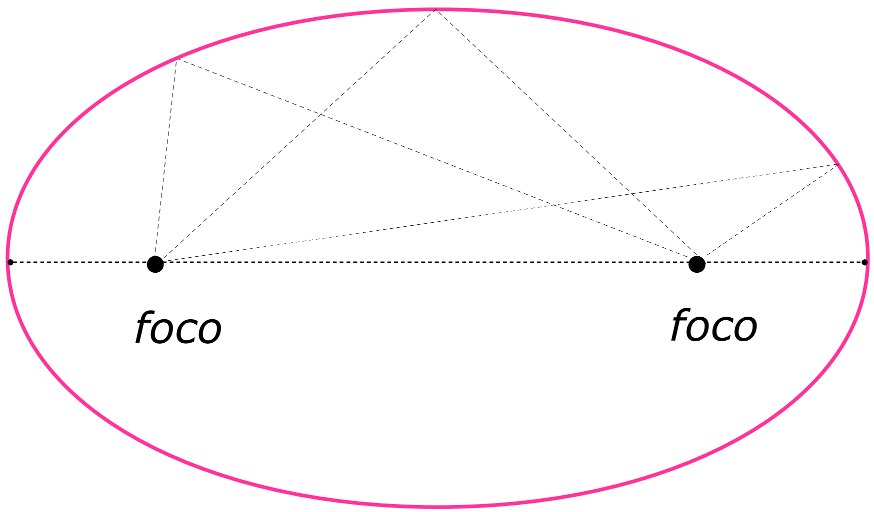
Conicas

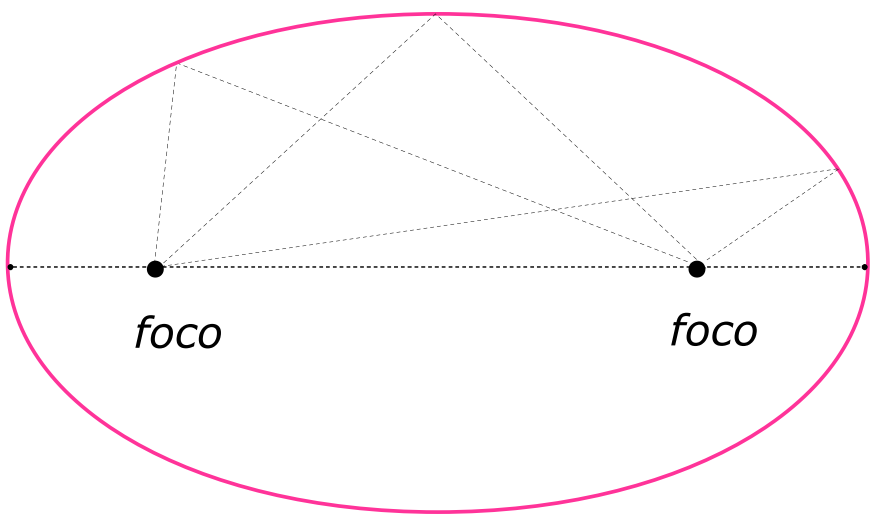
Elipses

Una **elipse** es una curva formada por los puntos del plano tales que la suma de sus distancias a dos puntos fijos (llamados **focos**) es constante.



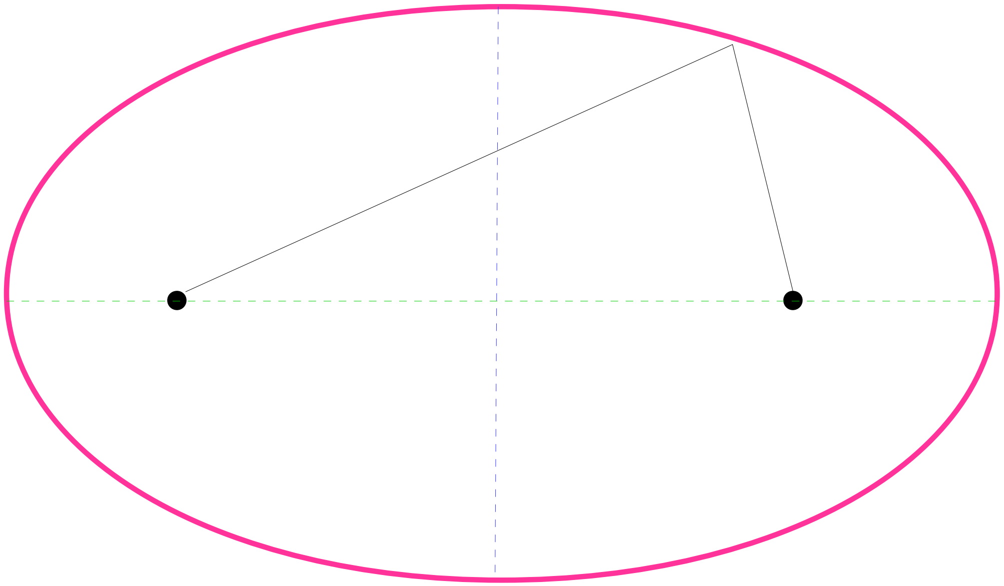
Elipses

Una **elipse** es una curva formada por los puntos del plano tales que la suma de sus distancias a dos puntos fijos (llamados **focos**) es constante.

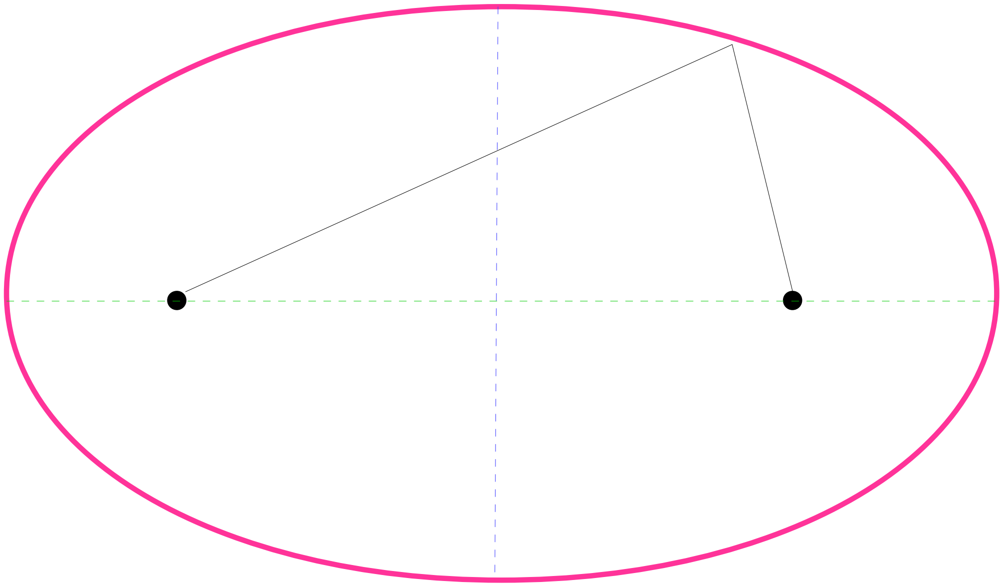


Podemos dibujar una elipse usando una cuerda cuya longitud sea la suma de las distancias que queremos, amarrando sus extremos a los focos y tensando la cuerda con el lápiz.

Por su definición, la elipses son simétricas (tienen 2 ejes de simetría).



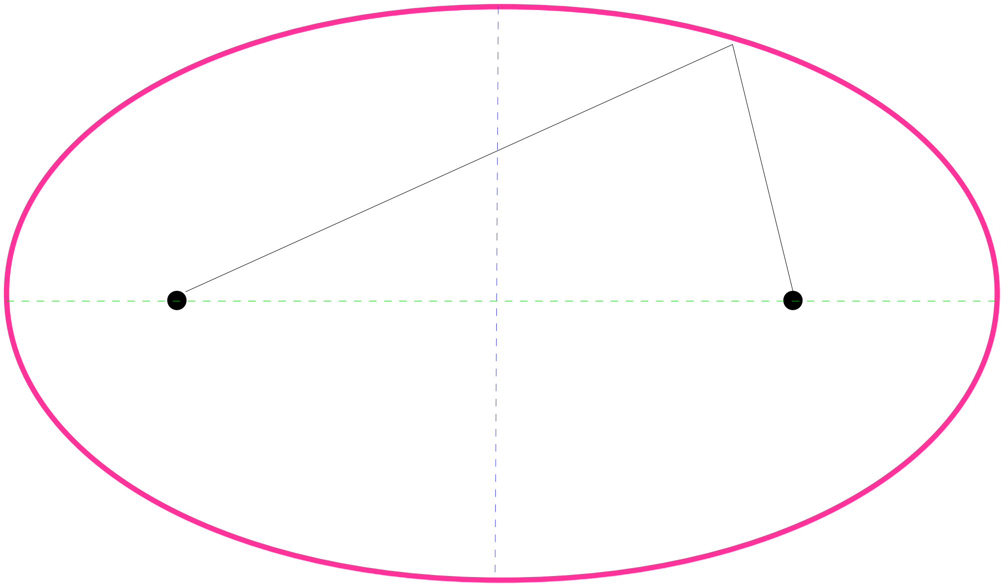
¿Que pasa con la elipse si alejamos los focos sin cambiar la longitud de la cuerda?



¿se hará mas larga o mas corta? ¿Se hará mas ancha o mas angosta?

¿se volverá mas o menos redonda?

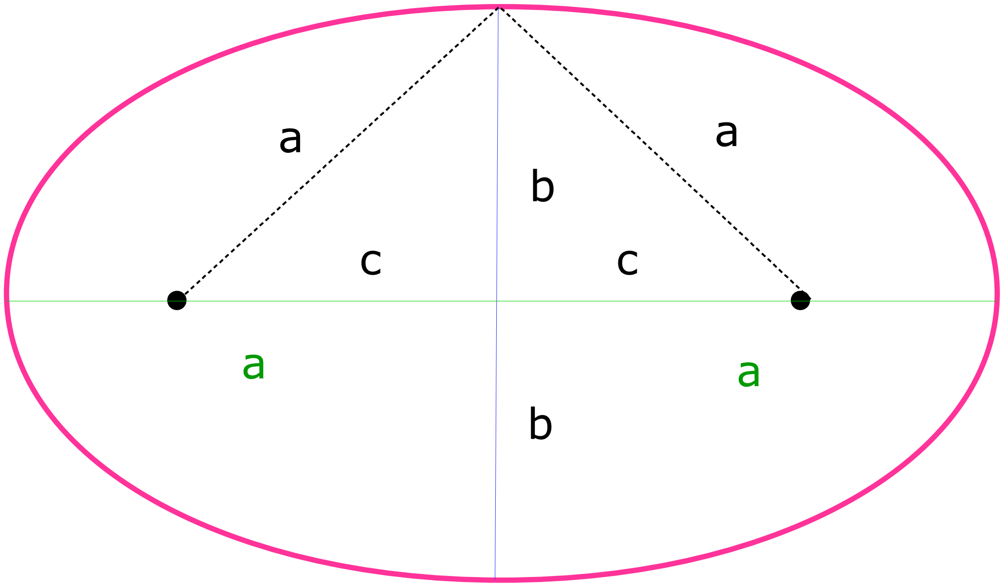
¿Que pasa con la elipse si alargamos la cuerda sin mover los focos?



¿se hará mas larga o mas corta? ¿Se hará mas ancha o mas angosta?

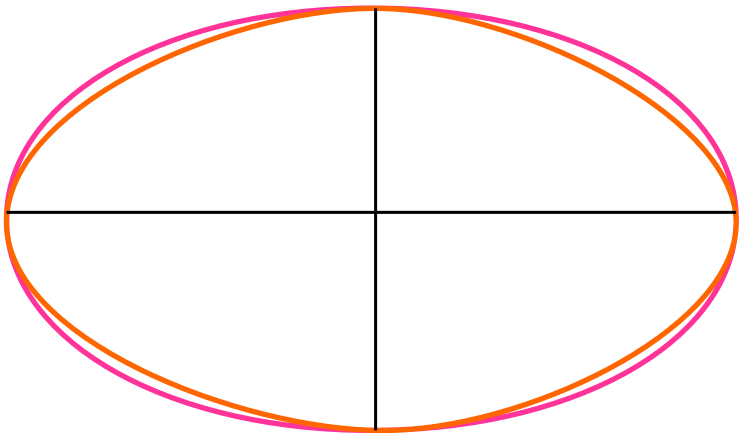
¿se volverá mas o menos redonda?

Si el largo de la cuerda es 2a y la distancia entre los focos es 2c

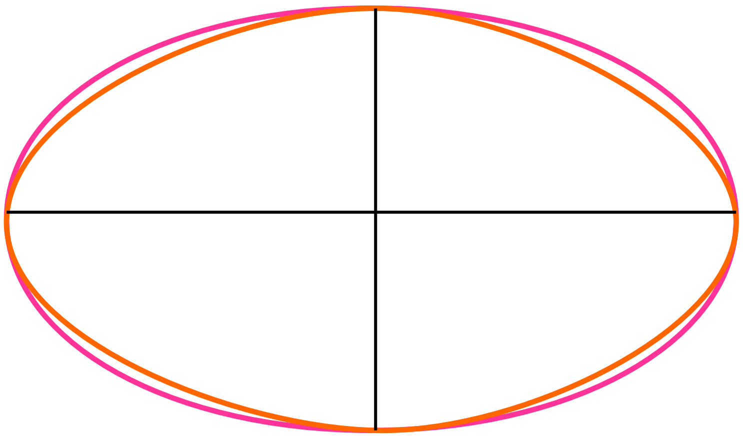


el largo de la elipse debe ser 2a y la altura debe ser 2b, donde $b^2+c^2 = a^2$.

Lema. Así que dos elipses del mismo largo y ancho tienen la misma forma.



Lema. Así que dos elipses del mismo largo y ancho tienen la misma forma.



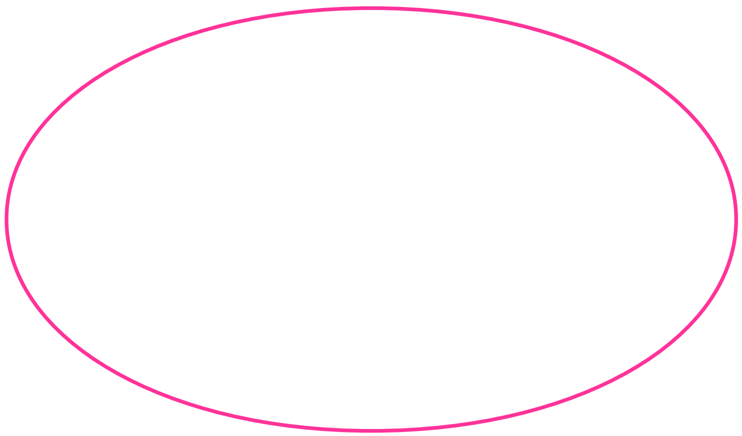
Demostración.

El largo de la elipse es la suma de las distancias a los focos (2a).

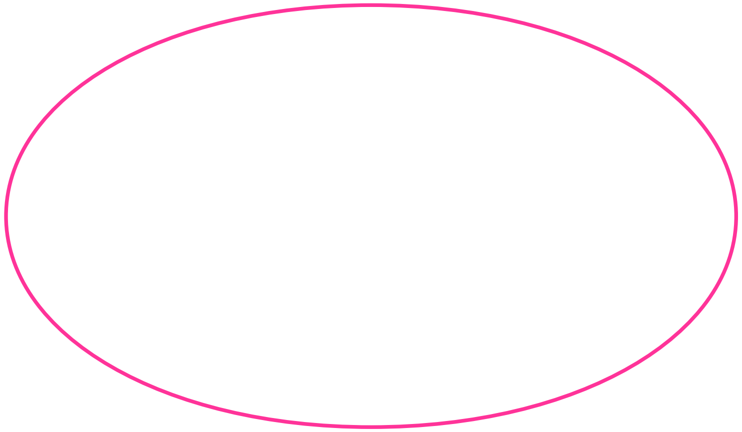
El ancho (2b) y la distancia focal de la elipse (2c) están relacionados por

$b^2+c^2 = a^2$. Así que el largo y ancho determinan la distancia focal.

Corolario. La forma de una elipse (salvo el tamaño) esta determinada por a/b



Corolario. La forma de una elipse (salvo el tamaño) esta determinada por a/b



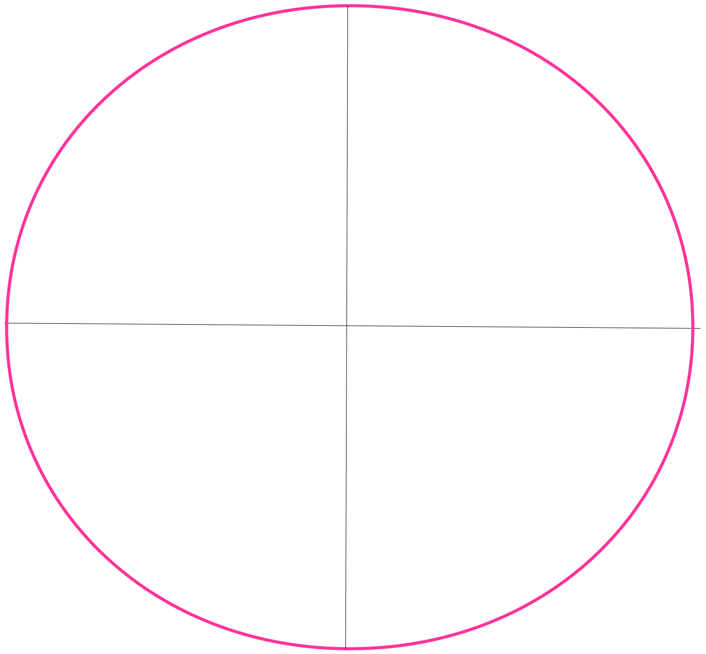
Demostración. Si una elipse tiene largo $2a$ y ancho $2b$ y otra elipse tiene largo $2a'$ y ancho $2b'$, y $a/b=a'/b'$, entonces al escalar (agrandar o achicar) la primera elipse por el factor a'/a, se convierte en una elipse de largo $a'/a(2a)=2a'$ y ancho $a'/a(2b)=b'/b(2b)=2b'$, es decir del mismo largo y ancho que la segunda, por lo que deben ser iguales.

Ejemplo. ¿Que tan larga y ancha es una elipse si la distancia entre sus focos es 6 y la longitud de la cuerda es 10?

Ejemplo. ¿Que tan larga y ancha es una elipse si la distancia entre sus focos es 6 y la longitud de la cuerda es 10?

La longitud de la elipse es 10 y su anchura es 8 (ya que $10^2 - 6^2 = 8^2$)

Ejemplo. ¿Si una elipse tiene largo 26 y ancho 24, cual es la distancia focal?



Ejemplo. ¿Si una elipse tiene largo 26 y ancho 24, cual es la distancia focal?

$2a = 26$, $2b = 24$

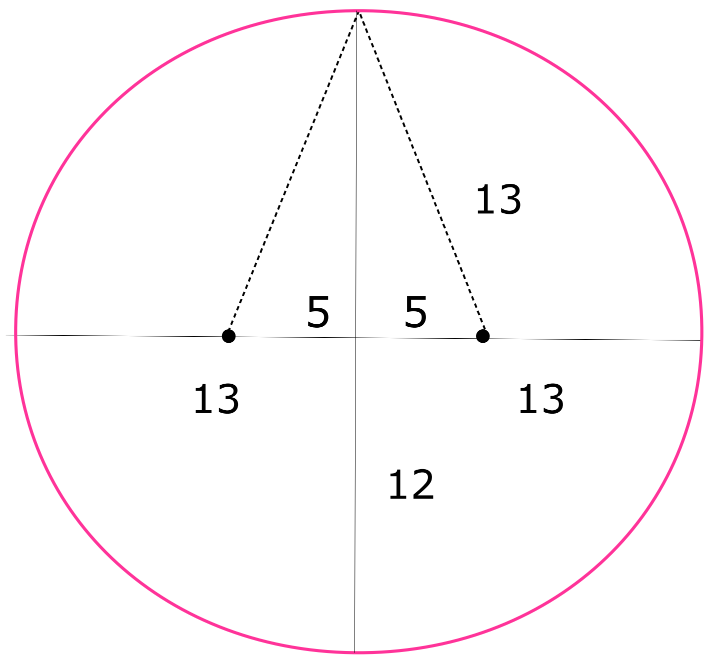
así que $a = 13$, $b=12$

como $b^2 + c^2 = a^2$ entonces

$c^2 = a^2 - b^2 = 13^2 - 12^2 = 169 - 144 = 25$

así que $c = 5$

y la distancia entre los focos es $2c = 10$

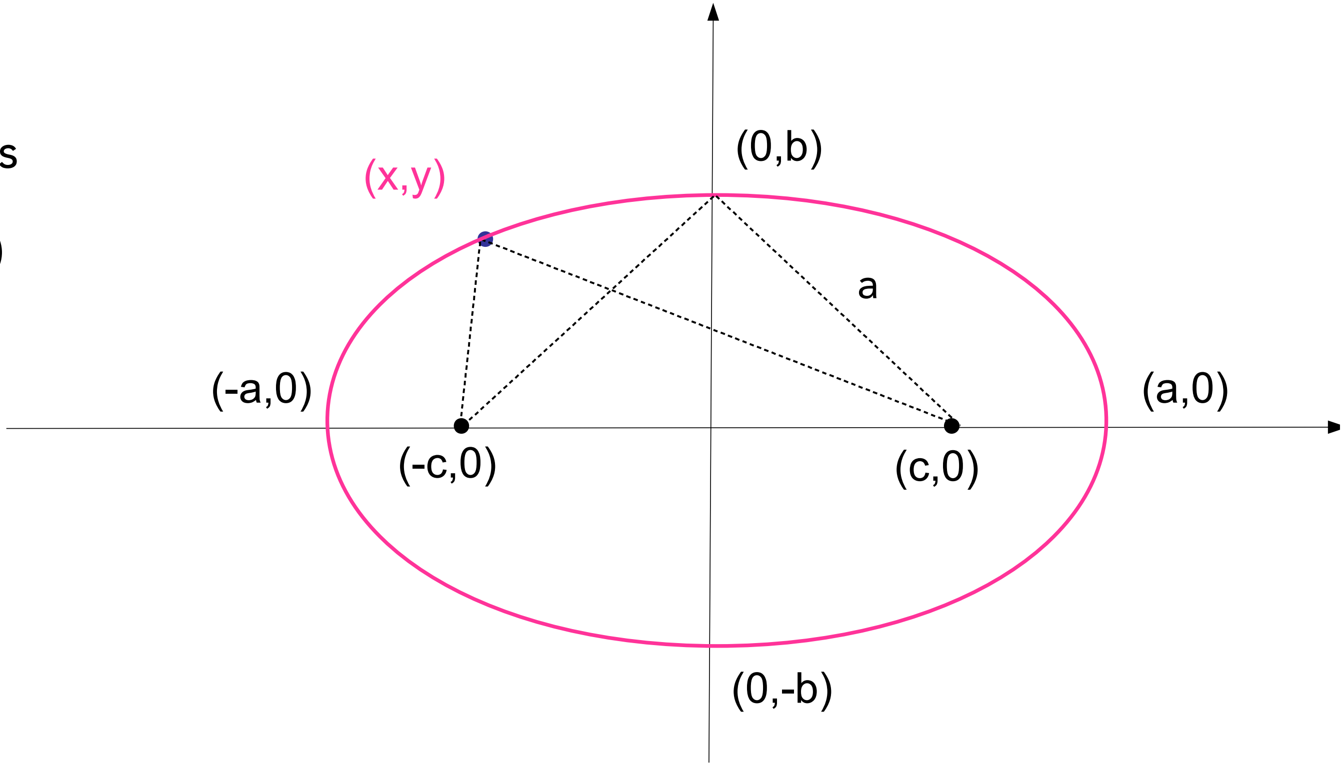


Ecuaciones de las elipses

Si elegimos el sistema de coordenadas de modo que los focos estén en los puntos (-c,0) y (c,0) y la suma de las distancias es 2a, entonces la elipse cruza al eje x en los puntos (a,0) y (-a,0) y al eje y en los puntos (0,b) y (0,-b) donde $b^2 = a^2 - c^2$

Como la suma de las distancias de (x,y) a los focos (c,0) y (-c,0) es 2a entonces

$\sqrt{(x-c)^2+y^2} + \sqrt{(x+c)^2+y^2} = 2a$



La ecuación de la elipse es:

$\sqrt{(x-c)^2+y^2} + \sqrt{(x+c)^2+y^2} = 2a$

$\sqrt{(x-c)^2+y^2} = 2a-\sqrt{(x+c)^2+y^2}$ *elevar al cuadrado*

$(x-c)^2 + y^2 = 4a^2 - 4a\sqrt{(x+c)^2+y^2} + (x+c)^2 + y^2$ *desarrollar y simplificar*

$4a \sqrt{(x+c)^2+y^2} = 4a^2 + 4cx$ *dividir entre 4a*

$\sqrt{(x+c)^2+y^2} = (a + c/a\ x)$ *elevar al cuadrado*

$(x+c)^2 + y^2 = (a + c/a\ x)^2$ *desarrollar y simplificar*

$x^2 - c^2/a^2\ x^2 + y^2 = a^2 - c^2$ *agrupar*

$(a^2-c^2)/a^2\ x^2 + y^2 = a^2 - c^2$ *sustituir* $a^2-c^2 = b^2$

$b^2/a^2\ x^2 + y^2 = b^2$ *dividir entre* b^2

$x^2 / a^2 + y^2 / b^2 = 1$

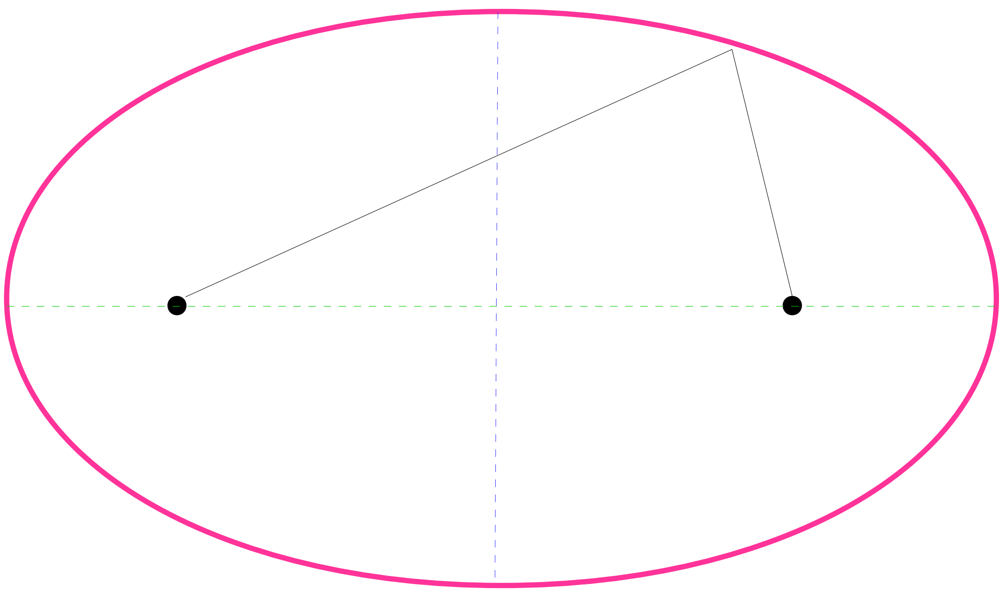
Ejemplo. ¿Que ecuación tiene la elipse formada por los puntos cuyas distancias a los puntos (-3,0) y (3,0) suman 10?

Ejemplo. ¿Que ecuación tiene la elipse formada por los puntos cuyas distancias a los puntos (-3,0) y (3,0) suman 10?

$a=10/2=5$, $c=3$ así que $b^2 = a^2 - c^2 = 5^2 - 3^2 = 16$ y $b=4$

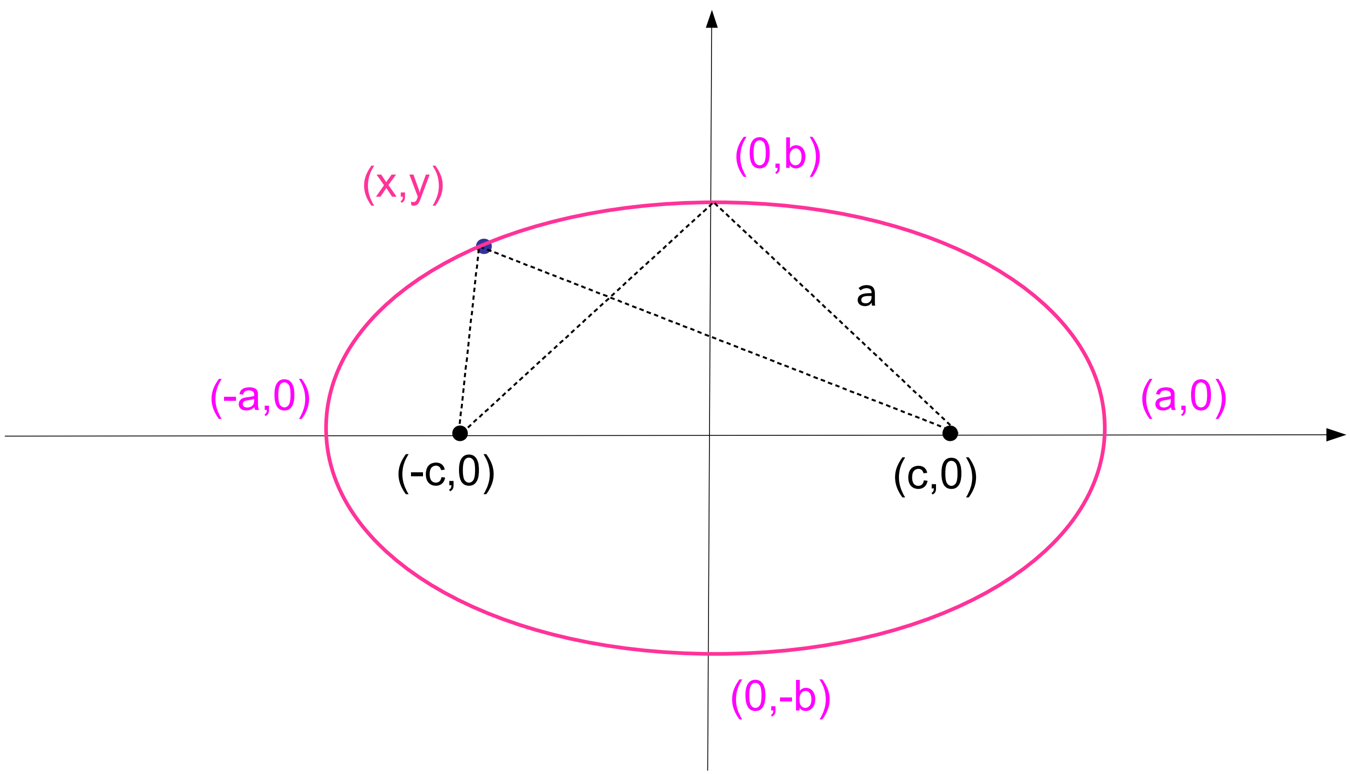
Así que la ecuación es $x^2 / 5^2 + y^2 / 4^2 = 1$

Recordar que una **elipse** es una curva formada por los puntos del plano cuyas distancias a 2 puntos fijos (los **focos**) suman una constante



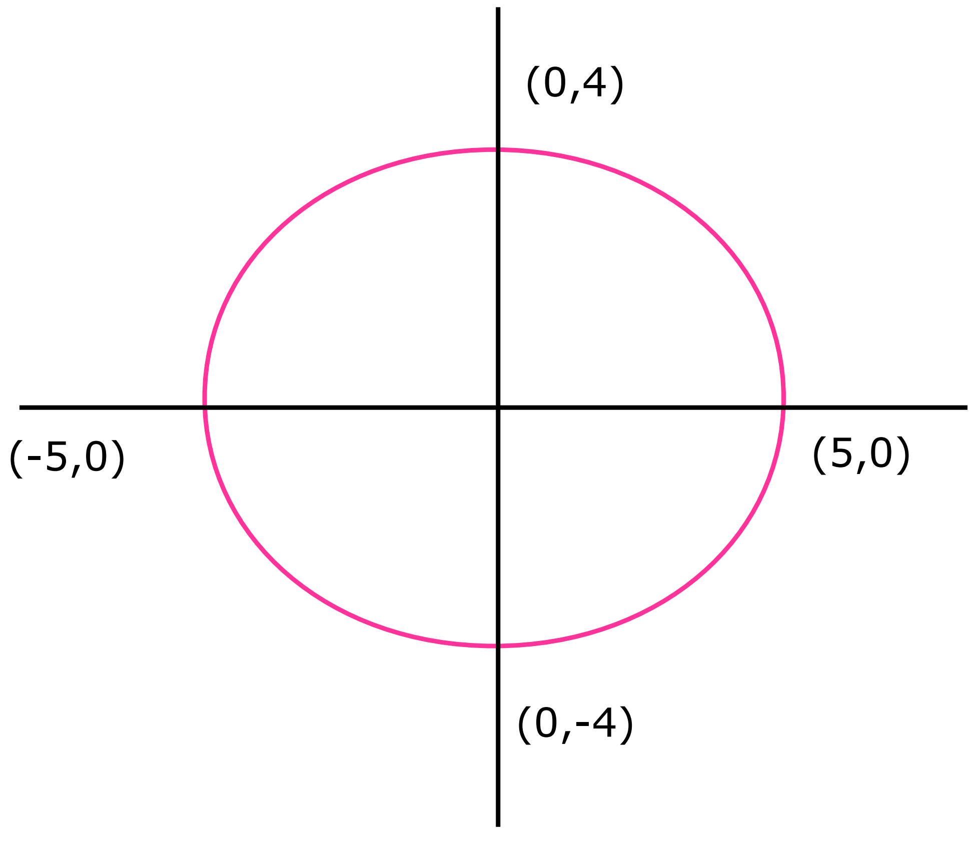
Los puntos de la elipse mas cercanos a los focos son los **vértices**.

Si elegimos el sistema de coordenadas de modo que los focos estén en los puntos (-c,0) y (c,0) y la suma de las distancias es 2a, entonces la elipse cruza al eje x en los puntos (a,0) y (-a,0) y al eje y en los puntos (0,b) y (0,-b) donde $b^2 = a^2 - c^2$

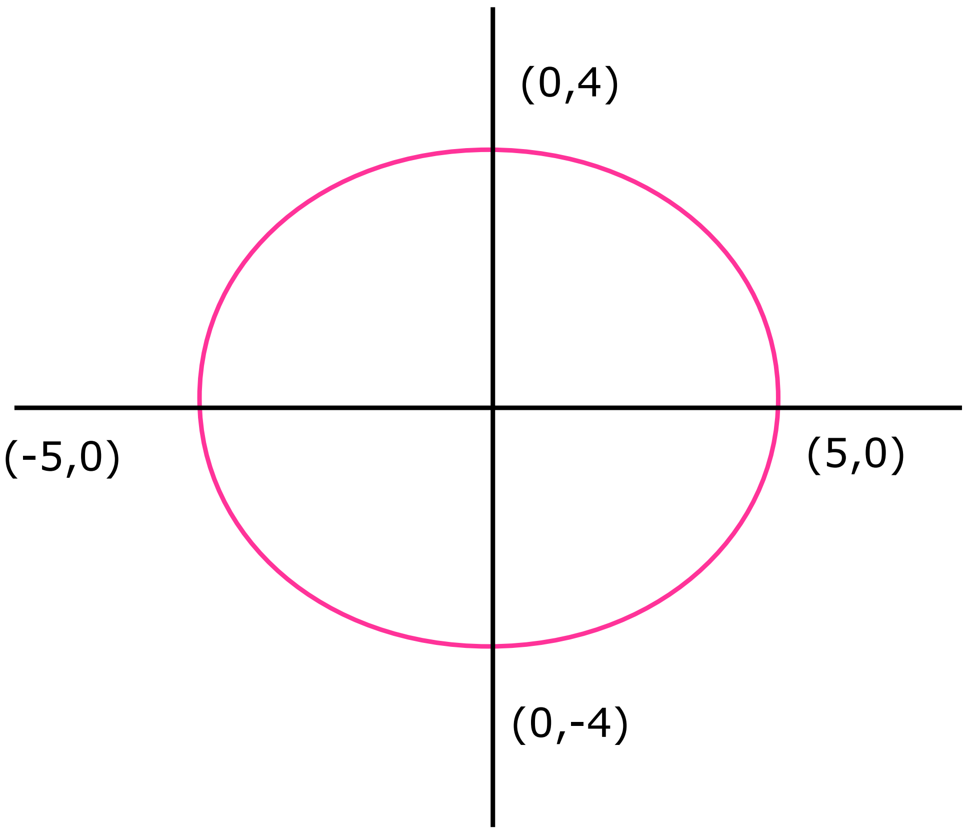


La ecuación de esta elipse se puede escribir $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$

Ejemplo. ¿Cual es la ecuación de esta elipse?



Ejemplo. ¿Cual es la ecuación de esta elipse?



$a = 5$, $b = 4$

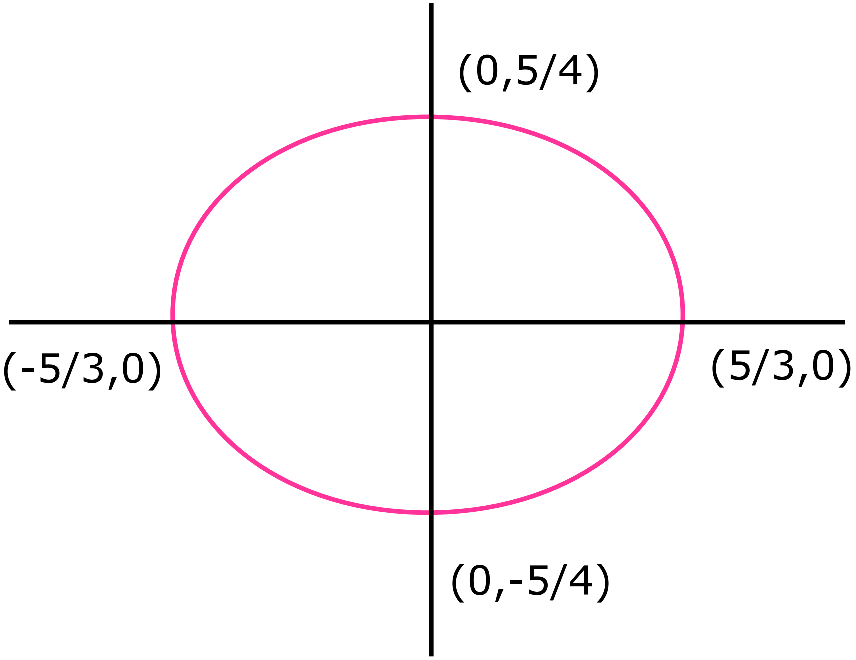
La ecuación es $\frac{x^2}{5^2} + \frac{y^2}{4^2} = 1$ o $16x^2 + 25y^2 = 400$

Ejemplo. ¿Como se ve la curva $9x^2 + 16y^2 = 25$?

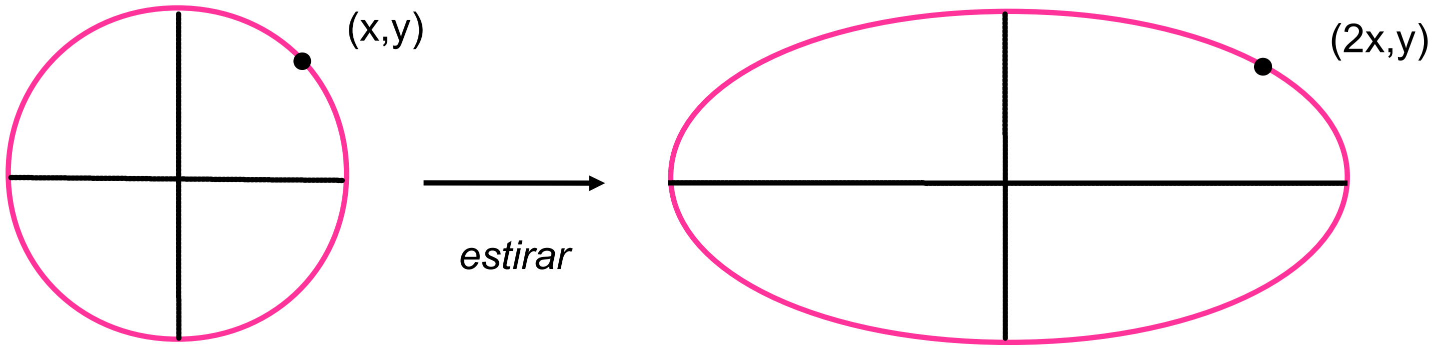
Ejemplo. ¿Como se ve la curva $9x^2 + 16y^2 = 25$?

La ecuación puede escribirse como $9/25\, x^2 + 16/25\, y^2 = 1$

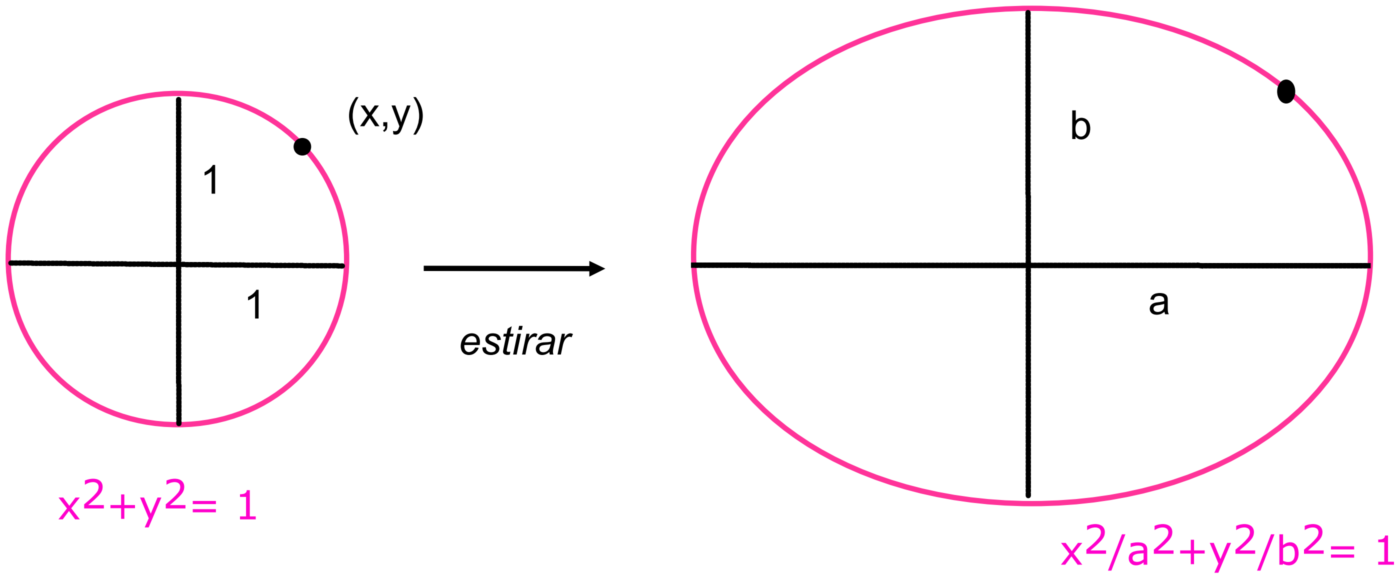
o sea $x^2 / (5/3)^2 + y^2 / (5/4)^2 = 1$ que es esta elipse:



Lema. Las elipses son círculos estirados.



Lema. Las elipses son círculos estirados.



Demostración. Si tomamos el circulo $x^2 + y^2 = 1$ y lo estiramos por medio de la transformación $(x', y') = (ax, by)$ obtenemos la curva

$$(1/a\, x')^2 + (1/b y')^2 = 1$$

O sea

$$x'^2/a^2 + y'^2/b^2 = 1$$

que es la ecuación de una elipse.

Ejercicio. Si se estira el círculo $x^2 + y^2 = 1$ verticalmente al triple, se convierte en una elipse. ¿Cual es la distancia entre sus focos?

¿Cual suman las distancias de los puntos de la elipse a los focos?

Ejercicio. Si se estira el círculo $x^2 + y^2 = 1$ verticalmente al triple, se convierte en una elipse. ¿Cual es la distancia entre sus focos? ¿Cual suman las distancias de los puntos de la elipse a los focos?

La transformación que estira al circulo al triple es $(x',y')=(x,3y)$

si despejamos a $(x,y)=(x'/2,y')$ y la ecuación transformada es

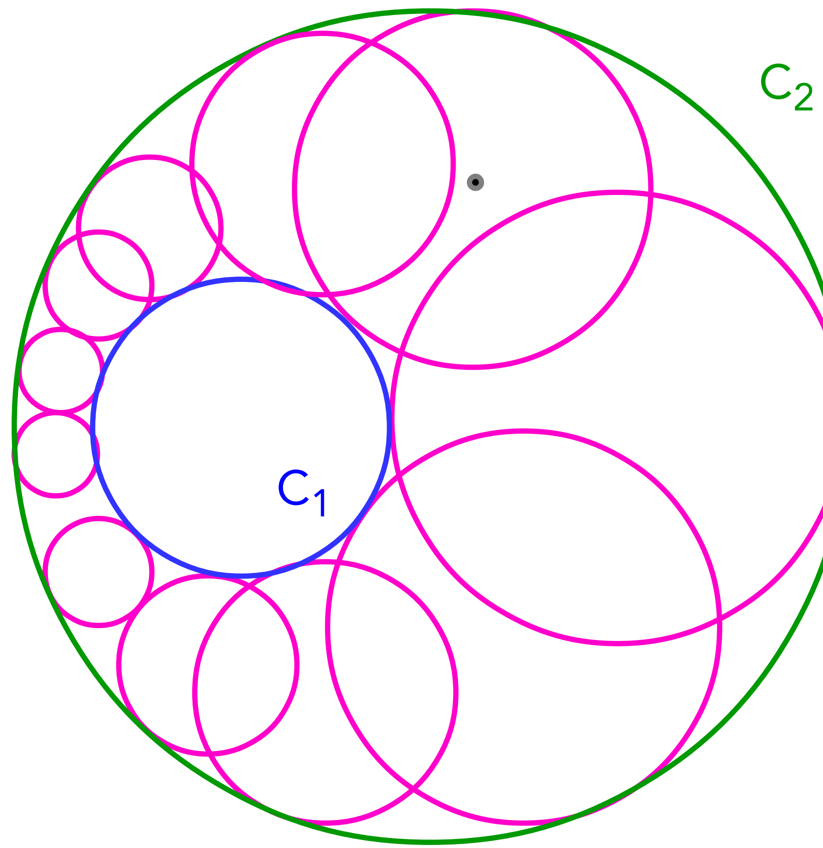
$x'^2 + y'^2/9 = 1$

así que $a=3$, $b=1$ y $c=\sqrt{a^2- b}^2 =\sqrt{8}$

Las distancias suman $2a=6$ y la distancia focal es $2c=2\sqrt{8}$

Ejercicio. Si C_1 y C_2 son dos círculos y C_1 está dentro de C_2

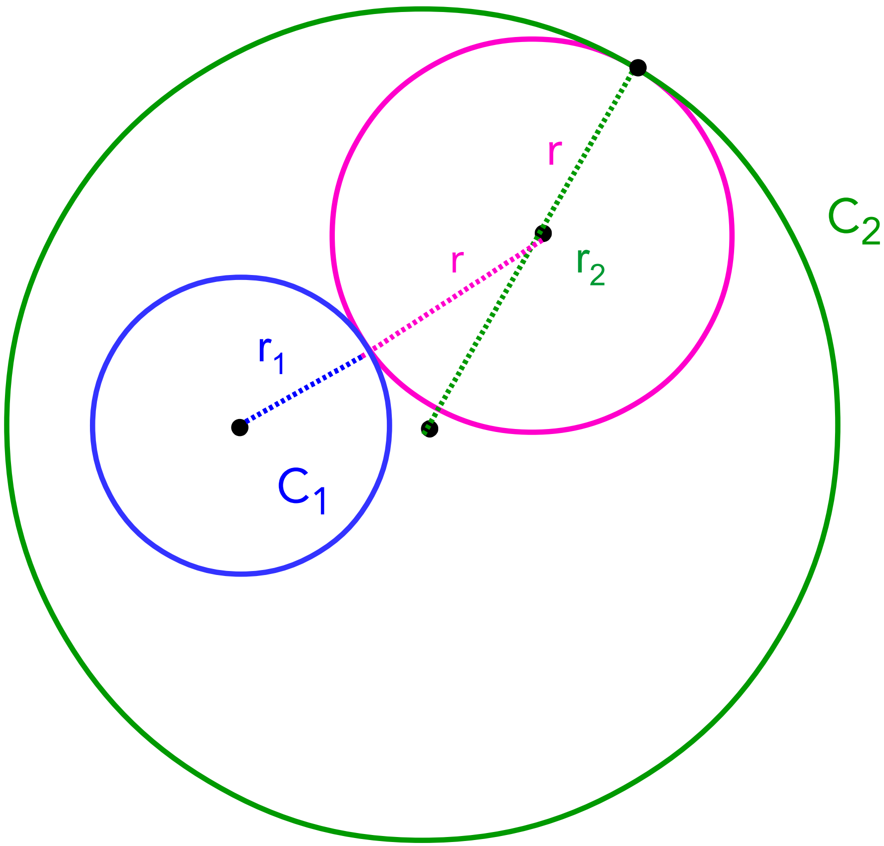
¿Que curva forman los centros de los círculos que son tangentes a C_1 y C_2 ?



Ejercicio. Si C_1 y C_2 son dos círculos y C_1 está dentro de C_2

¿Que curva forman los centros de los círculos que son tangentes a C_1 y C_2 ?

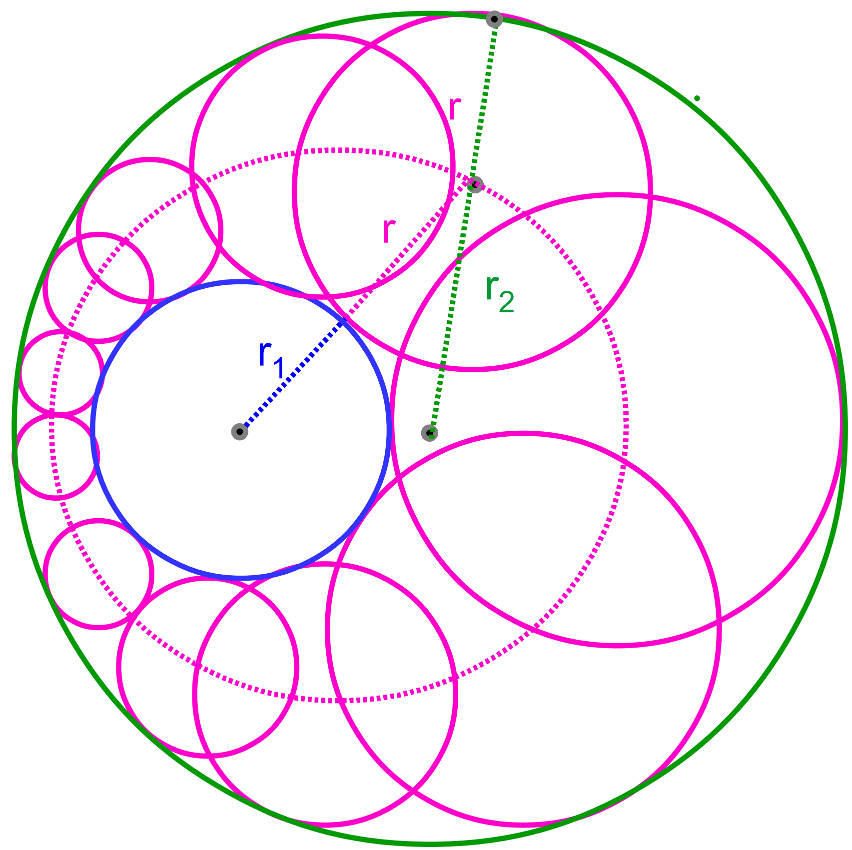
Si los círculos C_1 y C_2 tienen radios r_1 y r_2 y C es un circulo tangente de radio r, las distancias del centro de C a los centros de C_1 y C_2 son $r_1 + r$ y $r_2 - r$.



Ejercicio. Si C_1 y C_2 son dos círculos y C_1 está dentro de C_2

¿Que curva forman los centros de los círculos que son tangentes a C_1 y C_2 ?

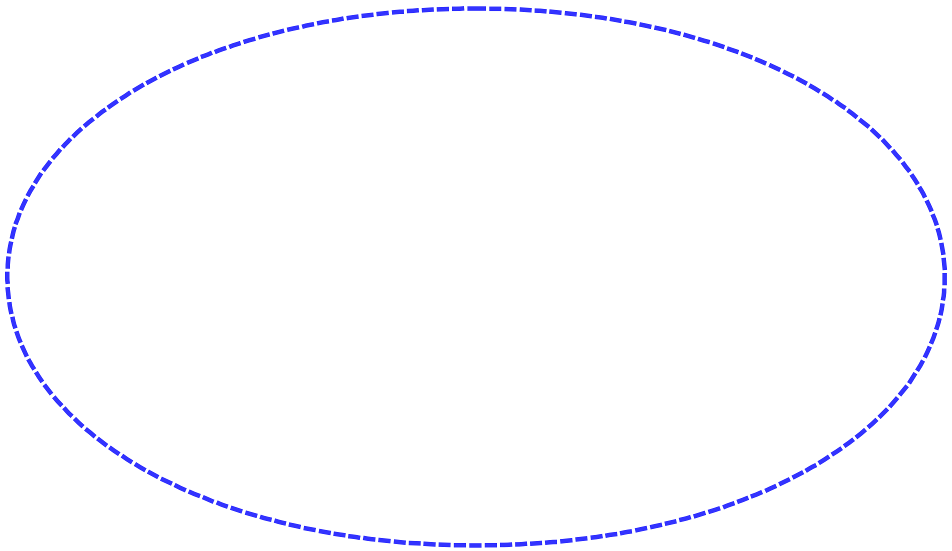
Si los círculos C_1 y C_2 tienen radios r_1 y r_2 y C es un circulo tangente de radio r, las distancias del centro de C a los centros de C_1 y C_2 son $r_1 + r$ y $r_2 - r$.



Por lo tanto la suma de las distancias del centro del círculo a los centros de C_1 y C_2 es $r_1 + r_2$.

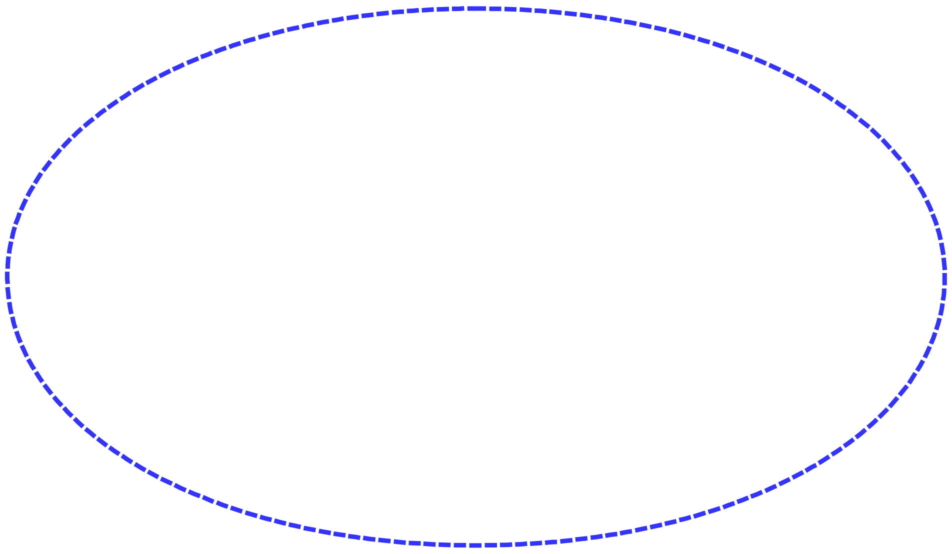
Los centros de los círculos tangentes forman una elipse, cuyos focos son los centros de C_1 y C_2 .

¿Como se puede parametrizar una elipse?



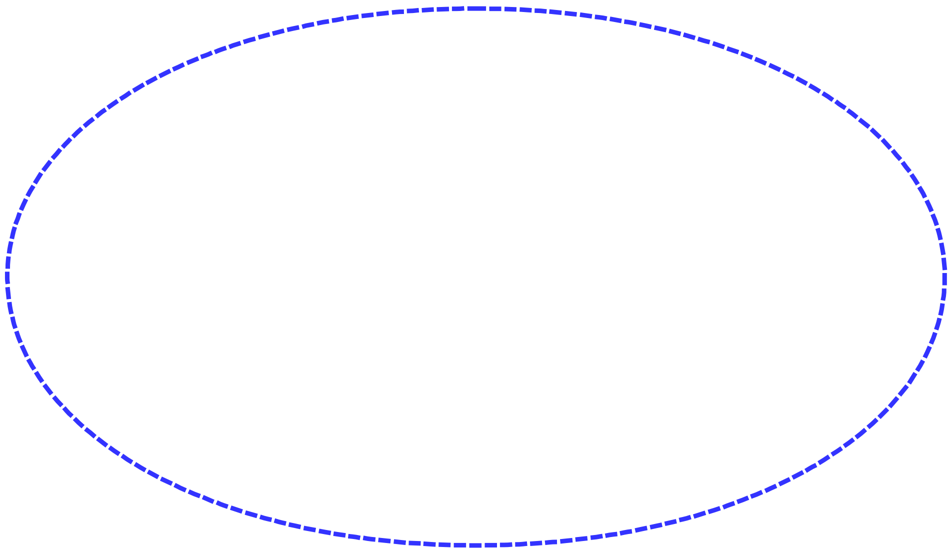
Como las elipses son círculos estirados, podemos intentar parametrizarlas usando senos y cosenos multiplicados por constantes.

Ejemplo. Parametrizar una elipse $4x^2 + 9y^2 = 36$



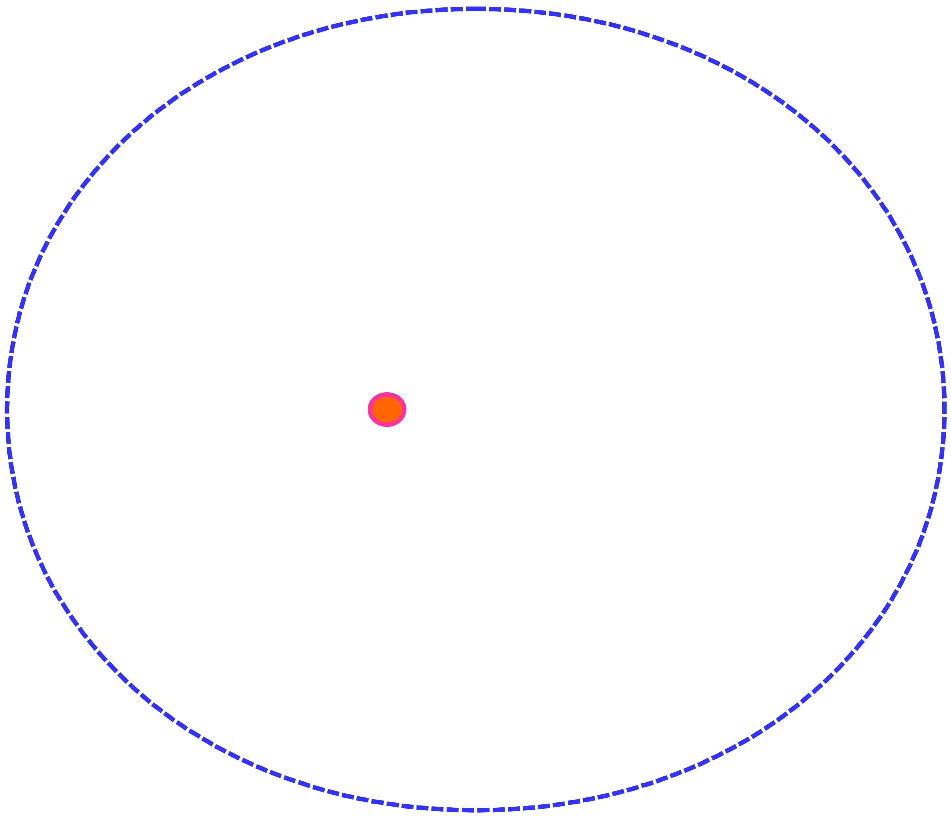
Ejemplo. Parametriza la elipse $4x^2 + 9y^2 = 36$

Si hacemos $x = 3 \cos t$ y $y = 2 \operatorname{sen} t$

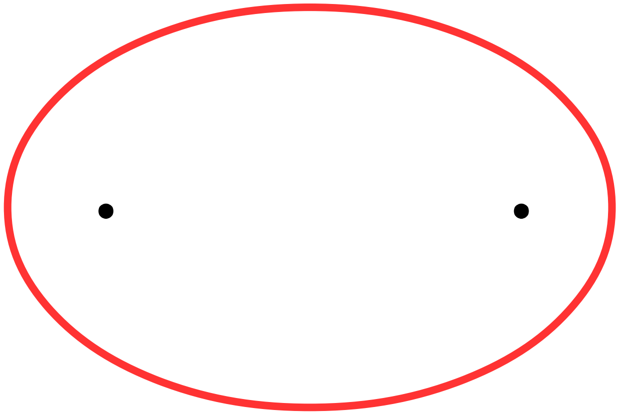


Entonces $4x^2 + 9y^2 = 4(9 \cos^2 t) + 9(4 \operatorname{sen}^2 t) = 36 \operatorname{sen}^2 t + 36 \cos^2 t = 36$

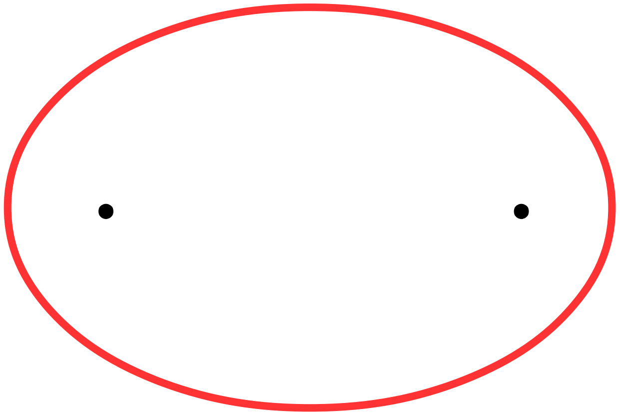
(Kepler, 1610) Las órbitas de los planetas alrededor del Sol son elipses,
y el Sol está en uno de sus focos.



Las elipses están formadas por puntos cuya suma de distancias a dos puntos P y Q es constante.

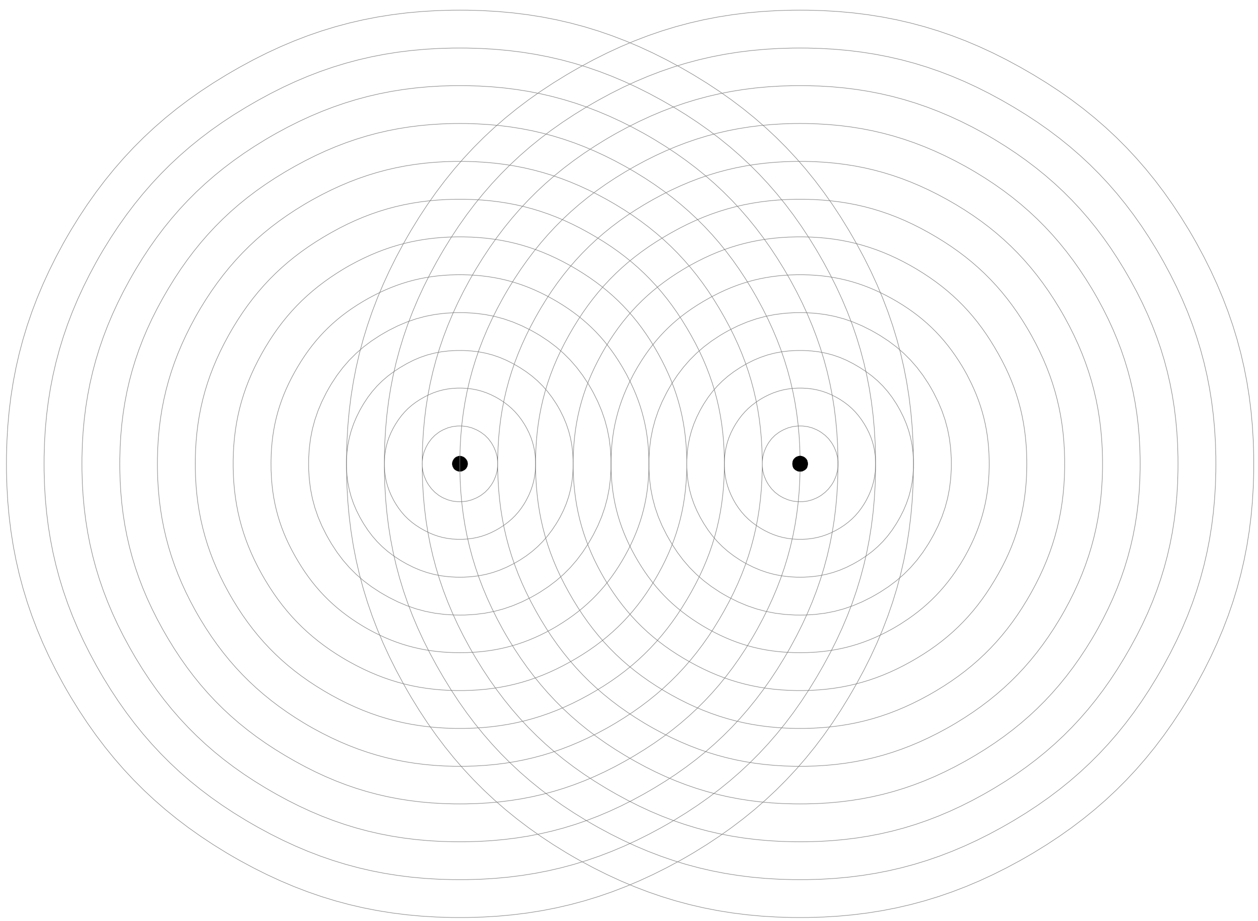


Las elipses están formadas por puntos cuya suma de distancias a dos puntos P y Q es constante.

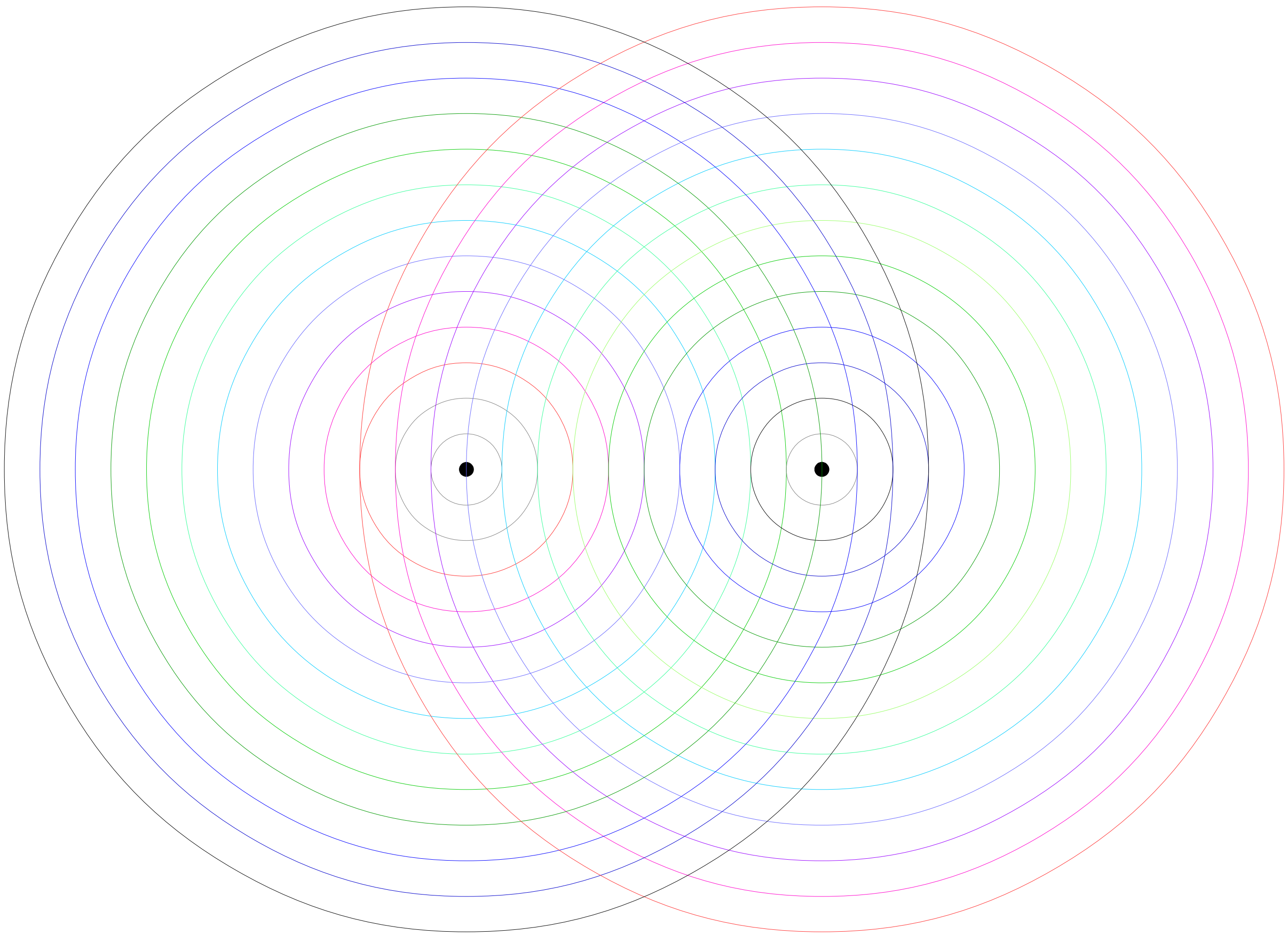


¿Como se verán las curvas formadas por puntos cuya *diferencia* de distancias a dos puntos P y Q es constante.

Podemos dibujar las elipses usando círculos

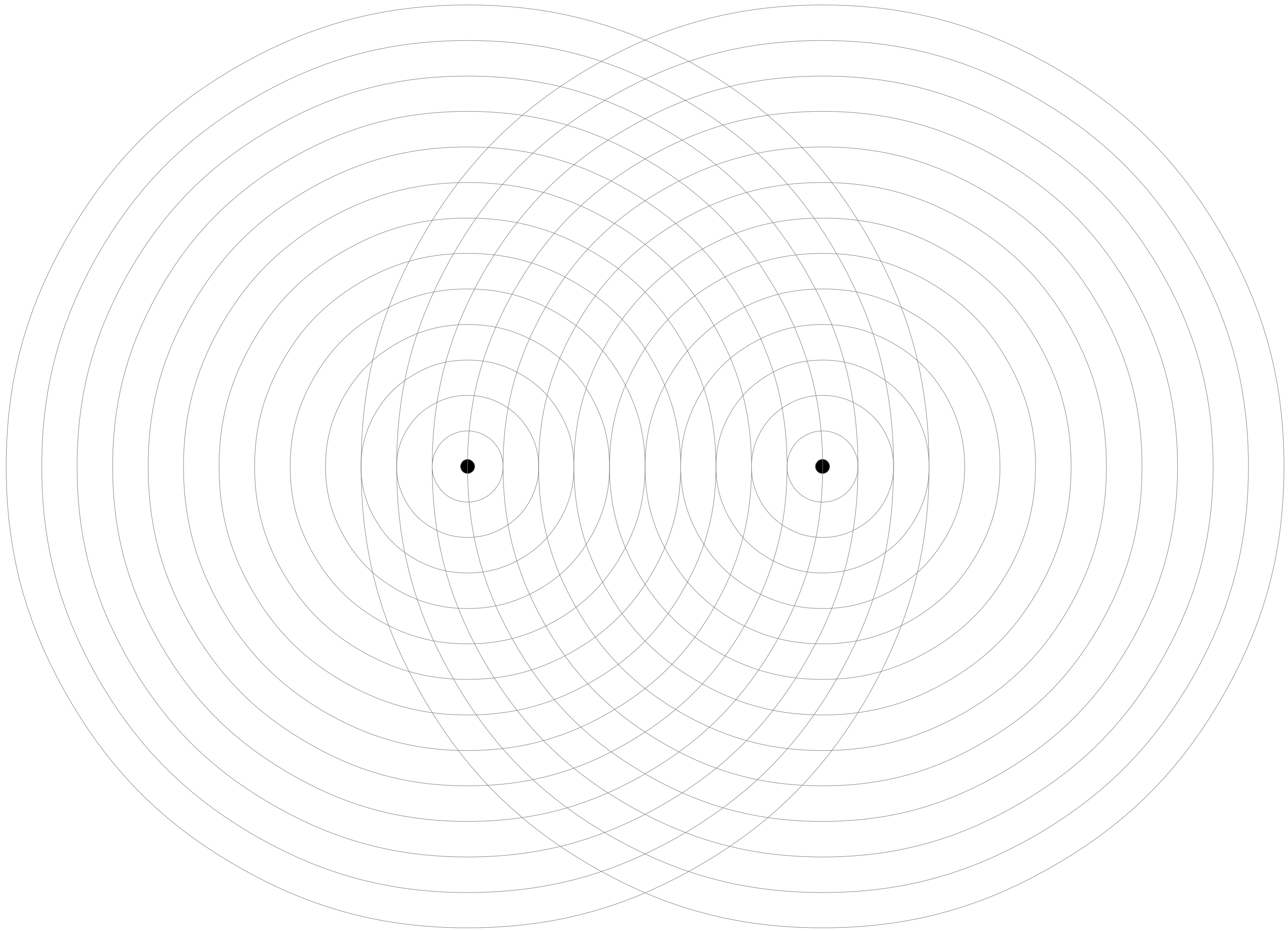


Una elipse está formadas por los puntos tales que la suma de sus distancias a dos puntos P y Q es constante.

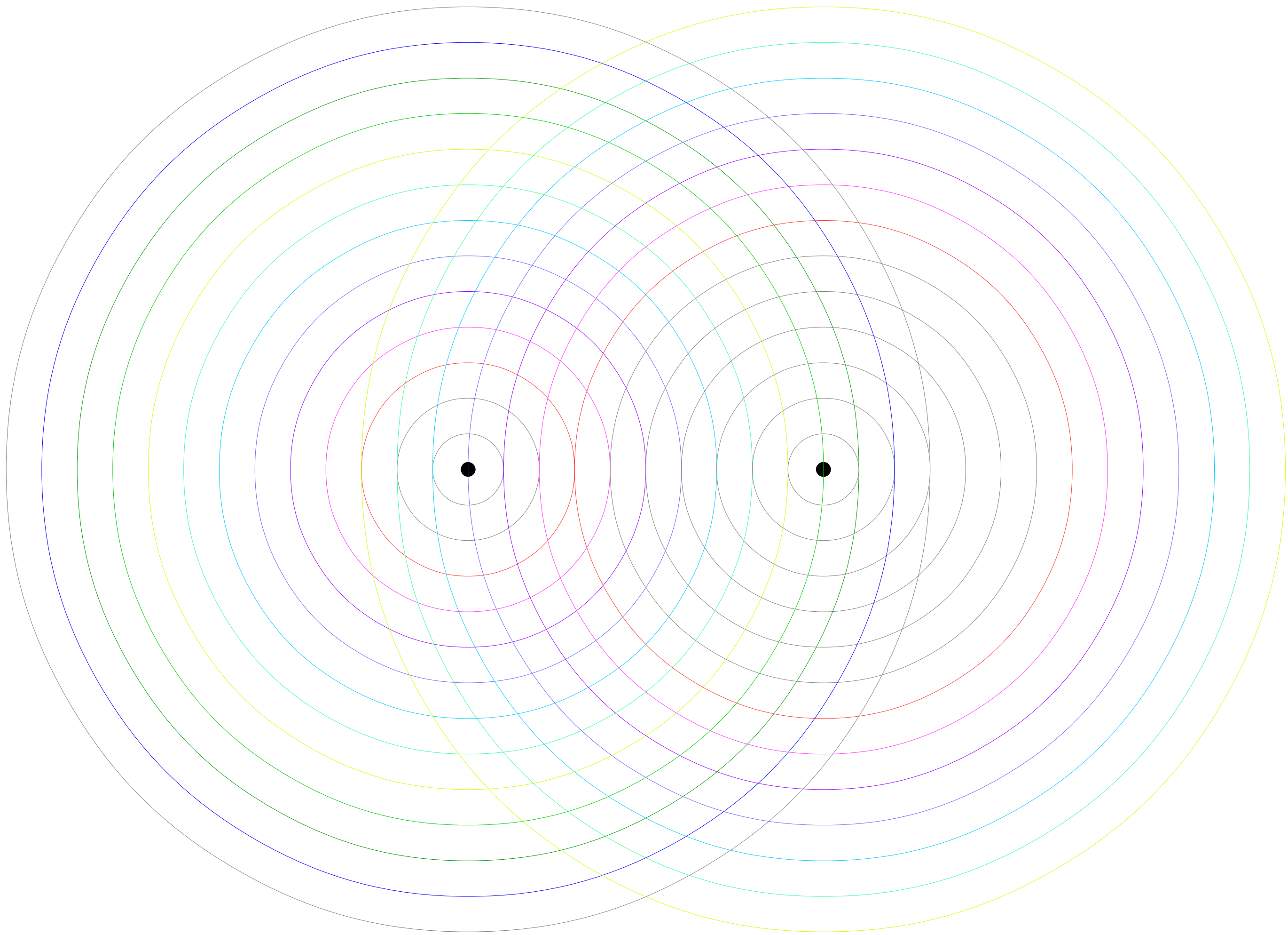


Ejemplo; si la distancia entre los focos es 10 y la suma de las distancias a los focos es 16

¿Como será la curva formadas por los puntos tales que la diferencia de sus distancias a dos puntos P y Q es constante?

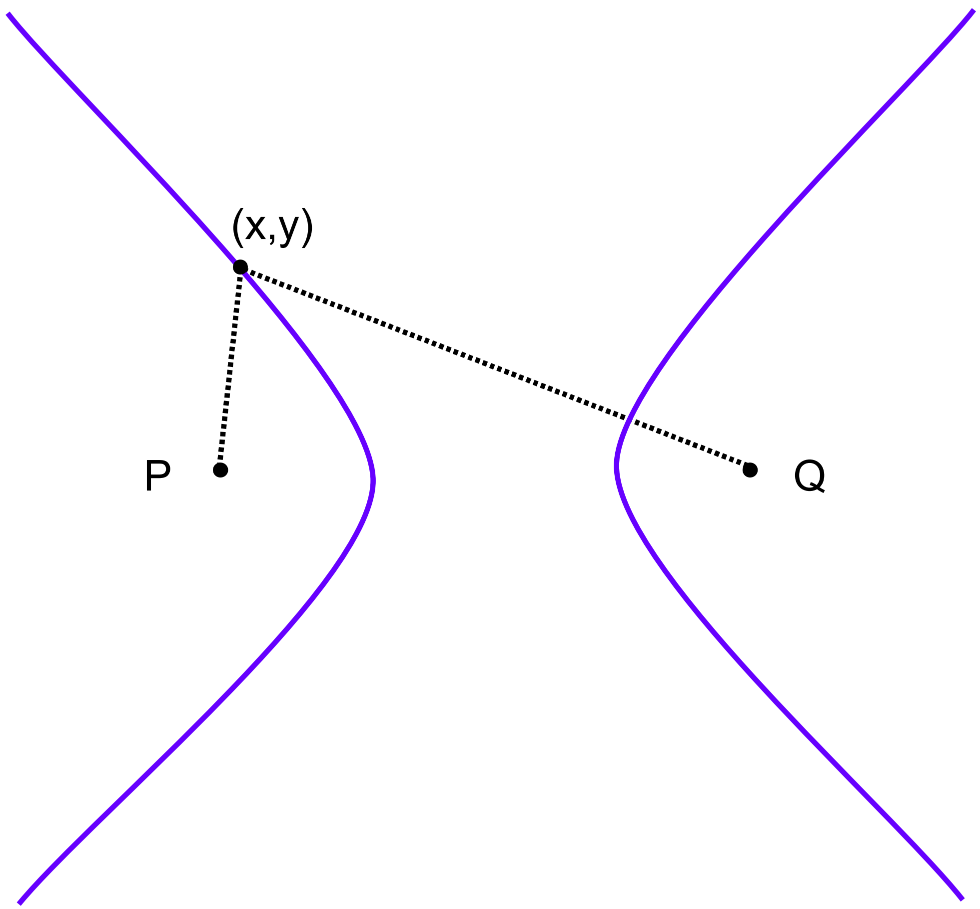


¿Como será la curva formadas por los puntos tales que la diferencia de sus distancias a dos puntos P y Q es constante?



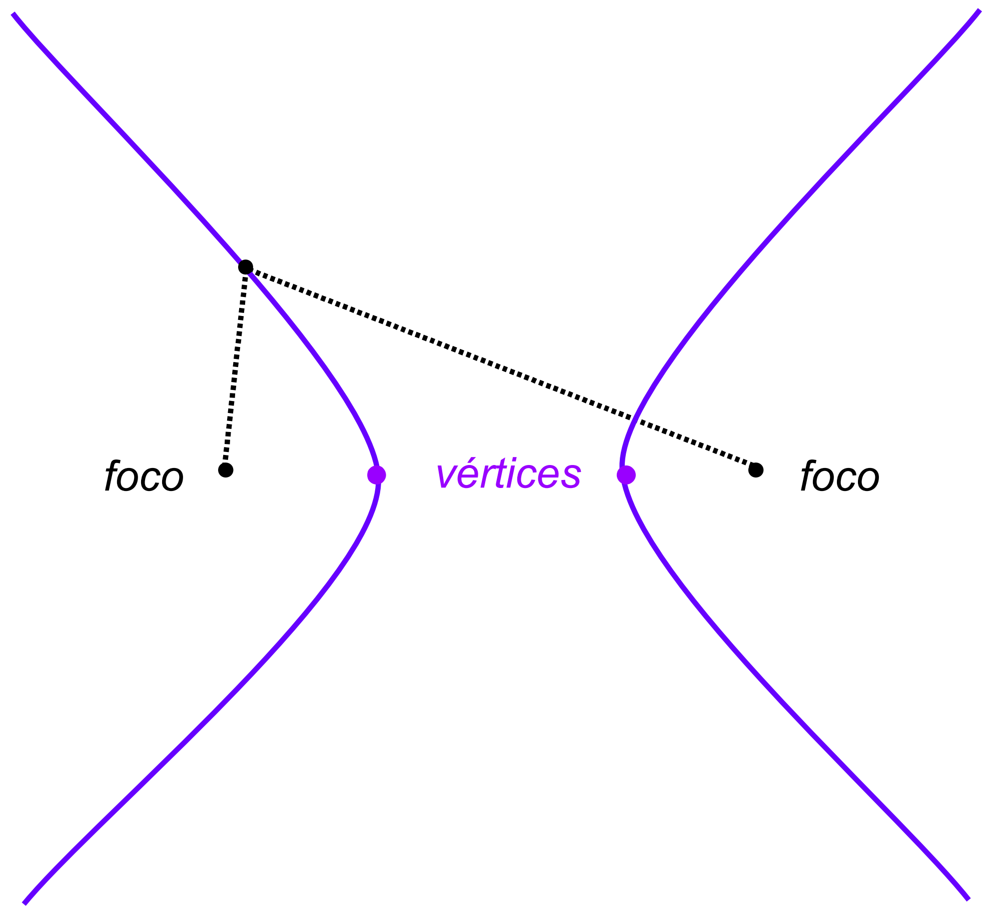
Ejemplo: si la distancia entre los focos es 10 y la resta de las distancias a los focos es 4

Una **hipérbola** está formada por los puntos del plano tales que la diferencia de sus distancias a dos puntos fijos (los **focos**) es constante.



Para que sea simétrica, consideramos la diferencia de P a Q y también la de Q a P.

Una **hipérbola** está formada por los puntos del plano tales que la diferencia de sus distancias a dos puntos fijos (los **focos**) es constante.



Los puntos de la hipérbola mas cercanos a los focos son los **vértices**, que están en la línea de los focos. Observar que la distancia entre los vértices es la diferencia de las distancias de los puntos de la hipérbola a los focos.

La **excentricidad** de una hipérbola es **e=c/a** (la razón entre la distancia entre los focos y la distancia entre los vértices)-

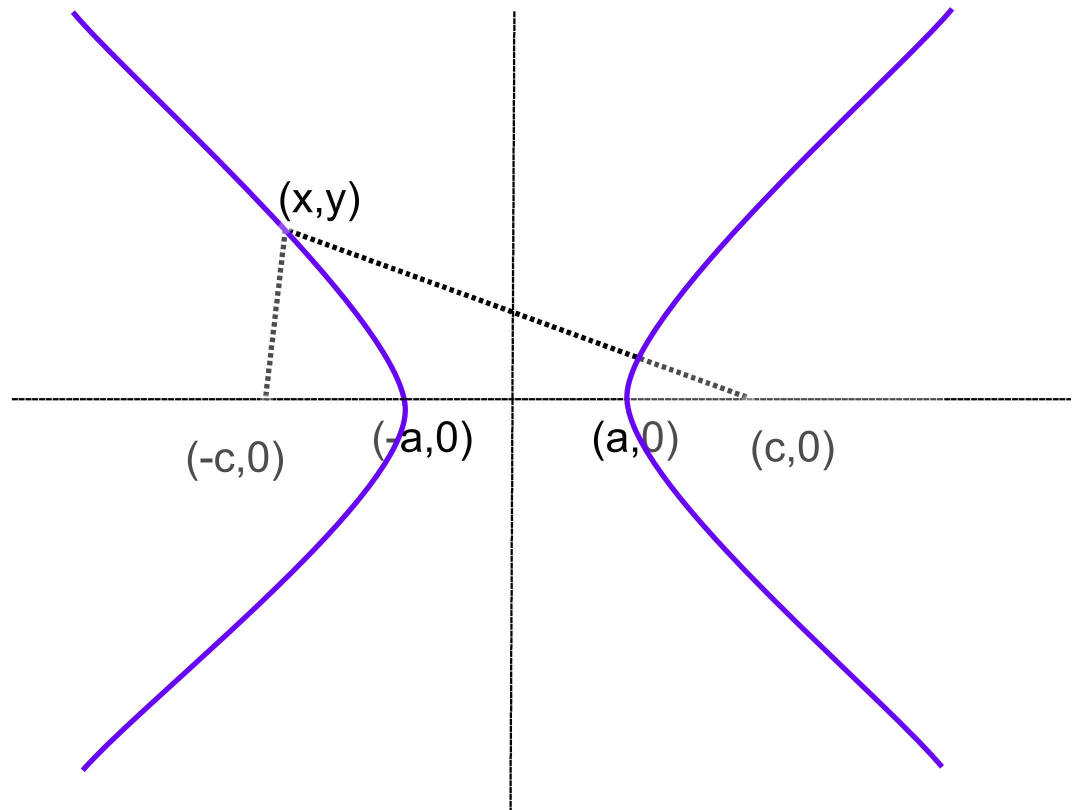
Lema. La forma de las hipérbolas está determinada por su excentricidad.

La **excentricidad** de una hipérbola es la razón entre la distancia entre los focos y la distancia entre los vértices)-

Lema. La forma de las hipérbolas está determinada por su excentricidad.

Demostración. Si dos hipérbolas tienen la misma excentricidad entonces podemos escalar una para que las distancia entre sus focos y la distancia entre sus vértices (que es la diferencia de las distancias de los puntos de la hipérbola a los focos) coincidan.

Ecuaciones de las hipérbolas



Para obtener las ecuaciones mas simples, podemos elegir el sistema de coordenadas de modo que los ejes de coordenadas coincidan con los ejes de simetría,

Si los focos estén en los puntos (-c,0) y (c,0) y si la diferencia de las distancias es 2a, entonces la hipérbola cruza al eje x en los puntos (a,0) y (-a,0) (estos son los vértices)

$$\sqrt{(x-c)^2+y^2} - \sqrt{(x+c)^2+y^2} = 2a$$

$$\sqrt{(x-c)^2+y^2} = 2a+\sqrt{(x+c)^2+y^2}$$

$$(x-c)^2 + y^2 = 4a^2 + 4a\sqrt{(x+c)^2+y^2} +(x+c)^2 + y^2$$

$$4a\sqrt{(x+c)^2+y^2} = -4a^2 - 4cx$$

$$\sqrt{(x+c)^2+y^2} = -(a + c/a\ x)$$

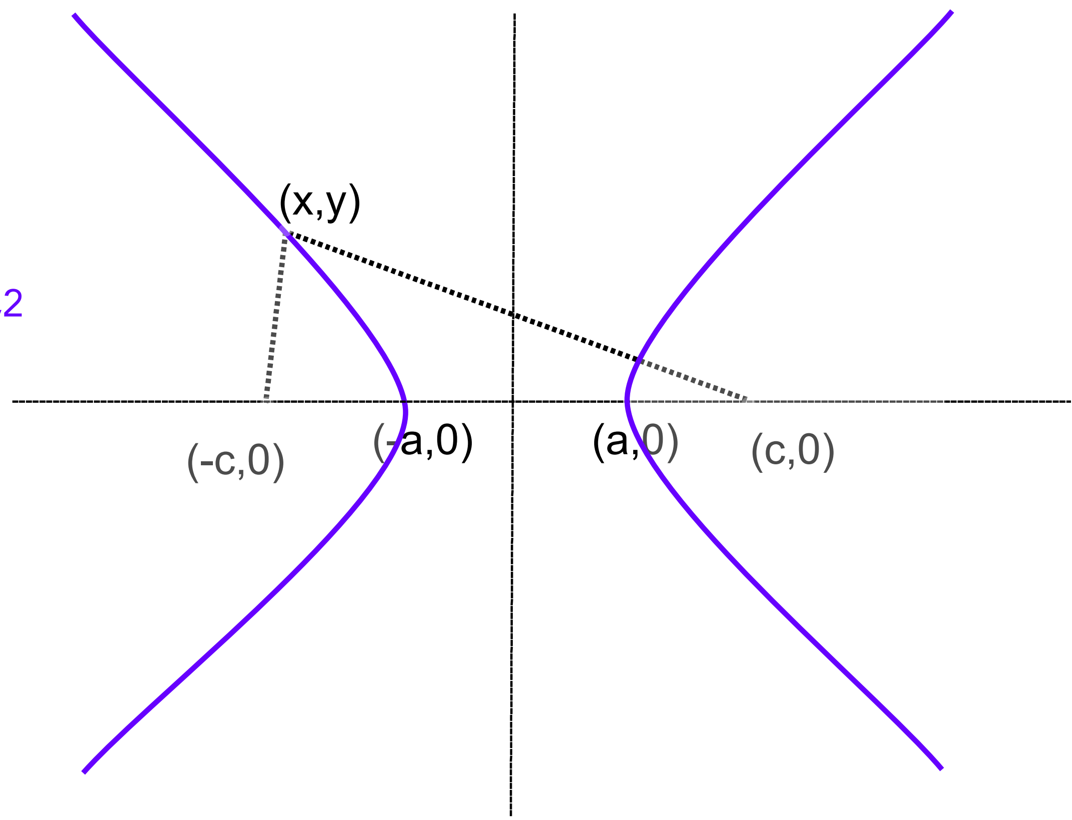
$$(x+c)^2 + y^2 = (a + c/a\ x)^2$$

$$x^2 - c^2/a^2\ x^2 + y^2 = a^2 - c^2$$

$(a^2-c^2) /a^2\ x^2 + y^2 = a^2-c^2$ y si definimos $b^2 = c^2-a^2$ entonces

$-b^2/a^2\ x^2 + y^2 = -b^2$ y dividiendo entre $-b^2$ queda

$$\boxed{x^2/a^2 - y^2/b^2 = 1}$$



Ejemplo. ¿Cual es la ecuación de la hipérbola formada por los puntos cuyas distancias a (3,0) y (-3,0) difieren por 4?

Ejemplo. ¿Cual es la ecuación de la hipérbola formada por los puntos cuyas distancias a (3,0) y (-3,0) difieren por 4?

Aquí a=4/2=2, c=3, así que b= $\sqrt{32-22} = \sqrt{5}$

y la hipérbola tiene ecuación

$x^2/4 \; - \; y^2/5 \; = 1$

Ejemplo. ¿Cual es la ecuación de la hipérbola formada por los puntos cuyas distancias a (3,0) y (-3,0) difieren por 4?

Aquí a=4/2=2, c=3, así que b= $\sqrt{32–22} = \sqrt{5}$

y la hipérbola tiene ecuación

$x^2/4 \ - \ y^2/5 \ = 1$

Ejemplo. ¿Cual es la ecuación de la hipérbola con focos en (2,0) y (-2,0) y vértices en (1,0) y (-1,0)?

Ejemplo. ¿Cual es la ecuación de la hipérbola formada por los puntos cuyas distancias a (3,0) y (-3,0) difieren por 4?

Aquí a=4/2=2, c=3, así que b= $\sqrt{32–22}$ = $\sqrt{5}$

y la hipérbola tiene ecuación

$x^2/4 - y^2/5 = 1$

Ejemplo. ¿Cual es la ecuación de la hipérbola con focos en (2,0) y (-2,0) y vértices en (1,0) y (-1,0)?

Aquí c=2 , a=1 y $b^2 = c^2 - a^2$ así que $b = \sqrt{3}$

y la hipérbola tiene ecuación $x^2/_1 - y^2/_3 = 1$

Ejercicio. ¿A que curva corresponde la ecuación $4x^2 - y^2 = 36$?

Ejercicio. ¿A que curva corresponde la ecuación $4x^2 - y^2 = 36$?

La ecuación representa una hipérbola,

ya que podemos escribirla como

$$x^2/9 - y^2/36 = 1.$$

de aquí podemos hallar los focos y

la diferencia de las distancias:

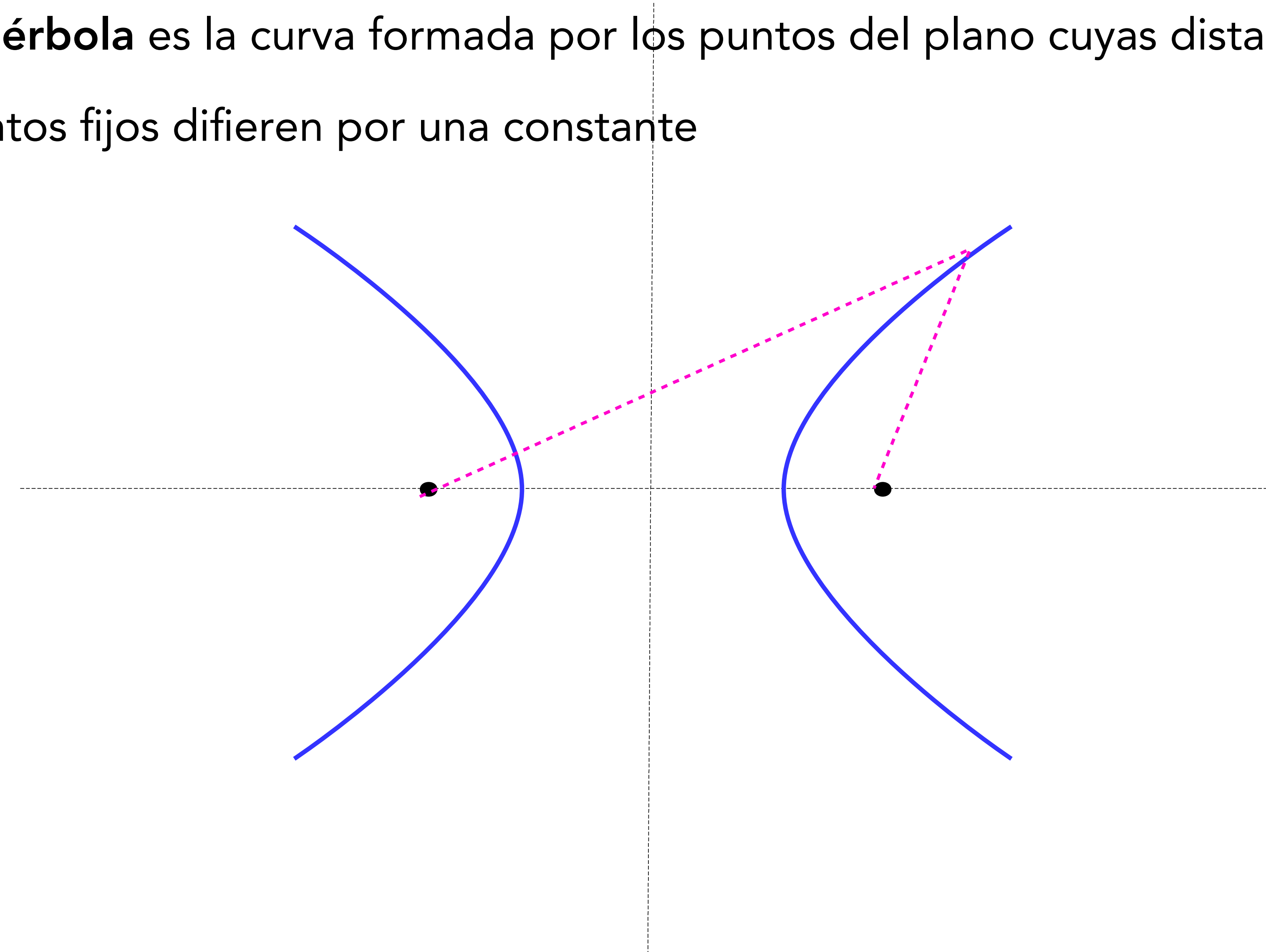
$a = 3$, $b = 6$ y $c^2 = a^2+b^2 = 45$

así que $c = \sqrt{45}$, por tanto la diferencia

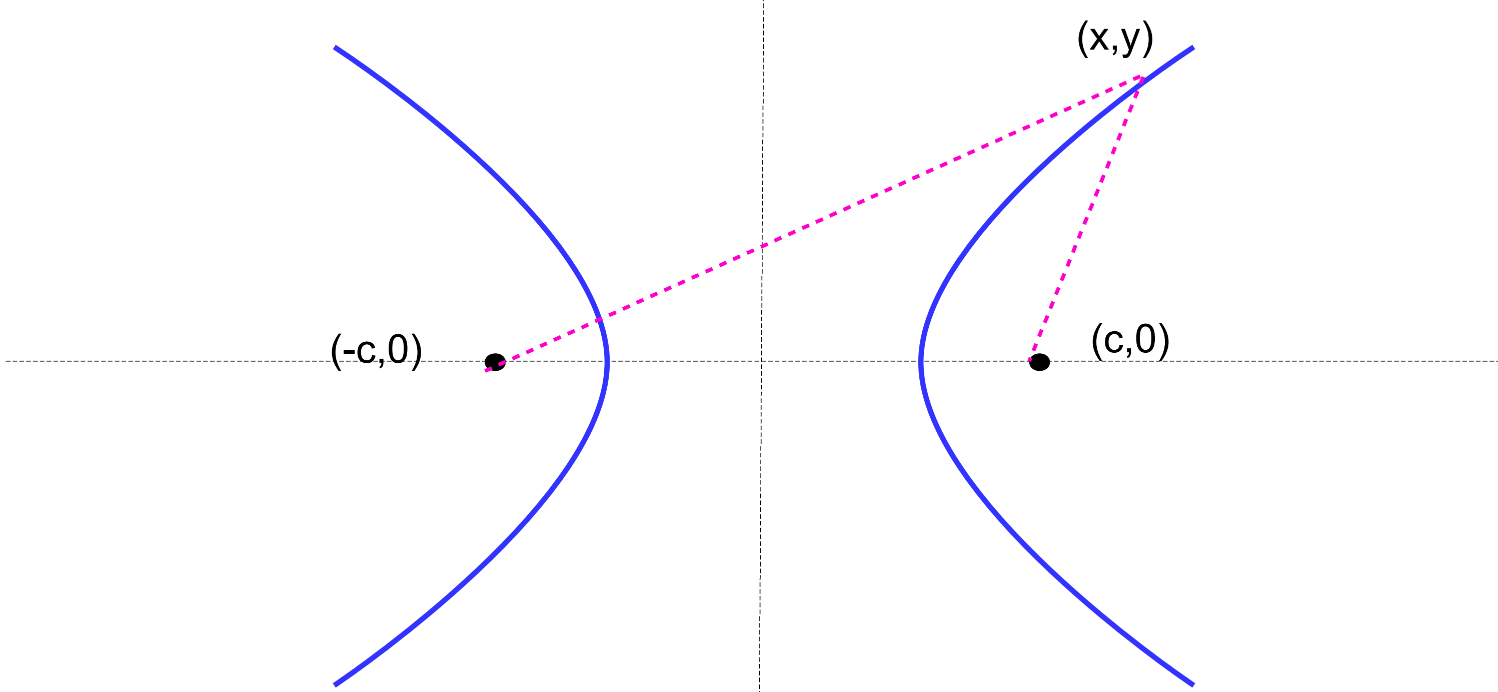
de las distancias es $2a=6$

y los focos están en $(-\sqrt{45},0)$ y $(\sqrt{45},0)$.

Una **hipérbola** es la curva formada por los puntos del plano cuyas distancias a dos puntos fijos difieren por una constante



Una **hipérbola** es la curva formada por los puntos del plano cuyas distancias a dos puntos fijos difieren por una constante



Si elegimos las coordenadas de modo que los ejes la hipérbola coincidan con los ejes de coordenadas y los focos están en el eje x entonces la ecuación de la hipérbola es

$x^2 / a^2 - y^2 / b^2 = 1$

2a= dist. entre vértices = diferencia de distancias a los focos

2c= dist. entre focos $b^2 = c^2 - a^2$

Asíntotas de la hipérbola.

La ecuación de la hipérbola

$x^2 / a^2 - y^2 / b^2 = 1$

se parece a la ecuación

$x^2 / a^2 - y^2 / b^2 = 0$

Asíntotas de la hipérbola.

La ecuación de la hipérbola

$x^2 / a^2 - y^2 / b^2 = 1$

se parece a la ecuación

$x^2 / a^2 - y^2 / b^2 = 0$

que corresponde a un par de rectas:

$x/a-y/b = 0 \quad x/a+y/b =0$

o sea

$bx-ay =0 \qquad bx+ay =0$

Asíntotas de la hipérbola.

La ecuación de la hipérbola

$x^2 / a^2 - y^2 / b^2 = 1$

se parece a la ecuación

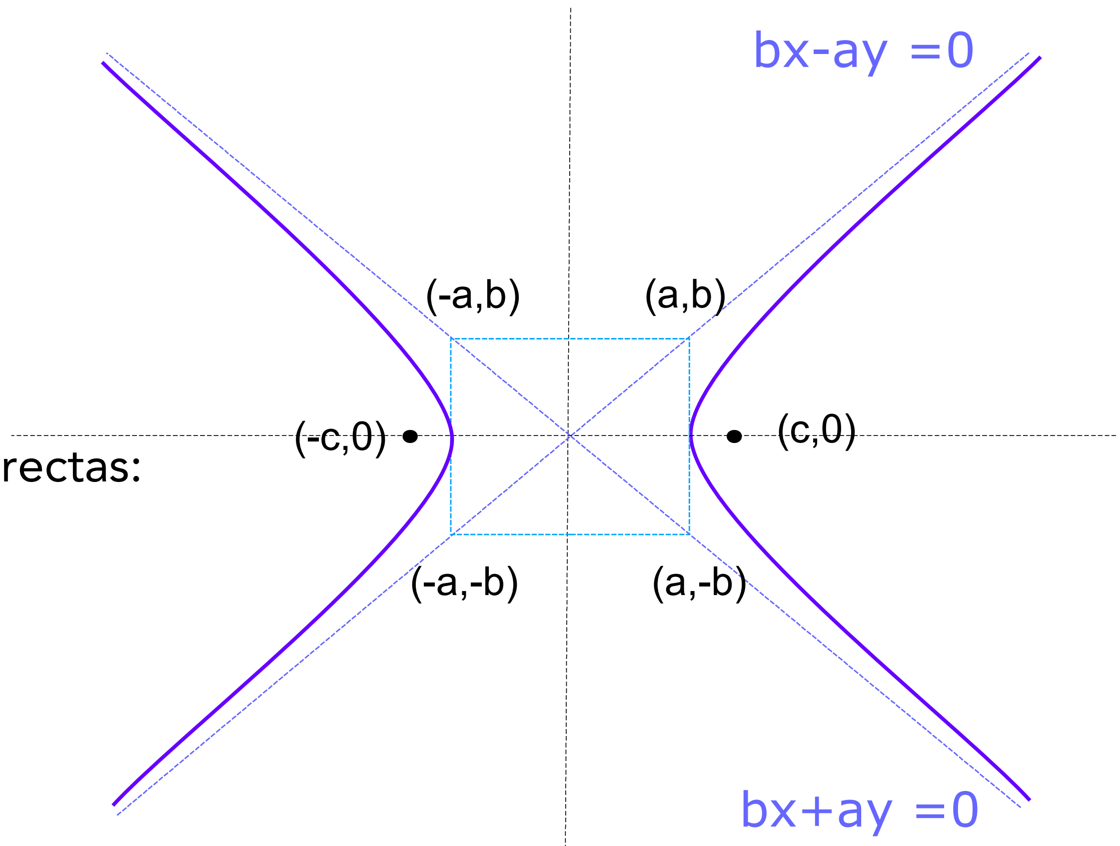
$x^2 / a^2 - y^2 / b^2 = 0$

que corresponde a un par de rectas:

$x/a-y/b = 0$ $\quad$ $x/a+y/b =0$

o sea

$bx-ay =0$ $\qquad$ $bx+ay =0$



Observar que la hipérbola no intersecta a las rectas (ya que sus ecuaciones son incompatibles)

Lema. La hipérbola $x^2/a^2 - y^2/b^2 = 1$ se aproxima *asintoticamente* al par de rectas $x^2/a^2 - y^2/b^2 = 0$

Lema. La hipérbola $x^2/a^2 - y^2/b^2 = 1$ se aproxima a *asintoticamente* al par de rectas $x^2/a^2 - y^2/b^2 = 0$

Demostración. Si despejamos y de la ecuación de la hipérbola queda

$y = \pm b/a \sqrt{x^2 - a^2}$

y si despejamos y de la ecuación de las lineas queda

$y = \pm b/a\ x$

Cuando x crece $\sqrt{x^2 - a^2}$ se aproxima cada vez mas a x:

$\lim_{x \to \infty} \sqrt{x^2 - a^2} - x = 0$

así que la hipérbola $y = \pm b/a \sqrt{x^2 - a^2}$

se aproxima cada vez mas a las rectas $y = \pm b/a\ x$.

Las rectas $y = b/a\ x$, $y = -b/a\ x$ son las **asíntotas** de la hipérbola.

Teniendo los vértices y las asíntotas de la hipérbola es fácil dibujarla:

Ejemplo. ¿Como se ve la hipérbola $x^2/4 - y^2/9 = 1$?

Teniendo los vértices y las asíntotas de la hipérbola es fácil dibujarla:

Ejemplo. ¿Como se ve la hipérbola $x^2/4 - y^2/9 = 1$?

$a=2$ y $b=3$

así que los vértices son $(-2,0)$ y $(2,0)$ y

las asíntotas están dadas por $x^2/4 - y^2/9 = 0$

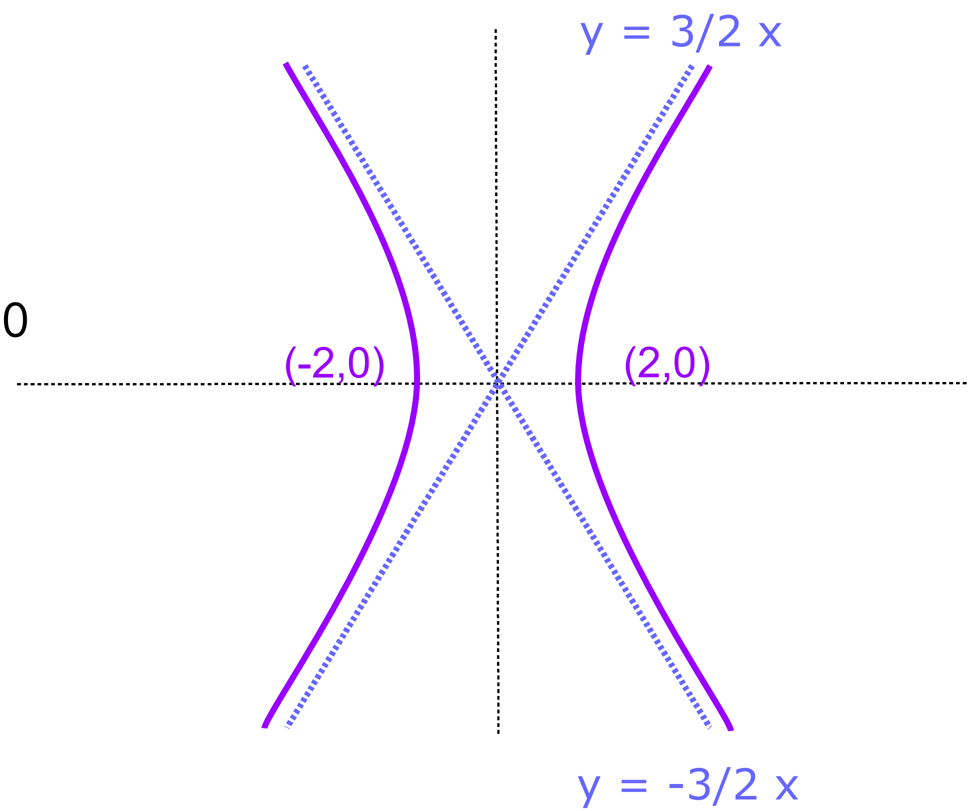
o sea $y = \pm 3/2\, x$

Y como $c^2=a^2+b^2 =13$ entonces los focos

están en $(\sqrt{13},0)$ y $(-\sqrt{13},0)$

Teniendo los vértices y las asíntotas de la hipérbola es fácil dibujarla:

Ejemplo. ¿Como se ve la hipérbola $x^2/4 - y^2/9 = 1$?



$a=2$ y $b=3$

así que los vértices son $(-2,0)$ y $(2,0)$ y

las asíntotas están dadas por $x^2/4 - y^2/9 = 0$

o sea $y = \pm 3/2\, x$

Y como $c^2=a^2+b^2 =13$ entonces los focos

están en $(\sqrt{13},0)$ y $(-\sqrt{13},0)$

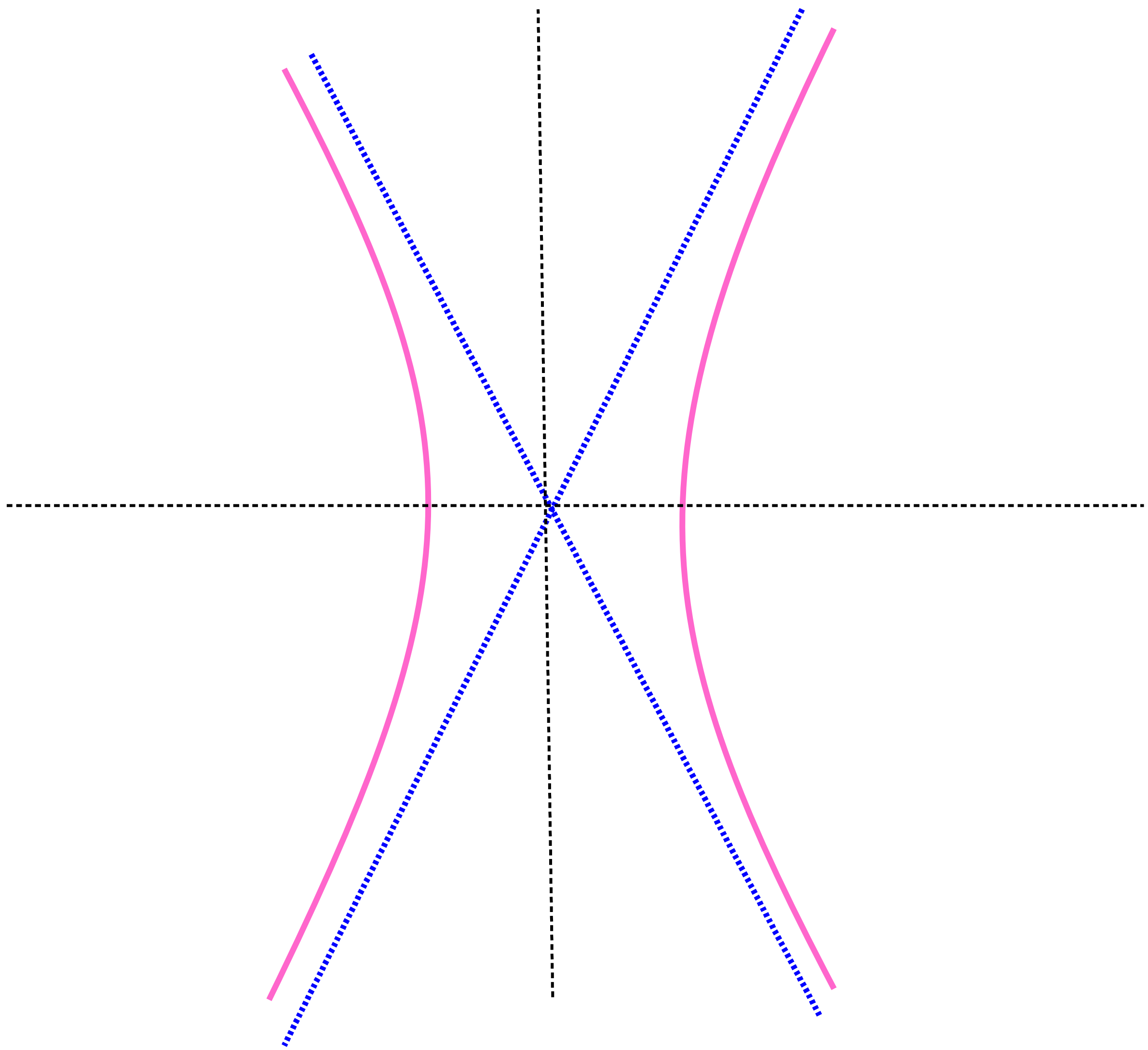
Ejemplo. Encuentra la ecuación de la hipérbola con vértices en (1,0) y (-1,0) y cuyas asíntotas son las rectas $y=\pm 2x$.

Ejemplo. Encuentra la ecuación de la hipérbola con vértices en (1,0) y (-1,0) y cuyas asíntotas son las rectas $y=\pm 2x$.

Aquí $a=1$ y $b/a=2$ así que $b=2$ y la ecuación es $x^2/1 - y^2/4 = 1$

Ejemplo. Encuentra la ecuación de la hipérbola con vértices en (1,0) y (-1,0) y cuyas asíntotas son las rectas $y=\pm 2x$.

Aquí $a=1$ y $b/a=2$ así que $b=2$ y la ecuación es $x^2/1 - y^2/4 = 1$



La **excentricidad** de una hipérbola es **e=c/a** , la razón entre la distancia entre los focos y la distancia entre los vértices.

Lema. La forma de las hipérbolas está determinada por su excentricidad.

La **excentricidad** de una hipérbola es **e=c/a** , la razón entre la distancia entre los focos y la distancia entre los vértices.

Lema. La forma de las hipérbolas está determinada por su excentricidad.

Demostración. Si dos hipérbolas tienen la misma excentricidad y agrandamos una para que las distancias entre los focos coincidan entonces las distancias entre los vértices también coinciden y por lo tanto la diferencia de las distancias de los puntos a los focos también coinciden por lo tanto las dos tienen la misma forma. □

Lema. Dos hipérbolas horizontales con las mismas asíntotas tienen la misma forma (solo difieren en el tamaño).

Lema. Dos hipérbolas horizontales con las mismas asíntotas tienen la misma forma (solo difieren en el tamaño).

Demostración. Si dos hipérbolas horizontales tienen las mismas asíntotas, entonces podemos agrandar una de ellas hasta que los vértices de las dos hipérbolas coincidan, sin que cambien sus asíntotas.

Pero si dos hipérbolas $x^2/a^2 - y^2/b^2 = 1$ y $x^2/a'^2 - y^2/b'^2 = 1$ tienen los mismos vértices entonces $a=a'$ y si sus asíntotas coinciden entonces $a/b=a'/b'$ y por lo tanto también $b=b'$ así que las dos ecuaciones son iguales y por lo tanto las hipérbolas son iguales.

Ejemplo.

Las ecuaciones $x^2 - 2y^2 = 1$ y $4x^2 - 8y^2 = 1$

corresponden a hipérbolas horizontales con

asíntotas: $\sqrt{1}x \pm \sqrt{2}y = 0$ y $\sqrt{4}x \pm \sqrt{8}y = 0$

que son iguales ya que $\sqrt{1}/\sqrt{2} = \sqrt{4}/\sqrt{8}$.

Ejemplo.

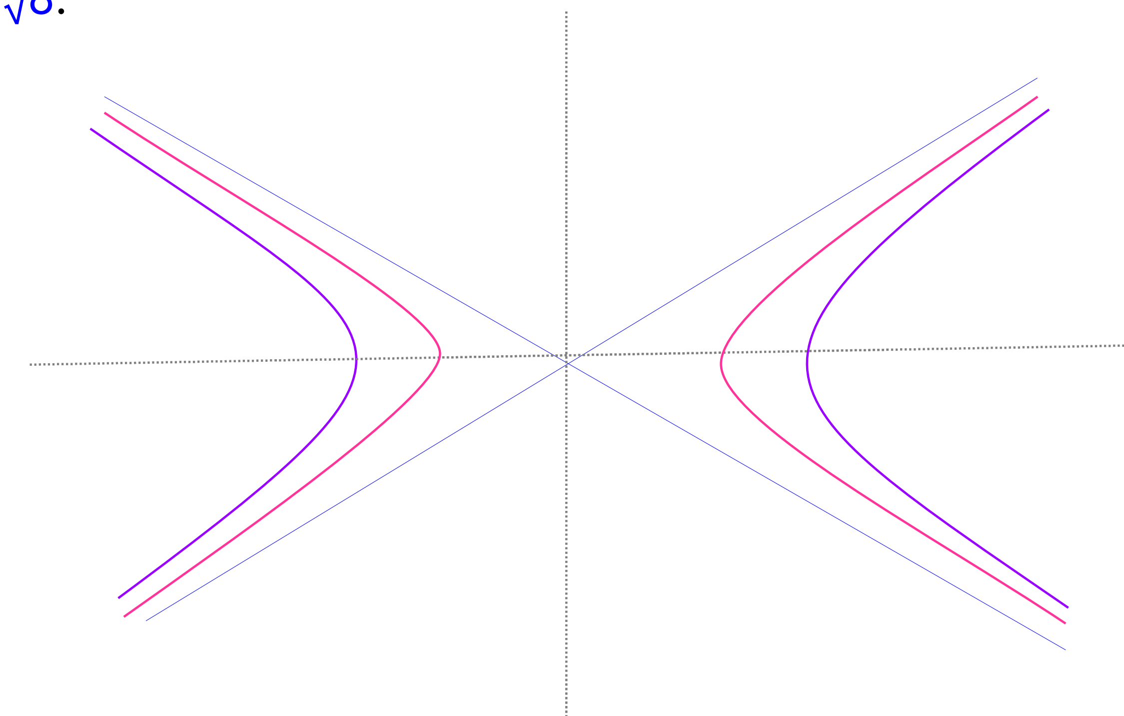
Las ecuaciones $x^2 - 2y^2 = 1$ y $4x^2 - 8y^2 = 1$

corresponden a hipérbolas horizontales con

asíntotas: $\sqrt{1}x \pm \sqrt{2}y = 0$ y $\sqrt{4}x \pm \sqrt{8}y = 0$

que son iguales ya que $\sqrt{1}/\sqrt{2} = \sqrt{4}/\sqrt{8}$.

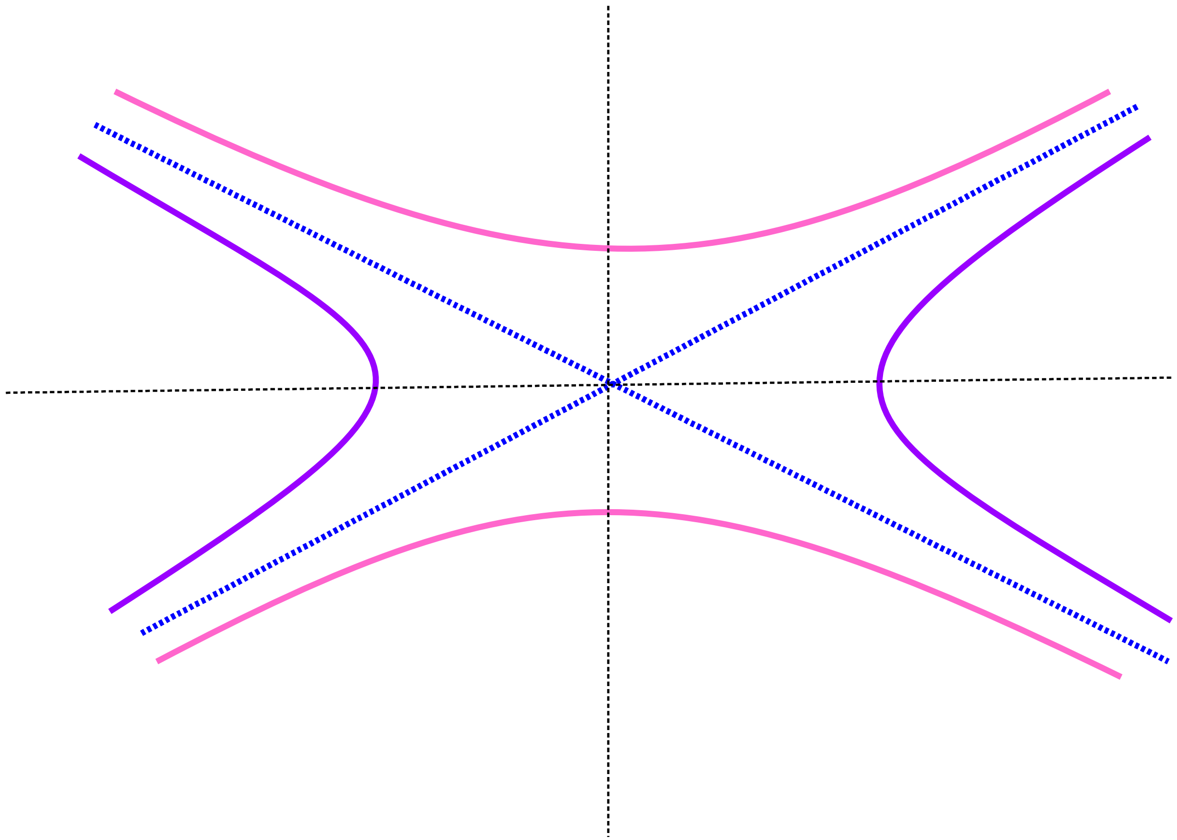
Así que las dos hipérbolas tienen la misma forma y solo difieren por el tamaño:



$4x^2 - 8y^2 = 1$ tiene la mitad del tamaño que $x^2 - 2y^2 = 1$.

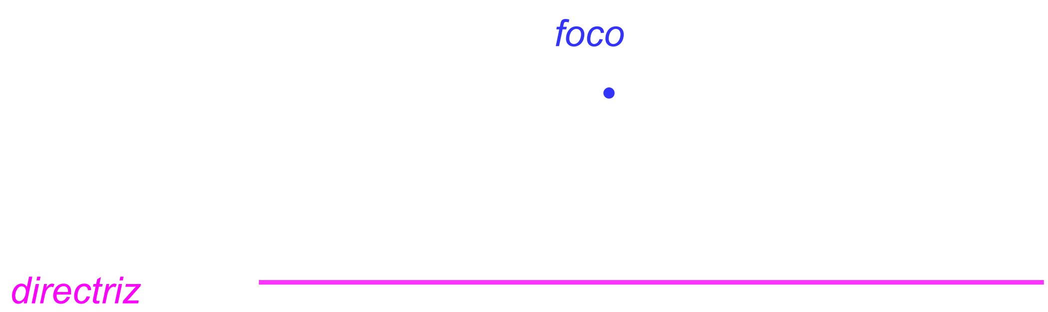
Ejemplo. Las ecuaciones $x^2 - 4y^2 = 1$ y $x^2 - 4y^2 = -1$ corresponden a hipérbolas con las mismas asíntotas $x \pm 2y = 0$ pero los papeles de x y y están intercambiados: la primera es de una hipérbola que abre hacia los lados y la segunda abre hacia arriba y abajo.

Ejemplo. Las ecuaciones $x^2 - 4y^2 = 1$ y $x^2 - 4y^2 = -1$ corresponden a hipérbolas con las mismas asíntotas $x \pm 2y = 0$ pero los papeles de x y y están intercambiados: la primera es de una hipérbola que abre hacia los lados y la segunda abre hacia arriba y abajo.



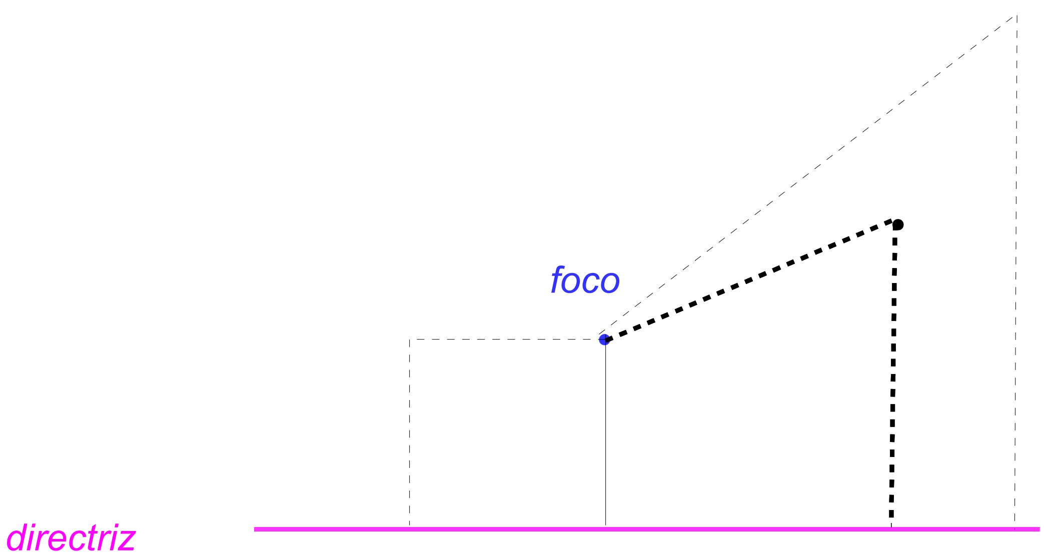
Parábolas

Las curvas formadas por los puntos del plano cuyas distancia a un punto fijo P es igual a su distancia a una recta L son llamadas **parábolas**. El punto P es el **foco** de la parábola y la recta L es su **directriz**. El punto de la parábola mas cercano al foco es el **vértice**.



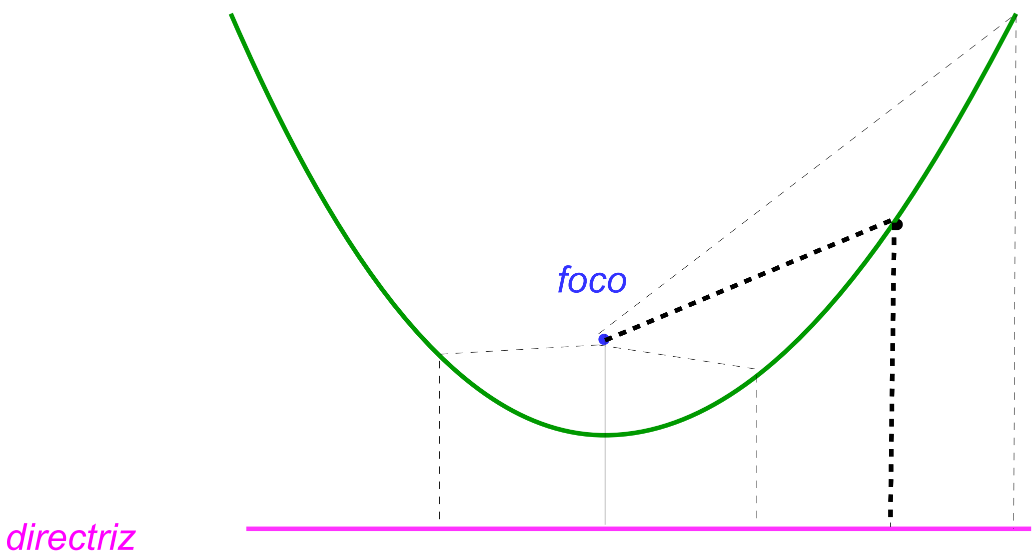
Parábolas

Las curvas formadas por los puntos del plano cuyas distancia a un punto fijo P es igual a su distancia a una recta L son llamadas **parábolas**. El punto P es el **foco** de la parábola y la recta L es su **directriz**. El punto de la parábola mas cercano al foco es el **vértice**.



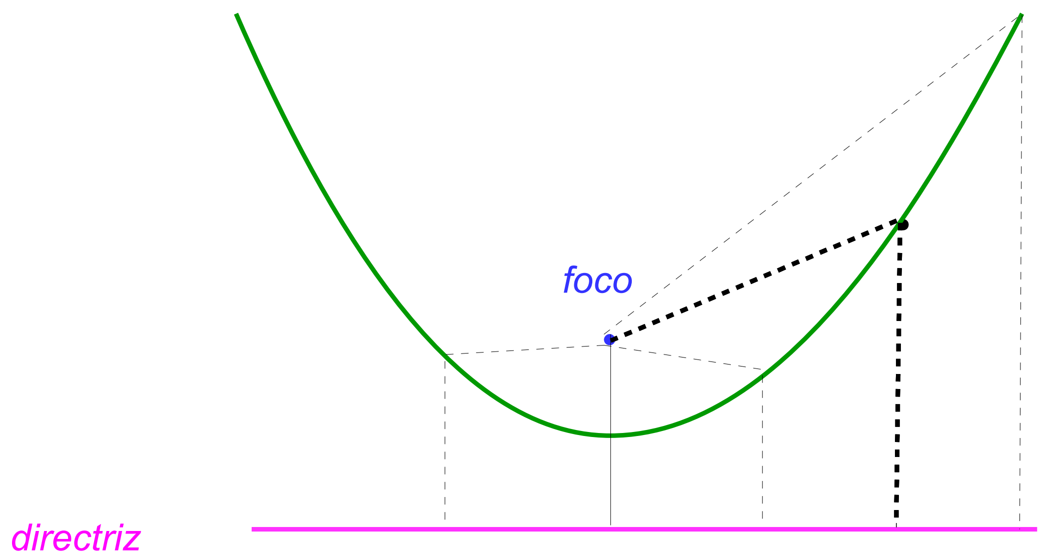
Parábolas

Las curvas formadas por los puntos del plano cuyas distancia a un punto fijo P es igual a su distancia a una recta L son llamadas **parábolas**. El punto P es el **foco** de la parábola y la recta L es su **directriz**. El punto de la parábola mas cercano al foco es el **vértice**.



Parábolas

Las curvas formadas por los puntos del plano cuyas distancia a un punto fijo P es igual a su distancia a una recta L son llamadas **parábolas**. El punto P es el **foco** de la parábola y la recta L es su **directriz**. El punto de la parábola mas cercano al foco es el **vértice**.



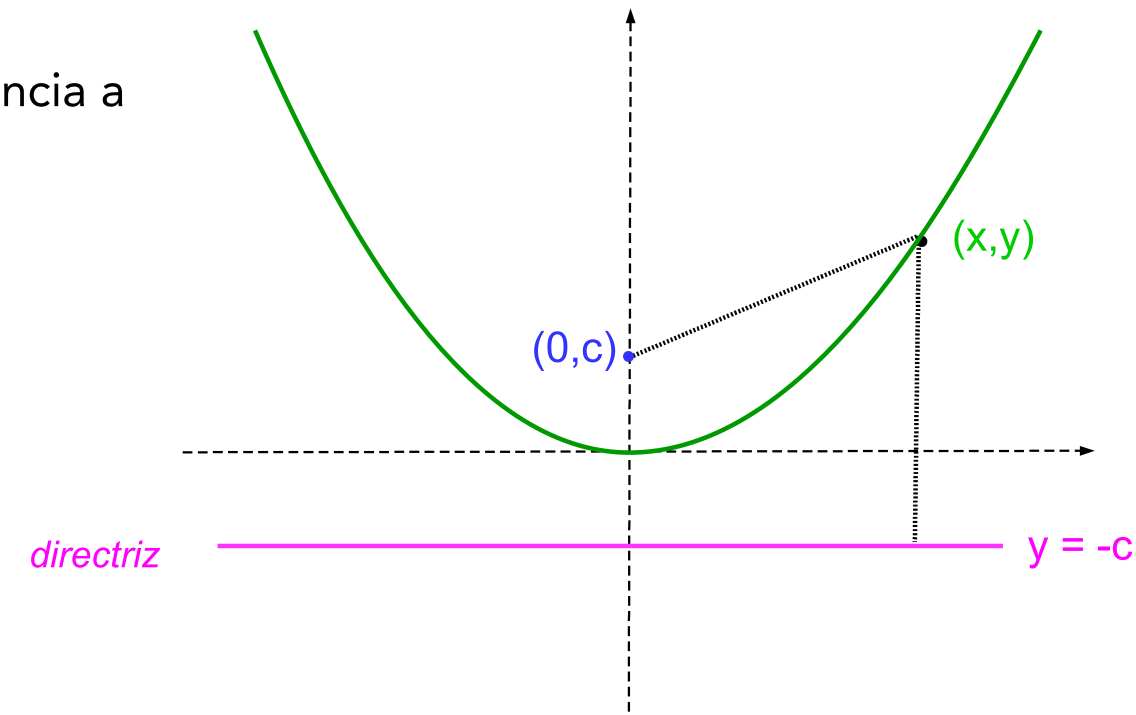
Las parábolas tienen muchas aplicaciones prácticas: las antenas parabólicas, los radares, los faros de los coches aprovechan una propiedad única de las parábolas.

La ecuación de la parábola formada por

los puntos (x,y) del plano cuya distancia

al punto (0,c) es igual a su distancia a

la recta y = -c es:

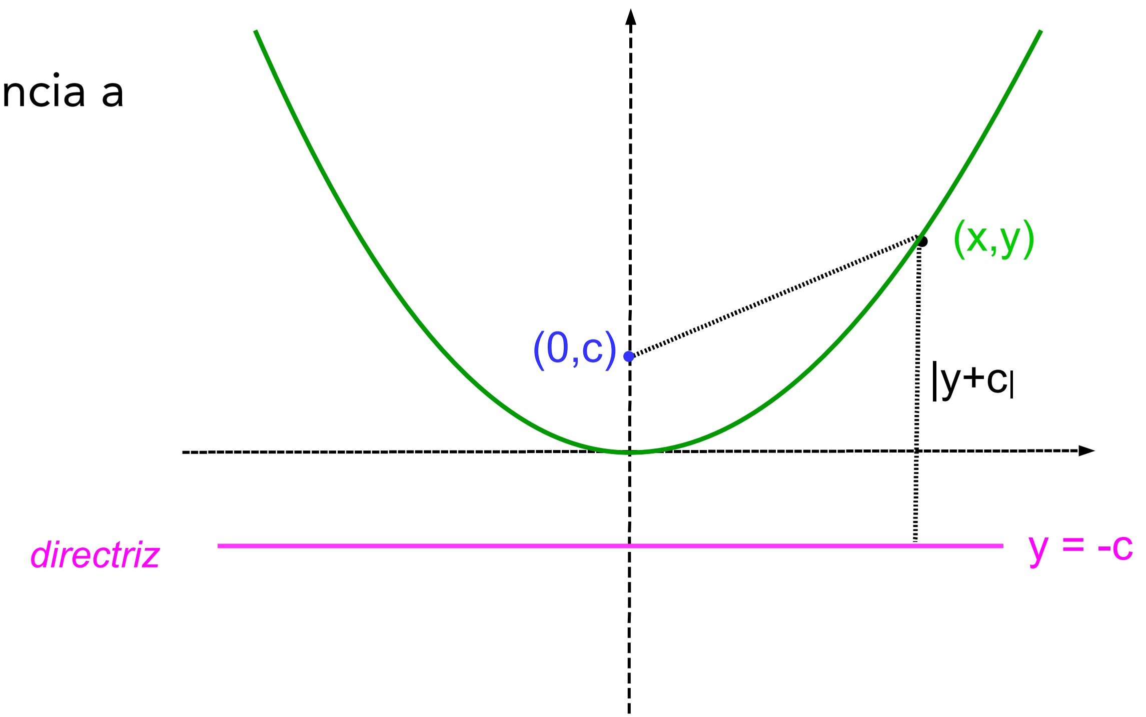


La ecuación de la parábola formada por los puntos (x,y) del plano cuya distancia al punto (0,c) es igual a su distancia a la recta y = -c es:

$$\sqrt{x^2 + (y-c)^2} = |y+c|$$

$$x^2 + (y-c)^2 = (y+c)^2$$

$$x^2 = 4cy$$



La ecuación de la parábola formada por

los puntos (x,y) del plano cuya distancia

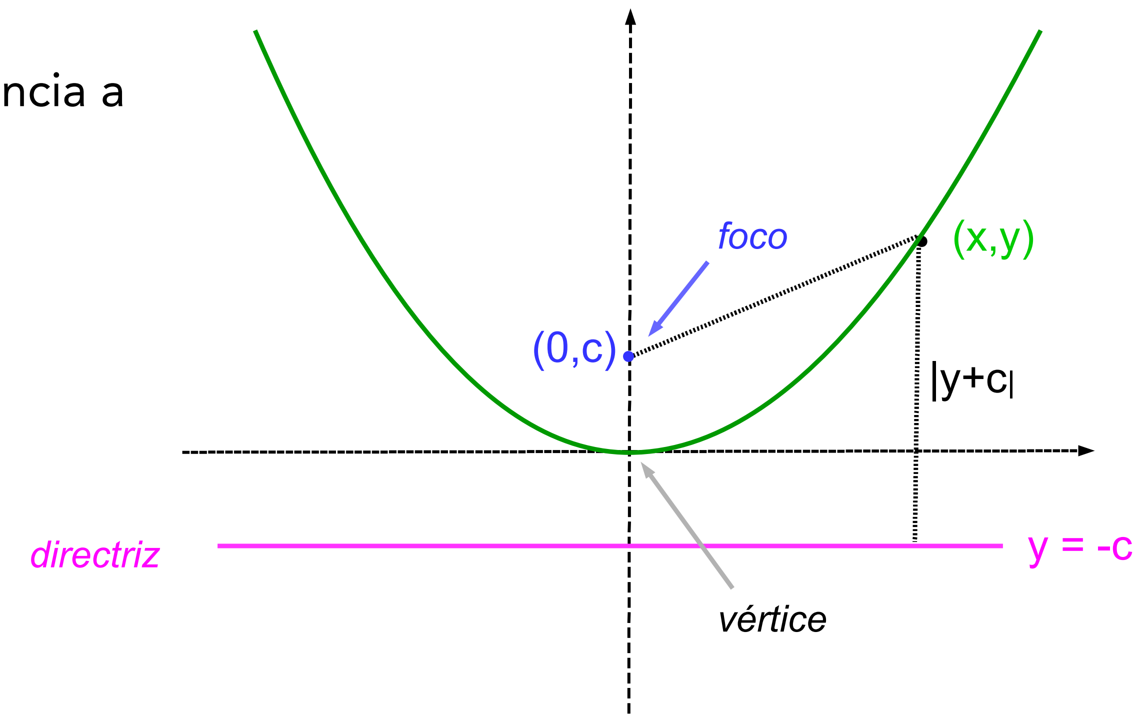
al punto (0,c) es igual a su distancia a

la recta y = -c es:

$$\sqrt{x^2 + (y-c)^2} = |y+c|$$

$$x^2 + (y-c)^2 = (y+c)^2$$

$$x^2 = 4cy$$



La distancia del vértice al foco (la distancia focal) es 1/4 del coeficiente de y.

Ejemplo. ¿Donde esta el foco de la parábola $y = x^2$?

La ecuación de la parábola formada por

los puntos (x,y) del plano cuya distancia

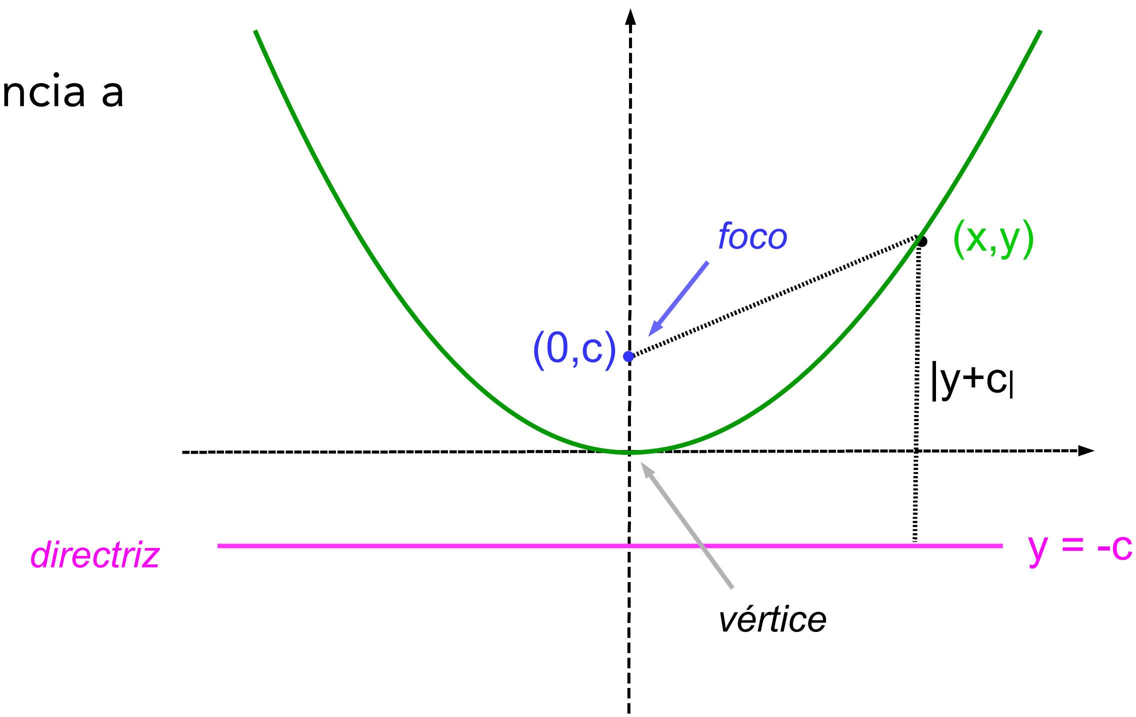
al punto (0,c) es igual a su distancia a

la recta y = -c es:

$$\sqrt{x^2 + (y-c)^2} = |y+c|$$

$$x^2 + (y-c)^2 = (y+c)^2$$

$$x^2 = 4cy$$



La distancia del vértice al foco (la distancia focal) es 1/4 del coeficiente de y.

Ejemplo. ¿Donde esta el foco de la parábola $y = x^2$?

Aquí 4c=1 así que c=1/4 y el foco es el punto (0,1/4)

Ejemplo. ¿Cual es la ecuación de la parábola con vértice en (0,0) y foco en (0,3)?

Ejemplo. ¿Cual es la ecuación de la parábola con vértice en (0,0) y foco en (0,3)?

$x^2 = 4cy$

Como c=3 la ecuación es

$x^2 = 12y$

Ejemplo. ¿Cual es la ecuación de la parábola con vértice en (0,0) y foco en (0,3)?

$x^2 = 4cy$

Como c=3 la ecuación es

$x^2 = 12y$

Ejemplo. ¿Cual es la ecuación de la parábola con vértice en (0,0) y foco en (2,0)?

Ejemplo. ¿Cual es la ecuación de la parábola con vértice en (0,0) y foco en (0,3)?

$x^2 = 4cy$

Como c=3 la ecuación es

$x^2 = 12y$

Ejemplo. ¿Cual es la ecuación de la parábola con vértice en (0,0) y foco en (2,0)?

Los papeles de x y y están intercambiados

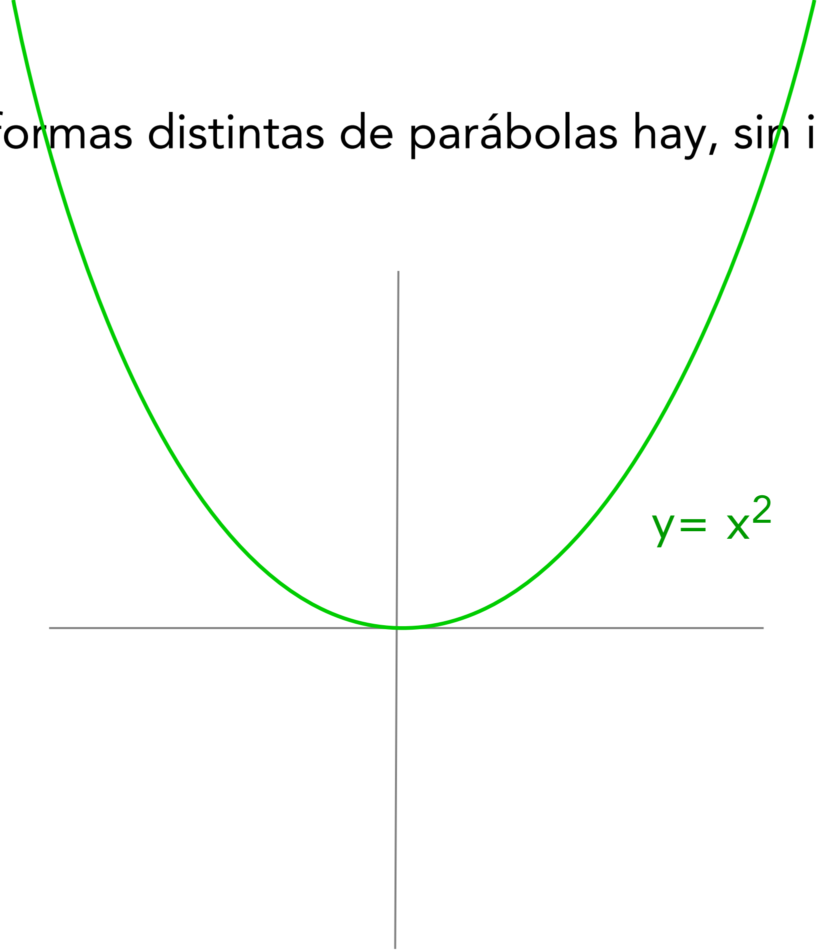
La parábola debe tener ecuación

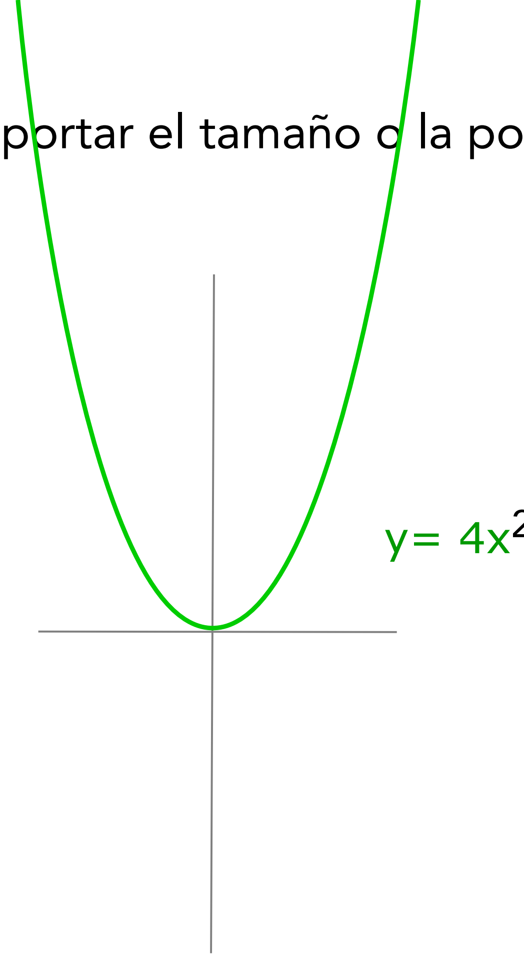
$y^2 = 4cx$

Como c=2 la ecuación es

$y^2 = 8x$

¿Cuantas formas distintas de parábolas hay, sin importar el tamaño o la posición?

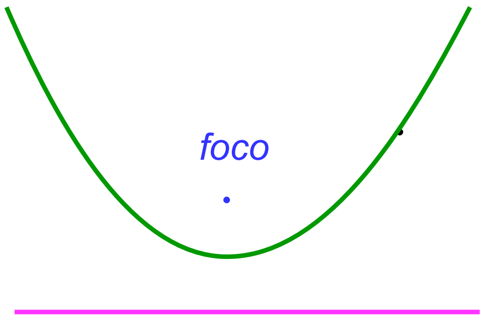


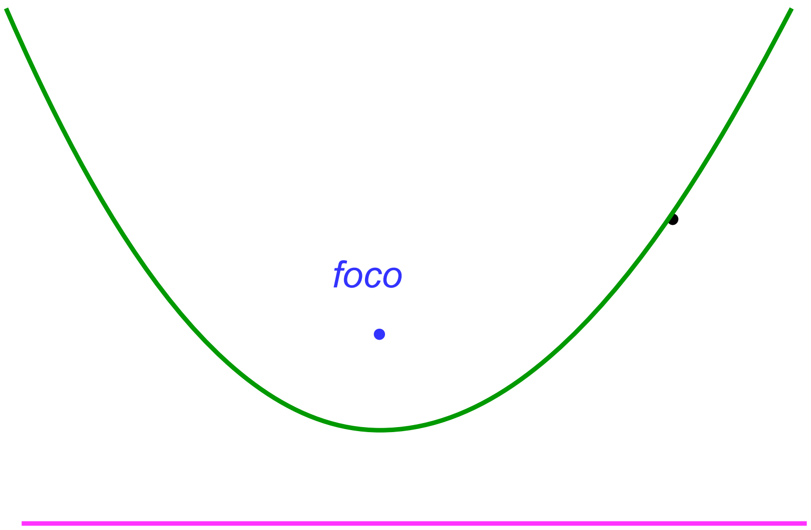


Lema. Todas las parábolas tienen la misma forma (lo único que varía es su tamaño).

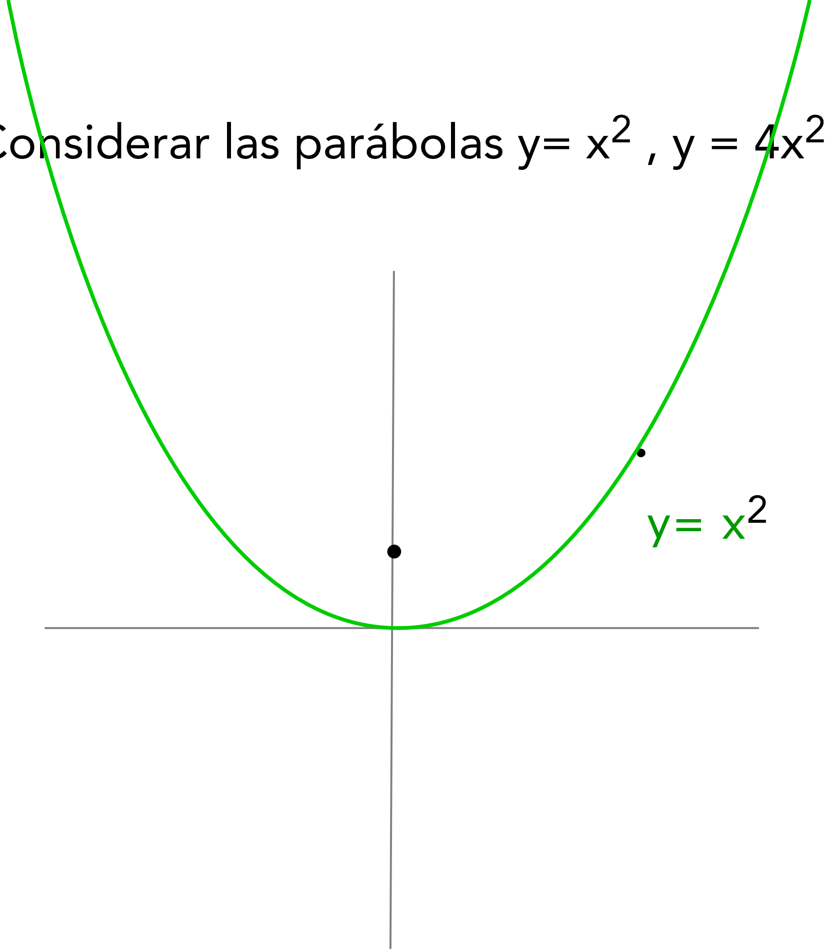
Lema. Todas las parábolas tienen la misma forma (lo único que varía es su tamaño).

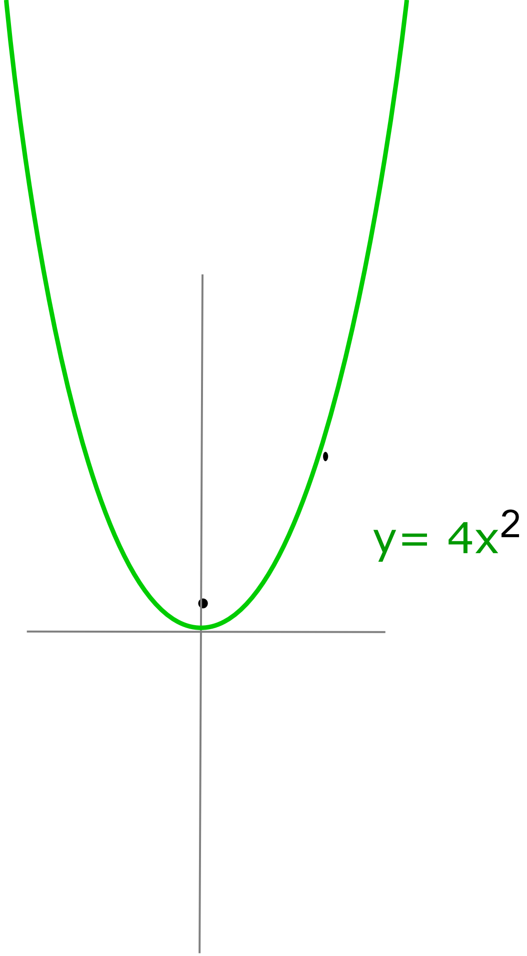
Demostración. La forma de la parábola solo depende de la distancia entre el foco y la directriz, al aumentar esta distancia el tamaño de la parábola aumenta en la misma proporción



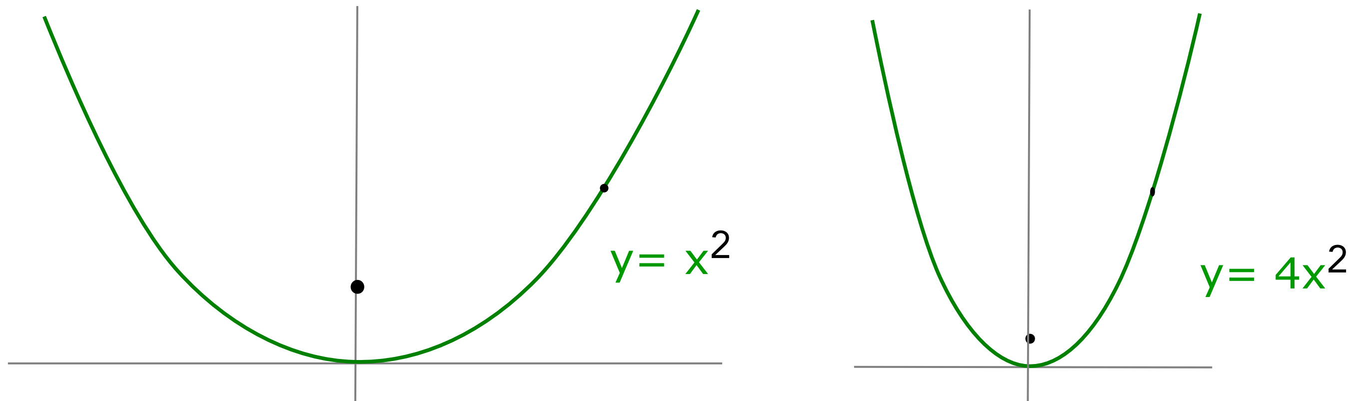


Ejemplo. Considerar las parábolas $y = x^2$, $y = 4x^2$.





Ejemplo. Considerar las parábolas $y= x^2$, $y = 4x^2$.



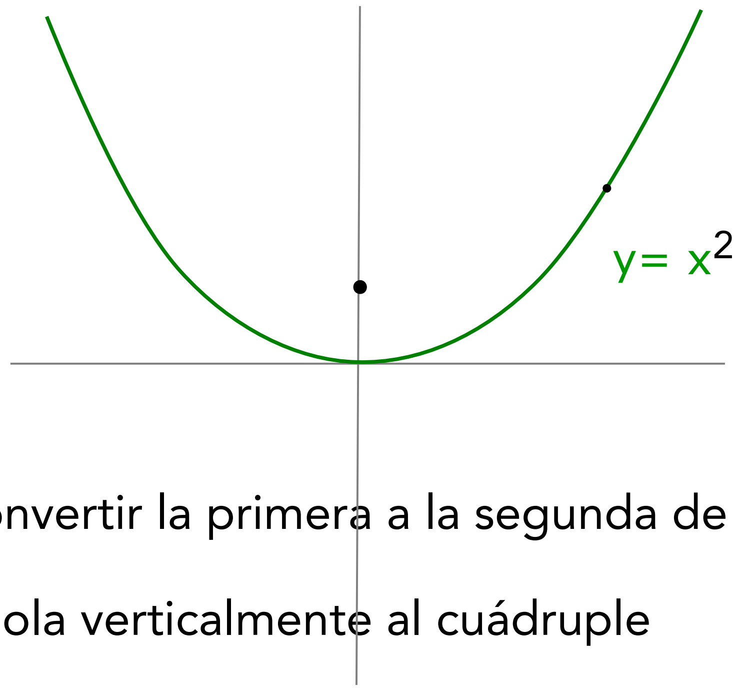
Podemos convertir la primera a la segunda de varias maneras:

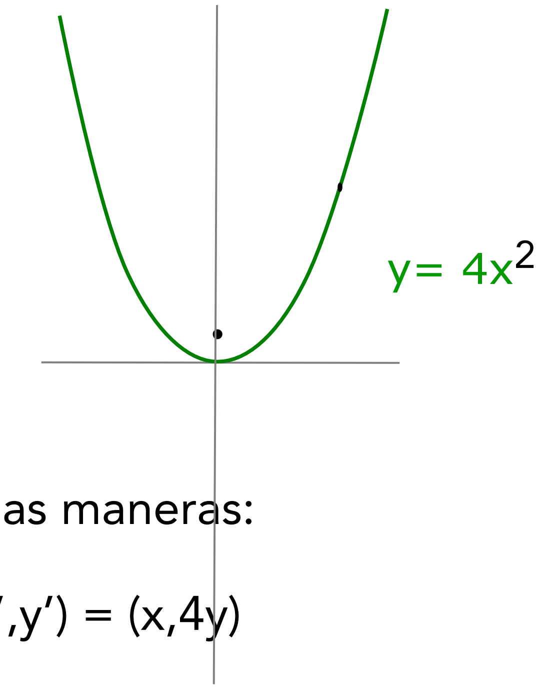
- Estirándola verticalmente

- Encojiéndola horizontalmente

- Reduciendo su tamaño

Ejemplo. Considerar las parábolas $y= x^2$, $y = 4x^2$.





Podemos convertir la primera a la segunda de varias maneras:

- Estirándola verticalmente al cuádruple $(x',y') = (x,4y)$

la ecuación $x^2 = y$ se convierte en $(x')^2 = y'/4$ que equivale a $4x'^2 = y'$.

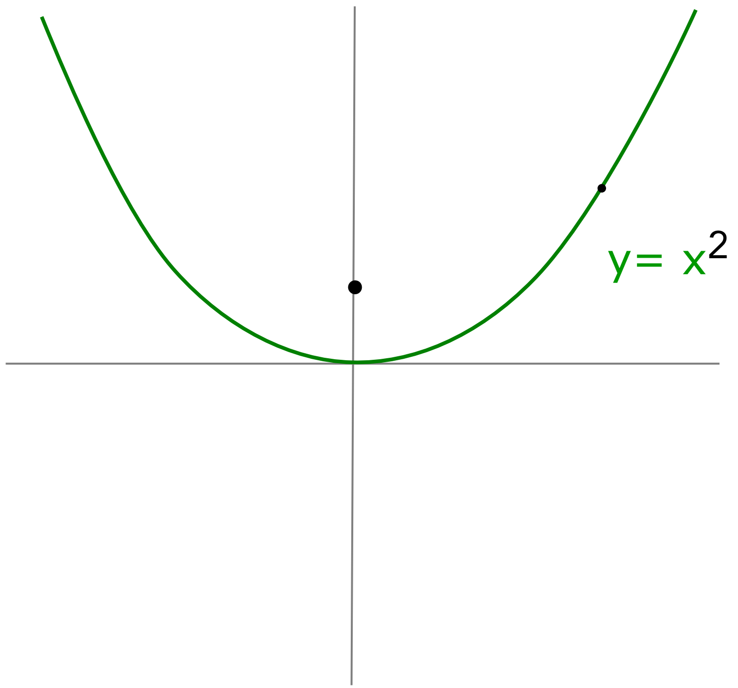
- Encojiéndola horizontalmente a la mitad $(x',y') = (x/2,y)$

la ecuación $x^2 = y$ se convierte en $(2x')^2 = y'$ que equivale a $4x'^2 = y'$.

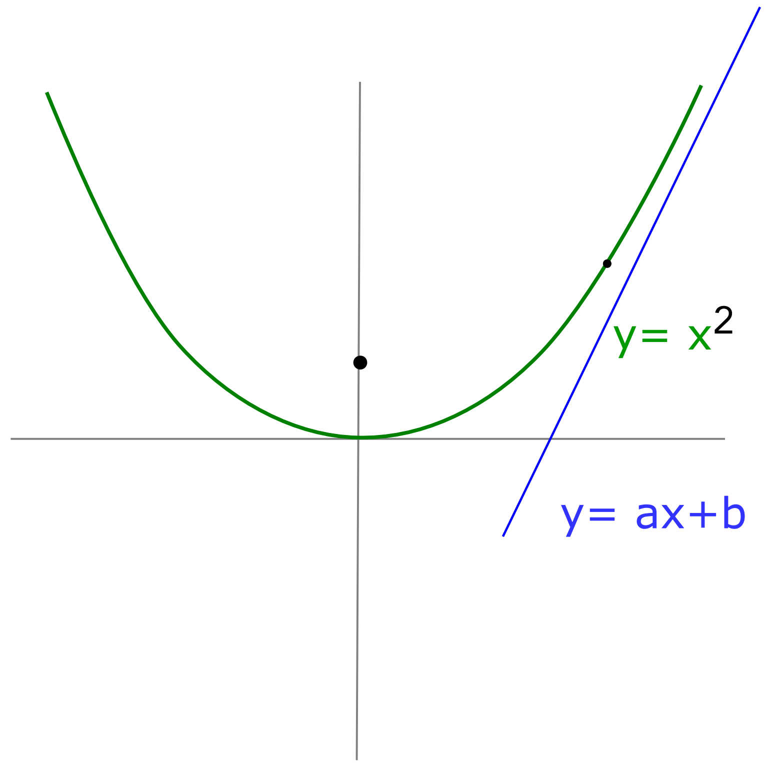
- Reduciendo su tamaño a la cuarta parte $(x',y') = (x/4,y/4)$

la ecuación $x^2 = y$ se convierte en $(4x')^2 = 4y'$ que equivale a $4x'^2 = y'$.

Pregunta. ¿Las parábolas tendrán asíntotas?



Pregunta. ¿Las parábolas tendrán asíntotas?



No, las parábolas no se aproximan asintoticamente a ninguna recta ya que la función $y=x^2$ crece mucho mas rápido que cualquier función lineal y=ax+b