Curvas en el plano

Una **curva** es un subconjunto del plano de dimensión 1, que podemos visualizar como la trayectoria de un punto en movimiento.

Una **curva** es un subconjunto del plano de dimensión 1, que podemos visualizar como la trayectoria de un punto en movimiento.

Las curvas en el plano pueden describirse por medio de *parametrizaciones* o por medio de *ecuaciones*:

Una **curva** es un subconjunto del plano de dimensión 1, que podemos visualizar como la trayectoria de un punto en movimiento.

Las curvas en el plano pueden describirse por medio de *parametrizaciones* o por medio de *ecuaciones*:

$p(t) = (2t,3t+4)$

da los puntos de la curva explícitamente, en términos de un parámetro

$3x+2y = 8$

da una relación entre las coordenadas de los puntos de la curva

Las parametrizaciones no solo dependen de la curva, sino también del punto de partida y de la velocidad a la que se recorre la curva.

Las ecuaciones solo dependen de la curva.

Las parametrizaciones no solo dependen de la curva, sino también del punto de partida y de la velocidad a la que se recorre la curva.

Las ecuaciones solo dependen de la curva.

¿Parametrizaciones o ecuaciones? depende de lo que queramos hacer.

Las parametrizaciones contienen algo mas de información que las ecuaciones.

A veces es fácil pasar de las parametrizaciones a las ecuaciones y viceversa, otras veces es muy difícil.

Las curvas mas simples en el plano son las lineas rectas, que pueden parametrizarse con las funciones mas simples (polinomios de grado 1)

$P(t) = (at+b, ct+d)$

Estas parametrizaciones recorren las rectas a velocidad constante (pero hay parametrizaciones con funciones mas complicadas que recorren las rectas con velocidad variable).

Las líneas rectas satisfacen las ecuaciones mas simples, que son las ecuaciones lineales

$Ax+By = C$

Estas ecuaciones son casi unicas, salvo multiplicacion por constantes

Ejemplos.

¿Las parametrizaciones $p(t) = (4t,6t-2)$ y $q(t) = (6t+2,9t+1)$ corresponden a la misma recta o a rectas distintas?

Ejemplos.

Las parametrizaciones $p(t) = (4t,6t-2)$ y $q(t) = (6t+2,9t+1)$ corresponden a la misma recta, porque ambas satisfacen la ecuación

$$3x - 2y = 4$$

pero recorren la recta a diferente velocidad y empezando de puntos distintos

Ejemplos.

Las parametrizaciones $p(t) = (4t,6t-2)$ y $q(t) = (6t+2,9t+1)$ corresponden a la misma recta, porque ambas satisfacen la ecuación

$3x - 2y = 4$

pero recorren la recta a diferente velocidad y empezando de puntos distintos

Una parametrización de la recta $4x - 5y = 3$ es ...

Ejemplos.

Las parametrizaciones $p(t) = (4t,6t-2)$ y $q(t) = (6t+2,9t+1)$ corresponden a la misma recta, porque ambas satisfacen la ecuación

$3x - 2y = 4$

pero recorren la recta a diferente velocidad y empezando de puntos distintos

Una parametrización de la recta $4x - 5y = 3$ es

$p(t) = t(5,4)+(2,1) = (5t+2,4t+1)$

Ejemplos.

Las parametrizaciones $p(t) = (4t,6t-2)$ y $q(t) = (6t+2,9t+1)$ corresponden a la misma recta, porque ambas satisfacen la ecuación

$3x - 2y = 4$

pero recorren la recta a diferente velocidad y empezando de puntos distintos.

Una parametrización de la recta $4x - 5y = 3$ es

$p(t) = t(5,4)+(2,1) = (5t+2,4t+1)$

Da una parametrización de la recta $x = y$ a velocidad variable.

Ejemplos.

Las parametrizaciones $p(t) = (4t\ 6t-2)$ y $q(t) = (6t+2,9t+1)$ corresponden a la misma recta, porque ambas satisfacen la ecuación

$3x - 2y = 4$

pero recorren la recta a diferente velocidad y empezando de puntos distintos.

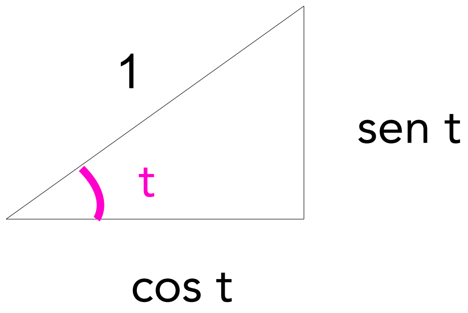
Una parametrización de la recta $4x - 5y = 3$ es

$p(t) = t(5,4)+(2,1) = (5t+2,4t+1)$

Una parametrización de la recta $x = y$ a velocidad constante es $p(t)=(t,t)$, una parametrizacion a velocidad variable es $q(t)=(t^3,t^3)$

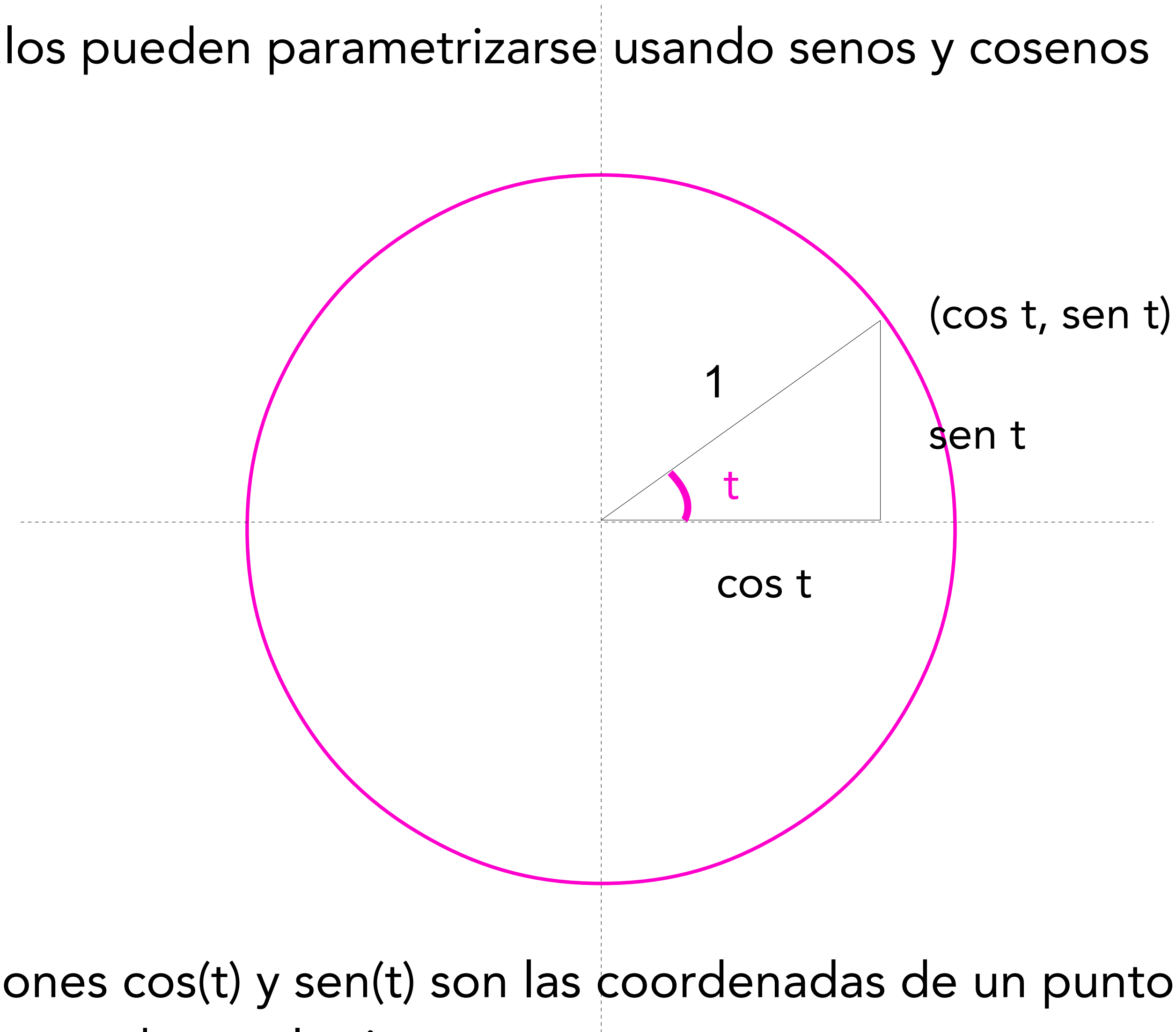
Otras curvas simples son los círculos.

Los círculos pueden parametrizarse usando senos y cosenos



Otras curvas simples son los círculos.

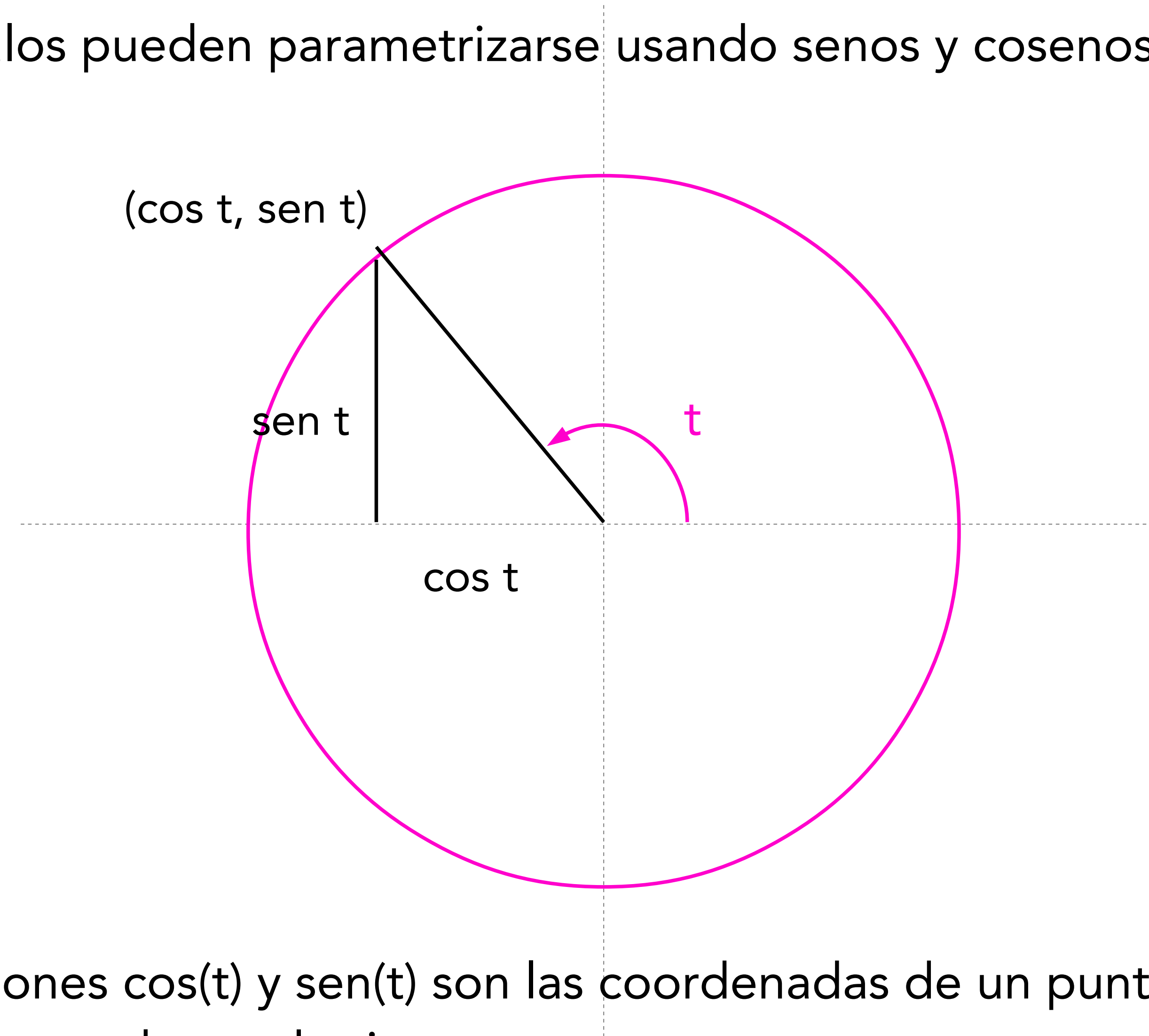
Los círculos pueden parametrizarse usando senos y cosenos



Las funciones cos(t) y sen(t) son las coordenadas de un punto en un círculo de radio 1 centrado en el origen.

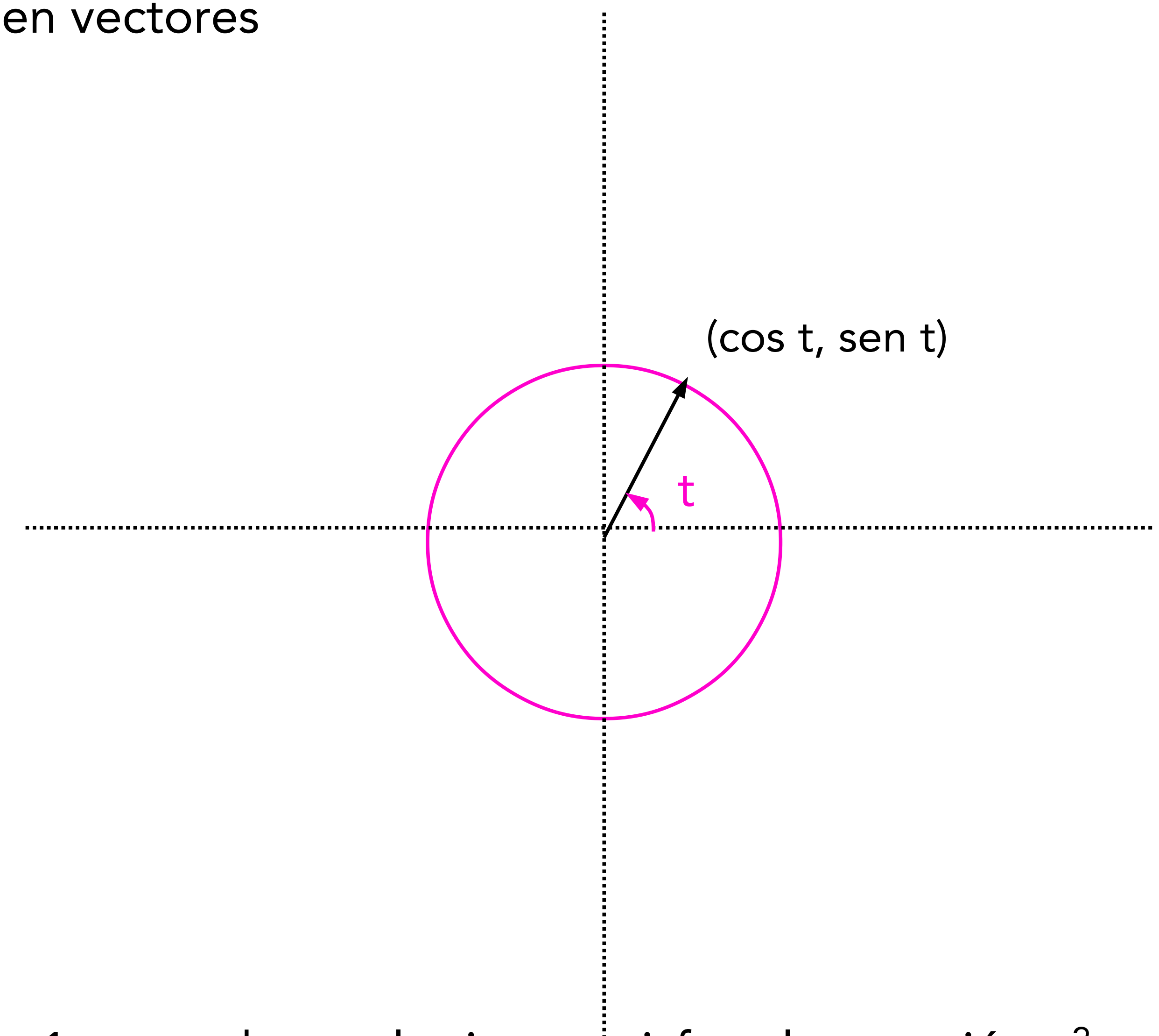
Otras curvas simples son los círculos.

Los círculos pueden parametrizarse usando senos y cosenos



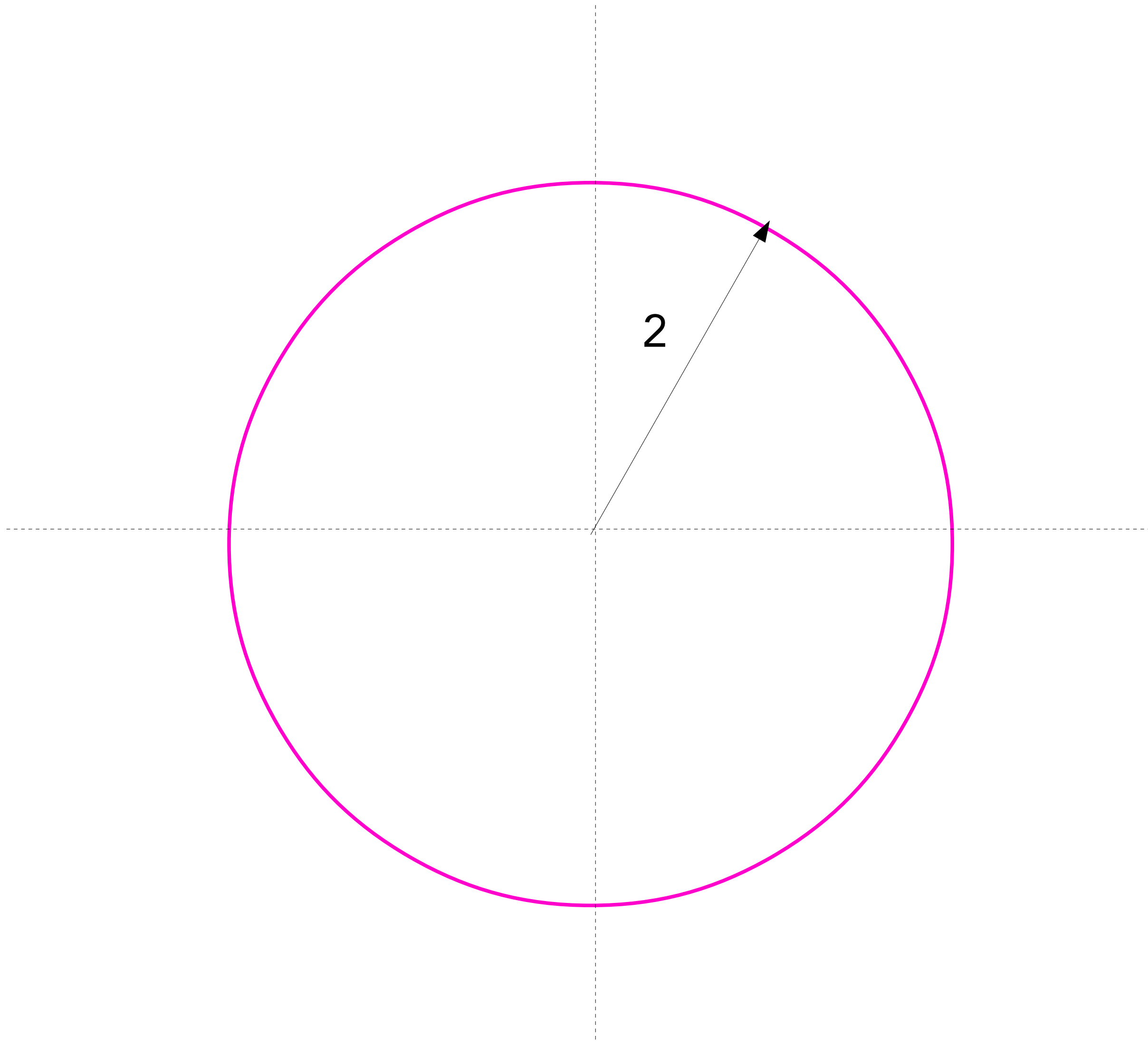
Las funciones cos(t) y sen(t) son las coordenadas de un punto en un círculo de radio 1 centrado en el origen.

Para hallar las parametrizaciones de otros círculos o de curvas mas complicadas, conviene pensar en vectores

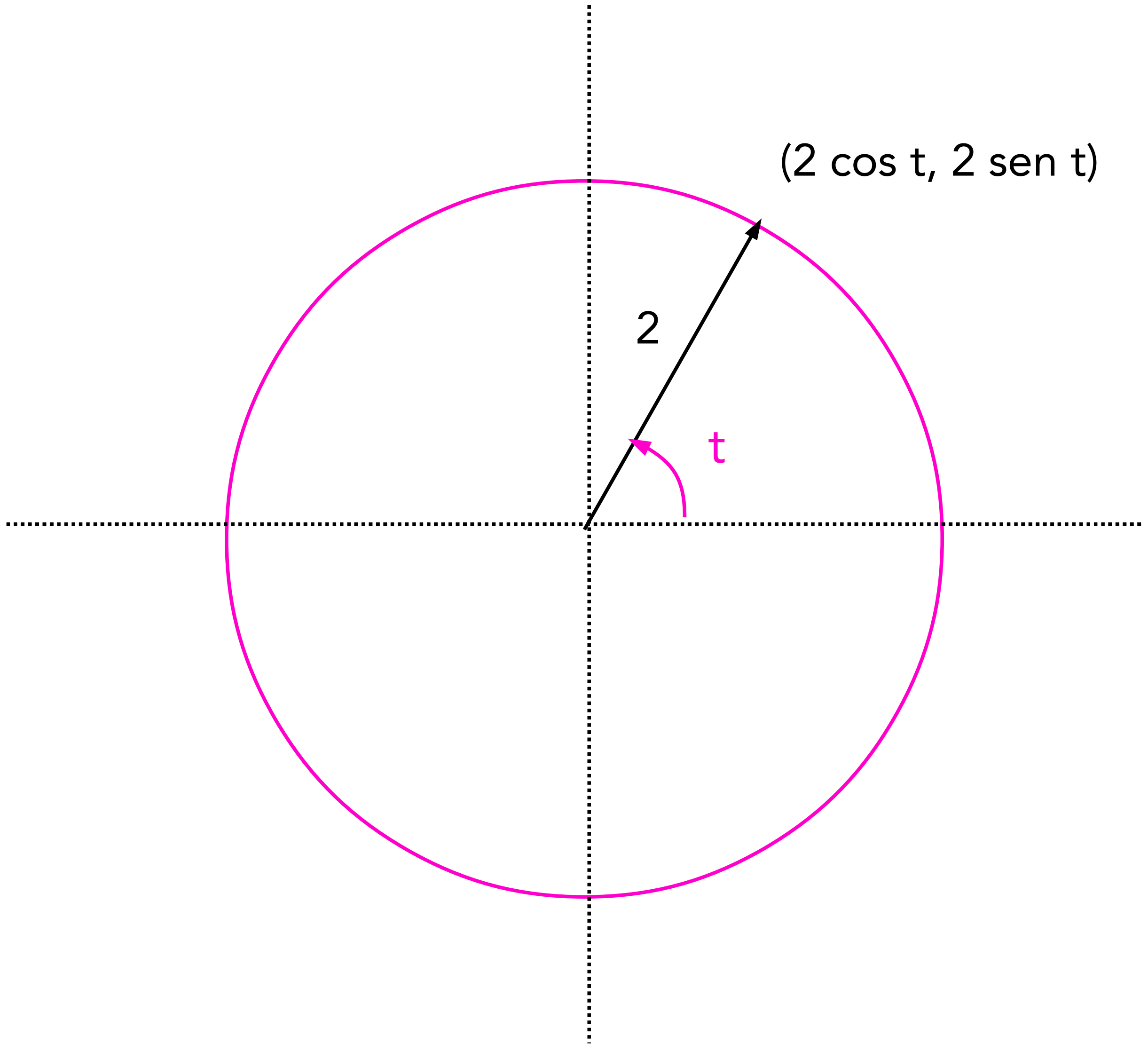


El círculo de radio 1 centrado en el origen satisface la ecuación $x^2 + y^2 = 1$

El círculo de radio 2 centrado en el origen

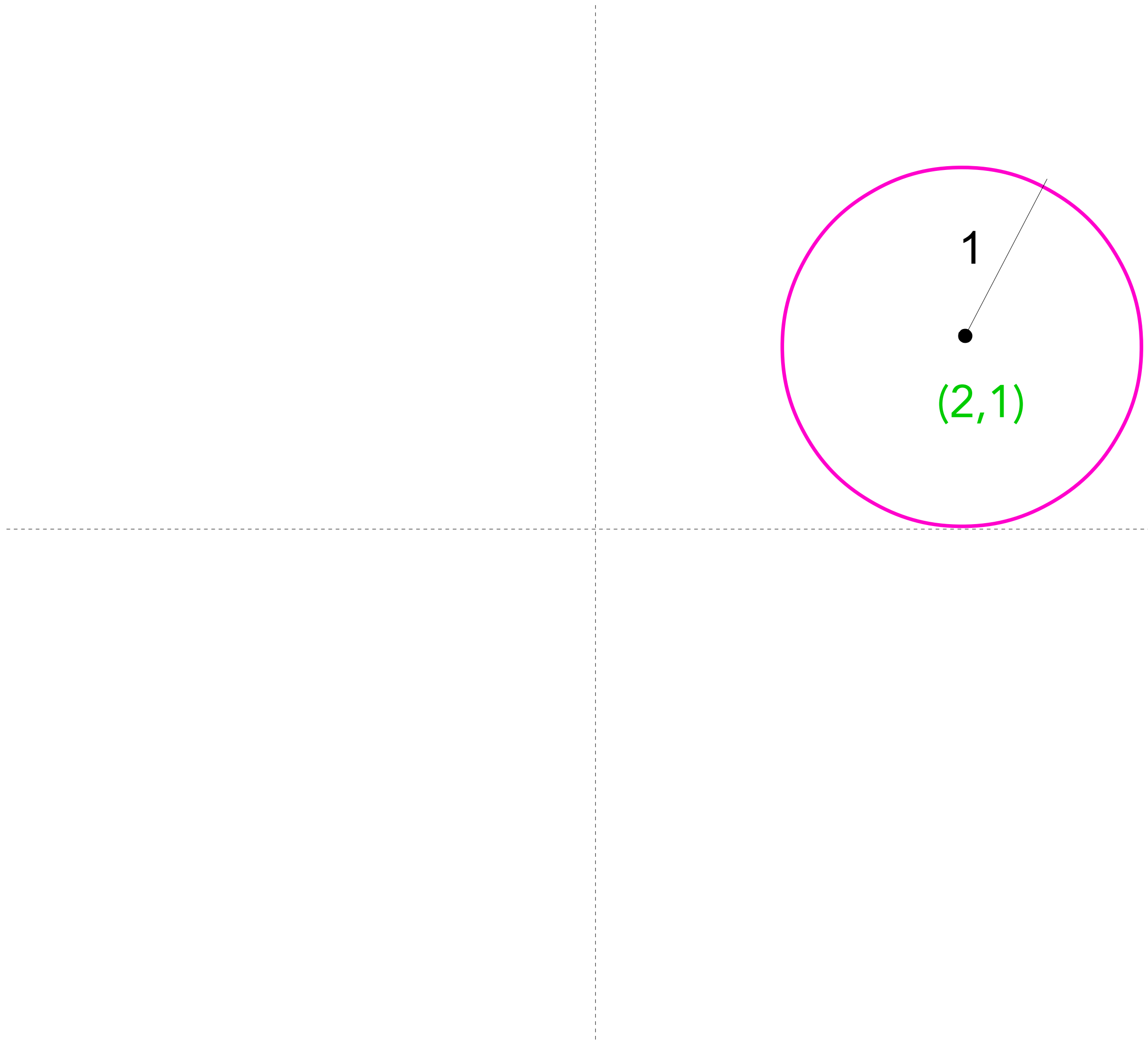


El círculo de radio 2 centrado en el origen

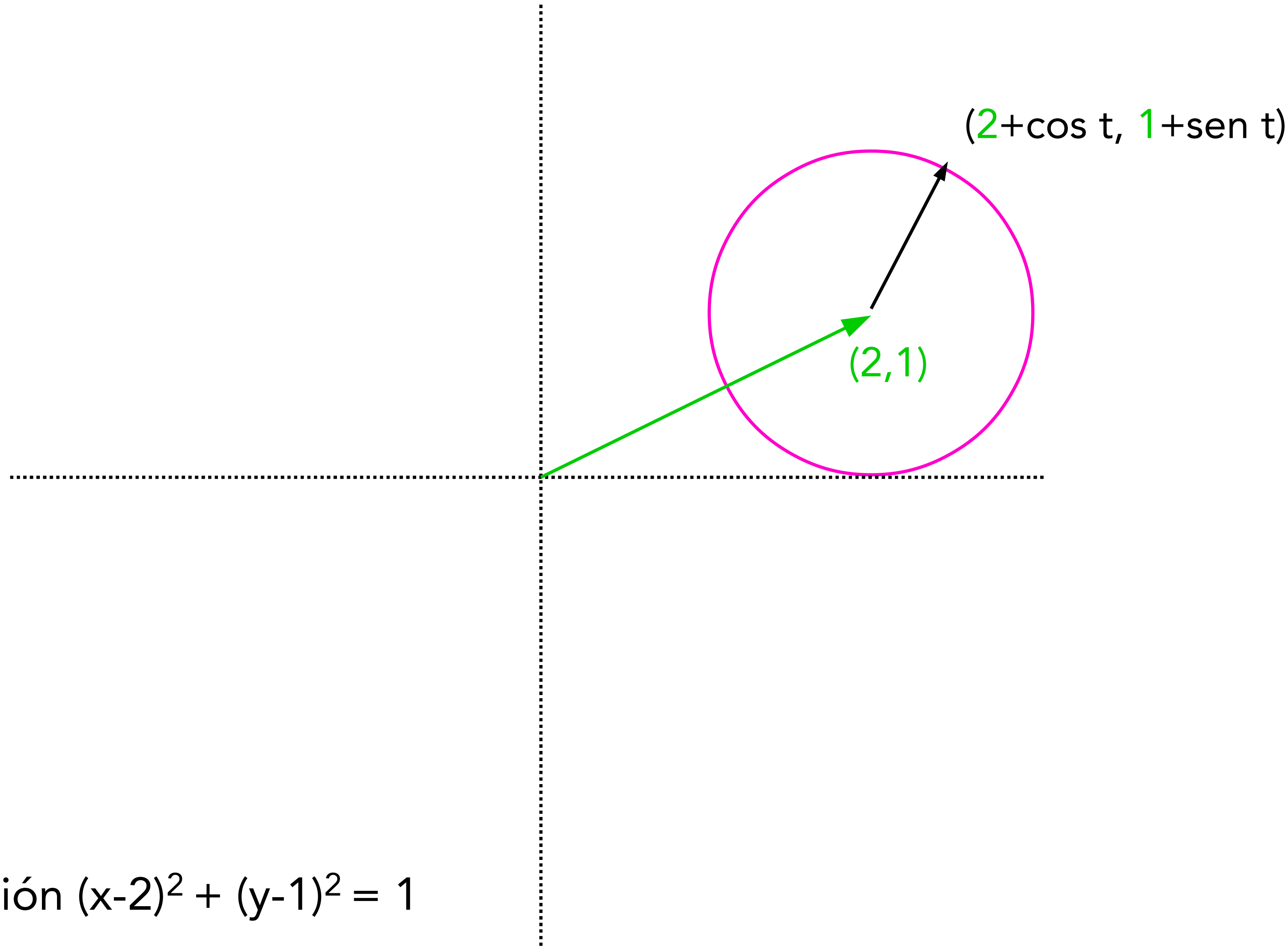


Satisface la ecuación $x^2 + y^2 = 4$

El círculo de radio 1 centrado en (2,1)

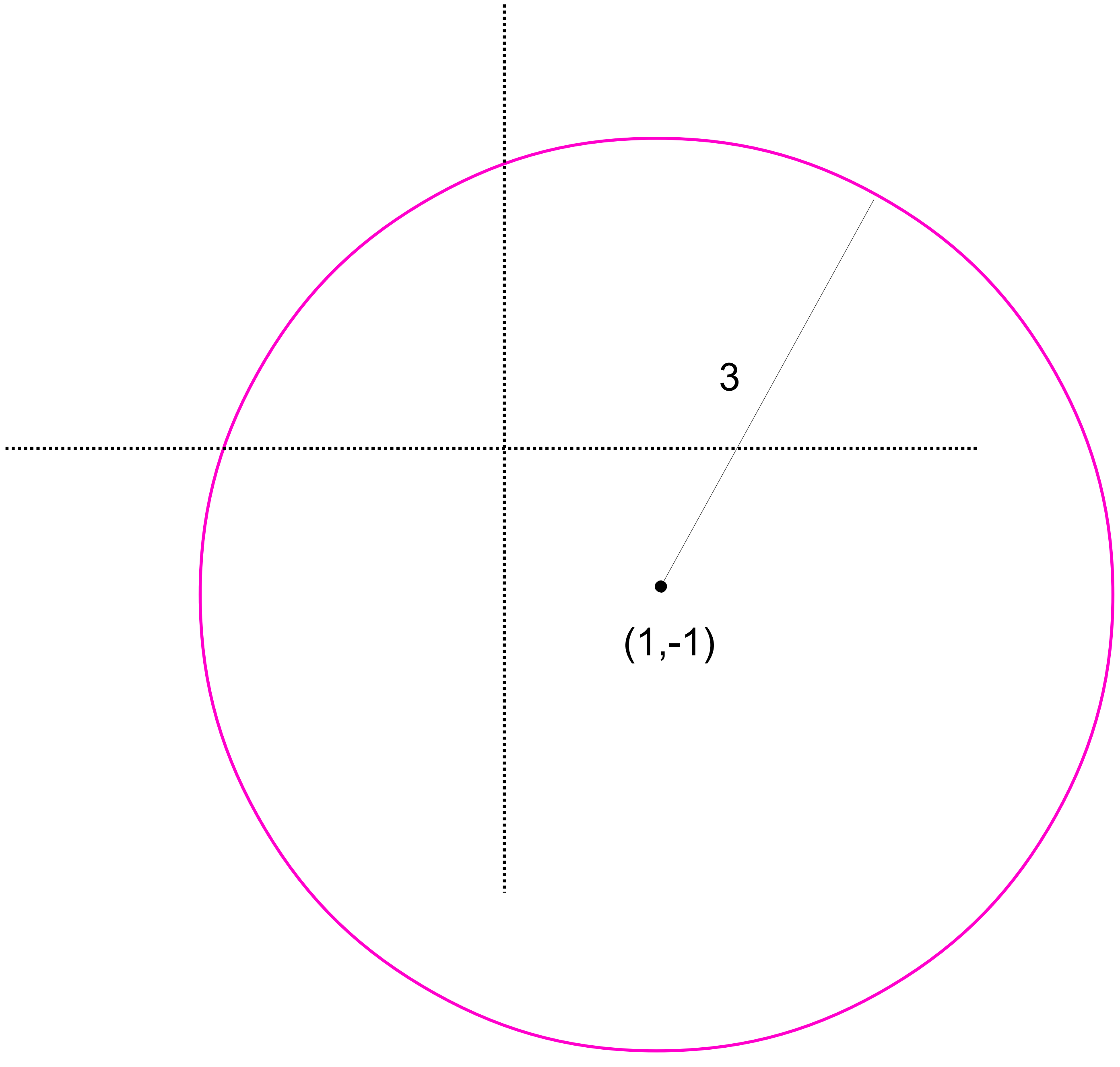


El círculo de radio 1 centrado en (2,1)

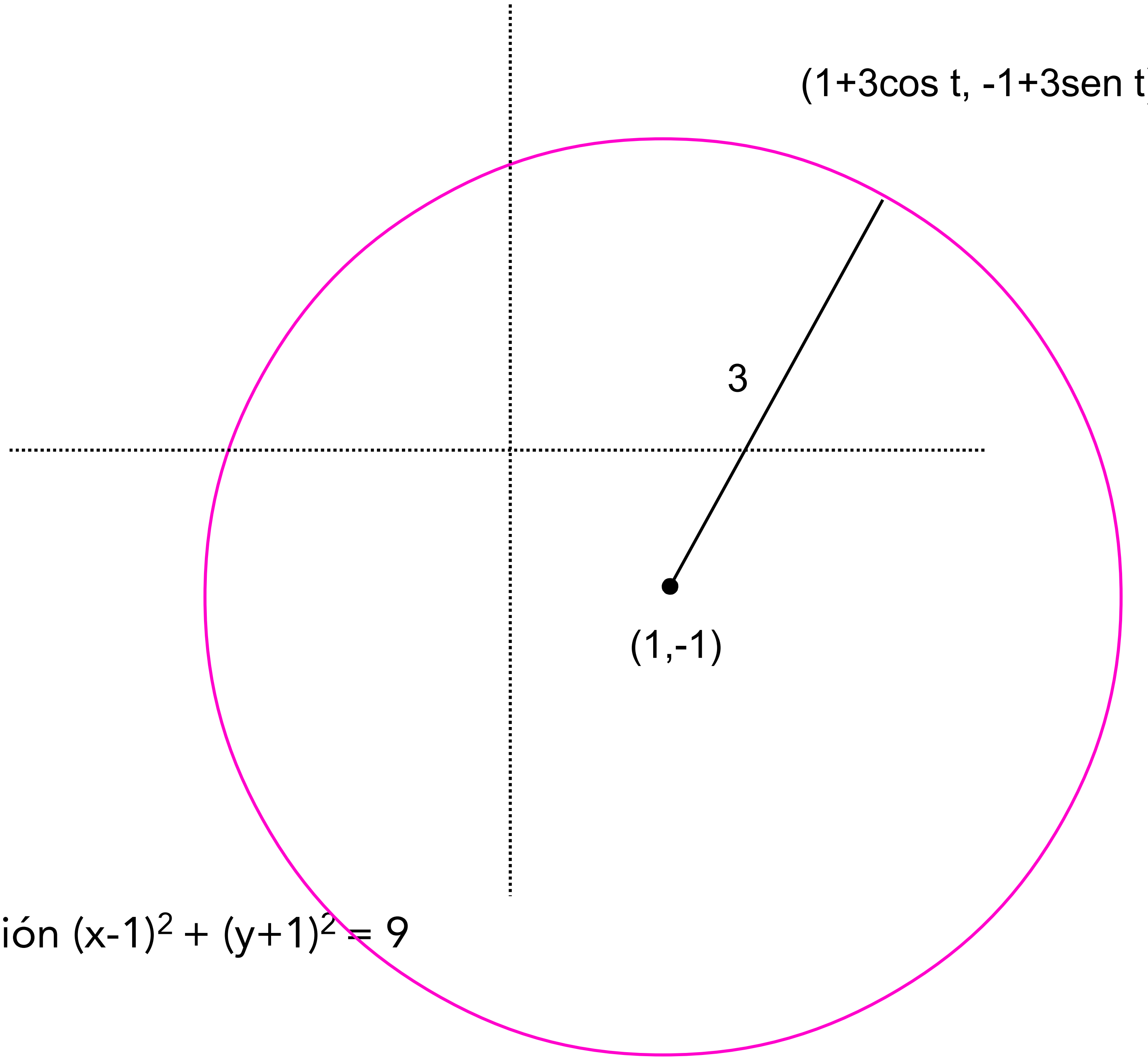


Satisface la ecuación $(x-2)^2 + (y-1)^2 = 1$

Parametriza al círculo de radio 3 centrado en (1,-1) y di que ecuación satisface



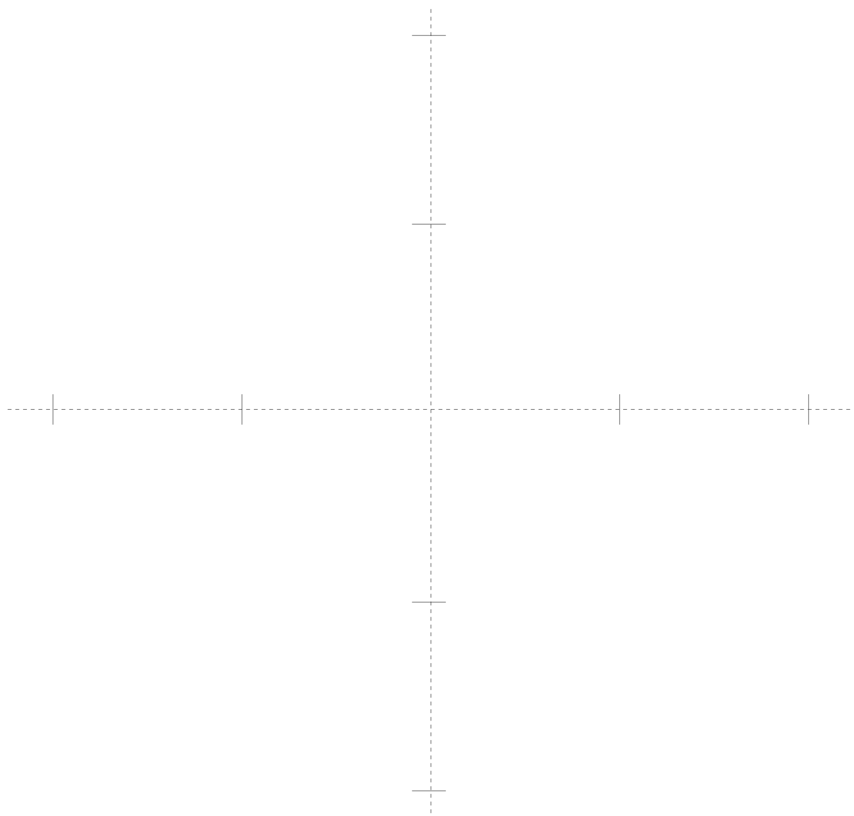
Parametriza al círculo de radio 3 centrado en (1,-1) y di que ecuación satisface

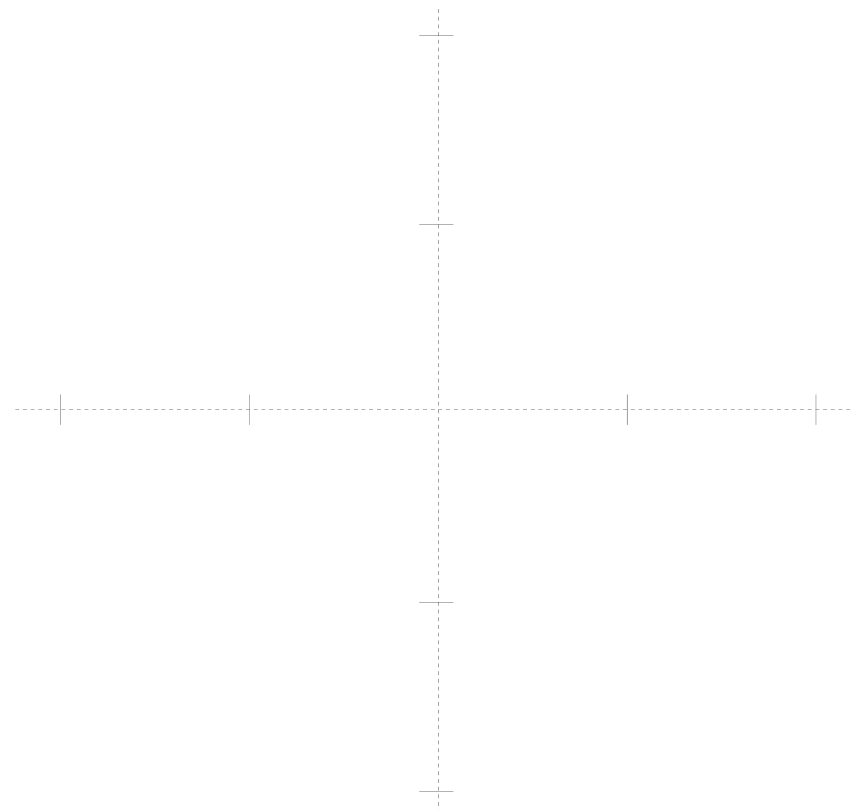


Satisface la ecuación $(x-1)^2 + (y+1)^2 = 9$

¿Cual es la diferencia entre estas curvas?

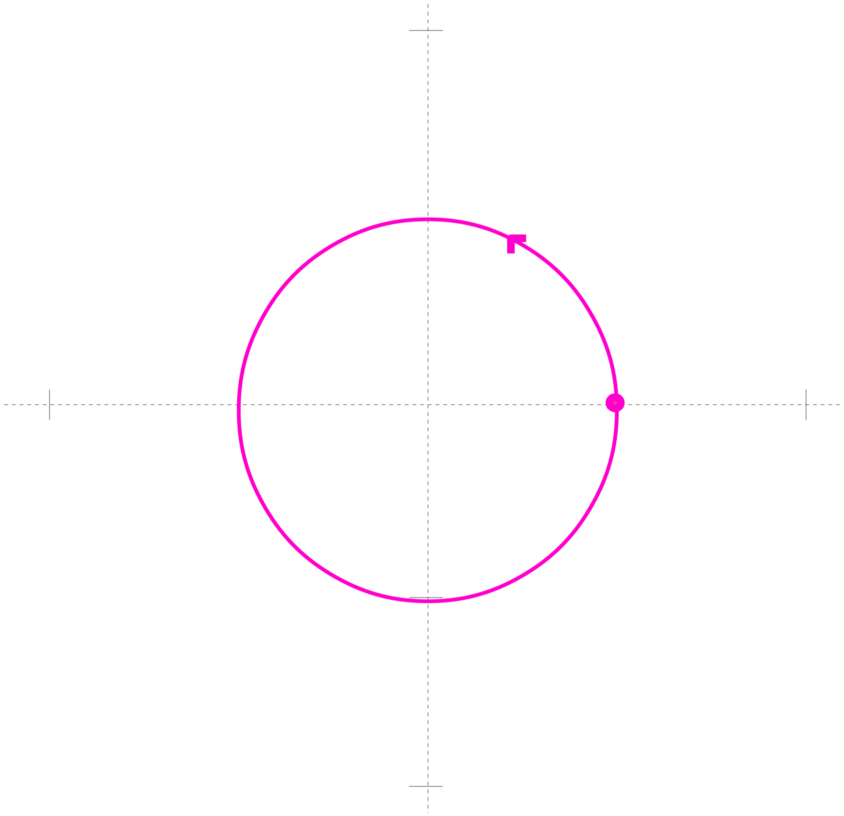
$p(t) = (\cos t, \operatorname{sen} t)$ $\qquad$ $q(t) = (\cos (t+1), \operatorname{sen} (t+1))$?

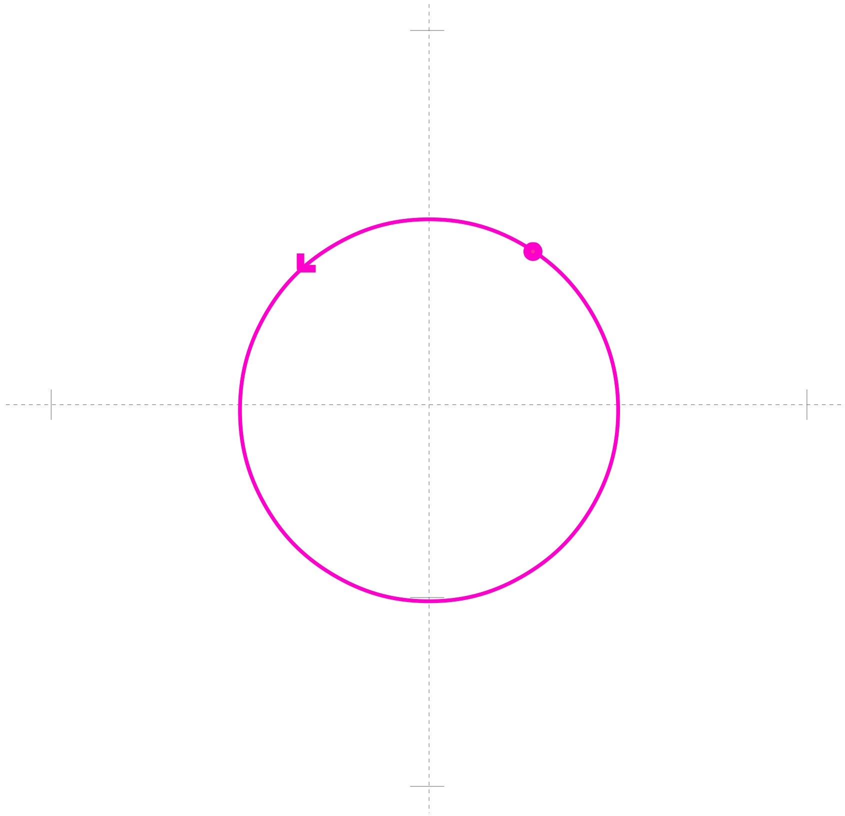




¿Cual es la diferencia entre estas curvas?

$p(t)= (\cos t, \operatorname{sen} t)$ $\quad$ $q(t)= (\cos (t+1), \operatorname{sen} (t+1))$?

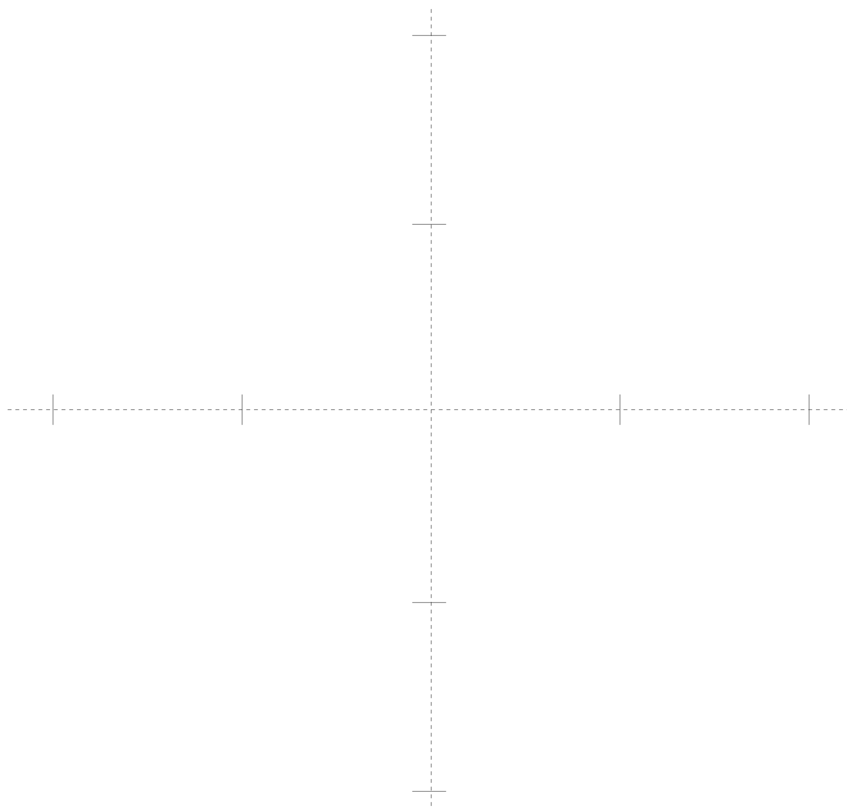




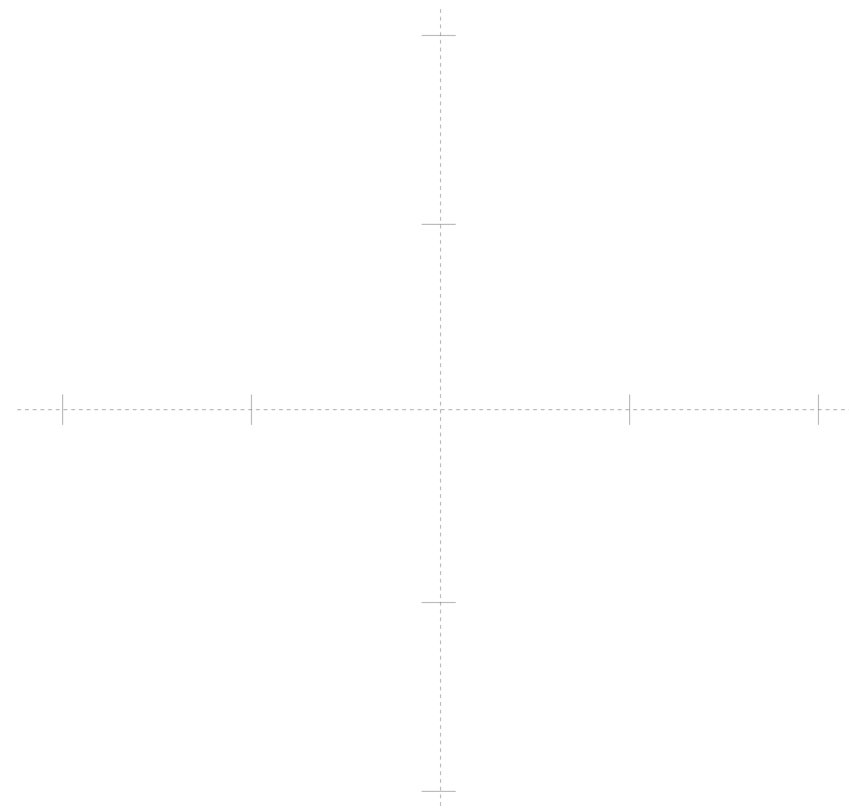
Mismo recorrido, pero q va adelantado

¿Cual es la diferencia entre estas curvas?

$p(t) = (\cos t, \operatorname{sen} t)$

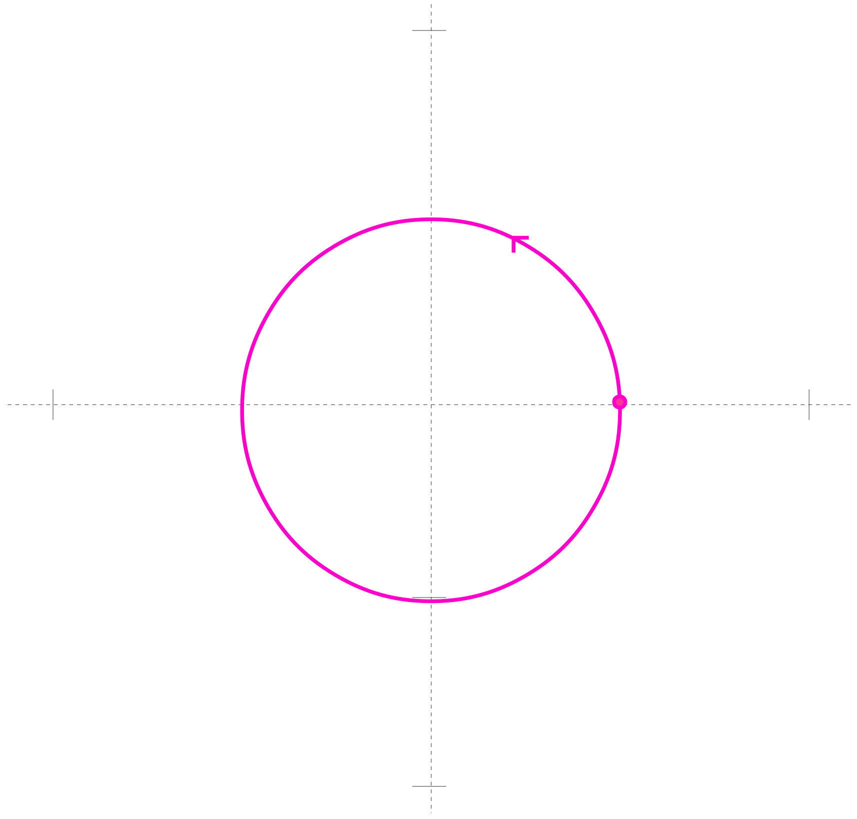


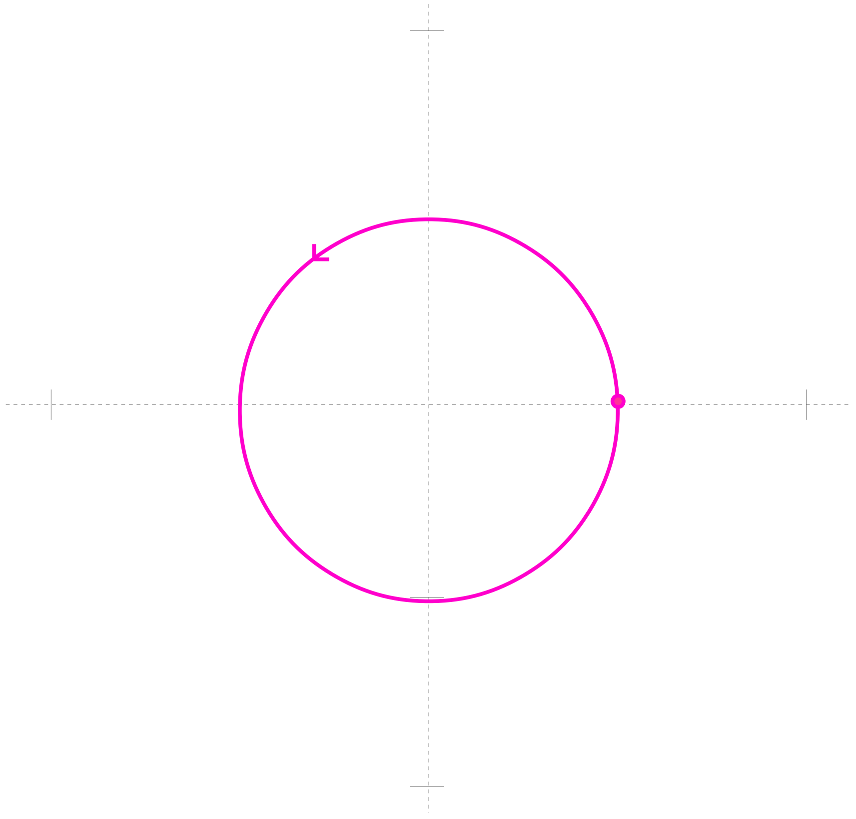
$q(t) = (\cos 2t, \operatorname{sen} 2t)$



¿Cual es la diferencia entre estas curvas?

$p(t)= (\cos t, \operatorname{sen} t)$ $\qquad$ $q(t)= (\cos 2t, \operatorname{sen} 2t)$

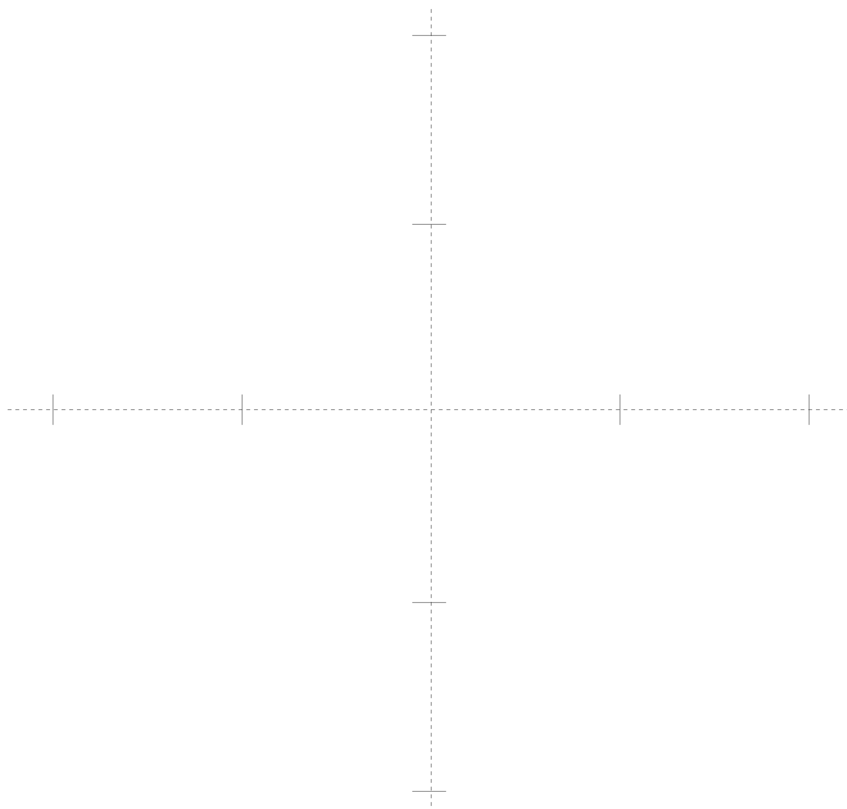


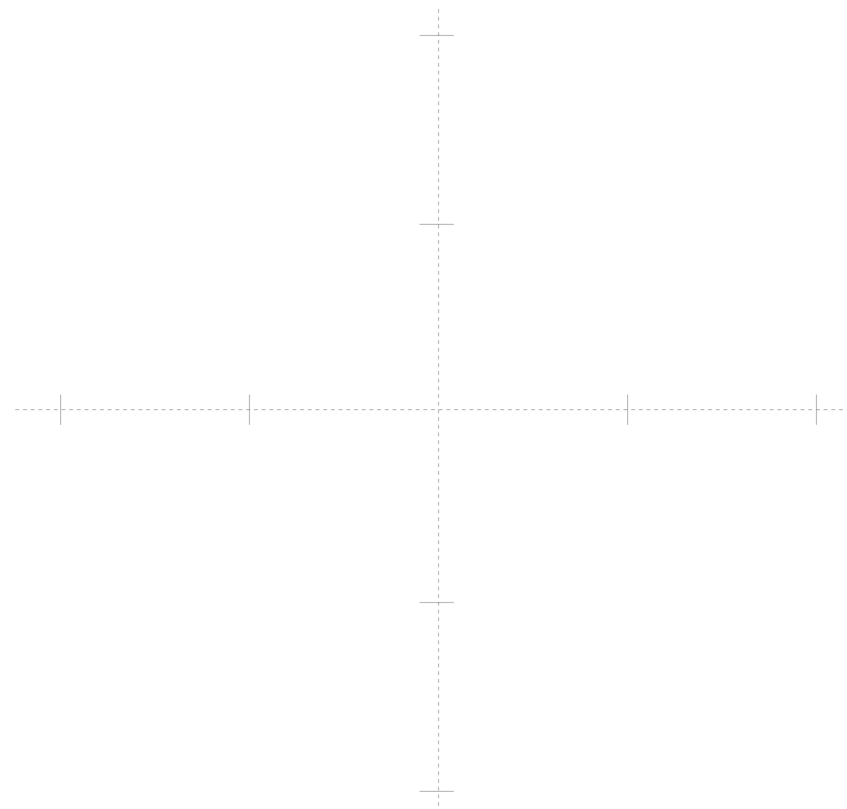


Mismo recorrido, pero q va al doble de velocidad

¿Cual es la diferencia?

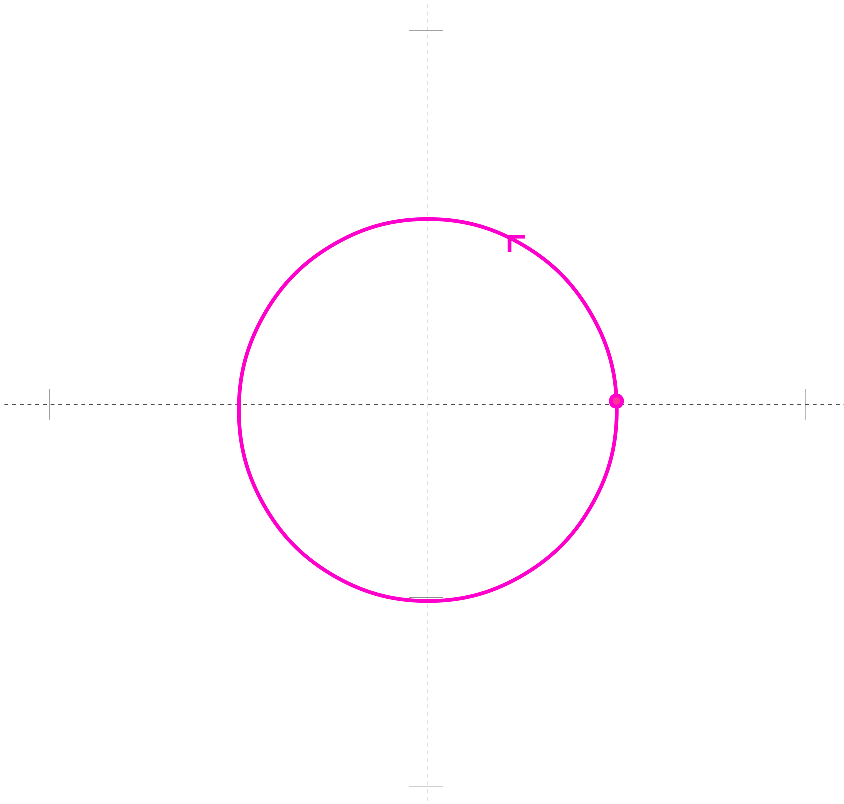
$p(t)= (\cos t, \operatorname{sen} t)$ $\qquad$ $q(t)= (\operatorname{sen} t, \cos t)$?

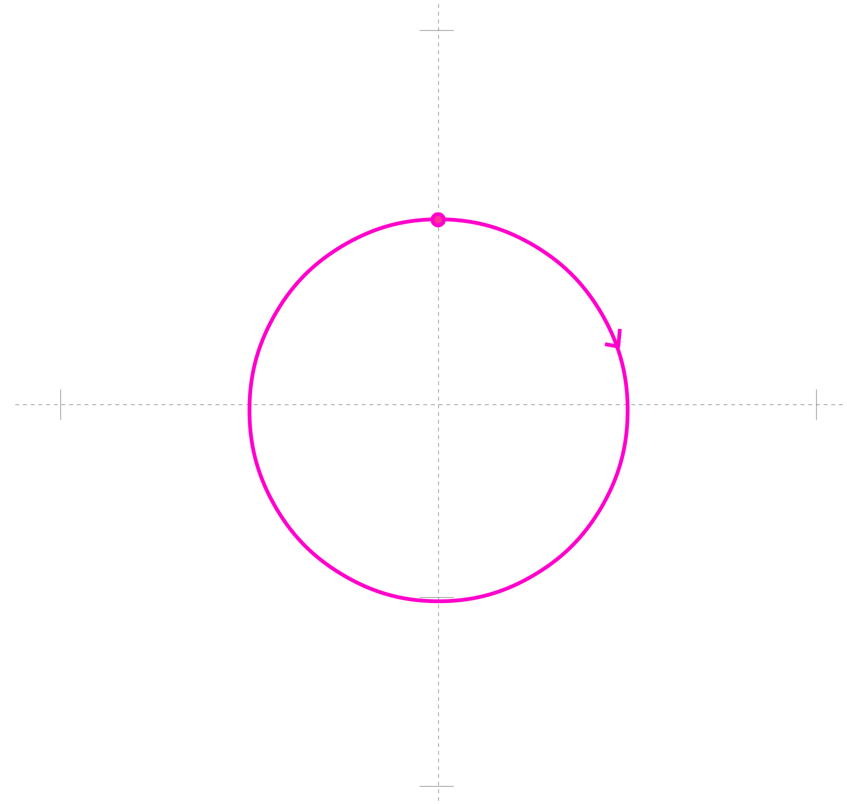




¿Cual es la diferencia?

$p(t) = (\cos t, \operatorname{sen} t)$ $q(t) = (\operatorname{sen} t, \cos t)$?

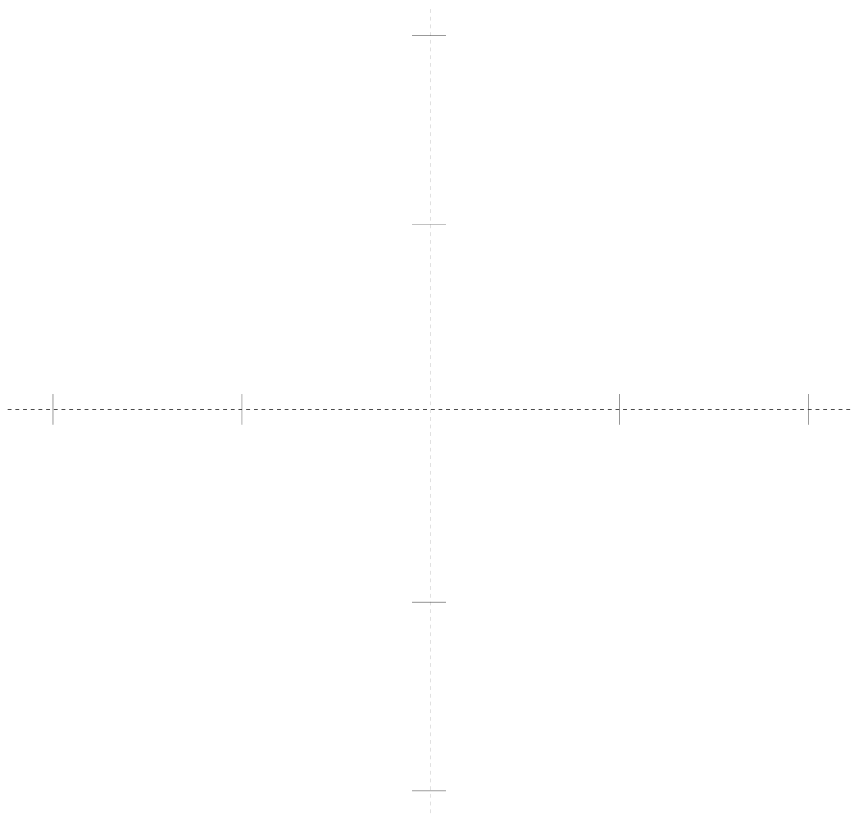


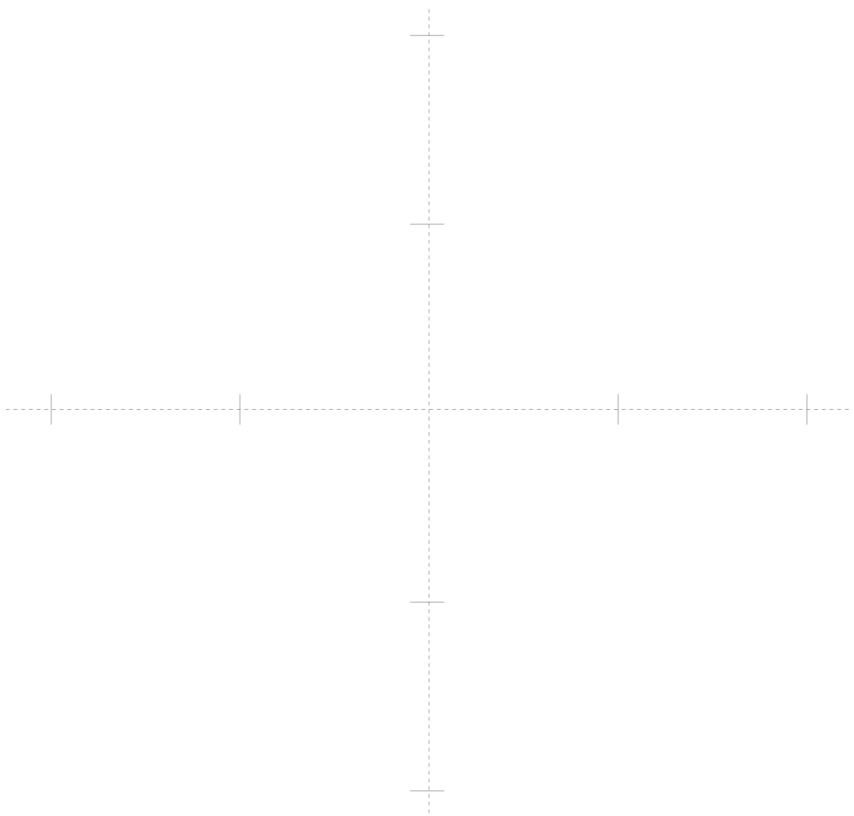


El recorrido de q es el reflejado en la diagonal del recorrido de p

¿Cual es la diferencia?

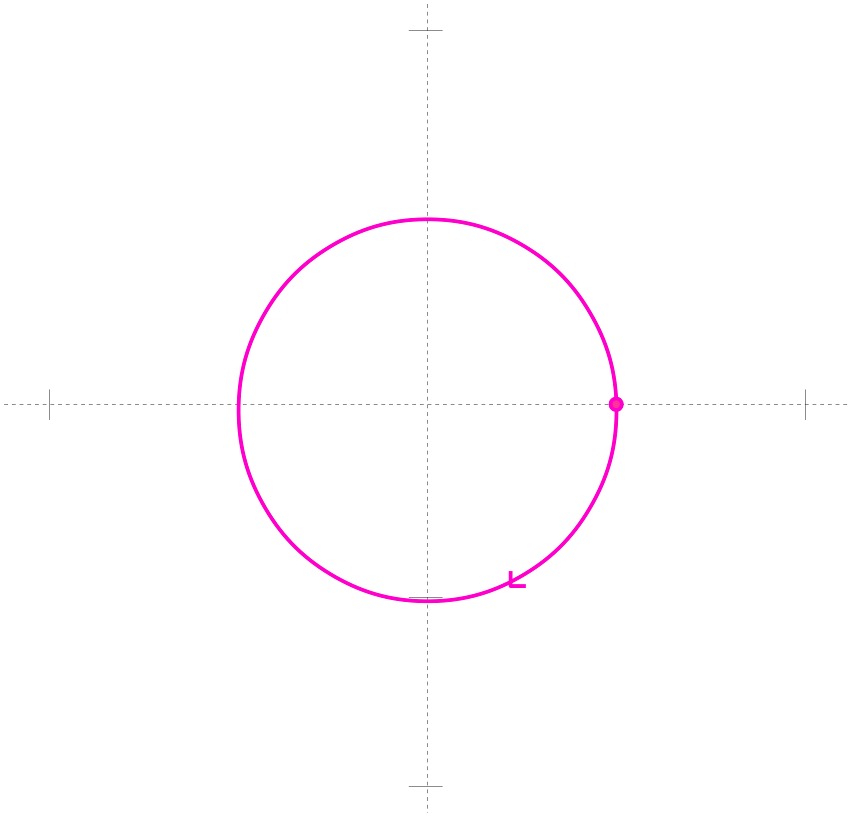
$p(t)= (\cos -t, \operatorname{sen} -t)$ $\qquad$ $q(t)= (-\cos t, -\operatorname{sen} t)$?

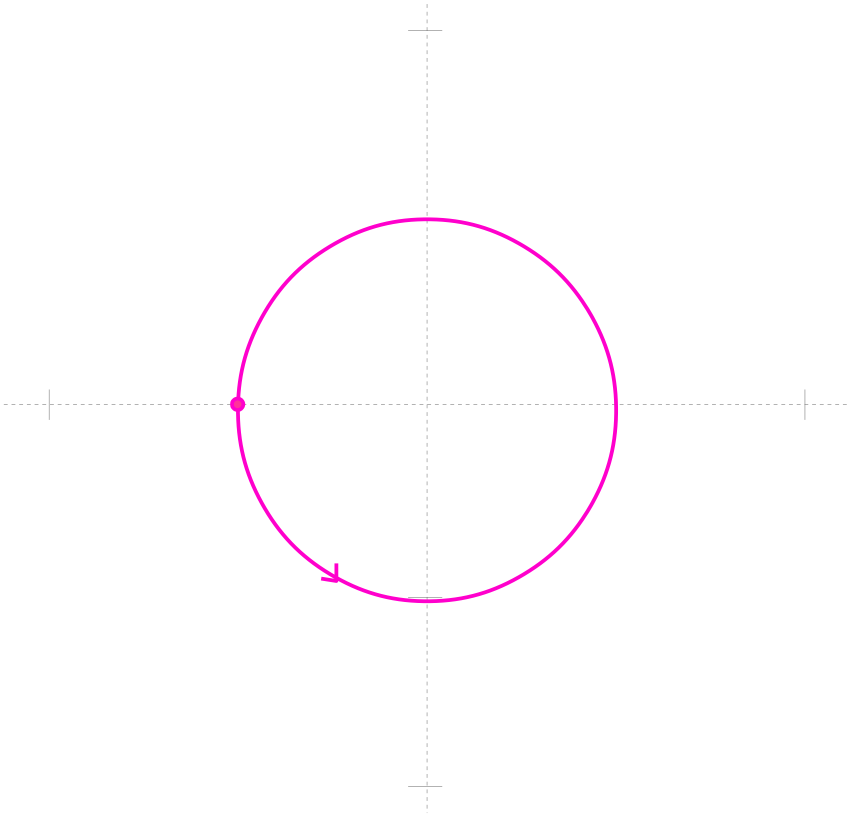




¿Cual es la diferencia?

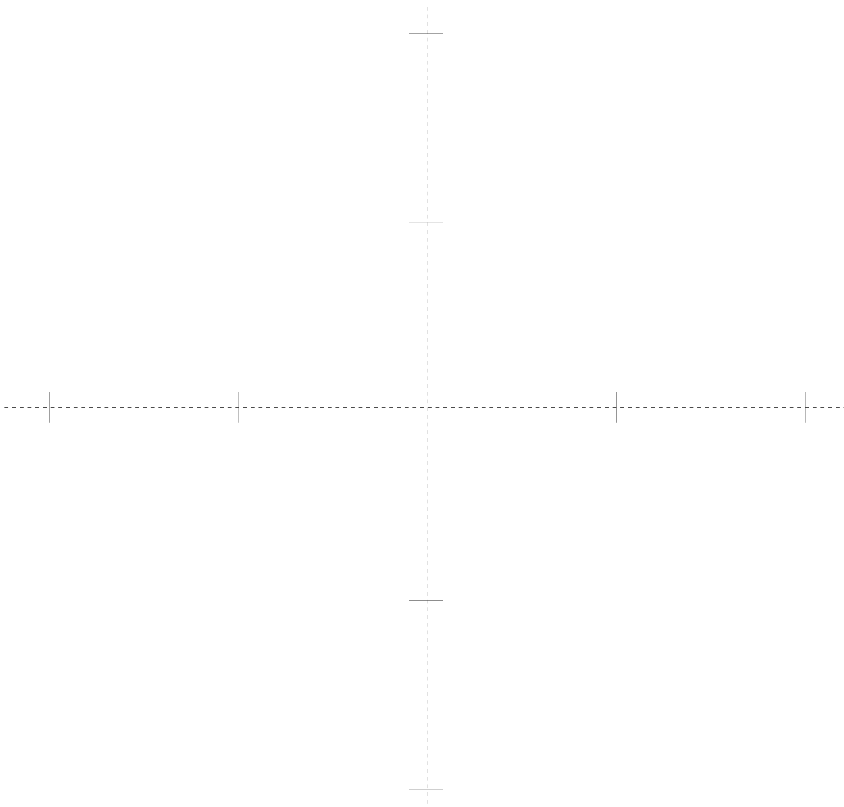
$p(t) = (\cos -t, \text{sen } -t)$ $\qquad$ $q(t) = (-\cos t, -\text{sen } t)$?



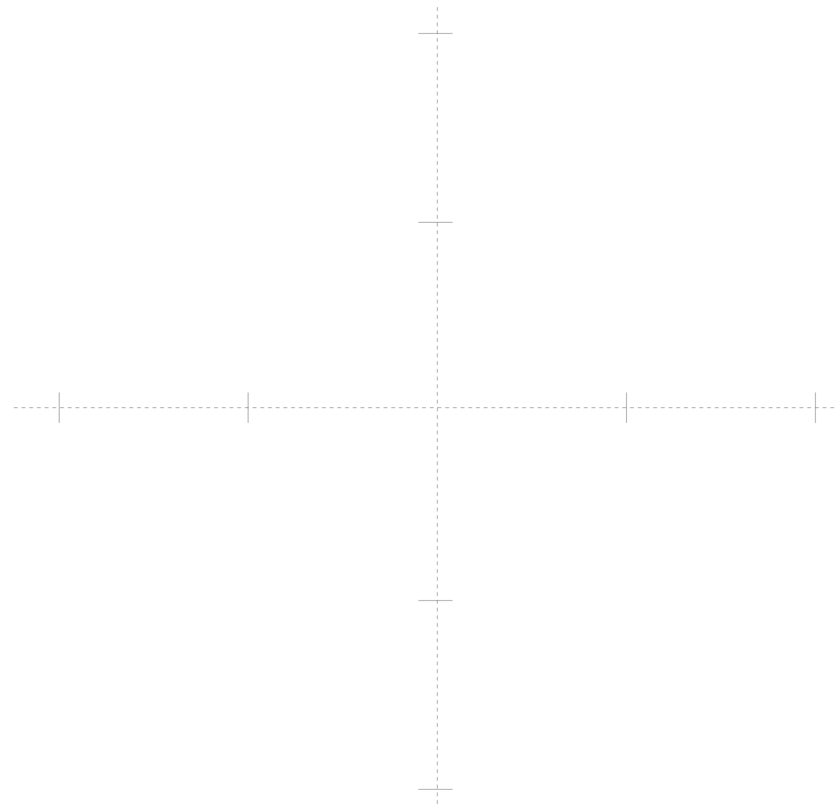


¿Cual es la diferencia?

$p(t) = (2 \cos t, 2 \operatorname{sen} t)$



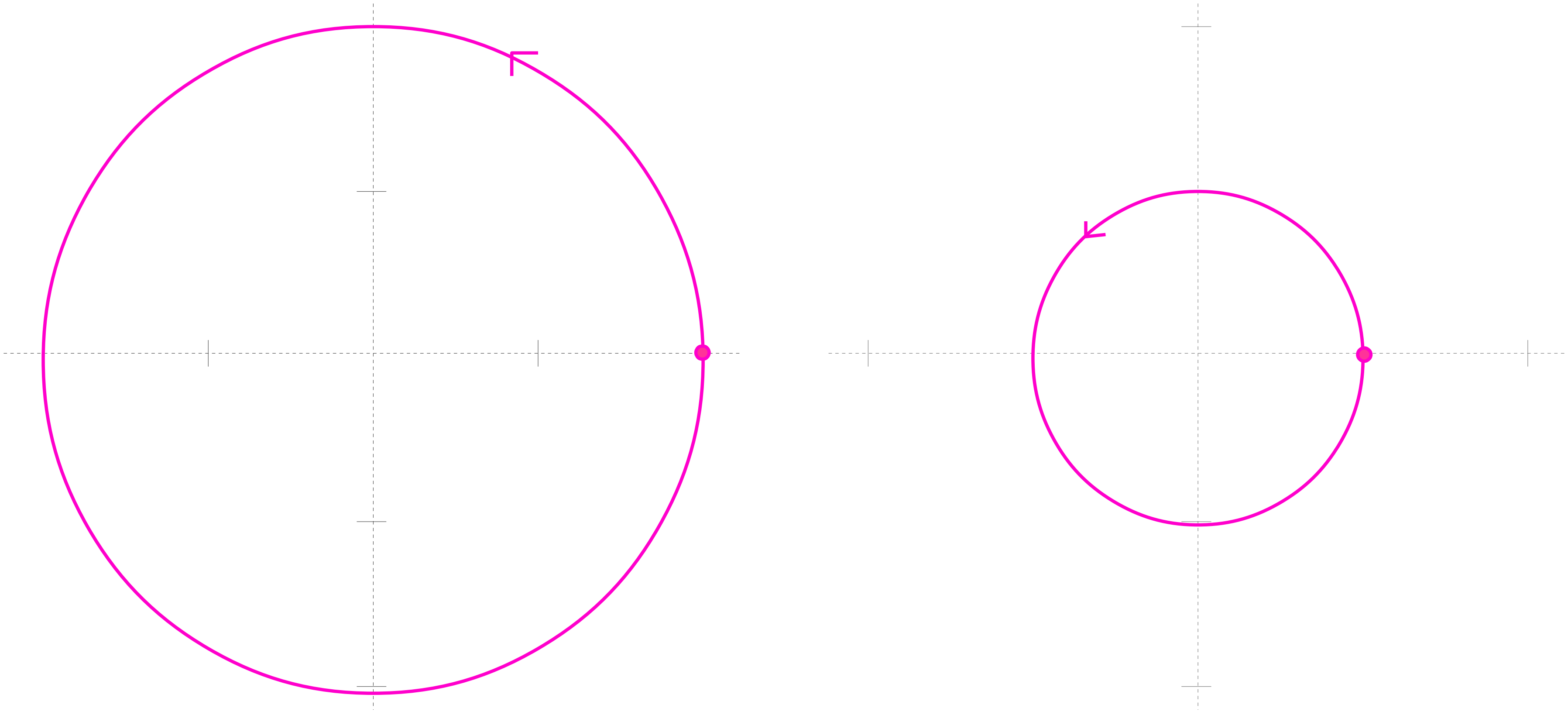
$q(t) = (\cos 2t, \operatorname{sen} 2t)$



¿Cual es la diferencia?

$p(t) = (2 \cos t, 2 \operatorname{sen} t)$

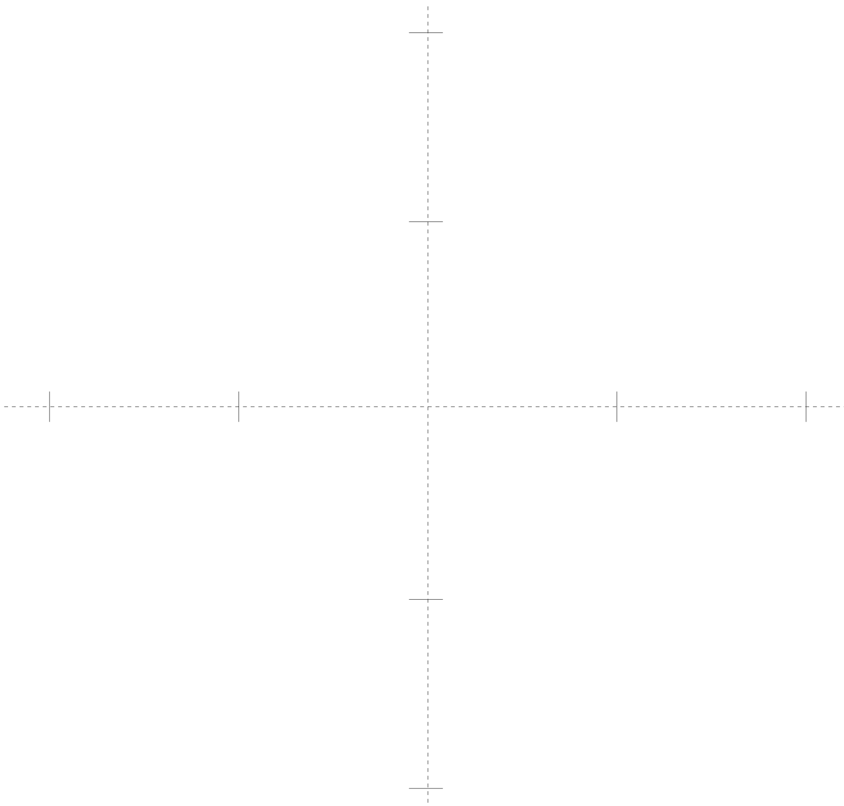
$q(t) = (\cos 2t, \operatorname{sen} 2t)$

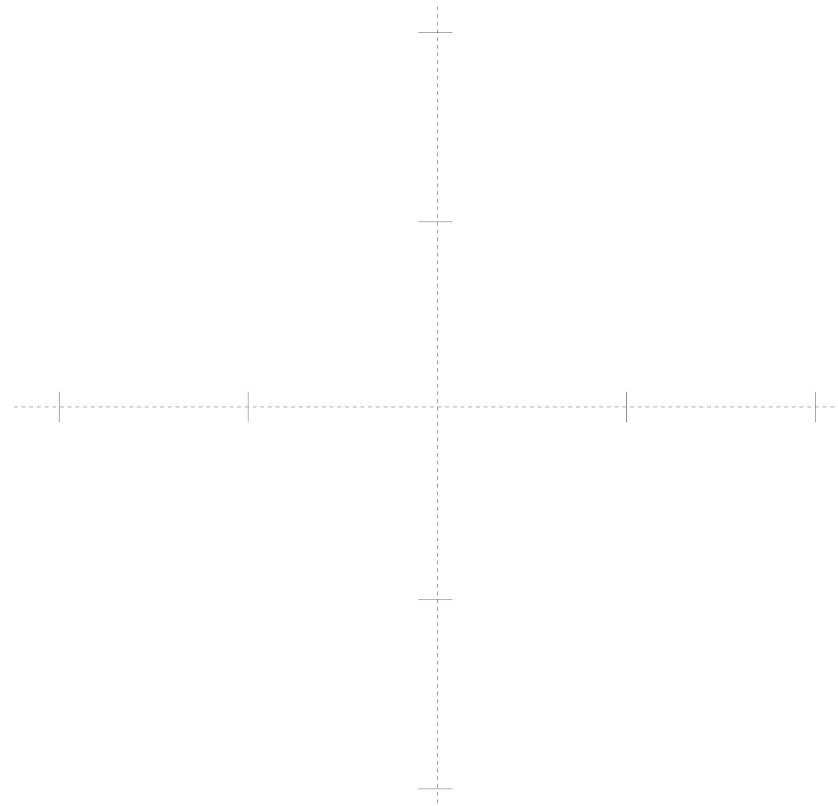


¿Como se ven estas curvas?

$p(t) = (2 \cos t, \operatorname{sen} t)$

$q(t) = (2 \cos t, \cos t)$

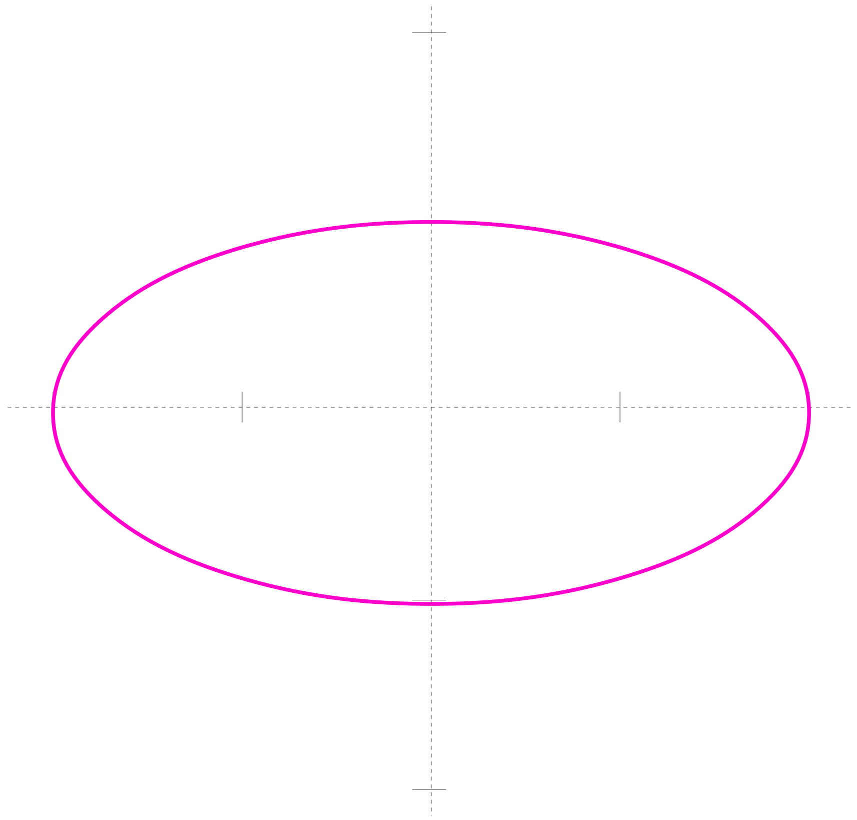


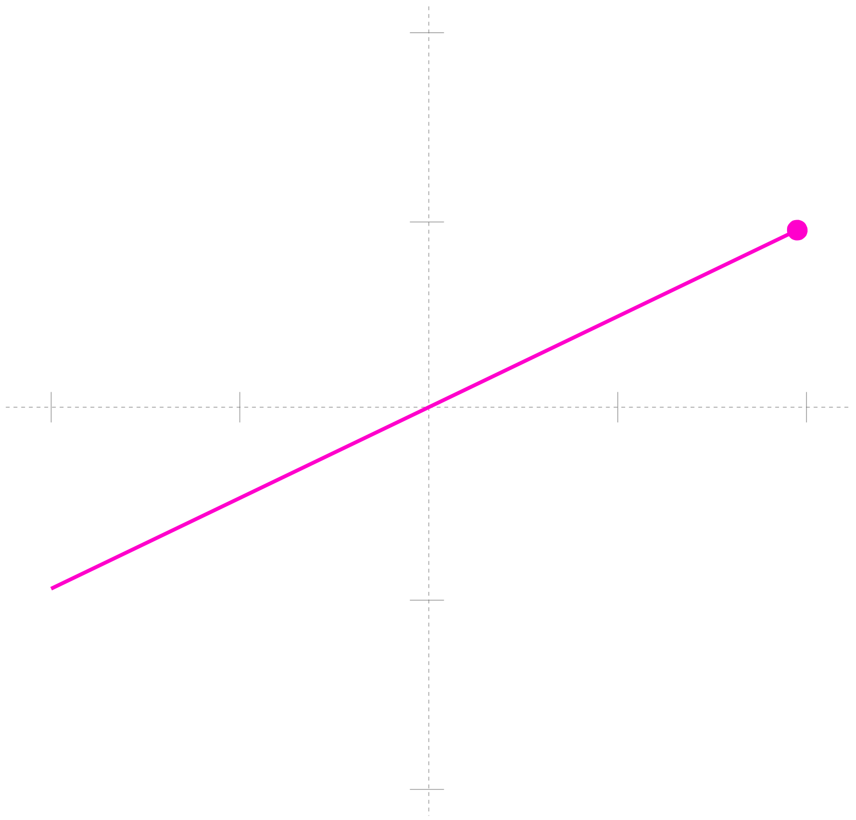


¿Como se ven estas curvas?

$p(t) = (2 \cos t, \text{sen } t)$

$q(t) = (2 \cos t, \cos t)$





$(x/2)^2 + y^2 = 1$

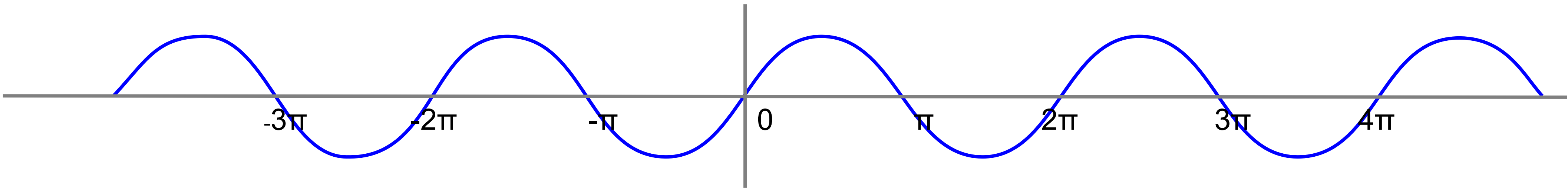
$x/2 - y = 0$

Un circulo alargado

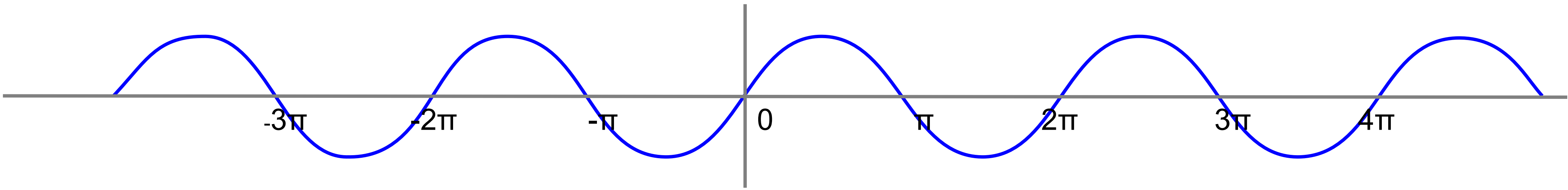
Una segmento de recta

¿Como se ven las curvas $p(t)= (t, \text{sen } t)$ y $q(t)= (t, \cos t)$?

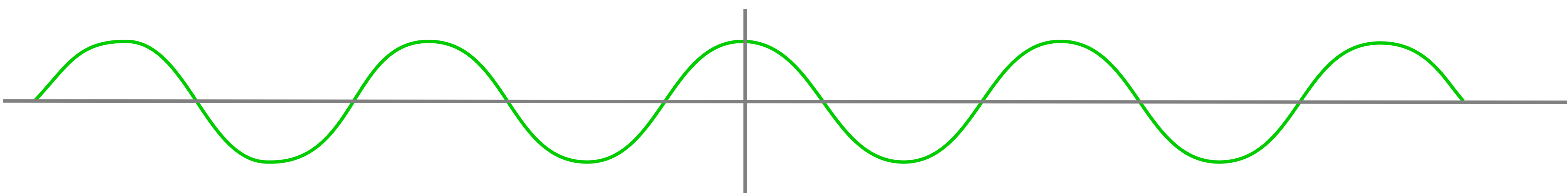
La curva s(t) = (t, sen t) describe un movimiento ondulatorio: la altura de un punto que gira alrededor del circulo unitario con rapidez constante 1:



La curva s(t) = (t, sen t) describe un movimiento ondulatorio: la altura de un punto que gira alrededor del circulo unitario con rapidez constante 1:

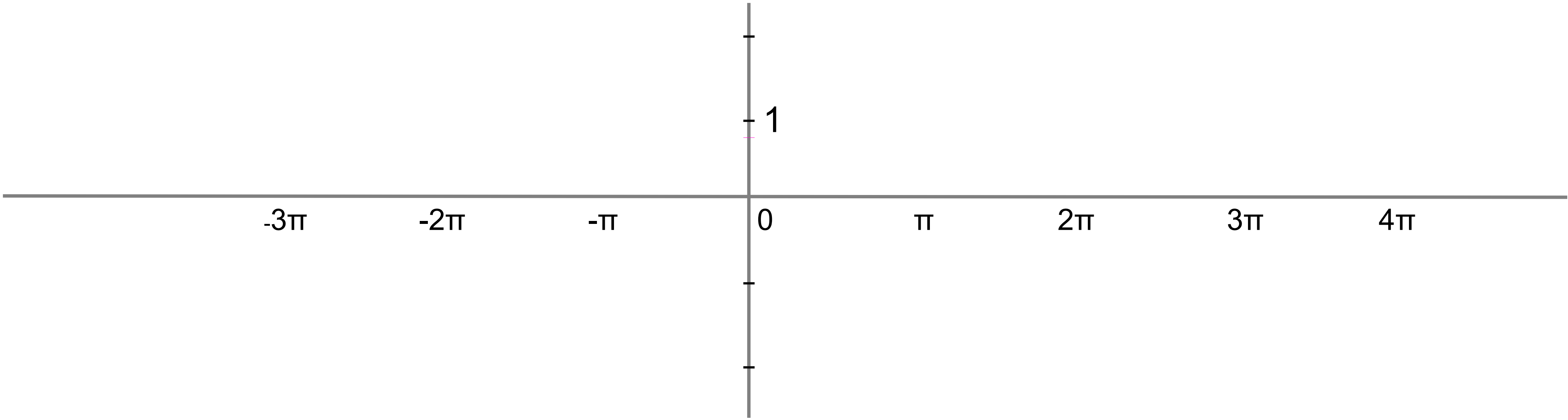


La curva c(t) = (t, cos t) se ve igual, pero desplazada, ya que cos(t)=sen(t+π/2):



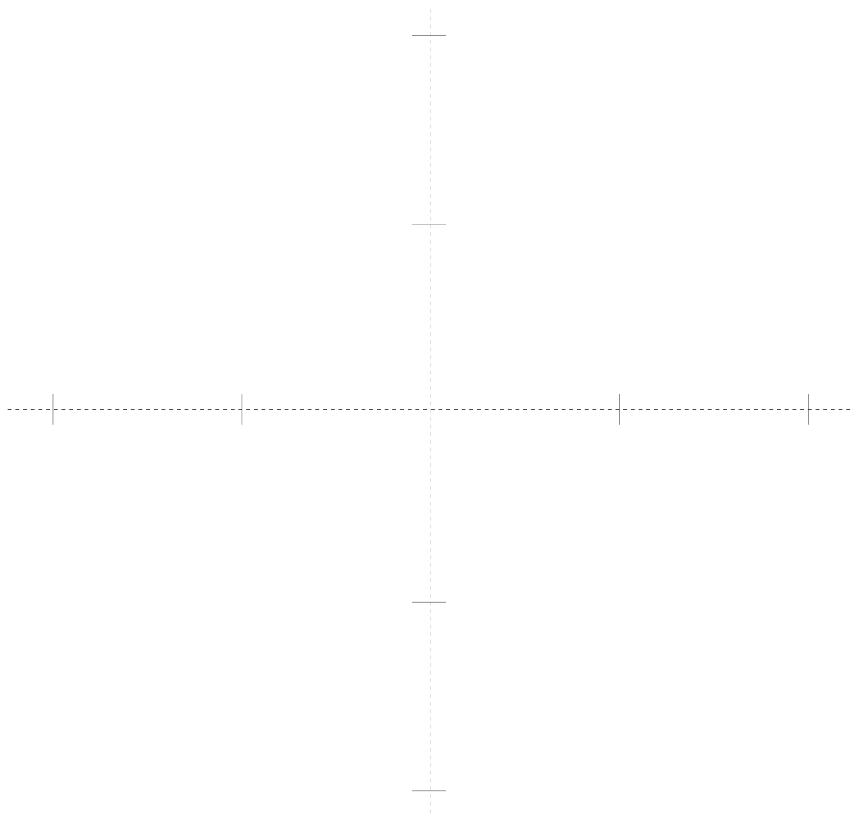
Ejercicio. Grafica estas curvas de modo que se vean claramente sus diferencias:

$p(t) = (t, 2\text{sen } t)$ $q(t) = (t, \text{sen } 2t)$ $r(t) = (2t, \text{sen } t)$ $s(t) = (2t, \text{sen } 2t)$

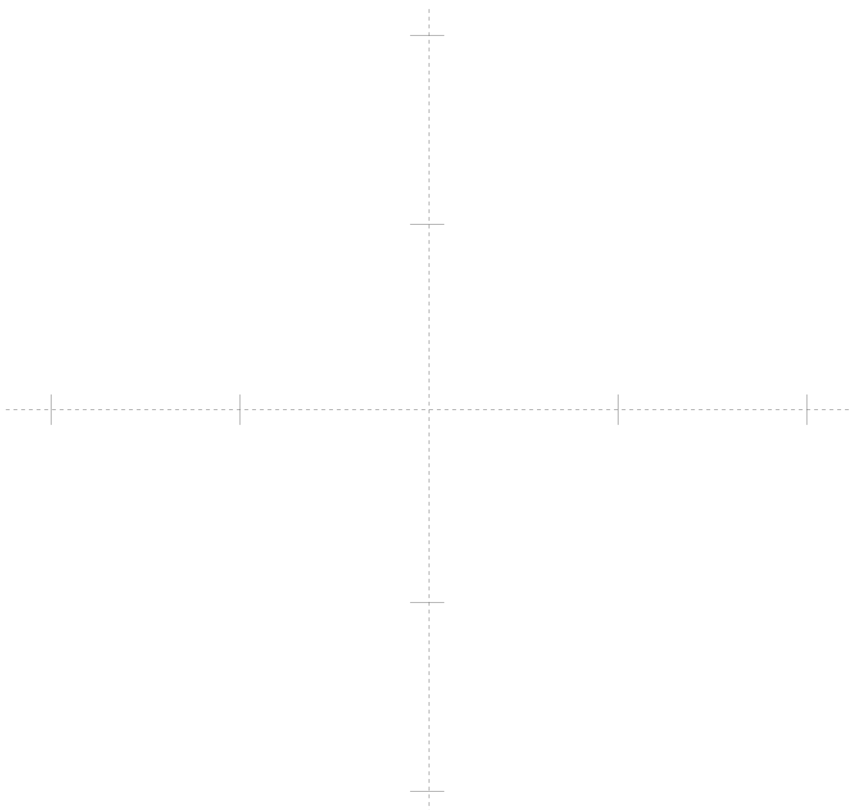


¿Como se verán estas curvas?

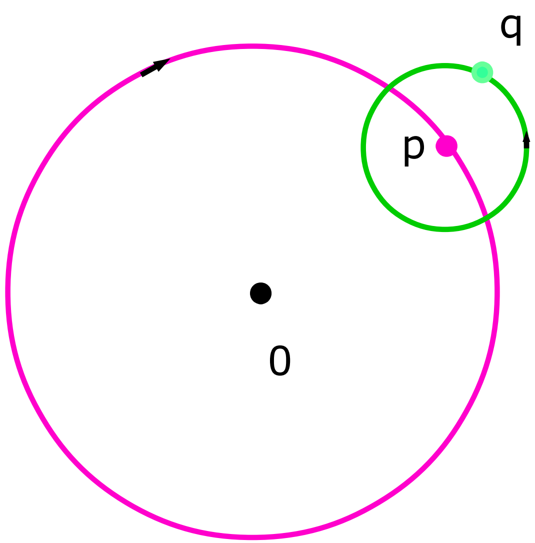
$p(t)= (\cos 2t, \operatorname{sen} 3t)$



$q(t)= (\cos 2t, \cos 3t)$



Combinando vectorialmente movimientos simples pueden obtenerse movimientos complicados

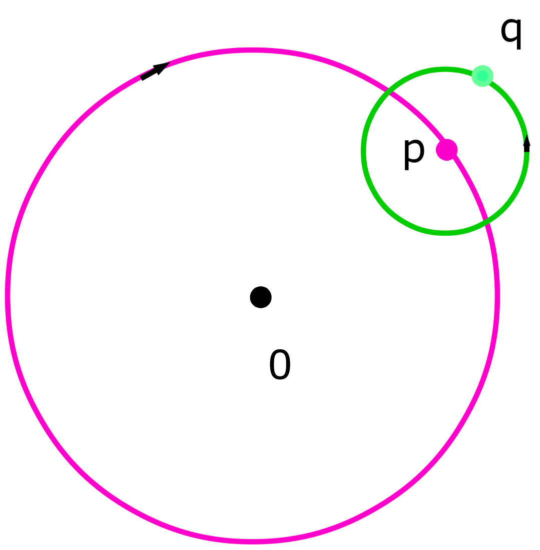


Podemos pensar por ejemplo en un punto q que gira alrededor de un punto p, mientras que p gira alrededor de un punto o. ¿Como se verá el movimiento de q desde o?

Esto depende de las velocidades de giro de p y de q

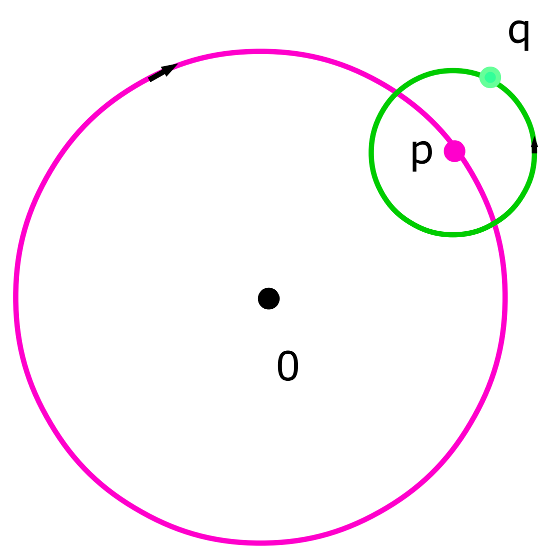
Un punto p gira alrededor del punto o en un circulo de radio 3, en la dirección de las manecillas del reloj con rapidez constante 3 mientras que el punto q gira alrededor de p en un circulo de radio 1 en dirección contraria a las manecillas del reloj con rapidez constante 2.

¿Cual es la posición del punto q respecto al origen en el instante t?



Un punto p gira alrededor del punto o en un circulo de radio 3, en la dirección de las manecillas del reloj con rapidez constante 3 mientras que el punto q gira alrededor de p en un circulo de radio 1 en dirección contraria a las manecillas del reloj con rapidez constante 2.

¿Cual es la posición del punto q respecto al origen en el instante t?



La posición de p respecto al origen esta dada por

$p(t) = (3\text{sen}t, 3\cos t)$

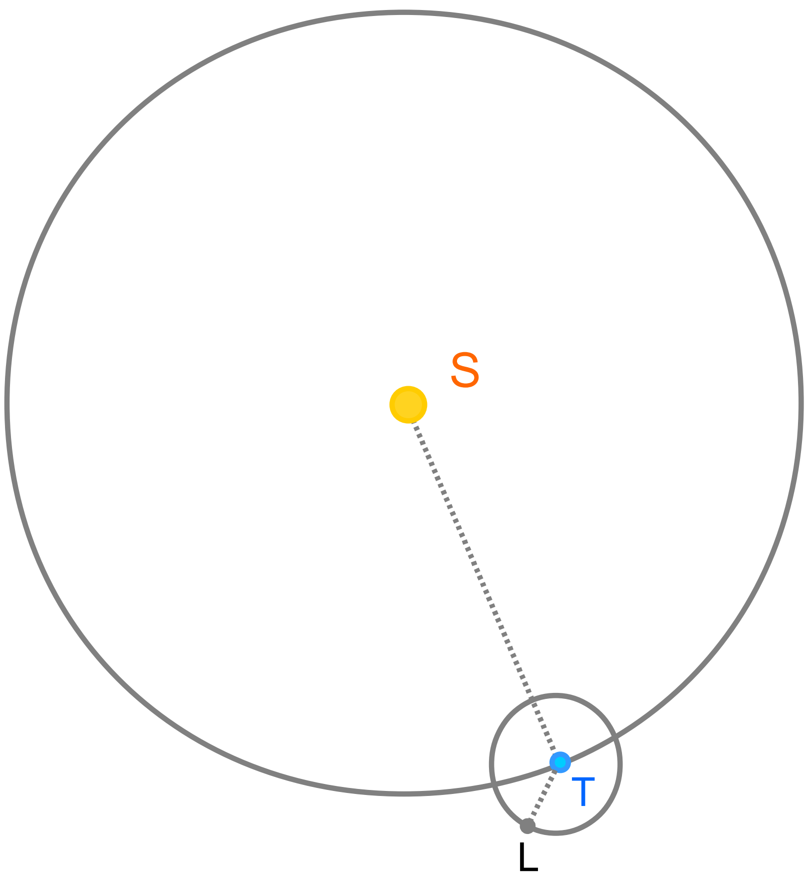
La posición de q respecto a p esta dada por

$r(t) = (\cos 2t, \text{sen}2t)$

así que la posición de q respecto al origen esta dada por $q(t) = p(t) + r(t) = (3\text{sen}t+\cos 2t, 3\cos t+\text{sen}2t)$.

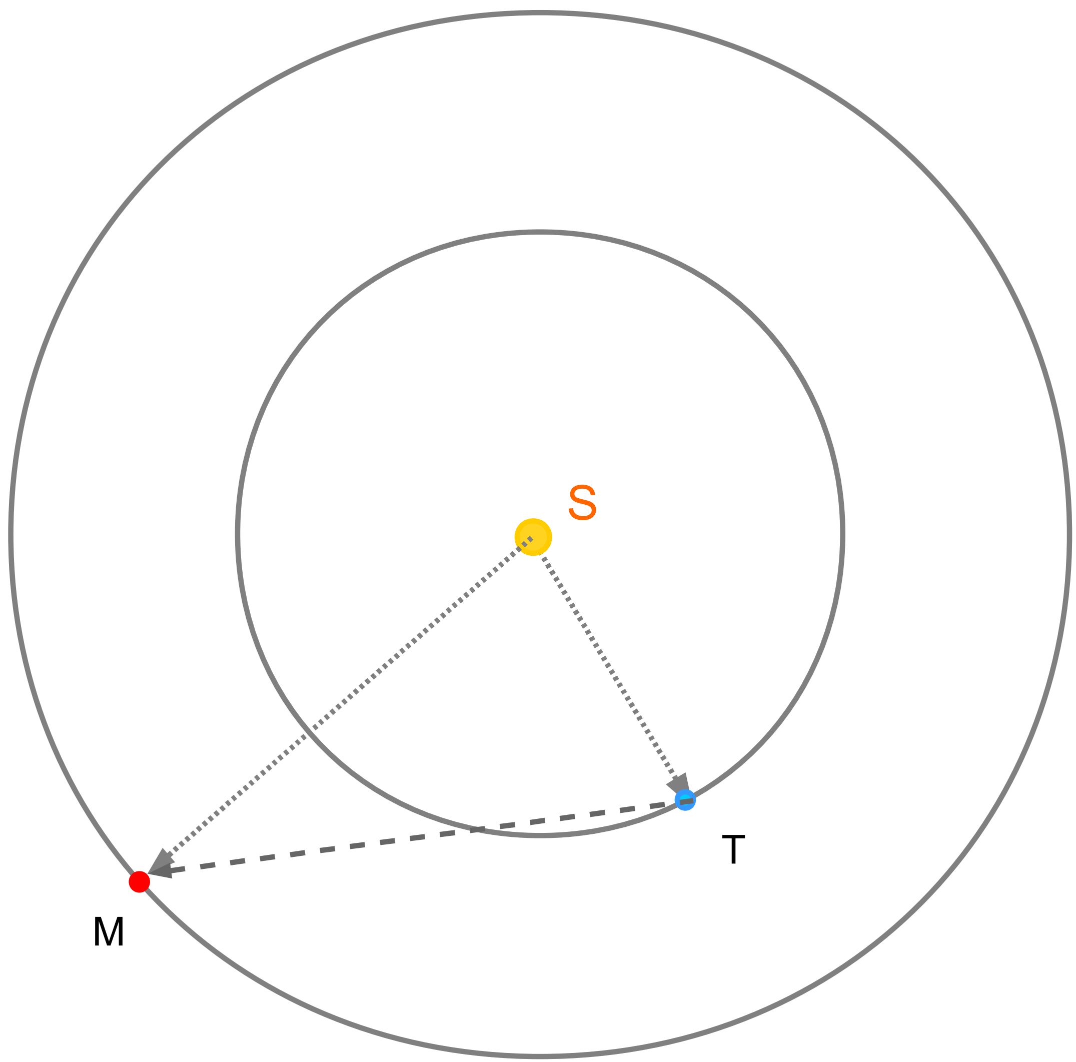
La trayectoria de la Luna alrededor del Sol es la suma de la trayectoria de la Luna alrededor de la Tierra con el movimiento de la Tierra alrededor del Sol.

.



La trayectoria de Marte desde la tierra es la resta de la trayectoria de Marte desde el Sol y la trayectoria de la Tierra desde el Sol.

.

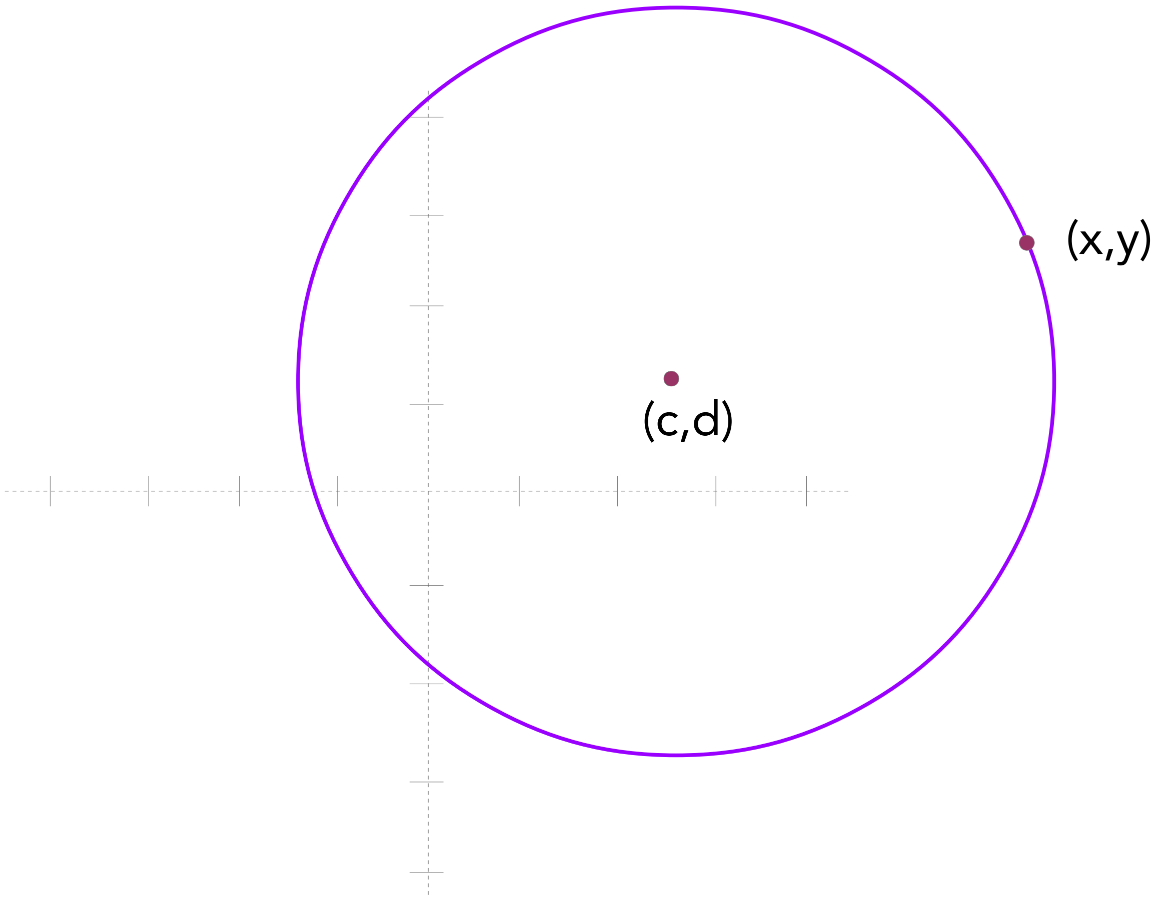


Círculos

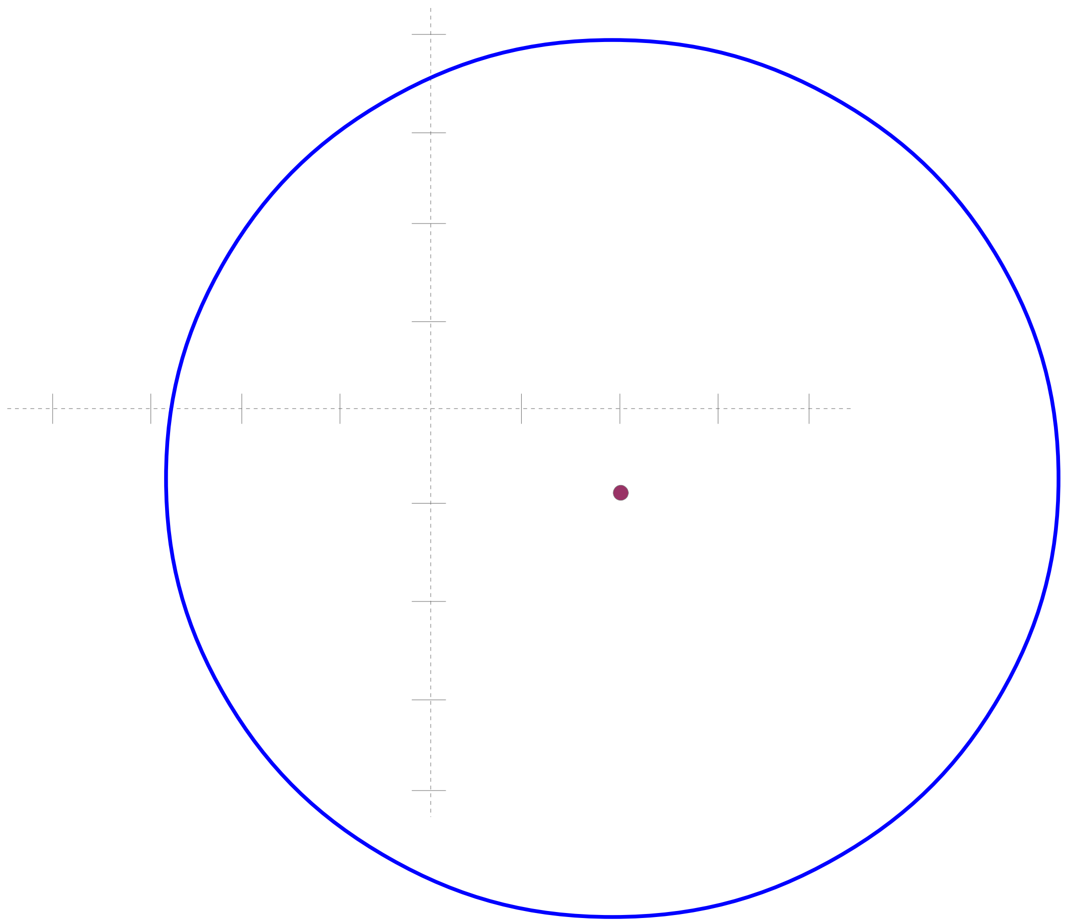
Los círculos son las curvas formadas por los puntos del plano que están a la misma distancia de un punto fijo. Este punto es el centro y la distancia es el radio del círculo.

Como la distancia del punto (x,y) al punto (c,d) es $\sqrt{(x\text{-}c)^2+(y\text{-}d)^2}$

entonces el círculo de radio r y centro en (a,b) tiene ecuación $(x\text{-}c)^2+(y\text{-}d)^2 = r^2$



Ejemplo. El círculo de radio 5 con centro en el punto (2,-1) tiene ecuación ...



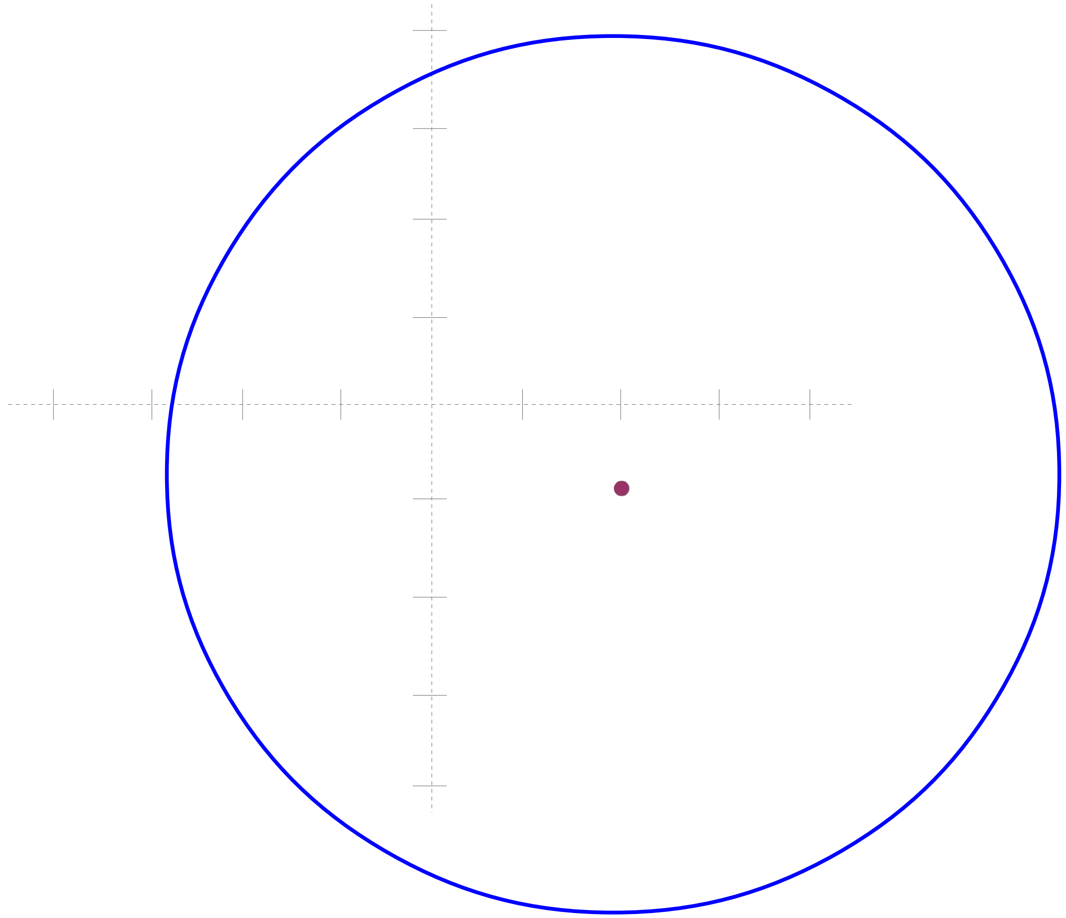
Ejemplo. El círculo de radio 5 con centro en el punto (2,-1) tiene ecuación

$(x-2)^2+(y+1)^2 = 5^2$

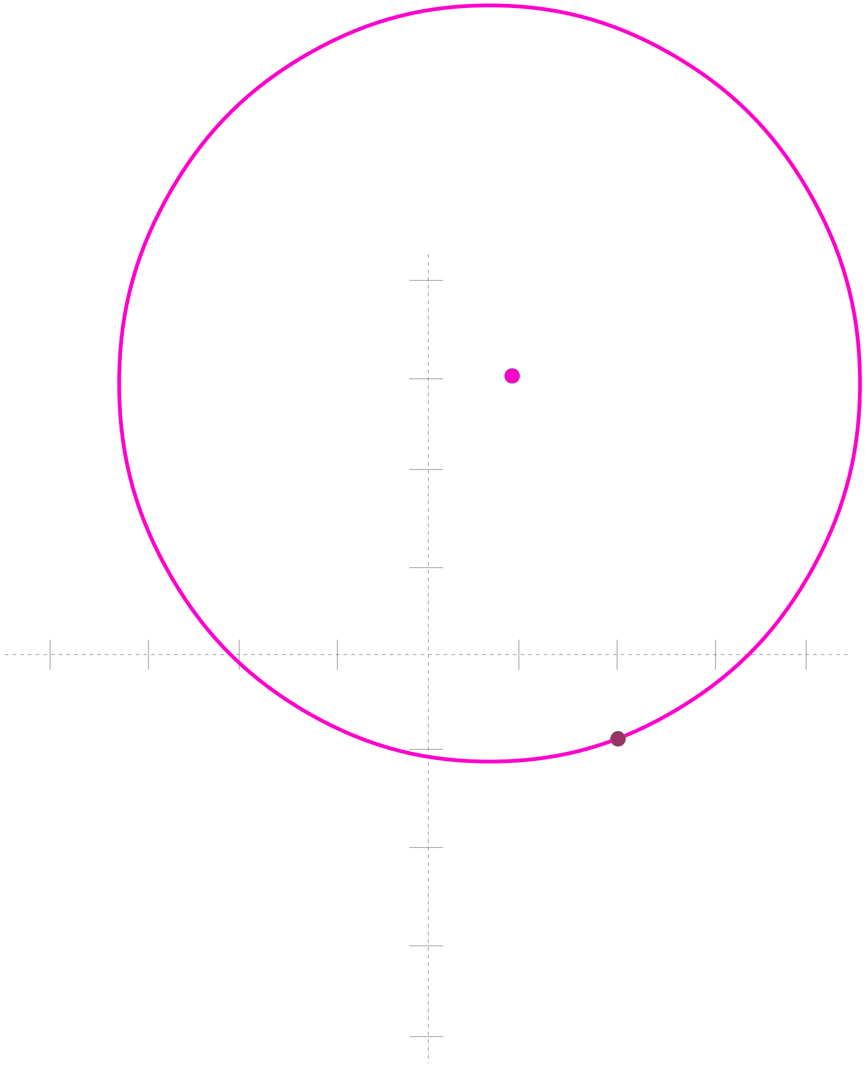
que también puede escribirse

$x^2-4x+4+y^2+2y+1= 25$ y se simplifica a

$x^2+y^2-4x+2y = 20$



Ejercicio. ¿Que ecuación tiene el círculo con centro en el punto (1,3) y que pasa por el punto (2,-1)?



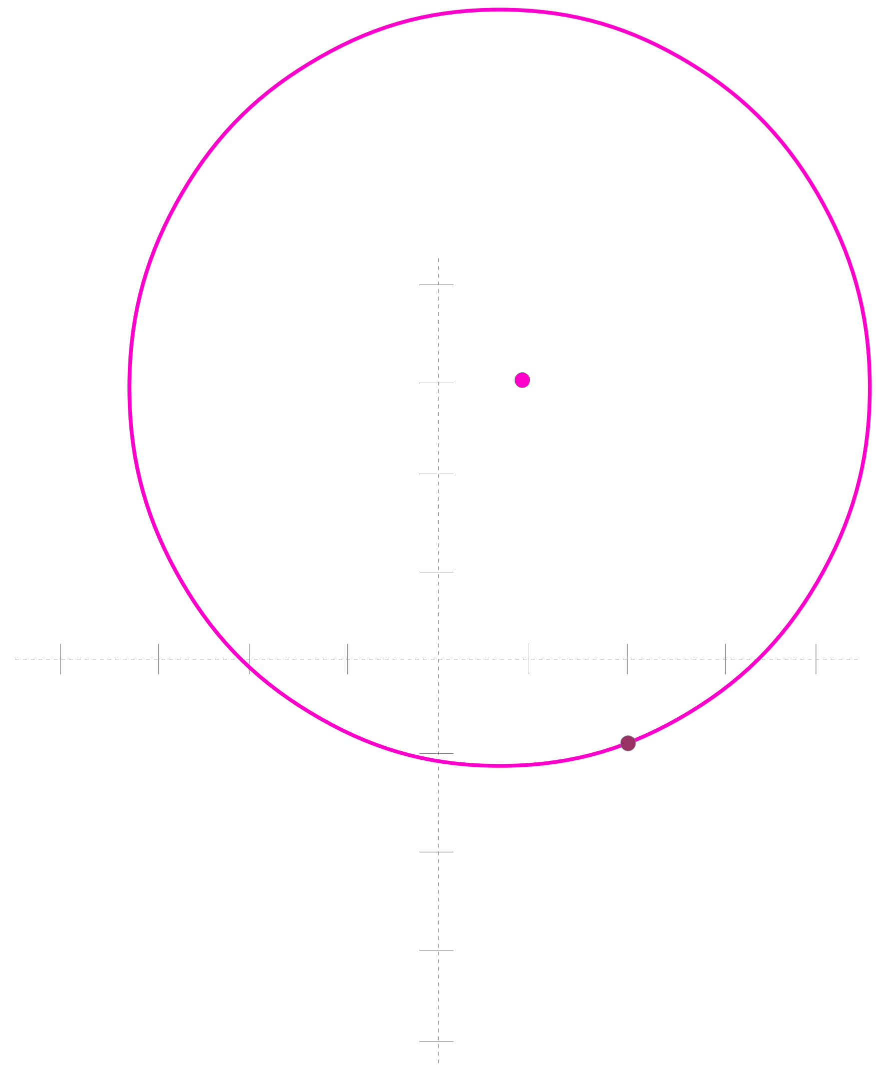
Ejercicio. ¿Que ecuación tiene el círculo con centro en el punto (1,3) y que pasa por el punto (2,-1)?

El radio es $r = \sqrt{(1-2)^2+(3+1)^2} = \sqrt{17}$

así que la ecuación es

$(x-1)^2+(y-3)^2 = 17$

$x^2+y^2-2x-6y = 7$



Lema. Las ecuaciones de la forma $x^2+y^2+Ax+By = C$ corresponden a...

Lema. Las ecuaciones de la forma $x^2+y^2+Ax+By = C$ corresponden a círculos, puntos o el vacío.

Lema. Las ecuaciones de la forma $x^2+y^2+Ax+By = C$ corresponden a círculos, puntos o el vacío.

Demostración. Podemos reescribir la ecuación en la forma de la ecuación de un círculo reacomodando los términos y completando los cuadrados

$$x^2+Ax+ \qquad +y^2+By+ \qquad = C$$

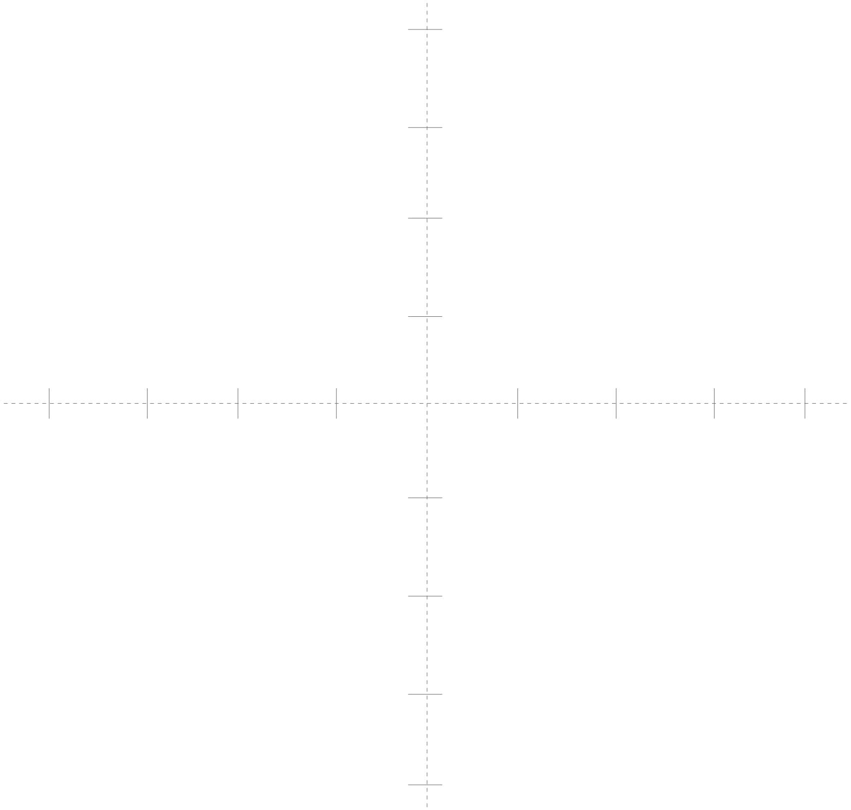
$$x^2+Ax+(A/2)^2+y^2+By+(B/2)^2 = C+(A/2)^2+(B/2)^2$$

$$(x+A/2)^2+(y+B/2)^2 = (A/2)^2+(B/2)^2$$

que es un círculo con centro en $(-A/2,-B/2)$ si $C+(A/2)^2+(B/2)^2 > 0$,

es un punto si $(A/2)^2+(B/2)^2 = 0$ y es el vacío si $C+(A/2)^2+(B/2)^2 < 0$. $\square$

Ejercicio. ¿La ecuación $x^2+y^2+4x-6y = 3$ corresponde a un círculo? ¿donde está su centro y cual es su radio?



Ejercicio. ¿La ecuación $x^2+y^2+4x-6y = 3$ corresponde a un círculo? ¿donde está su centro y cual es su radio?

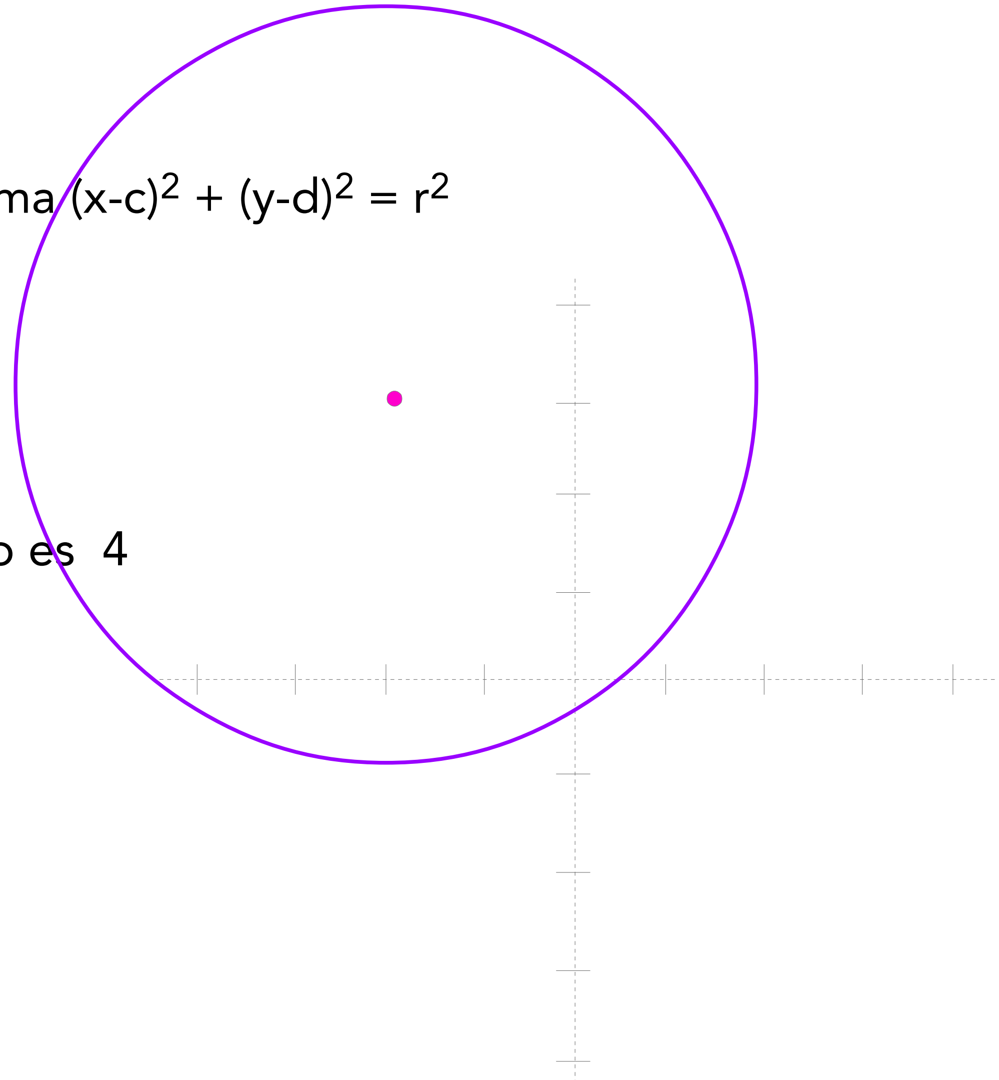
Hay que reescribir la ecuación en la forma $(x-c)^2 + (y-d)^2 = r^2$

$x^2+4x+ \quad +y^2-6y+ \quad = 3$

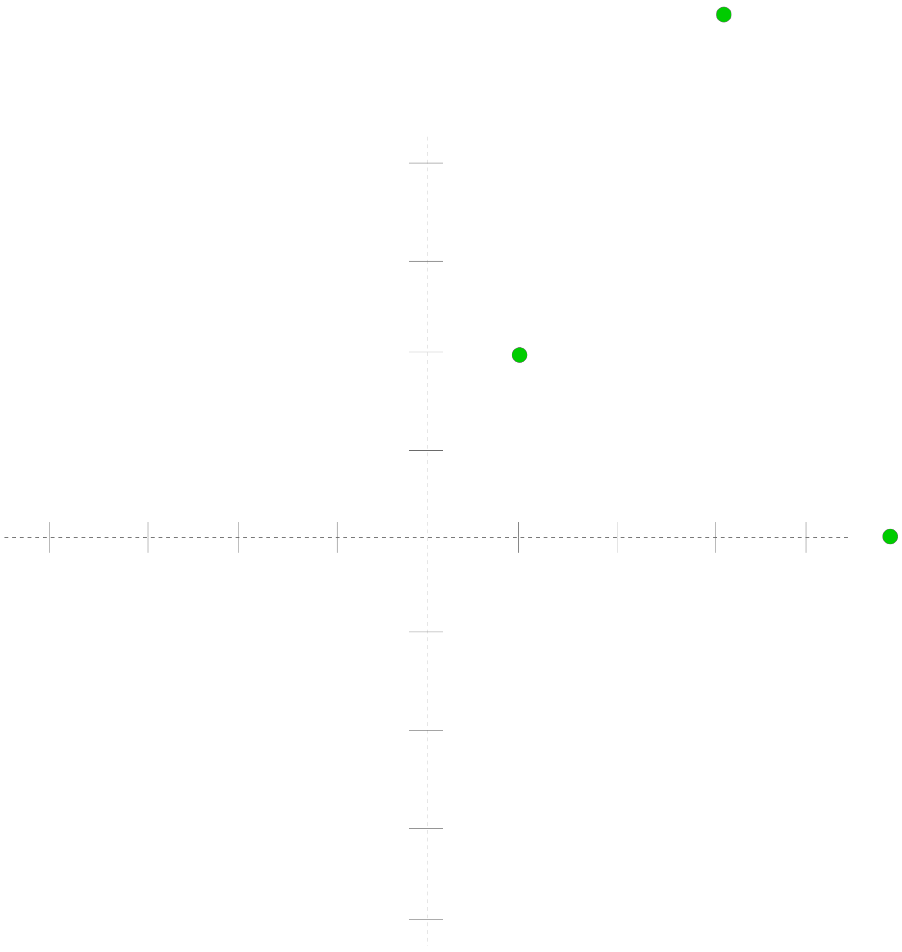
$x^2+4x+4 \;\; +y^2+6y+9 \;\; = 3+4+9$

$(x+2)^2 + (y-3)^2 = 16$

así que el centro está en (-2,3) y el radio es 4



Ejercicio. ¿Cual es la ecuación del círculo que pasa por los puntos (1,2), (3,6) y (5,0)?



Ejercicio. ¿Cual es la ecuación del círculo que pasa por los puntos (1,2), (3,6) y (5,0)?

Podemos empezar hallando el centro (c,d)

que debe estar a la misma distancia de los 3 puntos

$(c-1)^2+(d-2)^2 = (c-3)^2+(d-6)^2 = (c-5)^2+(d-0)^2$

$c^2-2c+1+d^2-4d+4 = c^2-6c+9+d^2-12d+36 = c^2-10c+25+d^2$

$-2c+1-4d+4 = -6c+9-12d+36 =-10c+25$

$4c+8d = 40 \qquad 4c-12d = -20$

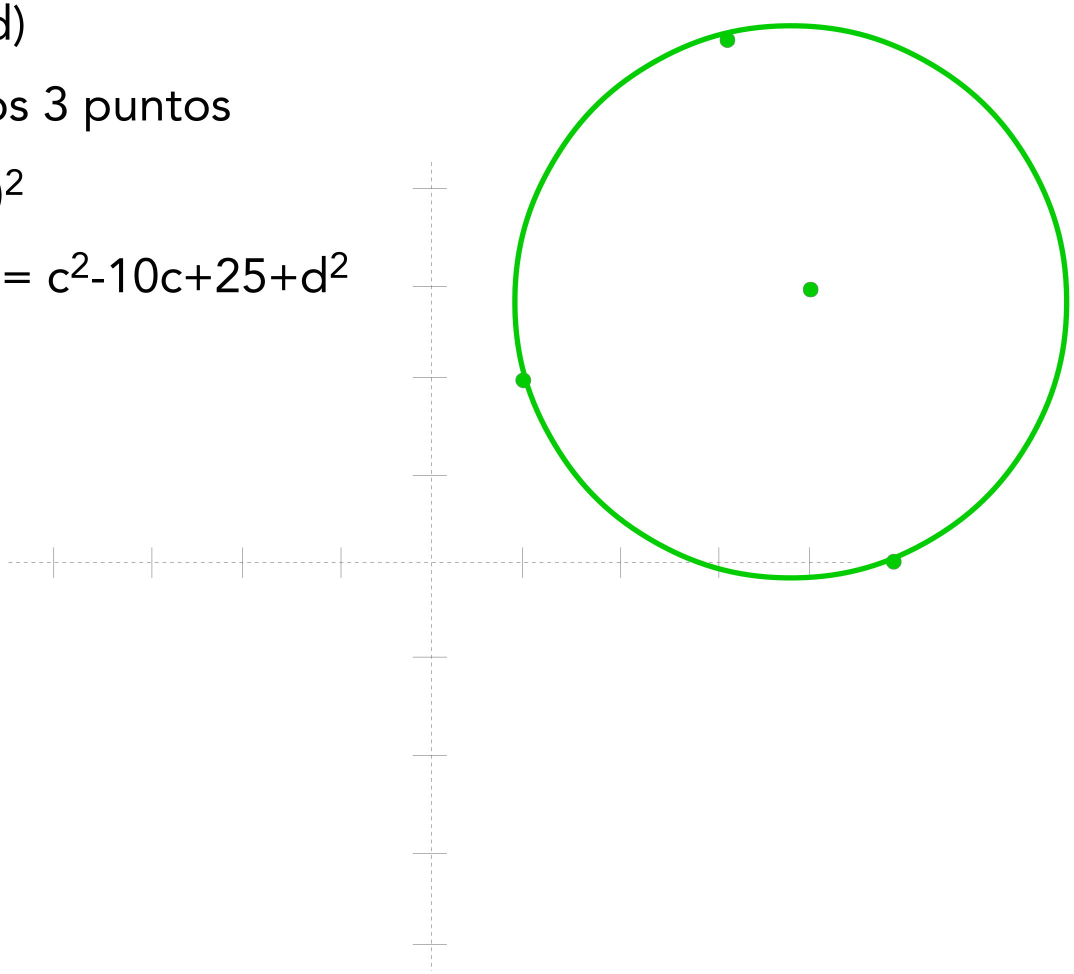
$20d = 60 \qquad d = 3$

$4c+24 = 40 \quad c = 4$

así que el centro está en (4,3)

el radio es $\sqrt{(4-1)^2+(3-2)^2} = \sqrt{10}$

Y la ecuación es $(x-4)^2+(y-3)^2 = 10$



Ejercicio. ¿Cual es la ecuación del círculo que pasa por los puntos (1,2), (3,6) y (5,0)?

Podemos hallar los coeficientes de la ecuación $x^2+y^2+Ax+By = C$, directamente,

sabiendo que los 3 puntos deben satisfacerla:

$1^2+2^2+A1+B2=C$	$A+2B+5=C$	$A+2B+5=5A+25$	$-4A+2B=20$	$10A=-80$	$A=-8$
$3^2+6^2+A3+B6=C$	$3A+6B+45=C$	$3A+6B+45=5A+25$	$-2A+6B=-20$	$-10B=60$	$B=-6$
$5^2+0^2+A5+B0=C$	$5A \quad +25=C$		$C=-15$		

La ecuación es $x^2+y^2-8x-6y = -15$

Lugares geométricos

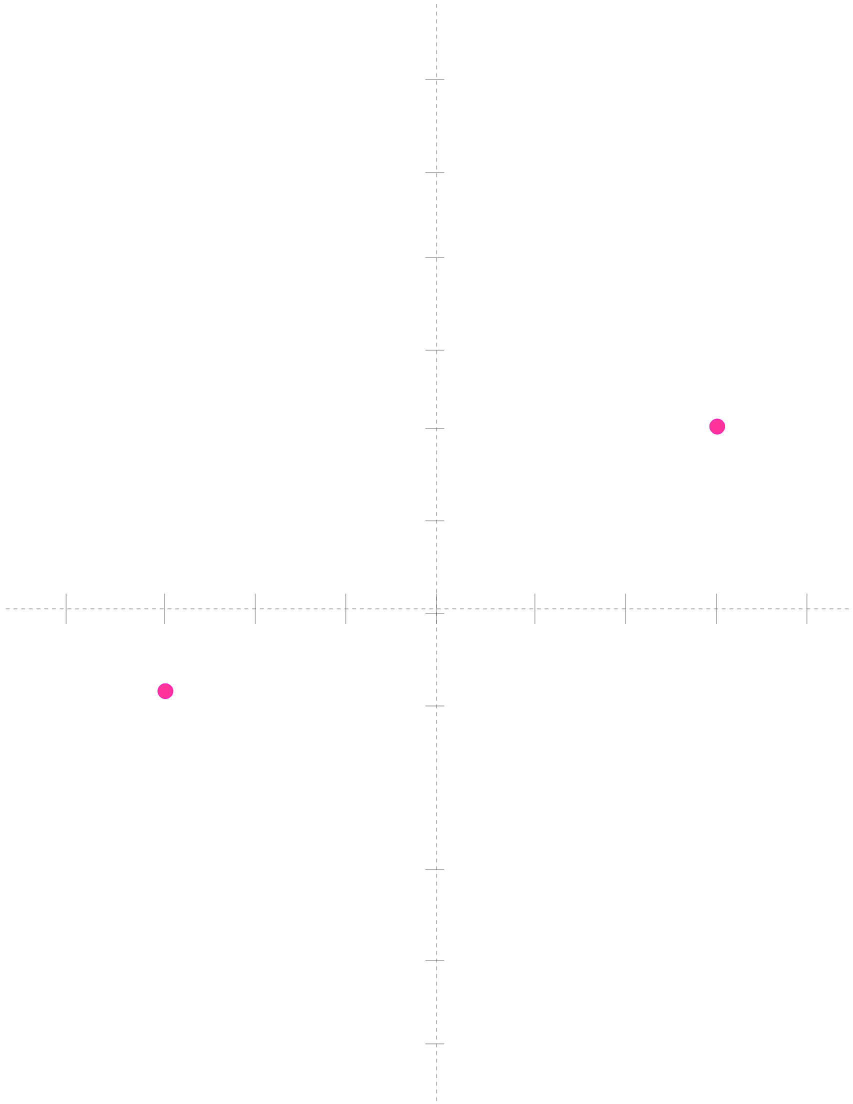
Un **lugar geométrico** es un conjunto de puntos del plano o del espacio que satisfacen alguna condición.

¿Cual será el lugar geométrico de los puntos del plano que están a la misma distancia de dos puntos fijos P y Q?

¿Cual será el lugar geométrico de los puntos del plano cuya distancia a un punto P es el doble de su distancia a otro punto Q?

Ejemplo

¿Que ecuación cumplen los puntos que están a la misma distancia de (3,2) y (-3,-1)?



Ejemplo

¿Que ecuación cumplen los puntos que están a la misma distancia de (3,2) y (-3,-1)?

$$\sqrt{(x-3)^2+(y-2)^2} = \sqrt{(x+3)^2+(y+1)^2}$$

$$(x-3)^2+(y-2)^2 = (x+3)^2+(y+1)^2$$

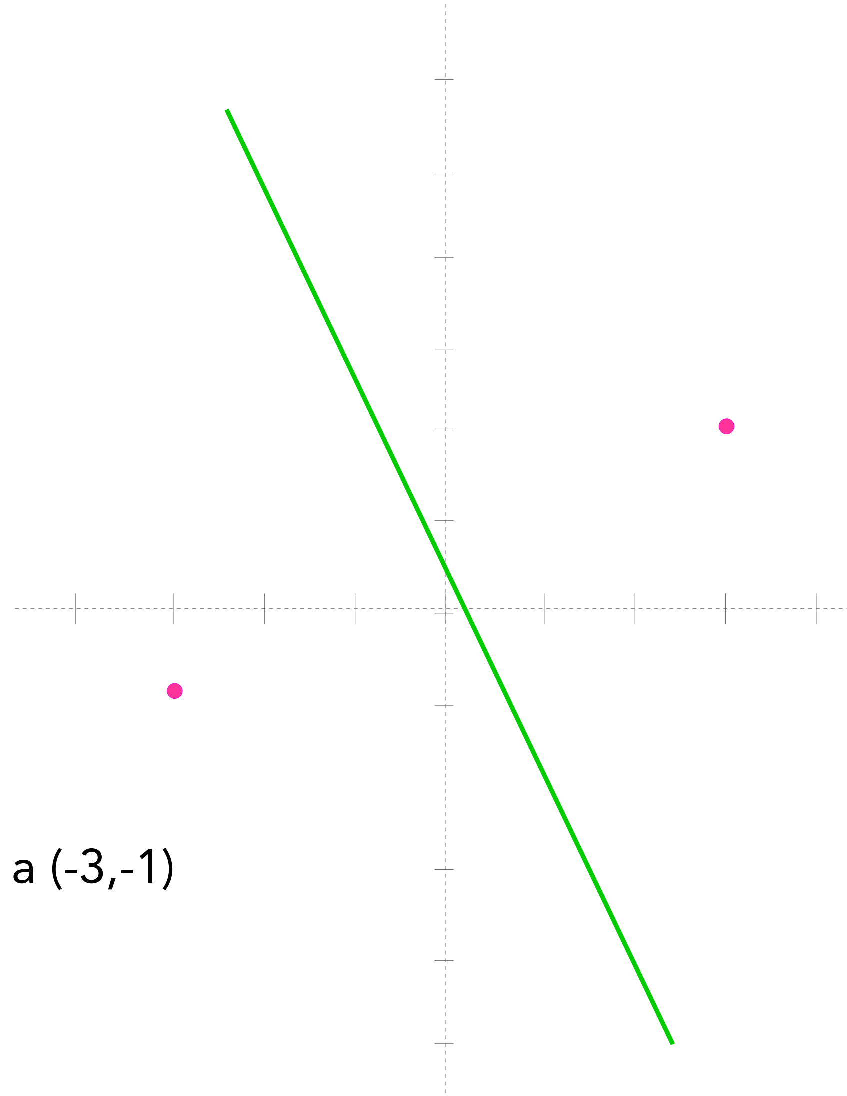
$$x^2-6x+9+y^2-4y+4 = x^2+6x+9+y^2+2y+1$$

$$-6x-4y+13 = 6x+2y+10$$

$$-12x -6y = -3$$

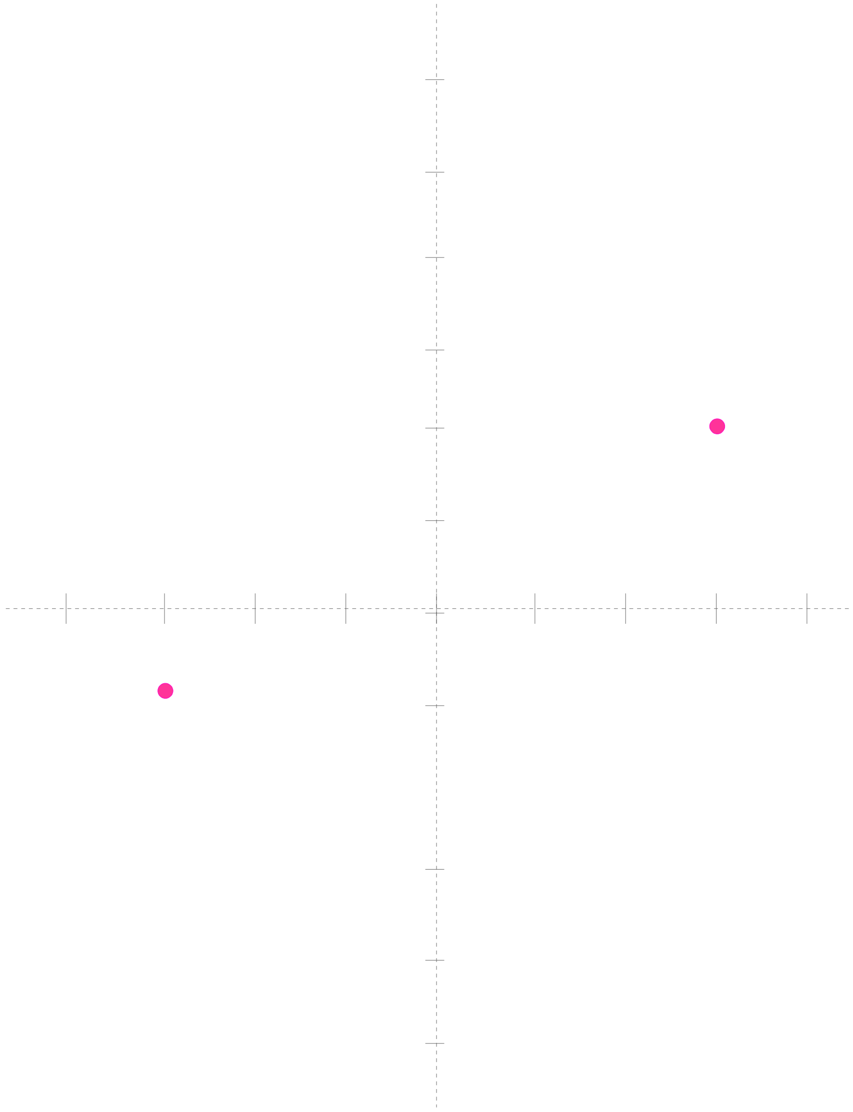
$$4x+2y = 1$$

y esta es una recta



(es la mediatriz del segmento que va de (3,2) a (-3,-1)

Ejemplo ¿Que ecuación cumplen los puntos del plano cuya distancia a (3,2) es el **doble** de su distancia a (-3,-1)?



Ejemplo ¿Que ecuación cumplen los puntos del plano cuya distancia a (3,2) es el **doble** de su distancia a (-3,-1)?

$$\sqrt{(x-3)^2+(y-2)^2} = 2\sqrt{(x+3)^2+(y+1)^2}$$

$$(x-3)^2+(y-2)^2 = 4(x+3)^2+4(y+1)^2$$

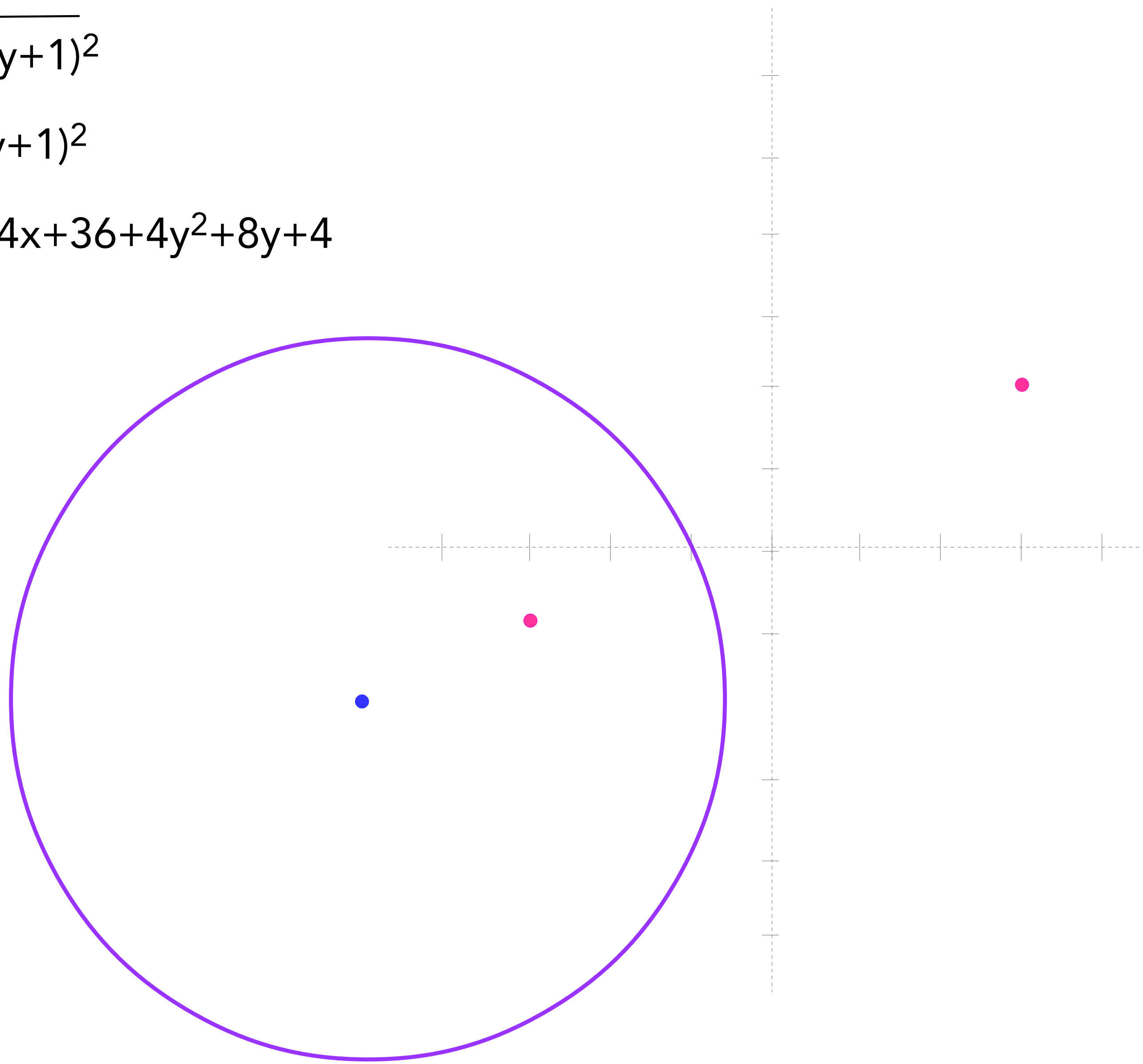
$$x^2-6x+9+y^2-4y+4 = 4x^2+24x+36+4y^2+8y+4$$

$$-3x^2-3y^2-30x-12y = 27$$

$$x^2+y^2+10x+4y = -9$$

que se puede reescribir

$$(x+5)^2+(y+2)^2 = 20$$



es un círculo con centro

en (-5,-2) y radio $\sqrt{20}$