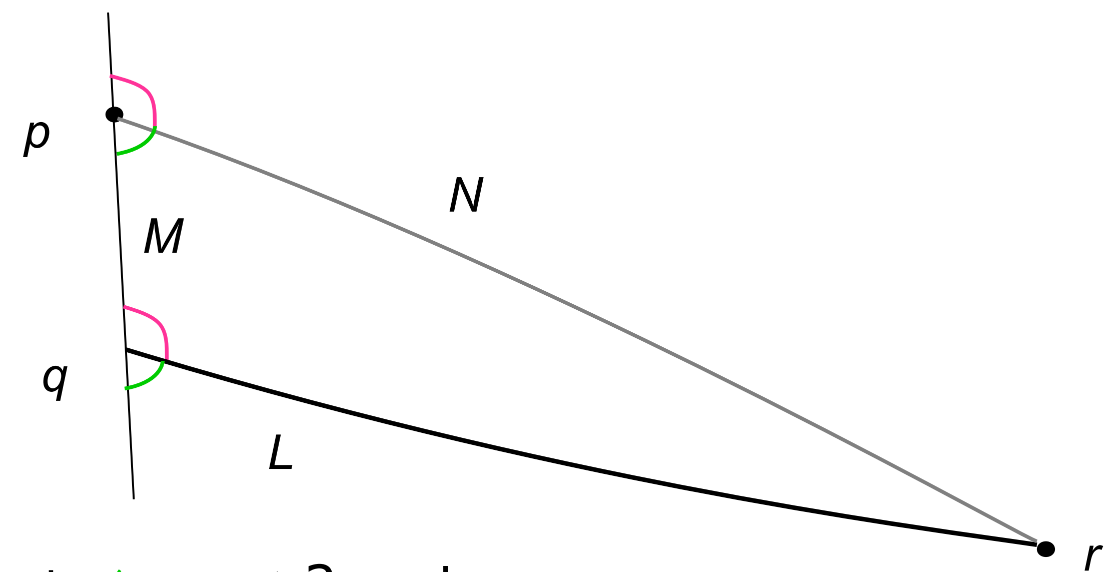
Demostración. Trazar una recta M que pase por p y cruce a L, y trazar una recta N que pase por p y cruce a M formando un ángulo igual al que L forma con M.

Proposición 1:31 *Si p es un punto fuera de una recta L, entonces existe una recta paralela L que pasa por p.*



Si N no fuera paralela a L, entonces se cruzan en un punto r de algún lado de M, formando un triángulo pqr.

Proposición 1:31 *Si p es un punto fuera de una recta L, entonces existe una recta paralela L que pasa por p.*



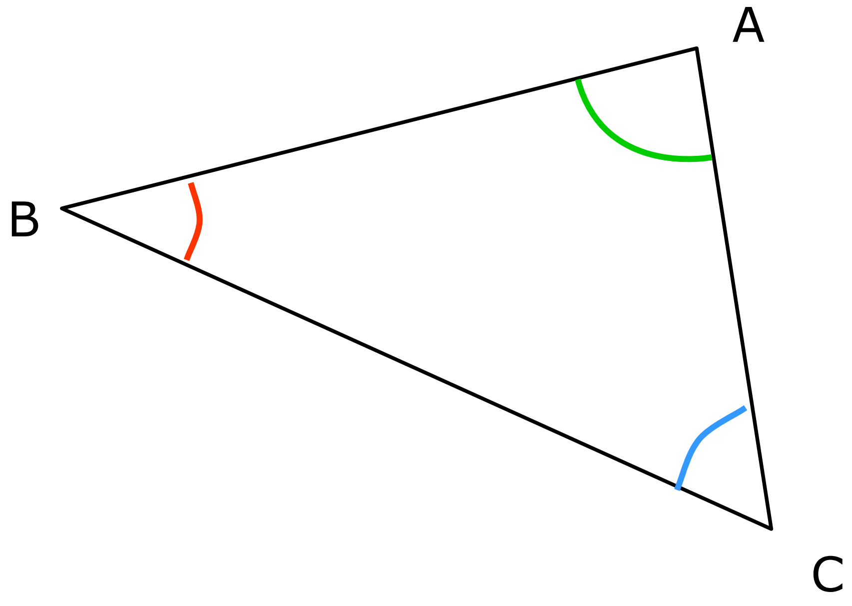
Por la proposición 1.17 $\angle pqr + \angle qpr < 2$ rectos

Pero por construcción

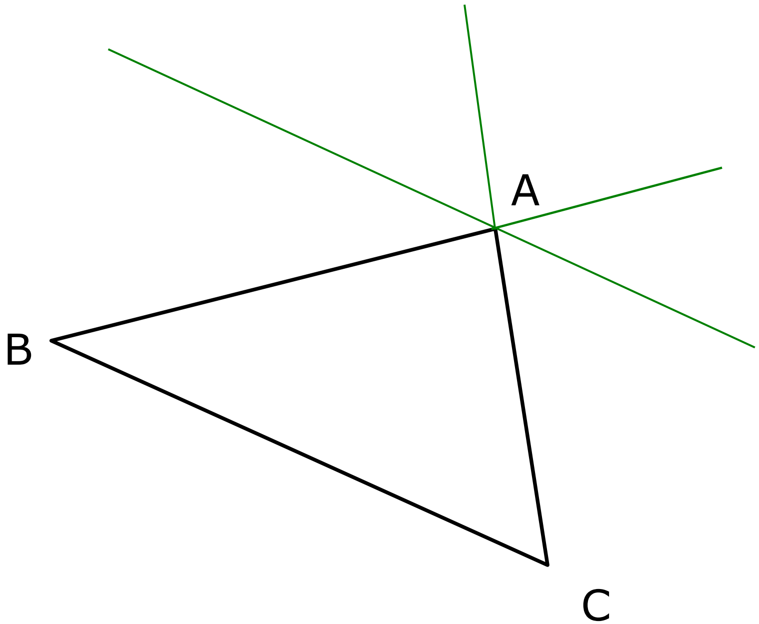
$\angle pqr + \angle qpr = \angle pqr + (2 \text{ rectos} - \angle pqr) = 2$ rectos.

Y esto es una contradicción. •

Proposición 1:32 *La suma de los tres ángulos internos de un triángulo es igual a dos ángulos rectos.*

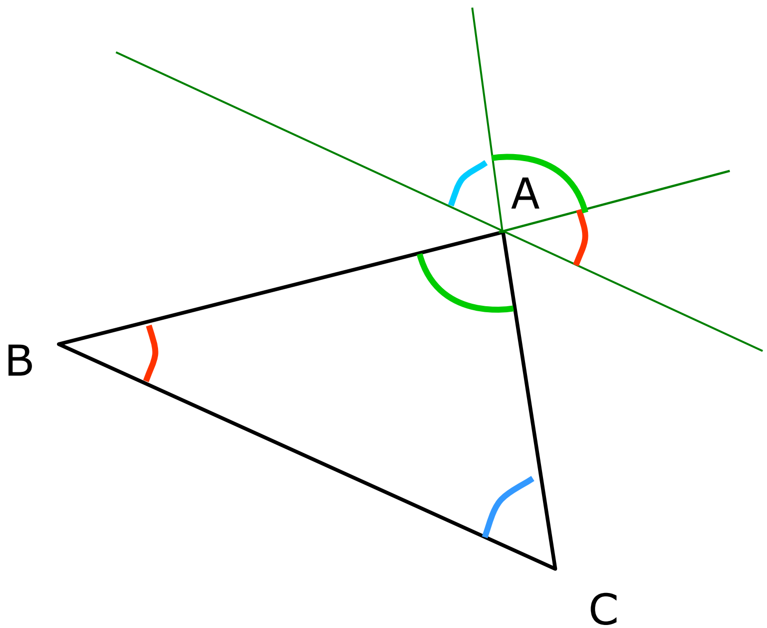


Proposición 1:32 *La suma de los tres ángulos internos de un triángulo es igual a dos ángulos rectos.*



Demostración. Dado el triángulo ABC, por **1.31** podemos construir una paralela al lado BC que pase por el punto A.

Proposición 1:32 *La suma de los tres ángulos internos de un triángulo es igual a dos ángulos rectos.*



Demostración. Dado el triángulo ABC, por **1.31** podemos construir una paralela al lado BC que pase por el punto A.

Como los ángulos que forma una recta con dos rectas paralelas son iguales y como los ángulos opuestos por el vértice son iguales, entonces los 3 ángulos internos del triángulo suman lo mismo que los 3 ángulos de un lado de una recta. ●

Observaciones sobre las definiciones y los postulados de Euclides

Si recordamos las definiciones en *Los Elementos*, vemos que son un poco vagas y no dicen exactamente como son las cosas:

- Un *punto* es lo que no tiene partes.
- Una *línea* es una longitud sin anchura.
- Una *línea recta* es una línea que yace por igual respecto de los puntos que están en ella.
- Los extremos de una linea son puntos.
- El *ángulo* entre dos líneas que se cruzan es la inclinación que hay de una a otra.

La falta de precisión no es un problema porque lo que se usa después no son las definiciones exactas de estas cosas sino sus *propiedades*, que están dadas por los postulados:

Postulados (o Axiomas):

1. Por dos puntos distintos pasa una y solo una línea recta

2. Las líneas rectas se pueden extender indefinidamente.

3. Se puede dibujar un círculo con cualquier centro y de cualquier radio.

4. Todos los ángulos rectos son iguales.

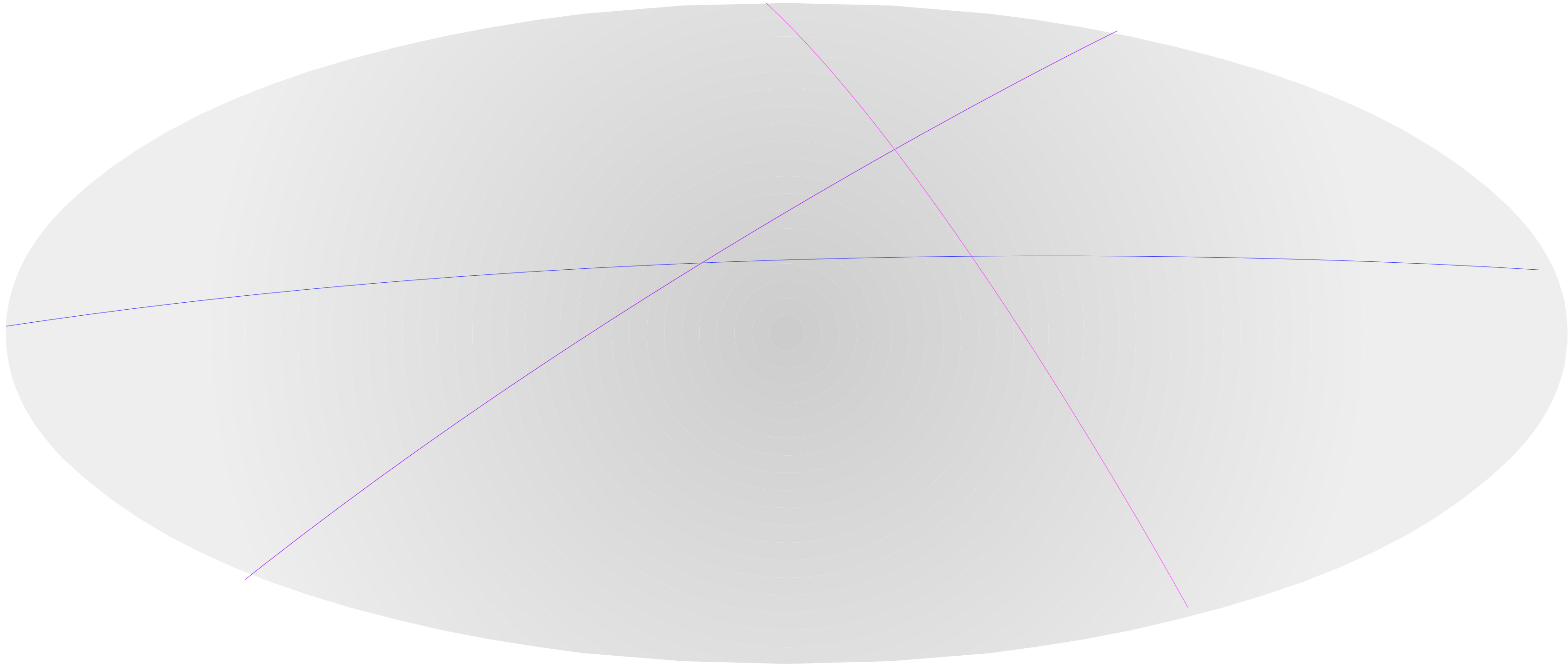
5. Si una línea recta cruza a dos líneas rectas de modo que los ángulos internos de un mismo lado suman menos que dos ángulos rectos, entonces las dos rectas se cruzarán de ese lado.

¿Que pasaría si alguien, a partir de las definiciones, se imaginara *puntos, líneas, círculos* y *planos* que no fueran como las imaginamos nosotros?

¿Los resultados que obtendría a partir de los postulados serían los mismos o no?

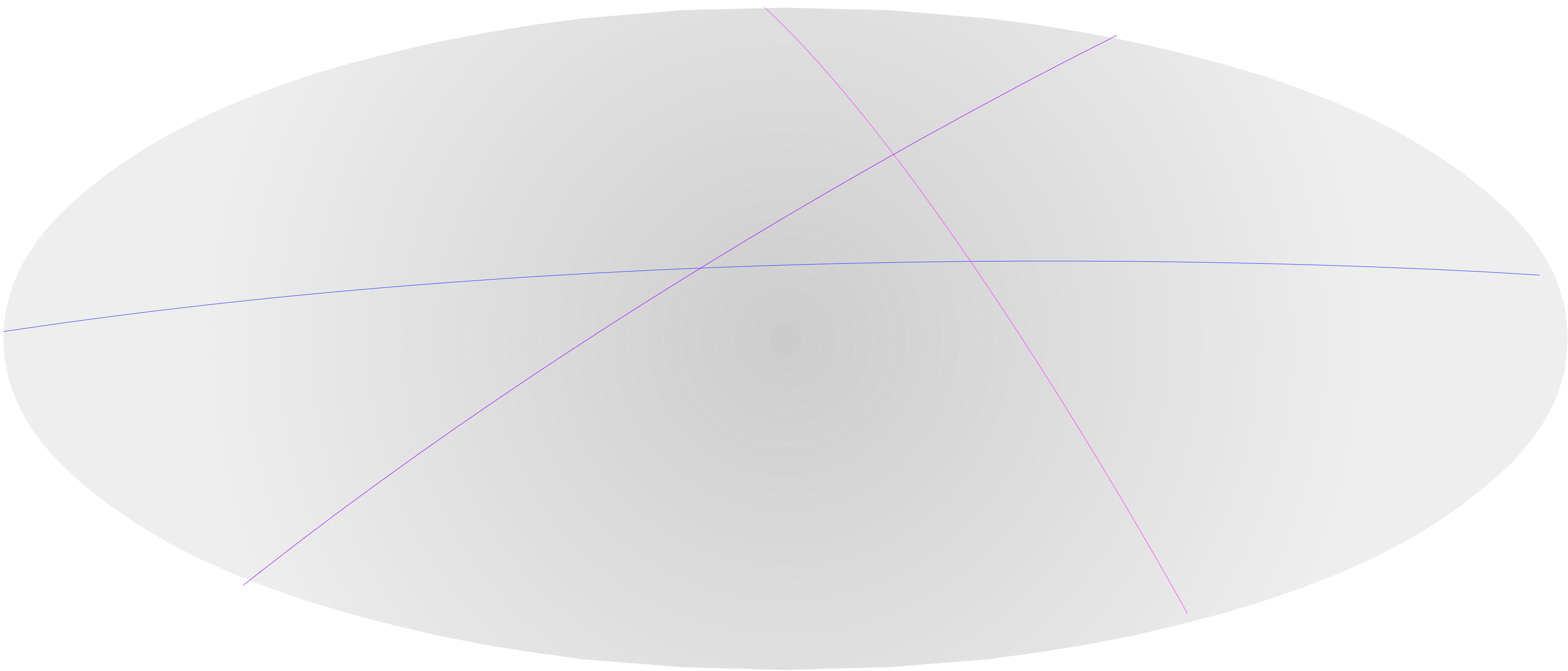
Imaginemos por ejemplo un plano que no es totalmente liso como nos lo imaginamos, sino que esta un poco curvado, como la superficie de una esfera

Imaginemos por ejemplo un plano que no es totalmente liso como nosotros lo imaginamos, sino que esta un poco curvado, como la superficie de una esfera o de una silla de montar:



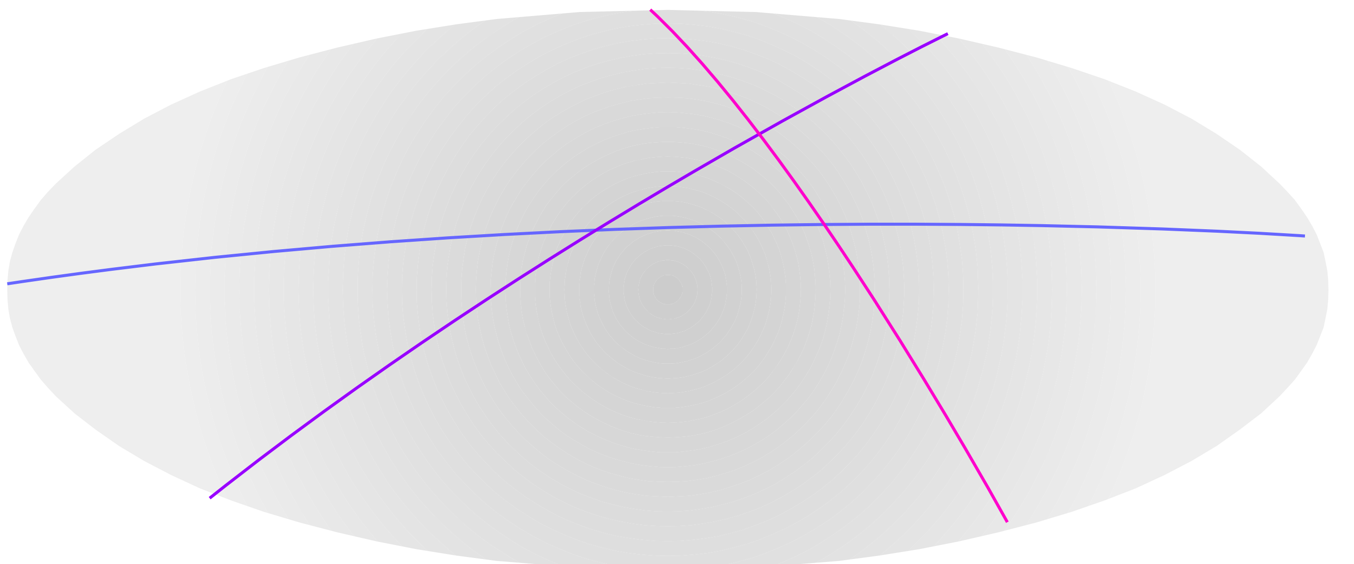
Aquí no hay rectas como las que imaginamos nosotros, pero podemos pensar que las “rectas” son las *líneas mas derechas* posibles en la superficie (las trayectorias mas cortas). Esto es lo que hacemos en la superficie de la tierra.

Imaginemos por ejemplo un plano que no es totalmente liso como nosotros lo imaginamos, sino que esta un poco curvado, como la superficie de una esfera o de una silla de montar:

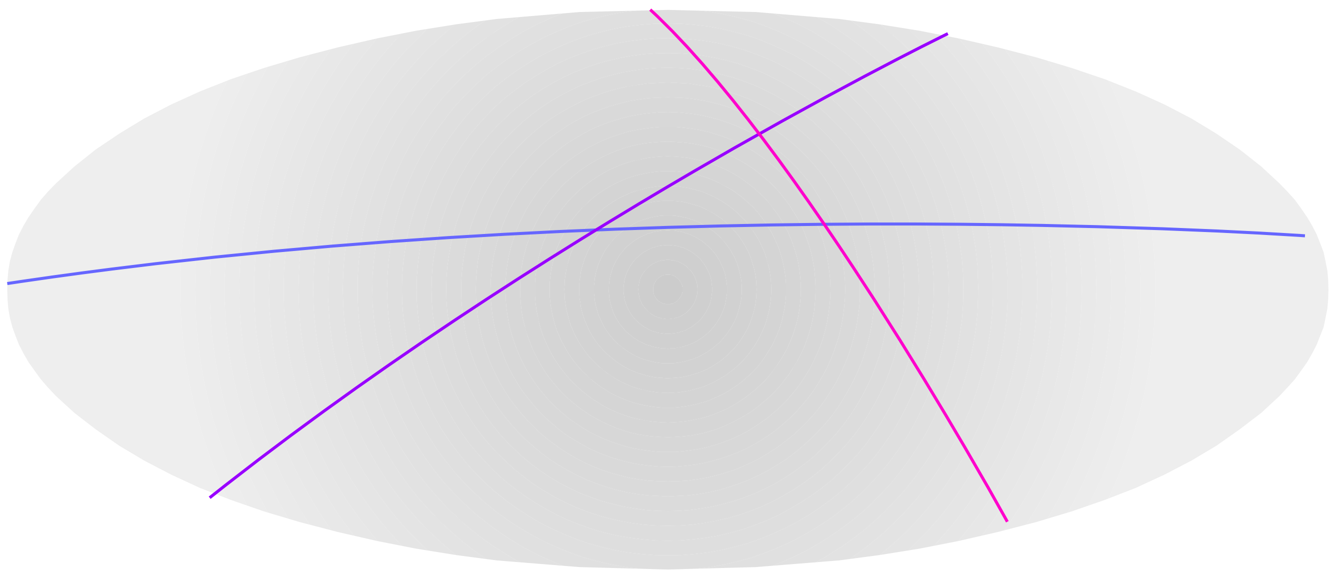


Podemos definir círculos, ángulos, líneas paralelas y perpendiculares igual que antes.

¿Será cierto que en este “plano” valen los resultados de la geometría euclidiana?



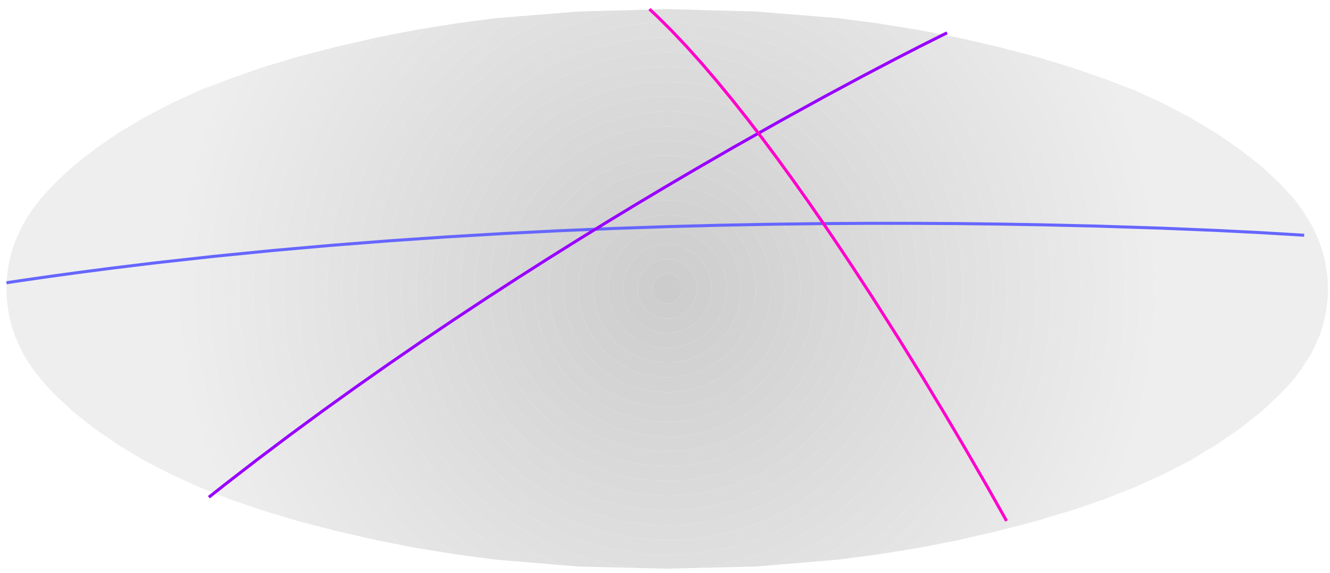
¿Será cierto que en este “plano” valen los resultados de la geometría euclidiana?



Como los resultados de la geometría euclidiana se obtienen a partir de los postulados usando la lógica, los resultados deben valer siempre y cuando en este plano se valgan los postulados.

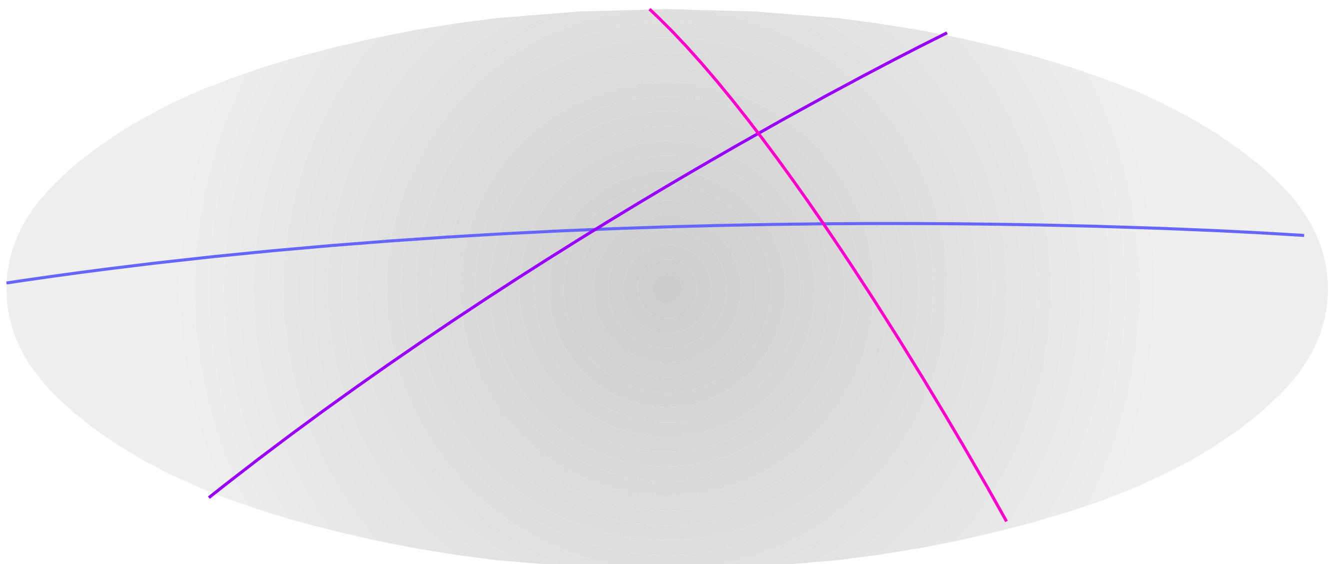
¿En este “plano” valdrá el **Postulado 1**?

Por 2 puntos distintos pasara una y solo una “recta”



¿En este “plano” valdrá el **Postulado 1**?

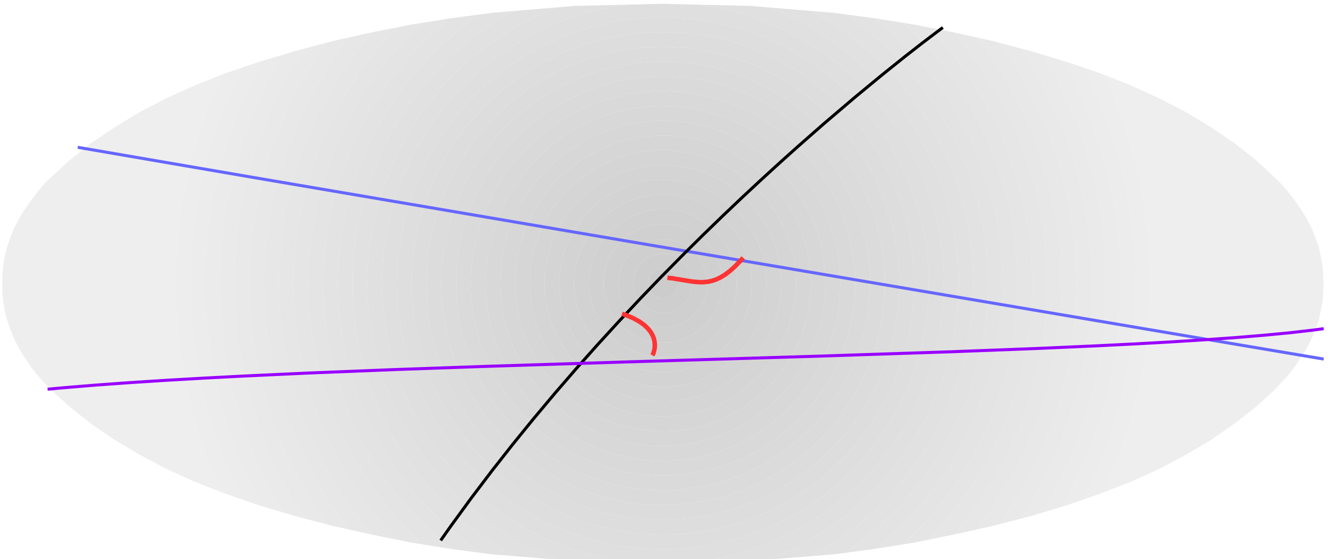
Por 2 puntos distintos pasara una y solo una “recta”



Es intuitivamente claro que debe haber al menos una ¿pero no podrá haber mas de una?

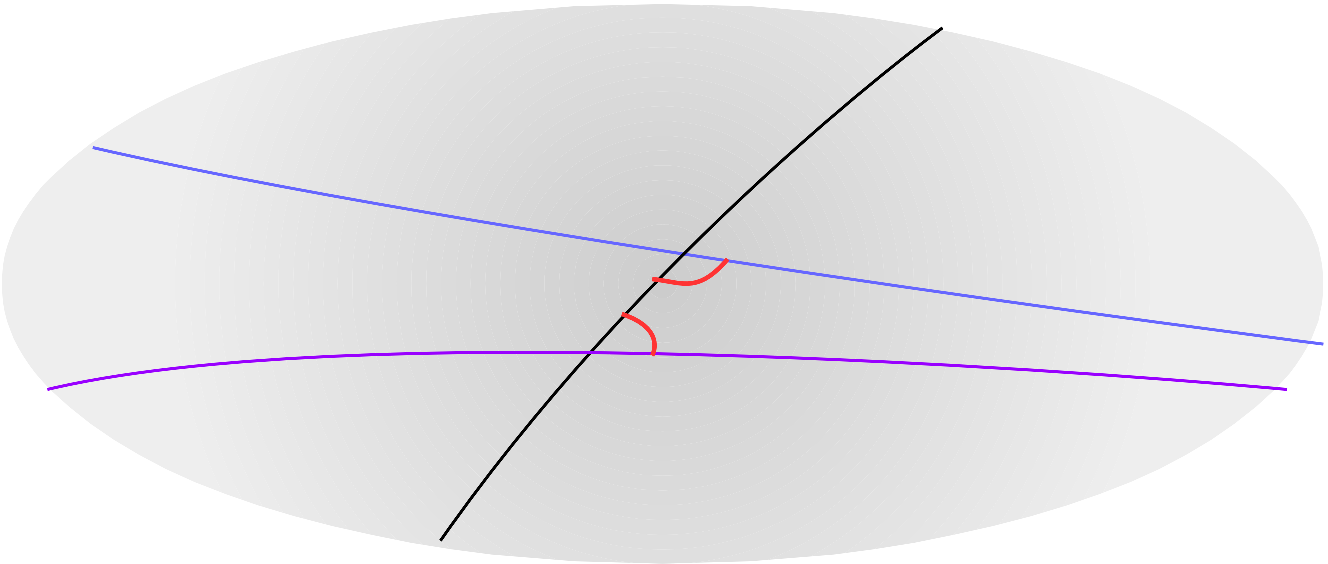
¿En este “plano” valdrá el **Postulado 5**?

Si una línea recta cruza a dos líneas rectas de modo que los ángulos internos de un mismo lado suman menos que dos ángulos rectos, entonces las dos rectas se cruzarán de ese lado.”



¿En este “plano” valdrá el **Postulado 5**?

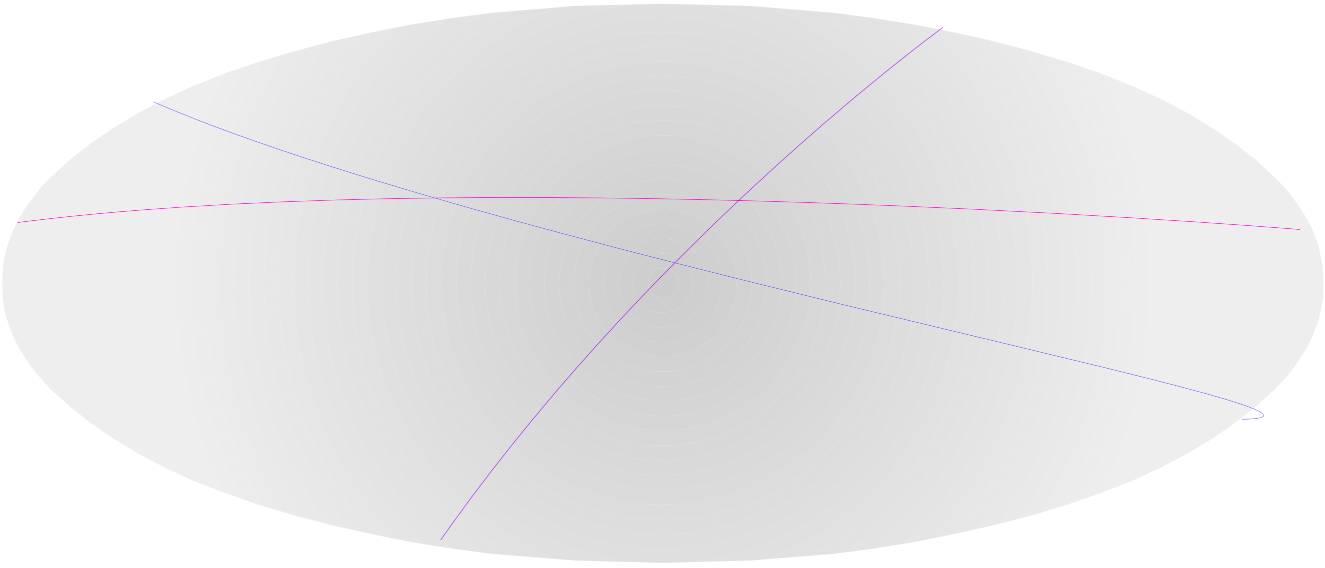
Si una línea recta cruza a dos líneas rectas de modo que los ángulos internos de un mismo lado suman menos que dos ángulos rectos, entonces las dos rectas se cruzarán de ese lado.”



¿No será posible que estas “rectas” se curven de modo que no se intersecten?

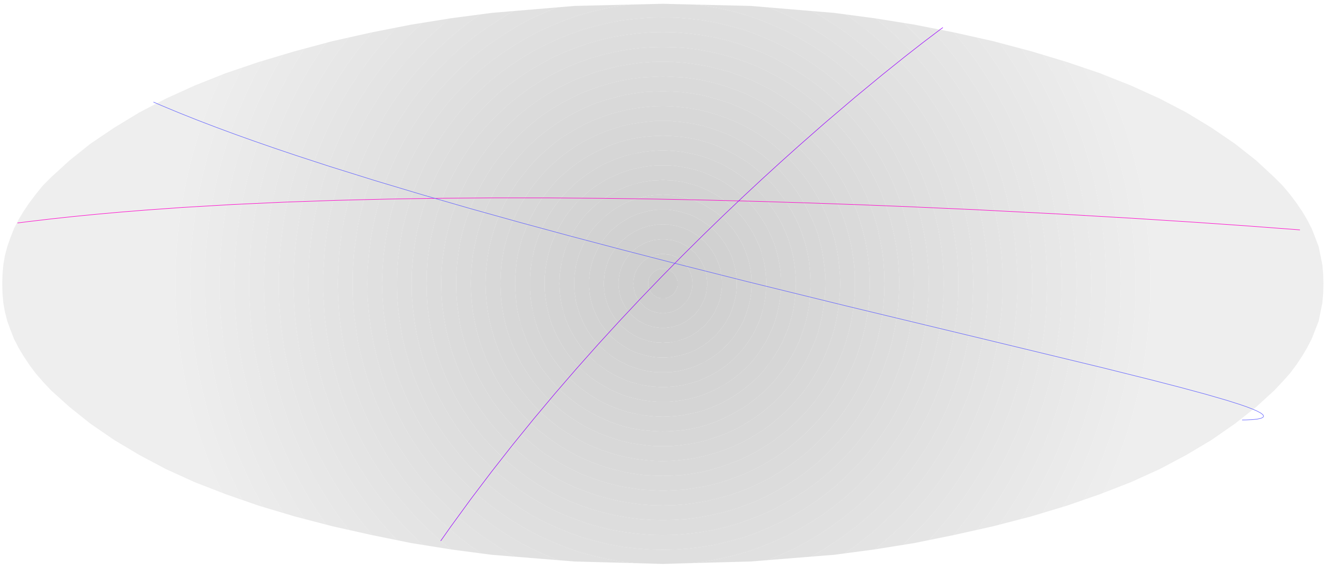
¿En este “plano” valdrá el **Postulado faltante**?

Las figuras en un plano se pueden desplazar, girar y reflejar sin cambiar su forma (sin afectar longitudes, ángulos ni áreas).



¿En este “plano” valdrá el **Postulado faltante**?

Las figuras en un plano se pueden desplazar, girar y reflejar sin cambiar su forma (sin afectar longitudes, ángulos ni áreas).



Esto depende de que el “plano” no tenga “abolladuras” que lo hagan algunas partes se vean distintas que otras

¿En este “plano” valdrá el **Postulado faltante**?

Las figuras en un plano se pueden desplazar, girar y reflejar sin cambiar su forma (sin afectar longitudes, ángulos ni áreas).

El postulado faltante se cumple por ejemplo en la superficie de una esfera, pero no se cumple en las superficies donde hay ondulaciones como colinas aunque sean pequeñas.

Resulta ser que el que los distintos postulados se cumplan o no depende de como y que tanto se curve el “plano”

Resulta ser que el que los distintos postulados se cumplan o no depende de como y que tanto se curve el “plano”

Hay “planos” donde se cumplen los primeros 4 postulados y el postulado faltante pero no se cumple el quinto postulado

.

Resulta ser que el que los distintos postulados se cumplan o no depende de como y que tanto se curve el “plano”

Hay “planos” donde se cumplen los primeros 4 postulados y el postulado faltante pero no se cumple el quinto postulado

En estos “planos” se valen todos los resultados de la geometría euclidiana en cuya demostración no se usa el quinto postulado.

.

Resulta ser que el que los distintos postulados se cumplan o no depende de como y que tanto se curve el “plano”

Hay “planos” donde se cumplen los primeros 4 postulados y el postulado faltante pero no se cumple el quinto postulado

En estos “planos” se valen todos los resultados de la geometría euclidiana en cuya demostración no se usa el quinto postulado.

Por ejemplo, se vale LAL y LLL, pero puede que no exista ninguna paralela a una recta que pase por un punto, o que existan varias paralelas a una linea que pasen por el mismo punto.

.

Resulta ser que el que los distintos postulados se cumplan o no depende de como y que tanto se curve el “plano”

Hay “planos” donde se cumplen los primeros 4 postulados y el postulado faltante pero no se cumple el quinto postulado

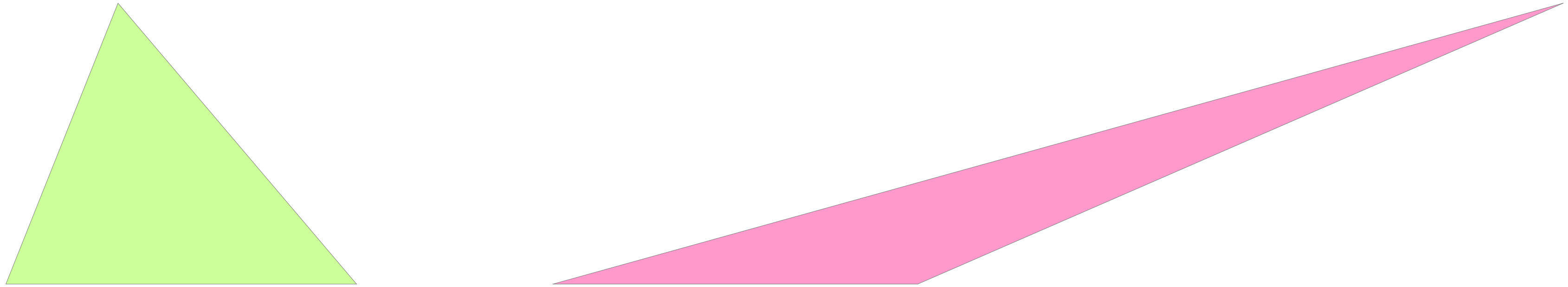
En estos “planos” se valen todos los resultados de la geometría euclidiana en cuya demostración no se usa el quinto postulado.

Por ejemplo, se vale LAL y LLL, pero puede que no exista ninguna paralela a una recta que pase por un punto, o que existan varias paralelas a una linea que pasen por el mismo punto.

Tampoco es cierto que la suma de los ángulos internos de un triángulo siempre sumen 2 ángulos rectos (pueden sumar mas o menos). Estas cosas se estudian en *geometría no euclidiana*.

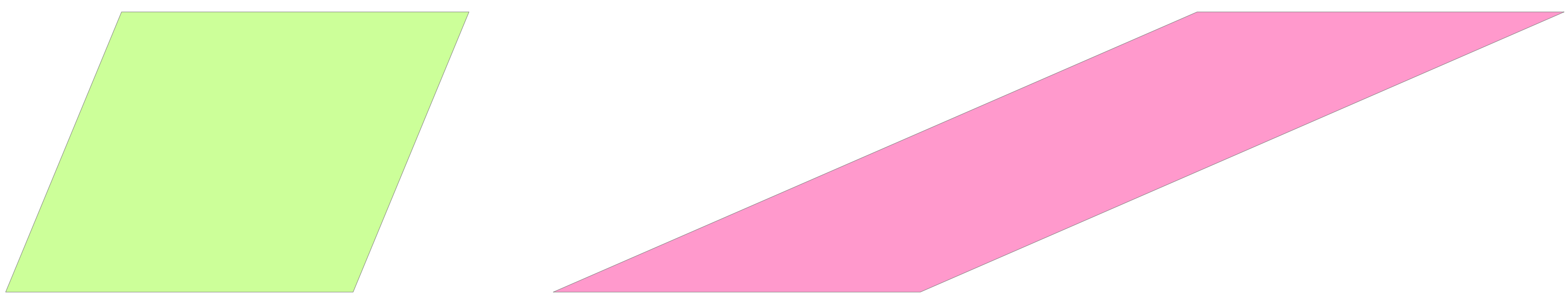
Algunos resultados sobre áreas y ángulos

Proposición 1:38 *Dos triángulos con la misma base y la misma altura tienen la misma área.*



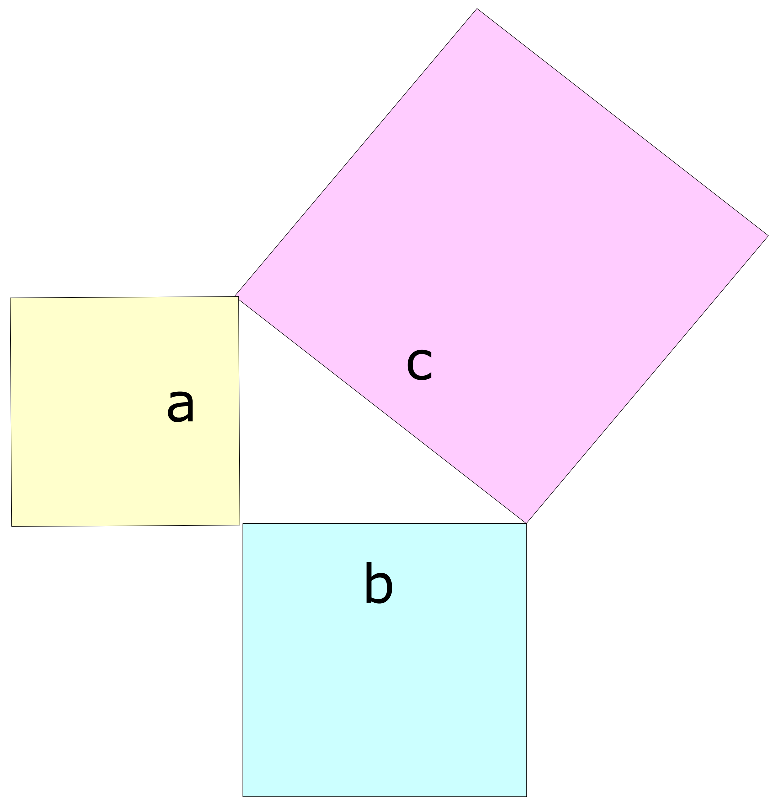
Proposición 1:38 *Dos triángulos con la misma base y la misma altura tienen la misma área.*

Demostración. Ejercicio



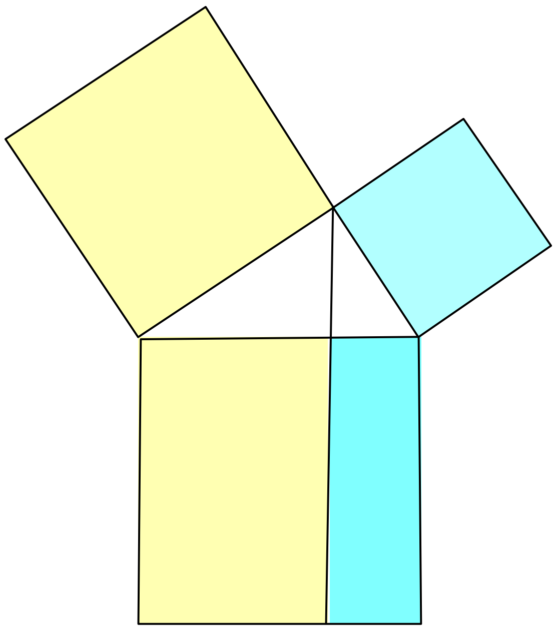
(mostrar primero que dos paralelogramos con la misma base y la misma altura tienen la misma área)

Proposición 1:47 (Teorema de Pitágoras). *En los triángulos rectángulos el cuadrado del lado opuesto al ángulo recto es igual a la suma de los cuadrados de los otros lados.*



Proposición 1:47 (Teorema de Pitágoras). *En los triángulos rectángulos el cuadrado del lado opuesto al ángulo recto es igual a la suma de los cuadrados de los lados que comprenden el ángulo recto.*

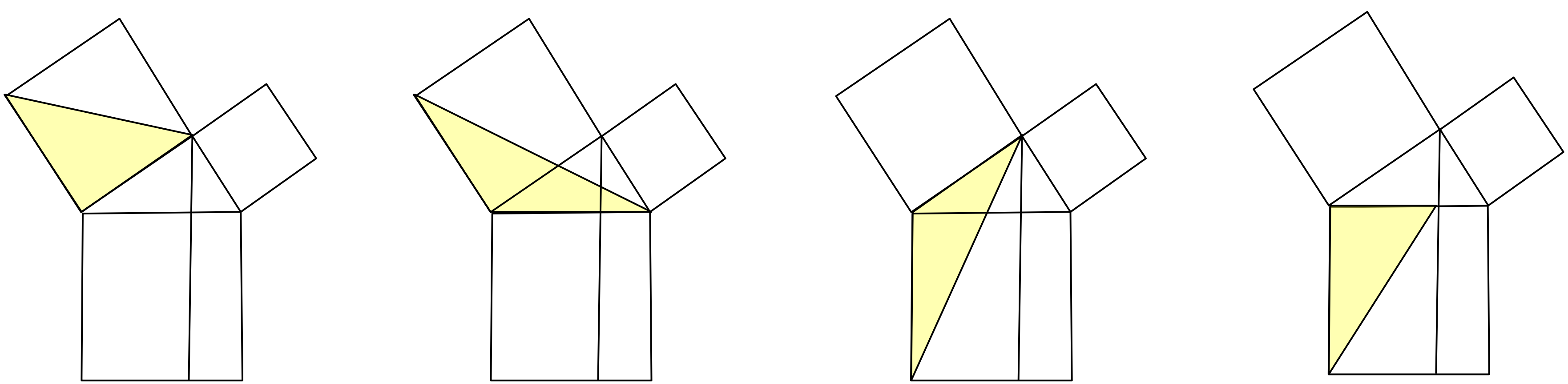
Demostración. Basta ver que los las áreas de los cuadrados son iguales a las áreas de los rectángulos:



Proposición 1:47 (Teorema de Pitágoras). *En los triángulos rectángulos el cuadrado del lado opuesto al ángulo recto es igual a la suma de los cuadrados de los lados que comprenden el ángulo recto.*

Demostración. Basta ver que los las áreas de los cuadrados son iguales a las áreas de los rectángulos:

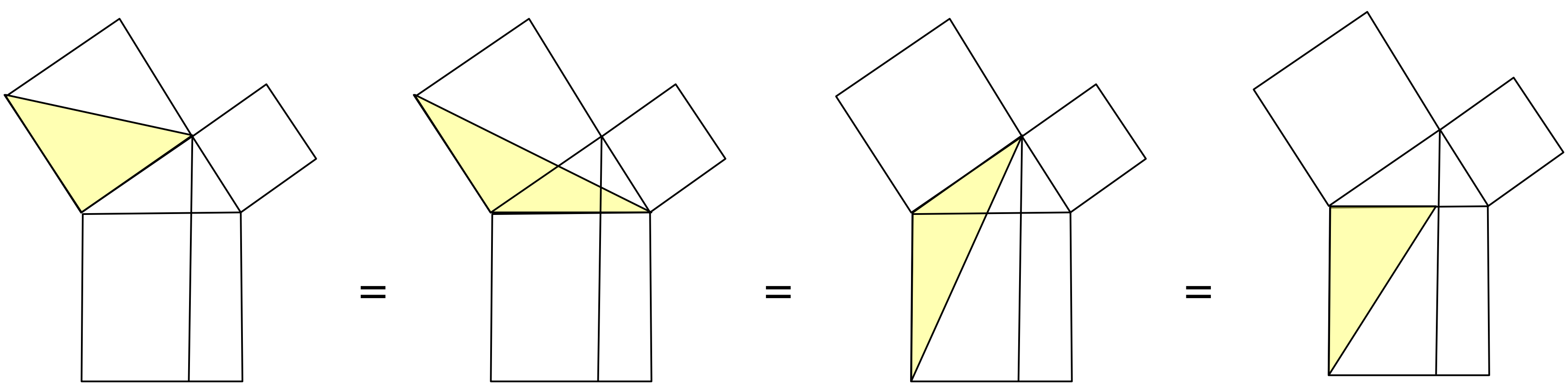
Para esto basta ver que los cuatro triángulos tienen áreas iguales:



Proposición 1:47 (Teorema de Pitágoras). *En los triángulos rectángulos el cuadrado del lado opuesto al ángulo recto es igual a la suma de los cuadrados de los lados que comprenden el ángulo recto.*

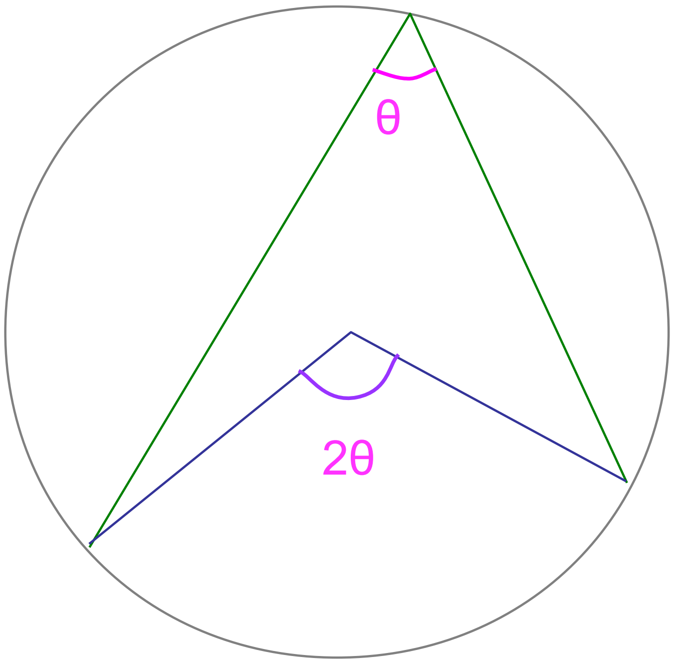
Demostración. Basta ver que los las áreas de los cuadrados son iguales a las áreas de los rectángulos:

Para esto basta ver que los cuatro triángulos tienen áreas iguales:



Misma base y altura triángulos congruentes Misma base y altura

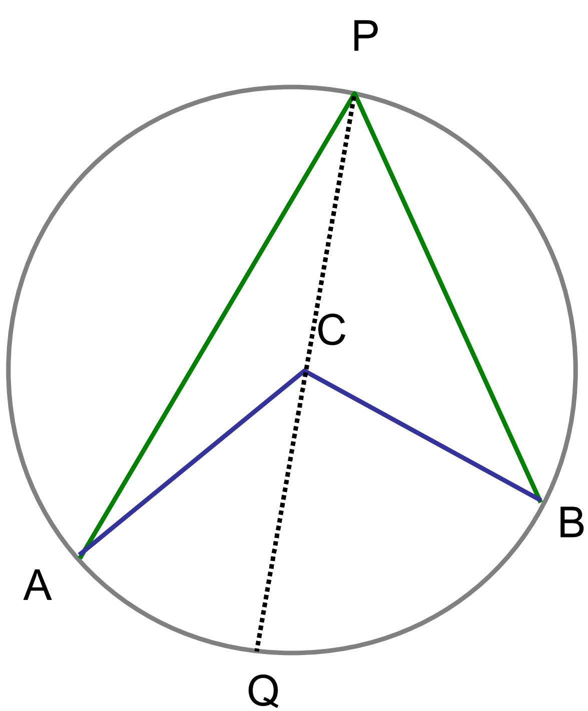
Proposición 3:20 *Los ángulos inscritos en un círculo son iguales a la mitad de los ángulos centrales.*

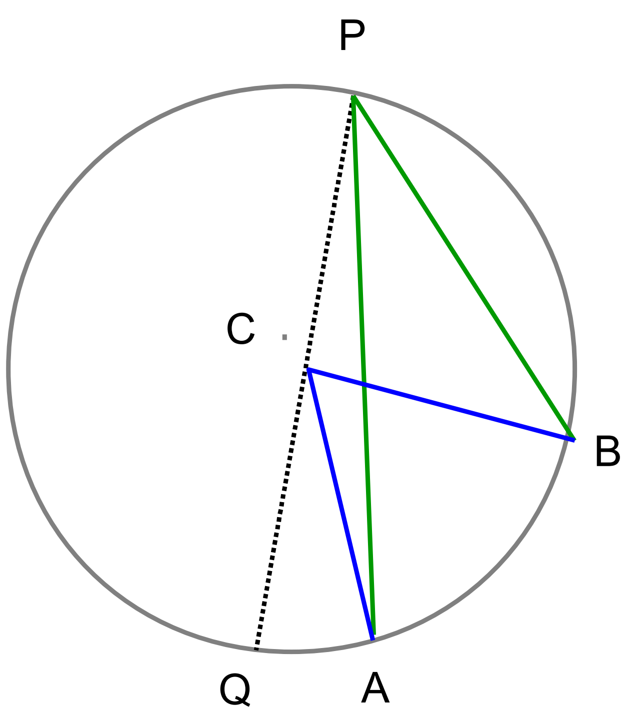


Proposición 3:20 *Proposición 3:20 Los ángulos inscritos en un círculo son iguales a la mitad de los ángulos centrales.*

Demostración. Sea C el centro del círculo.
Entonces los triángulos ACP y BCP son isósceles.

Hay dos casos: que A y B estén en lados opuestos del diámetro PQ o que estén en el mismo lado





Proposición 3:20 *Proposición 3:20 Los ángulos inscritos en un círculo son iguales a la mitad de los ángulos centrales.*

Demostración.

Si A y B están en distintos lados el diámetro por P.

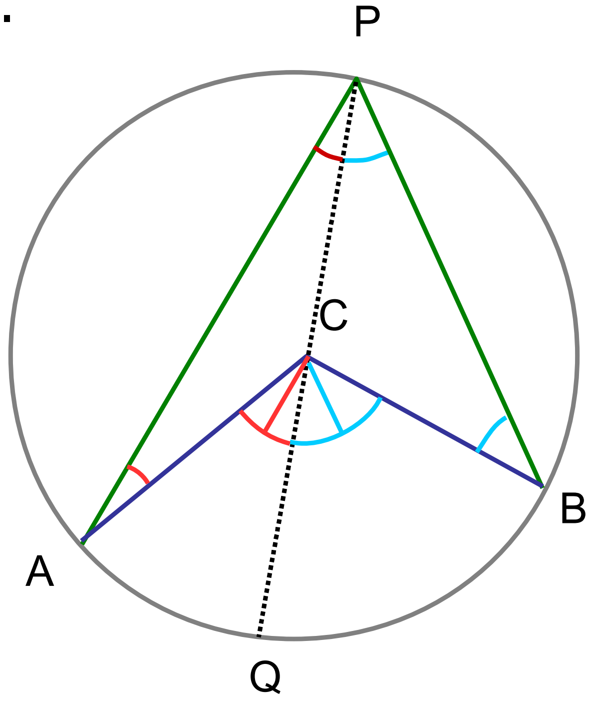
Como ACP es isósceles ∠CAP = ∠APC.

Como la suma de los ángulos internos es 180°

Entonces ∠ACP = 180° - 2∠APC

y como ∠ACP + ∠ACQ = 180°

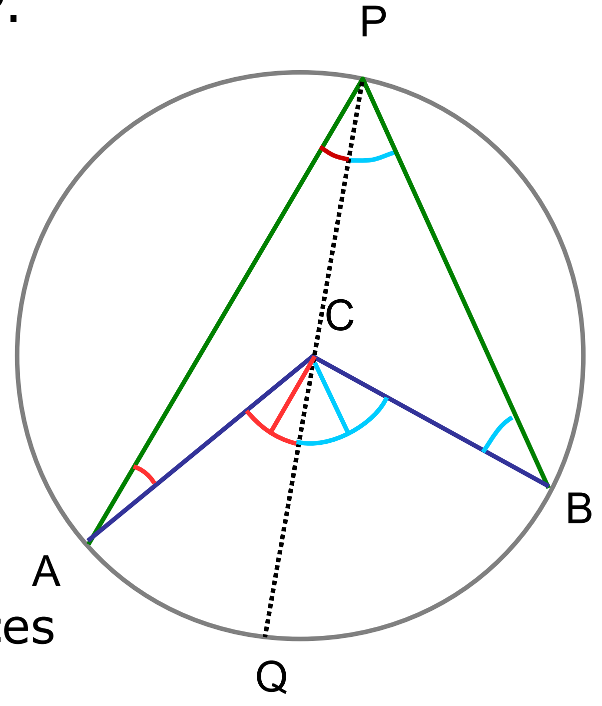
entonces ∠ACQ = 2∠APC.



Proposición 3:20 Proposición 3:20 Los ángulos inscritos en un círculo son iguales a la mitad de los ángulos centrales.

Demostración.

Si A y B están en distintos lados el diámetro por P.



Como ACP es isósceles ∠CAP = ∠APC.

Como la suma de los ángulos internos es 180°

Entonces ∠ACP = 180° - 2∠APC

y como ∠ACP + ∠ACQ = 180°

entonces ∠ACQ = 2∠APC.

De manera análoga ∠BCQ = 2∠BPC.

Como A y B están en distintos lados de PQ entonces

∠APB = ∠APC + ∠BPC Φ

∠ACB =∠ACQ +∠BCQ = 2∠APC + 2∠BPC = 2∠APB.

Proposición 3:20 *Proposición 3:20 Los ángulos inscritos en un círculo son iguales a la mitad de los ángulos centrales.*

Demostración.

Si A y B están en el mismo lado del diámetro PQ

entonces igual que antes

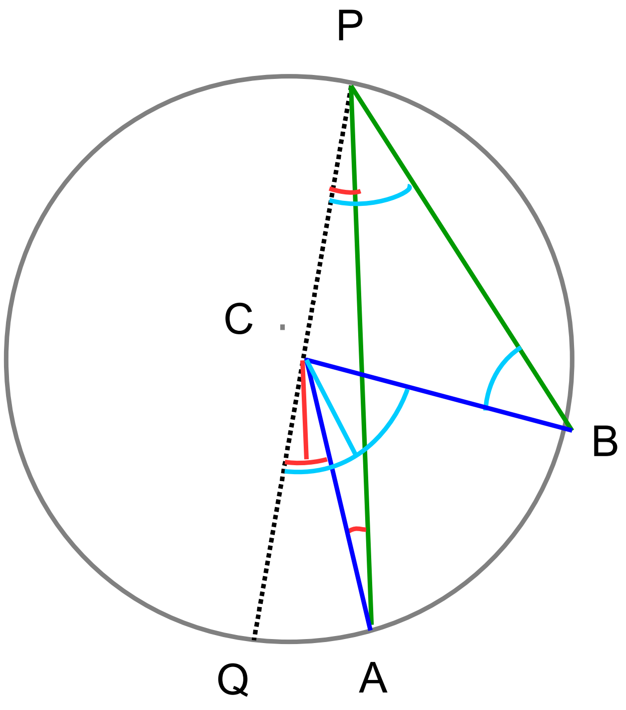
$\angle ACQ = 2\angle APC$ y $\angle BCQ = 2\angle BPC$.

Como A y B están en el mismo lado de PQ

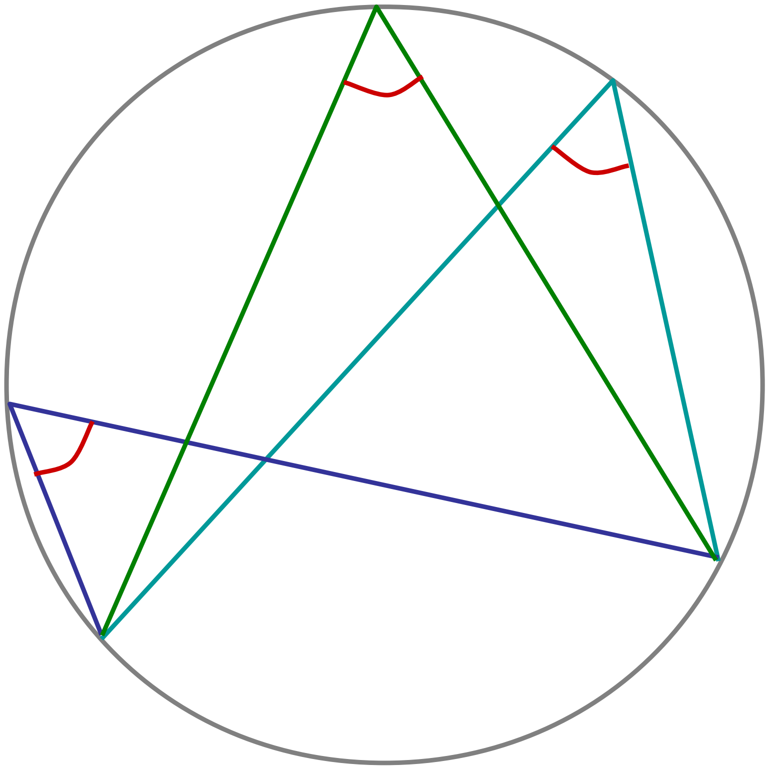
Entonces $\angle APB = \angle BPC - \angle APC$ y

$\angle ACB = \angle BCQ - \angle ACQ = 2\angle BPC - 2\angle APC = 2\angle APB$.

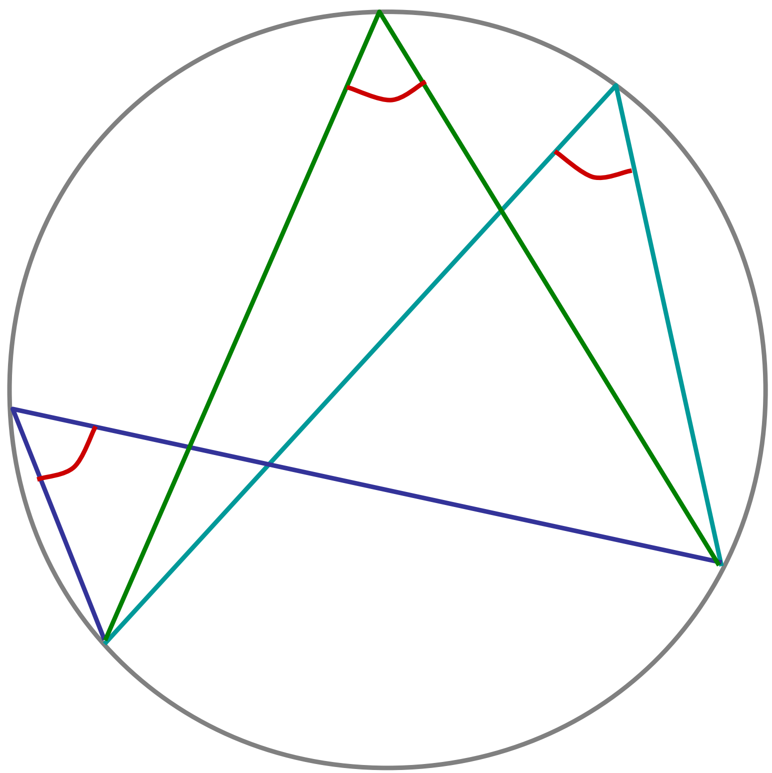
•



Proposición 3:21 *En un círculo, los ángulos inscritos que ven el mismo arco son iguales.*



Proposición 3:21 En un círculo, los ángulos inscritos que ven el mismo arco son iguales.



Demostración. Los ángulos inscritos que ven el mismo arco son iguales a la mitad del mismo ángulo central. •