Ecuaciones de 2o grado

Lema. Las ecuaciones $Ax^2 + By^2 = C$ corresponden a círculos, elipses, hipérbolas, pares de rectas, puntos o el vacío, dependiendo de los signos de A, B y C.

Lema. Las ecuaciones $Ax^2 + By^2 = C$ corresponden a círculos, elipses, hipérbolas, pares de rectas, puntos o el vacío, dependiendo de los signos de A, B y C.

Demostración. Si A,B,C tienen todos el mismo signo podemos dividir por C y queda $A'x^2+B'y^2 = 1$ con $A',B'>0$, que es una elipse. Si A, B tienen el mismo y $C=0$ es un punto, y si el signo de C es opuesto al de A y B entonces es el vacío Si A y B tienen distinto signo y C no es 0 es una hipérbola, y si $C=0$ es un par de rectas. □

Todas estas ecuaciones representan cónicas centradas en el origen que son simétricas respecto a los ejes de coordenadas.

¿A que curvas corresponden estas ecuaciones?

$2x^2+3y^2 = 1$

$2x^2-3y^2 = 1$

$2x^2 = 1$

$2x^2+3y^2 = 0$

$2x^2-3y^2 = 0$

$2x^2 = 0$

$2x^2+3y^2 = -1$

$2x^2-3y^2 = -1$

$2x^2 = -1$

¿A que curvas corresponden estas ecuaciones?

$2x^2+3y^2 = 1$ es una elipse

$2x^2-3y^2 = 1$ es una hipérbola (horizontal)

$2x^2 = 1$ son dos rectas

$2x^2+3y^2 = 0$ es un punto

$2x^2-3y^2 = 0$ son dos rectas

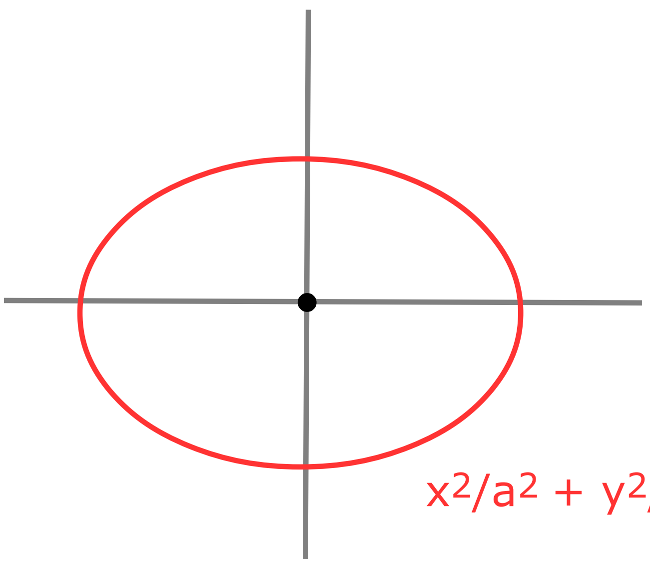
$2x^2 = 0$ es una recta

$2x^2+3y^2 = -1$ es el vacío

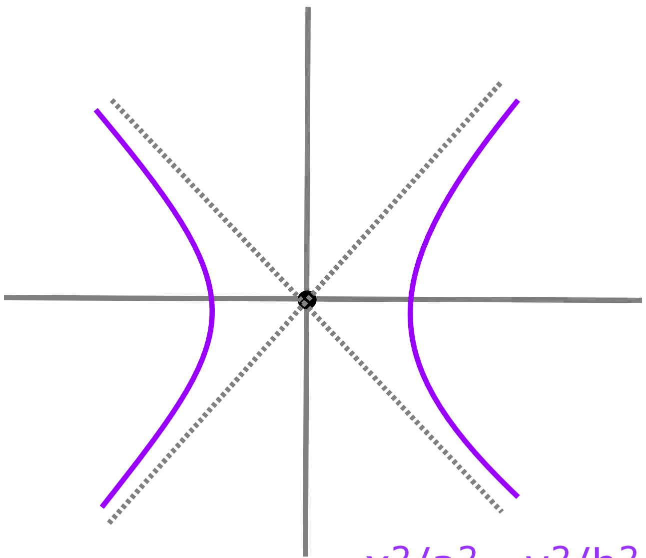
$2x^2-3y^2 = -1$ es una hipérbola (vertical)

$2x^2 = -1$ es el vacío

Las elipses e hipérbolas centradas en el origen tienen ecuaciones $Ax^2+By^2 = C$



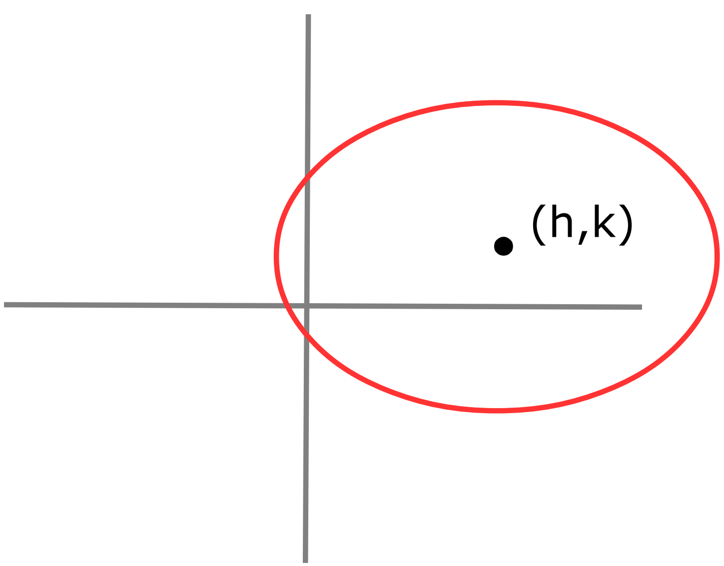
$x^2/a^2 + y^2/b^2 =1$

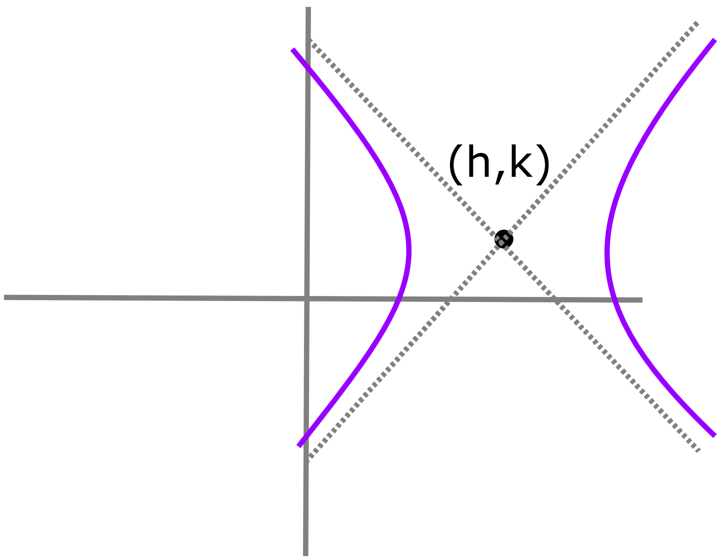


$x^2/a^2 - y^2/b^2 =1$

Las elipses e hipérbolas centradas en el origen tienen ecuaciones $Ax^2+By^2 = C$

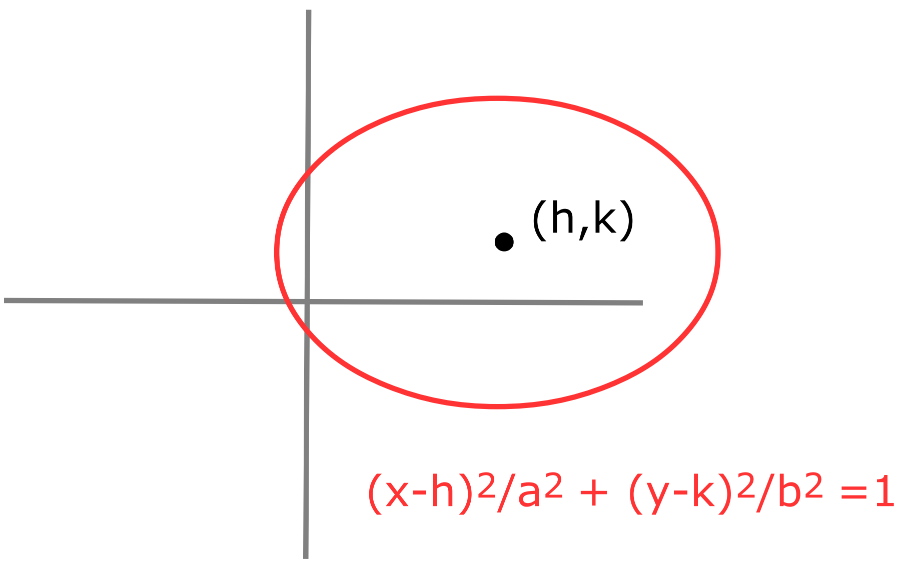
¿Como serán sus ecuaciones cuando están centradas en otro lado?

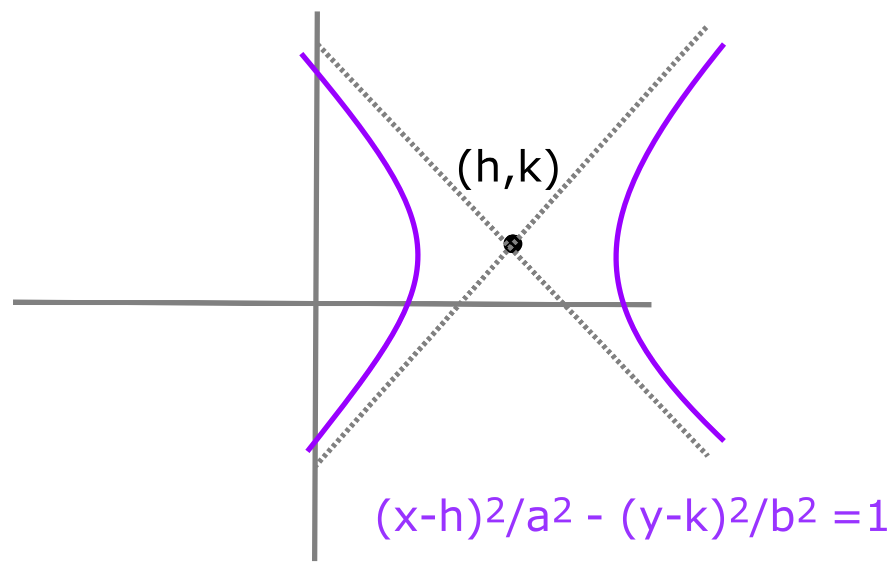




Las elipses e hipérbolas centradas en el origen tienen ecuaciones $Ax^2+By^2 = C$

¿Como serán sus ecuaciones cuando están centradas en otro lado?



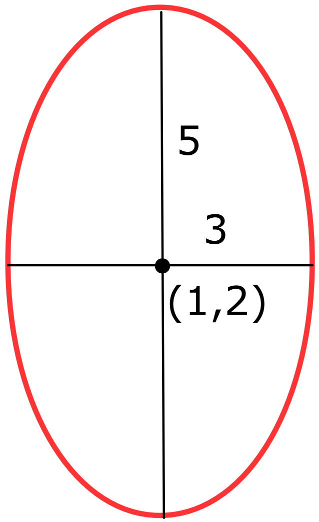


Ejemplo. ¿Que ecuación tiene el circulo de radio 3 centrado en (1,2)?

La distancia de un punto (x,y) al punto (1,2) es $\sqrt{(x-1)^2+(y-2)^2}$, así que la ecuación del circulo es

$\sqrt{(x-1)^2+(y-2)^2} = 3$ o bien $(x-1)^2+(y-2)^2 = 9$

Ejemplo. ¿Que ecuación cumple esta elipse?



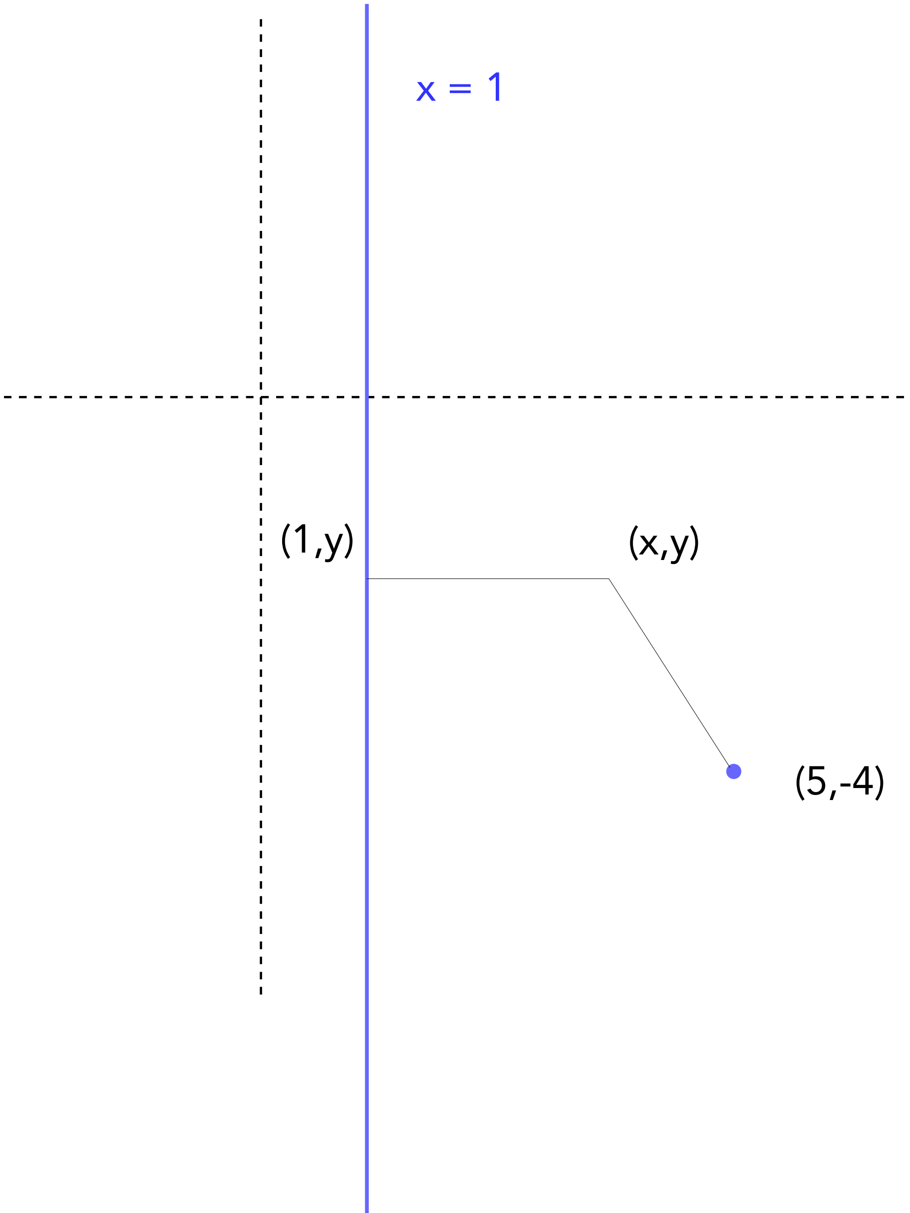
Si hiciéramos la traslación $(x',y)=(x-1,y-2)$. entonces la elipse quedaría centrada en el origen y su ecuación seria

$$x'^2 / 3^2 + y'^2 / 5^2 = 1$$

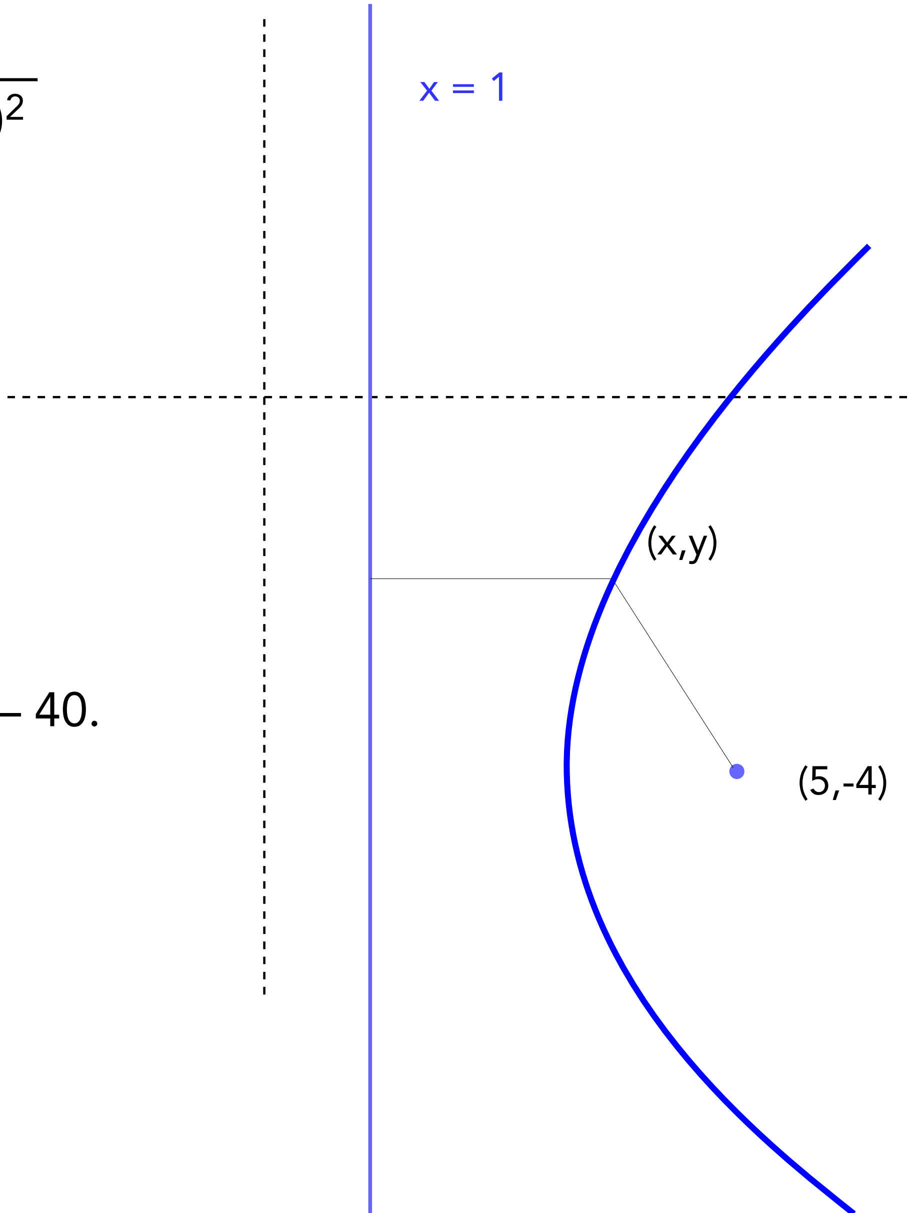
Si en esta ecuación reemplazamos a x' y a y' por sus valores en términos de x y y obtenemos la ecuación buscada:

$$(x-1)^2 / 3^2 + (y-2)^2 / 5^2 = 1$$

Ejemplo. ¿Que ecuación tiene la parábola formada por los puntos cuya distancia al punto (5,-4) es igual a su distancia a la recta x=1?



Ejemplo. ¿Que ecuación tiene la parábola formada por los puntos cuya distancia al punto (5,-4) es igual a su distancia a la recta x=1?



La distancia de (x,y) a (5,-4) es $\sqrt{(x-5)^2+(y+4)^2}$

la distancia de (x,y) a la recta es $|x-1|$

así que la ecuación es $\sqrt{(x-5)^2+(y+4)^2} = |x-1|$

si elevamos al cuadrado queda

$(x-5)^2 + (y+4)^2 = (x-1)^2$

y simplificando queda

$-8x + y^2 + 8y = -40$ o sea $y^2 + 8y = 8x - 40$.

Lema. Todas las ecuaciones de segundo grado $Ax^2+By^2+Cx+Dy = E$ corresponden a círculos, elipses, hipérbolas, parábolas, pares de rectas, rectas, puntos o el vacío.

Lema. Todas las ecuaciones de segundo grado $Ax^2+By^2+Cx+Dy = E$ corresponden a círculos, elipses, hipérbolas, parábolas, pares de rectas, rectas, puntos o el vacío.

Demostración. Si $A\neq 0$ y $B\neq 0$ entonces podemos completar cuadrados para escribir a la ecuación en la forma

$A(x-a)^2+B(y-b)^2 = E'$ y esta es una cónica (circulo, elipse, hipérbola, par de rectas, punto o el vacío, dependiendo del signo de E') con centro en (a,b).

Si $A\neq 0$ y $B=0$ entonces la ecuación se puede escribir como $A(x-a)^2+Dy= E'$ que es una parábola si $D\neq 0$ y si $D=0$ es una recta o un par de rectas paralelas o el vacío, dependiendo del signo de E'. $\square$

Ejemplo. ¿A que curva corresponde la ecuación $x^2 - 8x - 6y = 14$?

Ejemplo. ¿A que curva corresponde la ecuación $x^2 - 8x - 6y = 14$?

La ecuación puede escribirse como

$x^2-8x = 6y +14$

si completamos cuadrados queda

$x^2-8x+16 = 6y + 14 + 16$

$(x-4)^2 = 6(y+5)$

que puede escribirse como

$x'^2 = 6y'$ *donde* $x' = x-4$, $y'=y+5$

Así que es una parábola con vértice en (4,-5)

Ejemplo. ¿A que curva corresponde la ecuación $x^2 - 8x - 6y = 14$?

La ecuación puede escribirse como

$x^2-8x = 6y +14$

si completamos cuadrados queda

$x^2-8x+16 = 6y + 14 + 16$

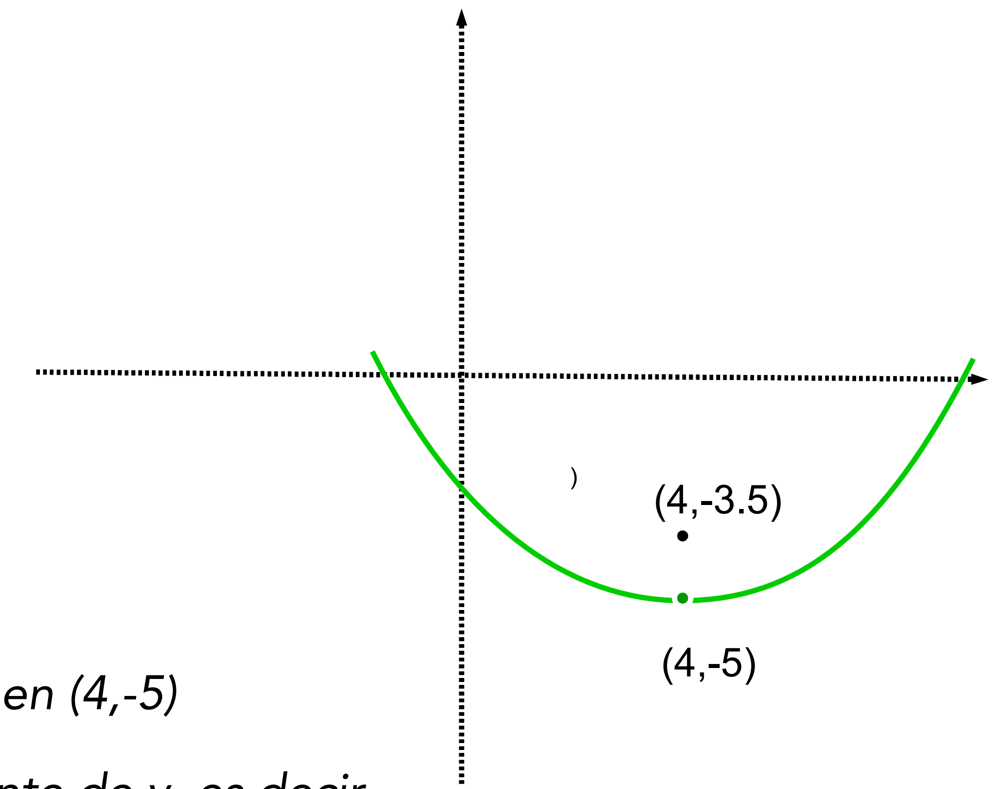
$(x-4)^2 = 6(y+5)$

que puede escribirse como

$x'^2 = 6y'$ *donde* $x' = x-4$, $y'=y+5$

Así que es una parábola con vértice en (4,-5)

La distancia focal es 1/4 del coeficiente de y, es decir
6/4=1.5, *así que el foco esta en* (4,-5)+(0,1.5)=(4,-3.5)



¿A que curva corresponde la ecuación $x^2 + 4y^2 + 2x + 8y = -1$?

¿A que curva corresponde la ecuación $x^2 + 4y^2 + 2x + 8y = -1$?

La ecuación puede escribirse como

$(x^2+2x \quad) +4(y^2+2y \quad) = -1$

y si completamos cuadrados queda

$(x^2+2x+1) +4(y^2+2y+1) = -1+1+4 = 4$

$(x+1)^2 \quad +4(y+1)^2 = 4$

$(x+1)^2/_{2^2} + (y+1)^2/_{1^2} = 1$

¿A que curva corresponde la ecuación $x^2 + 4y^2 + 2x + 8y = -1$?

La ecuación puede escribirse como

$(x^2+2x\quad) +4(y^2+2y\quad) = -1$

y si completamos cuadrados queda

$(x^2+2x+1) +4(y^2+2y+1) = -1+1+4 = 4$

$(x+1)^2 \quad +4(y+1)^2 = 4$

$(x+1)^2/2^2 + (y+1)^2/1^2 = 1$

Esta es una elipse centrada en (-1,-1)

$a=2$, $b=1$ y $c = \sqrt{2^2-1^2}=\sqrt{3}$

Es una elipse horizontal, con eje mayor 4 y el eje menor 2

los vértices son (-1-2,-1) y (-1+2,-1) y los focos $(-1-\sqrt{3},-1)$ y $(-1+\sqrt{3},-1)$

¿A que curva corresponde la ecuación $x^2 + 4y^2 + 2x + 8y = -1$?

La ecuación puede escribirse como

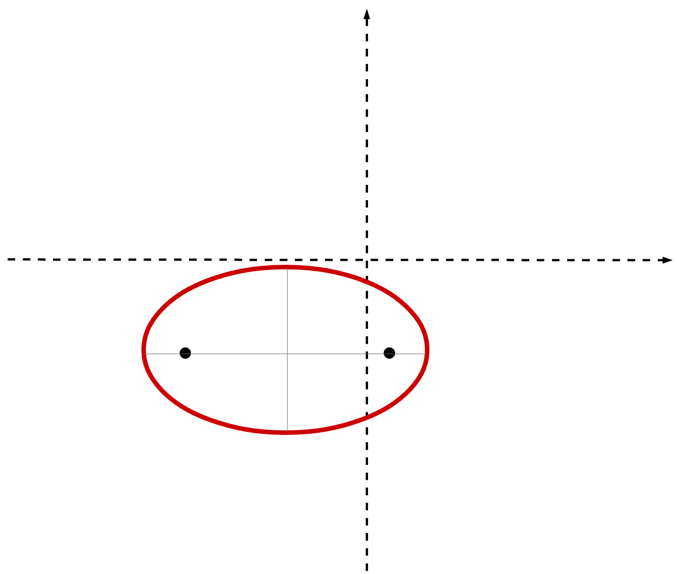
$(x^2+2x \quad) +4(y^2+2y \quad) = -1$

y si completamos cuadrados queda

$(x^2+2x+1) +4(y^2+2y+1) = -1+1+4 = 4$

$(x+1)^2 \quad +4(y+1)^2 = 4$

$(x+1)^2/2^2 + (y+1)^2/1^2 = 1$



Esta es una elipse centrada en (-1,-1)

$a=2$, $b=1$ y $c = \sqrt{2^2-1^2}=\sqrt{3}$

Es una elipse horizontal, con eje mayor 4 y el eje menor 2

los vértices son $(-1-2,-1)$ y $(-1+2,-1)$ y los focos $(-1-\sqrt{3},-1)$ y $(-1+\sqrt{3},-1)$

¿A que curva corresponde la ecuación $x^2 - 9y^2 + 6x + 36y = 18$?

¿A que curva corresponde la ecuación $x^2 - 9y^2 + 6x + 36y = 18$?

La ecuación puede escribirse como

$(x^2+6x \quad) -9(y^2-4y \quad) = 18$

y si completamos cuadrados queda

$(x^2+6x+9) -9(y^2-4y+4) = 18+9-36 = -9$

$(x+3)^2 \quad -9(y-2)^2 = -9$

$-(x+3)^2/3^2 + (y-2)^2/1^2 = 1$

¿A que curva corresponde la ecuación $x^2 - 9y^2 + 6x + 36y = 18$?

La ecuación puede escribirse como

$(x^2+6x \quad) -9(y^2-4y \quad) = 18$

y si completamos cuadrados queda

$(x^2+6x+9) -9(y^2-4y+4) = 18+9-36 = -9$

$(x+3)^2 \quad -9(y-2)^2 = -9$

$-(x+3)^2/3^2 + (y-2)^2/1^2 = 1$

Esta es una hipérbola centrada en (-3,2)

$a=1$, $b=3$ y $c = \sqrt{1^2+3^2}=\sqrt{10}$

Abre hacia arriba, los vértices son (-3,2+1) y (-3,2-1) y los focos $(3,2+\sqrt{10})$ y $(3,2-\sqrt{10})$

Las asíntotas están dadas por $-(x+3)^2/3^2 + (y-2)^2/1^2 = 0$

es decir $y-2 = \pm 1/3\,(x+3)$ o sea $y = 1/3\,x + 3$, $y = -1/3\,x + 1$

¿A que curva corresponde la ecuación $x^2 - 9y^2 + 6x + 36y = 18$?

La ecuación puede escribirse como

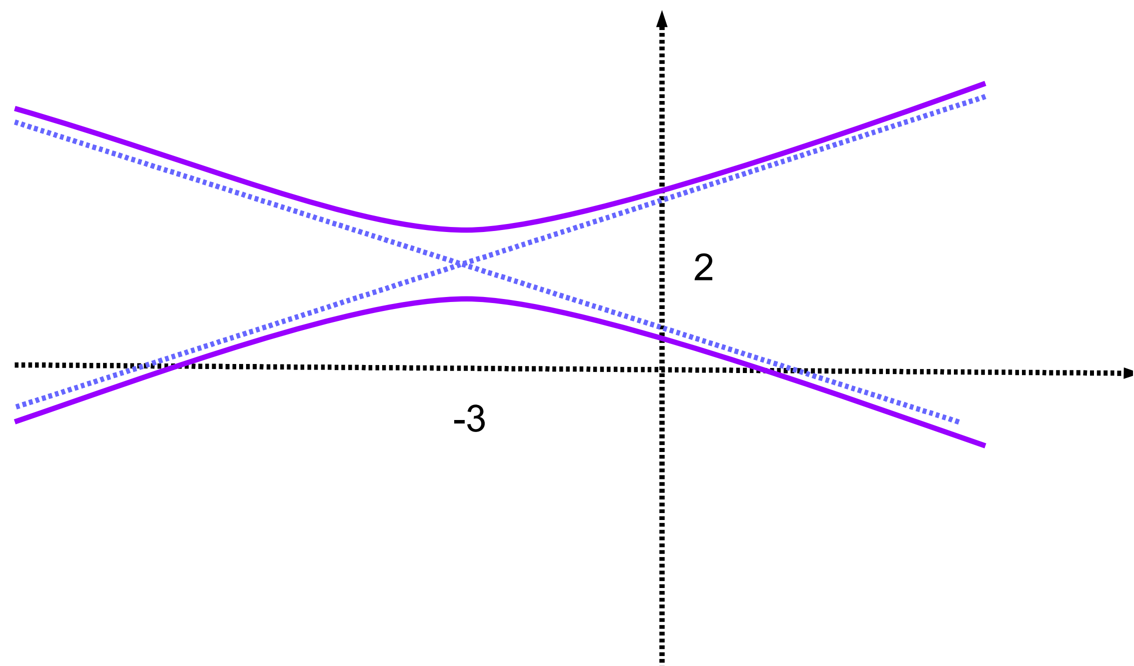
$(x^2+6x \quad) -9(y^2-4y \quad) = 18$

y si completamos cuadrados queda

$(x^2+6x+9) -9(y^2-4y+4) = 18+9-36 = -9$

$(x+3)^2 \quad -9(y-2)^2 = -9$

$-(x+3)^2/3^2 + (y-2)^2/1^2 = 1$



Esta es una hipérbola centrada en (-3,2)

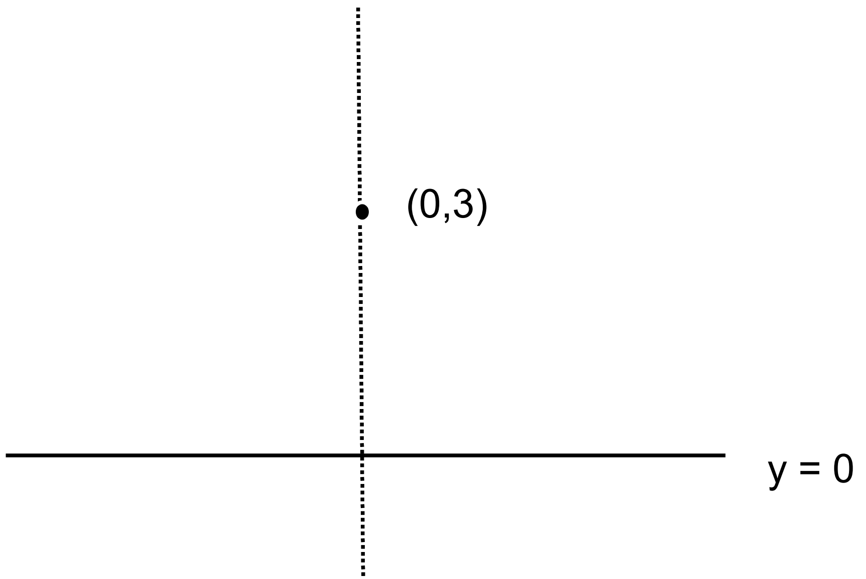
$a=1$, $b=3$ y $c = \sqrt{1^2+3^2}=\sqrt{10}$

Abre hacia arriba, los vértices son (-3,2+1) y (-3,2-1) y los focos $(3,2+\sqrt{10})$ y $(3,2-\sqrt{10})$

Las asíntotas están dadas por $-(x+3)^2/3^2 + (y-2)^2/1^2 = 0$

es decir $y-2 = \pm 1/3\,(x+3)$ o sea $y = 1/3\,x + 3$, $y = -1/3\,x + 1$

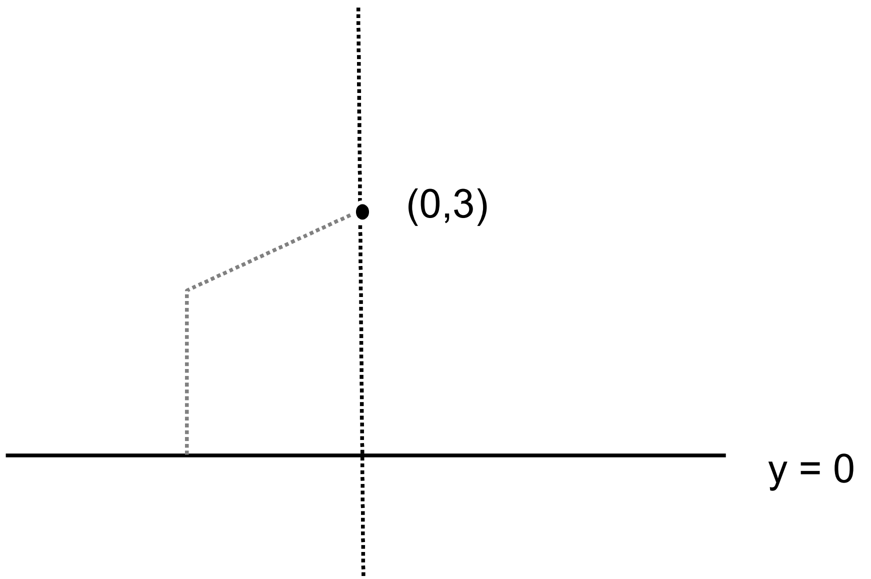
¿Que curva forman los puntos del plano cuya distancia a la recta y=0 es igual a su distancia al punto (0,3)?



¿Que curva forman los puntos del plano cuya distancia a la recta y=0 es igual a su distancia al punto (0,3)?

La distancia de (x,y) a (0,3) es $\sqrt{x^2+(y-3)^2}$

La distancia de (x,y) a la recta y=0 es |y|



¿Que curva forman los puntos del plano cuya distancia a la recta y=0 es igual a su distancia al punto (0,3)?

La distancia de (x,y) a (0,3) es $\sqrt{x^2+(y-3)^2}$

La distancia de (x,y) a la recta y=0 es $|y|$

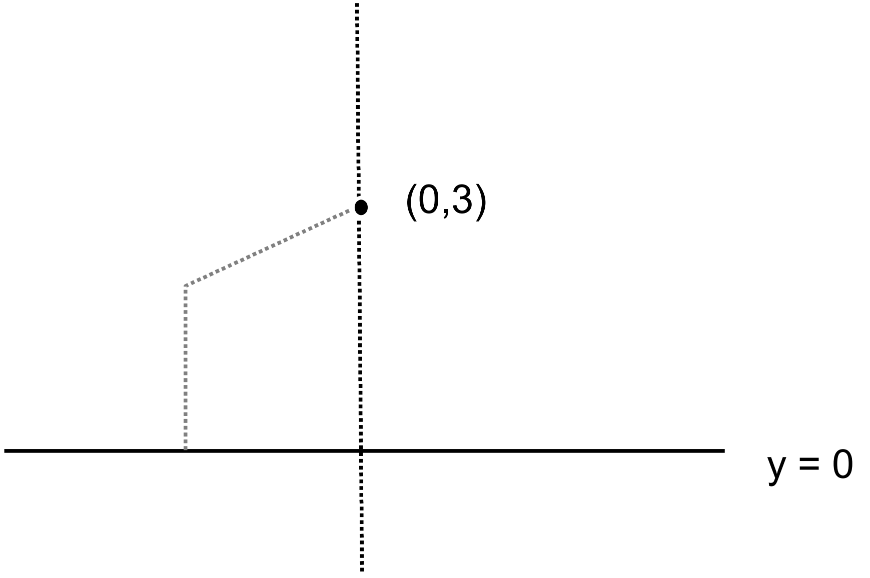
Si las distancias son iguales entonces

$\sqrt{x^2+(y-3)^2} = |y|$ elevando al cuadrado

$x^2+(y-3)^2 = y^2$ simplificando

$x^2-6y+9 = 0$ o sea $x^2= 6(y-3/2)$

es una parábola vertical con foco en (0,3)



¿Que curva forman los puntos del plano cuya distancia a la recta y=0 es igual a su distancia al punto (0,3)?

La distancia de (x,y) a (0,3) es $\sqrt{x^2+(y-3)^2}$

La distancia de (x,y) a la recta y=0 es $|y|$

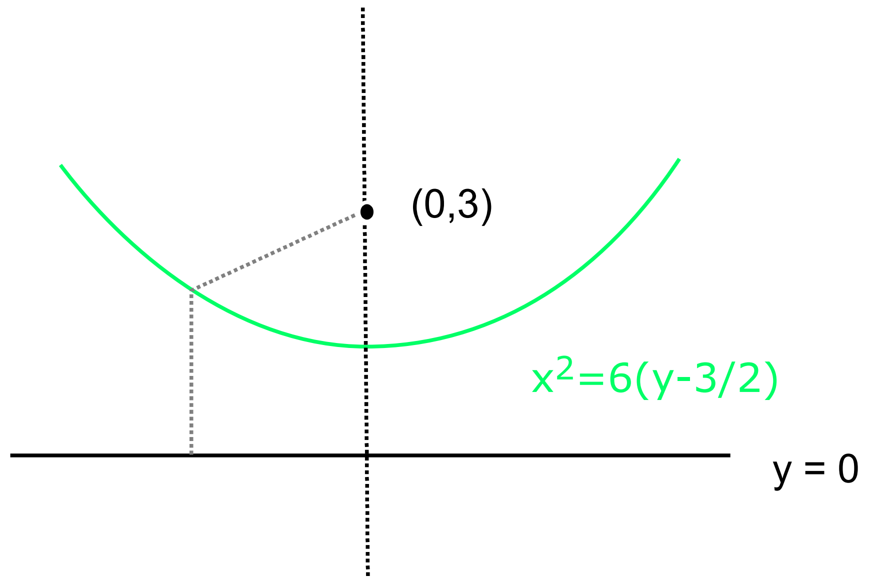
Si las distancias son iguales entonces

$\sqrt{x^2+(y-3)^2} = |y|$ elevando al cuadrado

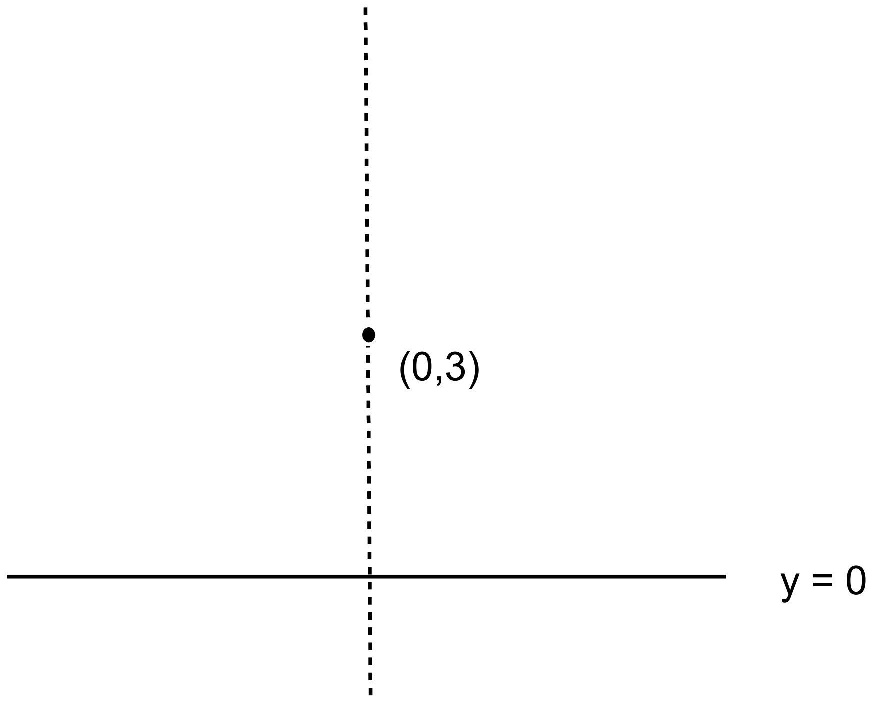
$x^2+(y-3)^2 = y^2$ simplificando

$x^2-6y+9 = 0$ o sea $x^2= 6(y-3/2)$

es una parábola vertical con foco en (0,3)



¿Que curva forman los puntos cuya distancia al punto (0,3) es la mitad de su distancia a la recta y=0?



¿Que curva forman los puntos cuya distancia al punto (0,3) es la mitad de su distancia a la recta y=0?

Si la distancia a (0,3) es la mitad de la distancia a la recta y=0 entonces

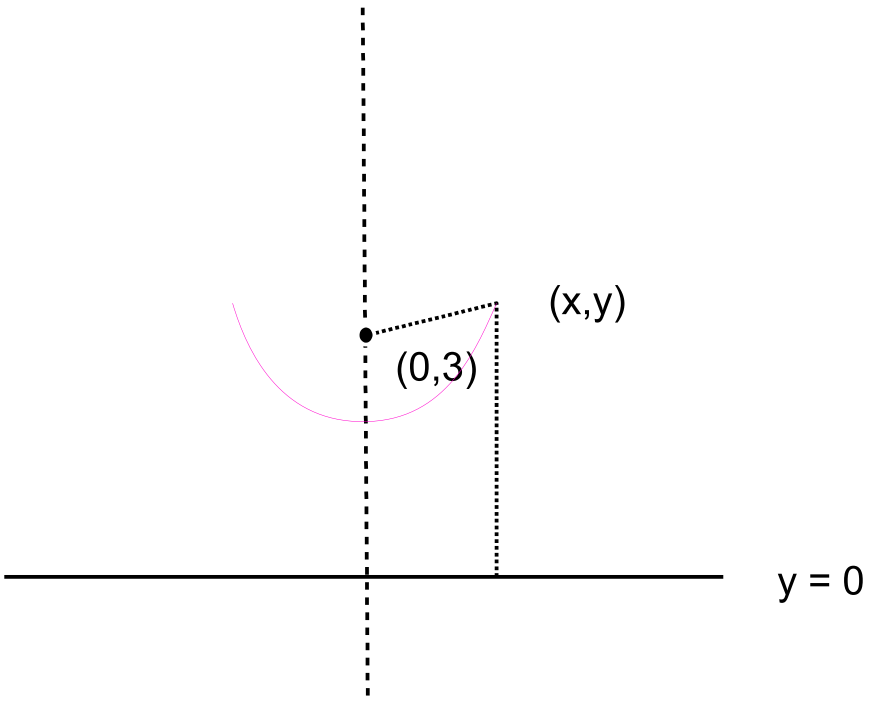
$\sqrt{x^2+(y-3)^2} = {}^1/_2|y|$

elevado al cuadrado queda

$x^2+(y-3)^2= {}^1/_4 y^2$

y simplificando queda

$x^2+{}^3/_4 y^2-6y = -9$



¿Que curva forman los puntos cuya distancia al punto (0,3) es la mitad de su distancia a la recta y=0?

Si la distancia a (0,3) es la mitad de la distancia a la recta y=0 entonces

$\sqrt{x^2+(y-3)^2} = {}^1/_2|y|$

elevado al cuadrado queda

$x^2+(y-3)^2= {}^1/_4 y^2$

y simplificando queda

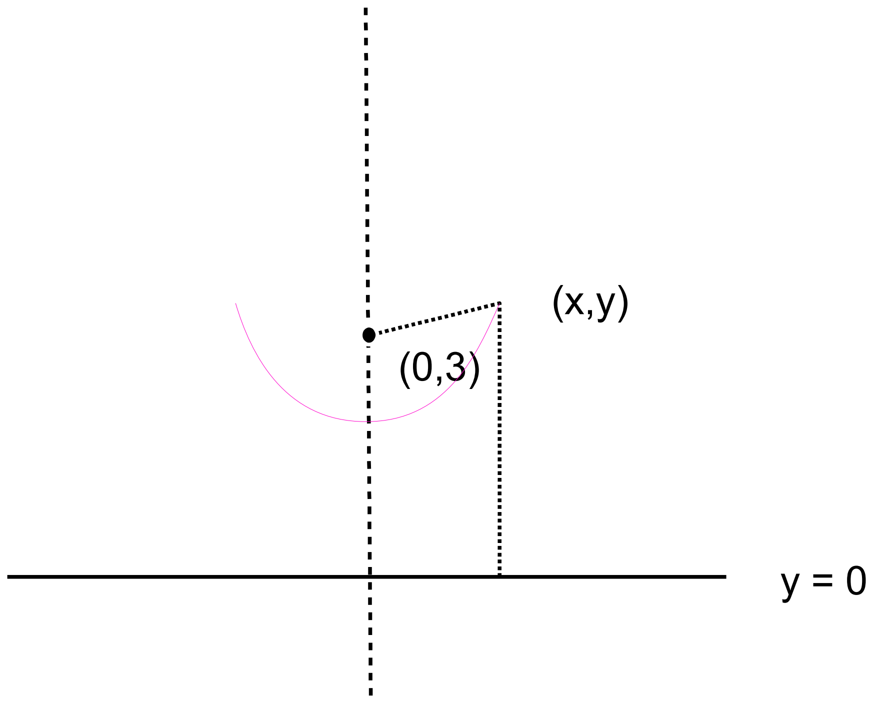
$x^2+{}^3/_4 y^2-6y = -9$

¿es la ecuación de una elipse?

podemos completar cuadrados:

$x^2+{}^3/_4[y^2-8y+16] = -9+12$

$4x^2+{}^3/_4(y-4)^2 = 3$



¿Que curva forman los puntos cuya distancia al punto (0,3) es la mitad de su distancia a la recta y=0?

Si la distancia a (0,3) es la mitad de la distancia a la recta y=0 entonces

$\sqrt{x^2+(y-3)^2} = {}^1/_2|y|$

elevado al cuadrado queda

$x^2+(y-3)^2= {}^1/_4 y^2$

y simplificando queda

$x^2+{}^3/_4 y^2-6y = -9$

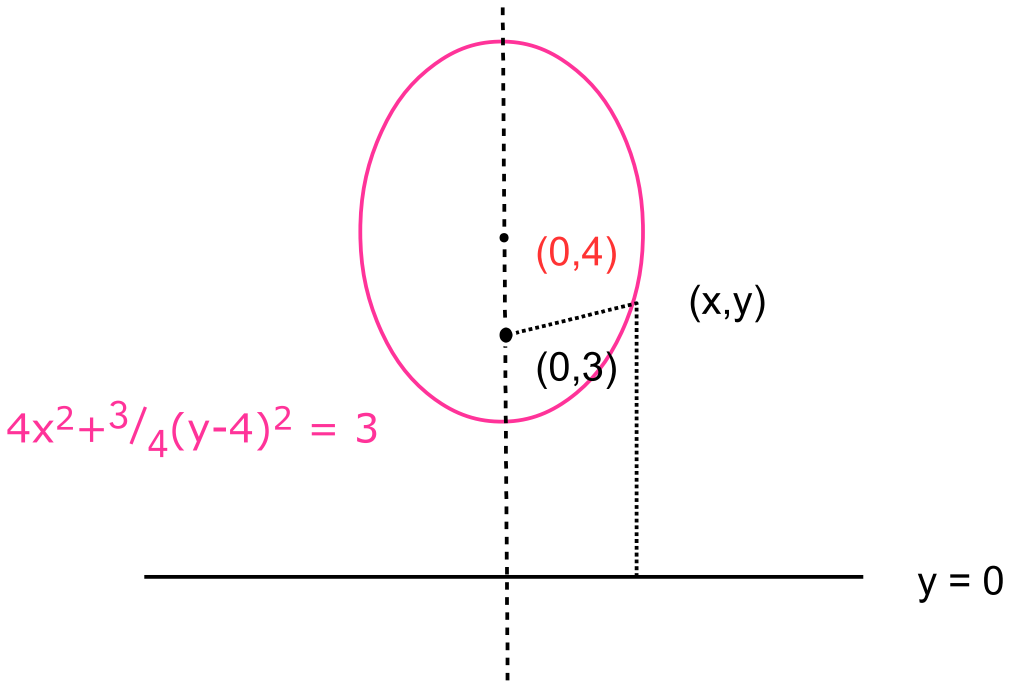
¿es la ecuación de una elipse?

podemos completar cuadrados:

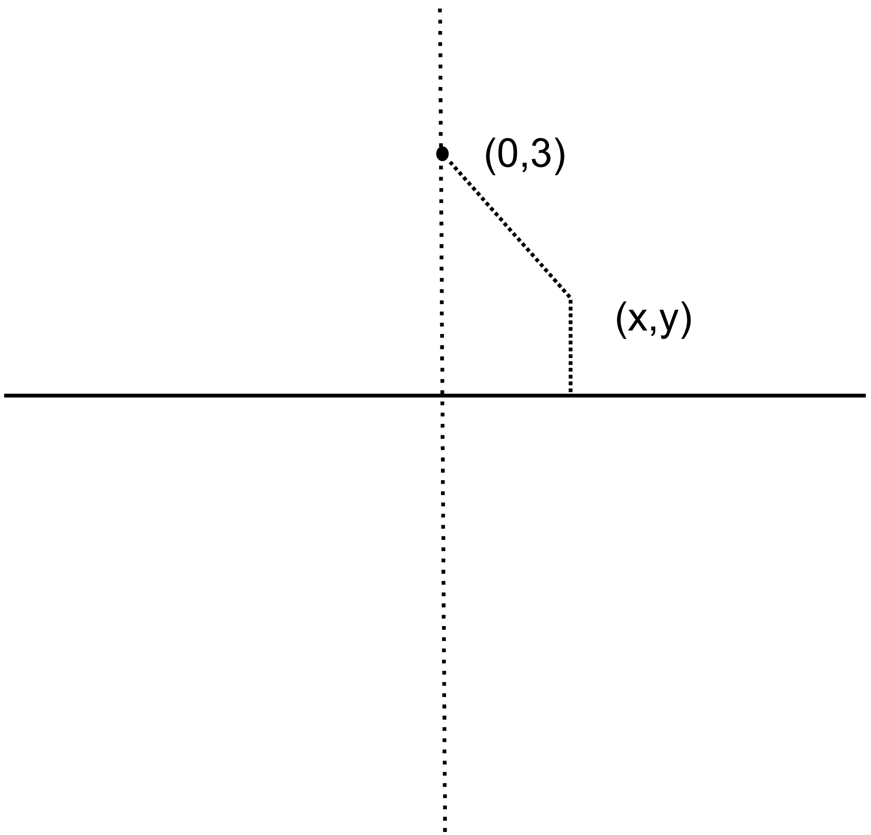
$x^2+{}^3/_4[y^2-8y+16] = -9+12$

$4x^2+{}^3/_4(y-4)^2 = 3$

es una elipse centrada en (0,4).



¿Que curva forman los puntos cuya distancia al punto (0,3) es el doble de su distancia a la recta y=0?



¿Que curva forman los puntos cuya distancia al punto (0,3) es el doble de su distancia a la recta y=0?

Si la distancia al punto (0,3) es el doble de la distancia a la recta y=0 entonces

$\sqrt{x^2+(y-3)^2} = 2|y|$

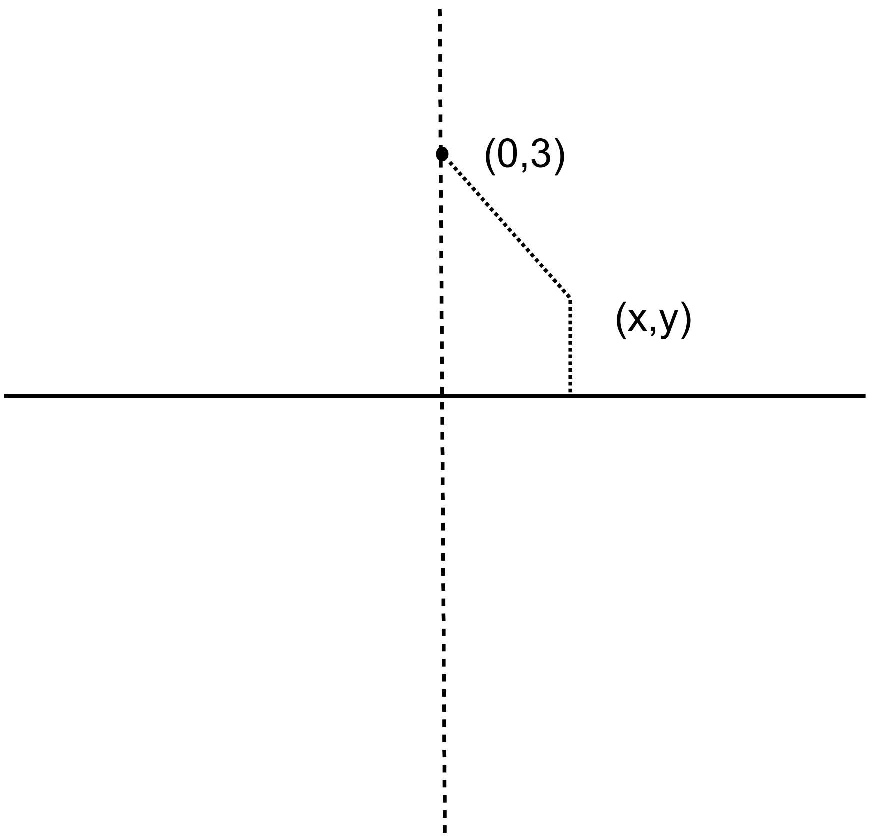
elevado al cuadrado queda

$x^2+(y-3)^2 = 4y^2$

y expandiendo y simplificando queda

$x^2-3y^2-6y = -9$

parece la ecuación de una hipérbola ...



¿Que curva forman los puntos cuya distancia al punto (0,3) es el doble de su distancia a la recta y=0?

Si la distancia al punto (0,3) es el doble de la distancia a la recta y=0 entonces

$\sqrt{x^2+(y-3)^2} = 2|y|$

elevado al cuadrado queda

$x^2+(y-3)^2 = 4y^2$

y expandiendo y simplificando queda

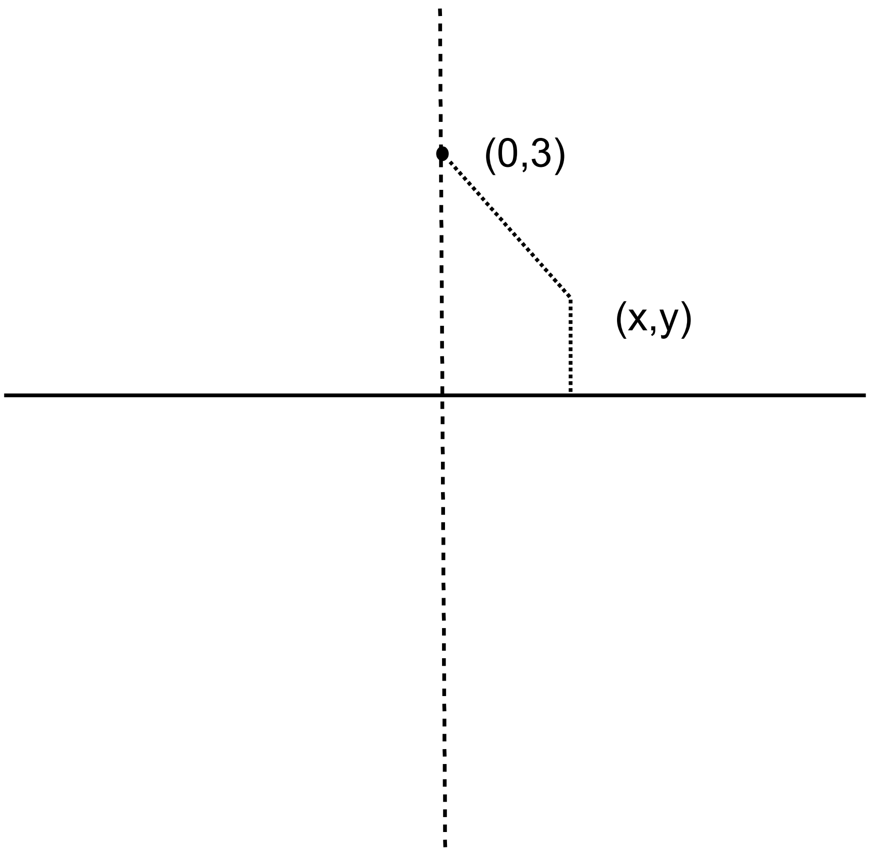
$x^2-3y^2-6y = -9$

completemos cuadrados:

$x^2-3[y^2+2y+1] = -9-3$

$x^2-3(y+1)^2 = -12$ o bien

$-x^2/12+(y+1)^2/4 = 1$



¿Que curva forman los puntos cuya distancia al punto (0,3) es el doble de su distancia a la recta y=0?

Si la distancia al punto (0,3) es el doble de la distancia a la recta y=0 entonces

$\sqrt{x^2+(y-3)^2} = 2|y|$

elevado al cuadrado queda

$x^2+(y-3)^2 = 4y^2$

y expandiendo y simplificando queda

$x^2-3y^2-6y = -9$

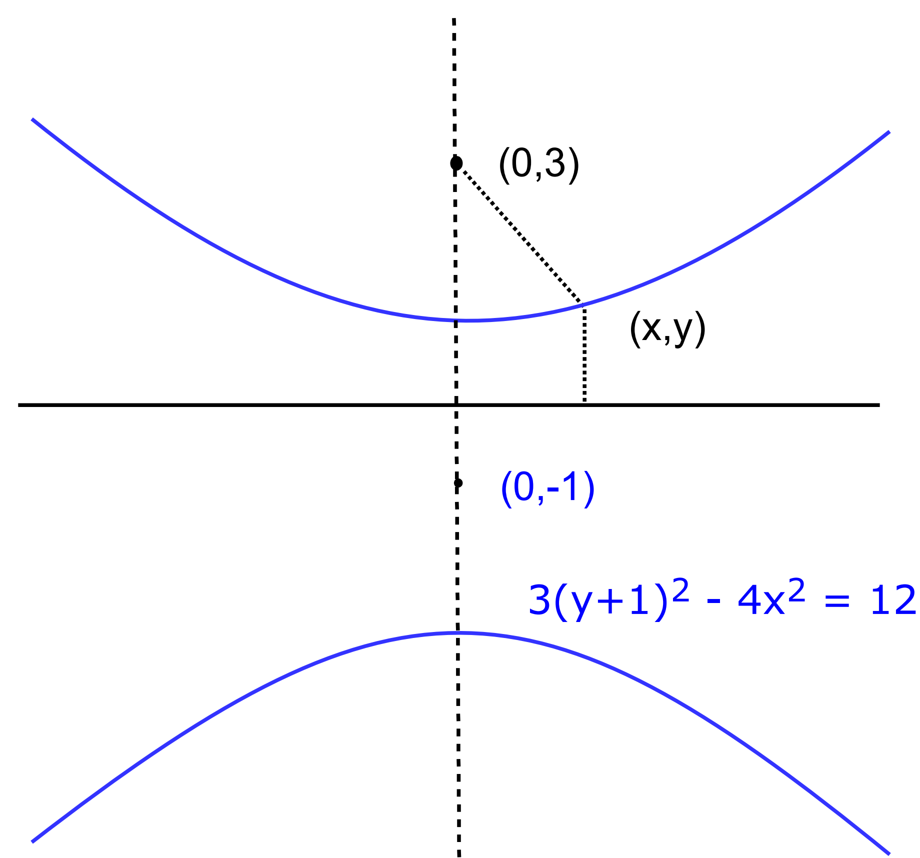
completemos cuadrados:

$x^2-3[y^2+2y+1] = -9-3$

$x^2-3(y+1)^2 = -12$ o bien

$-x^2/12+(y+1)^2/4 = 1$

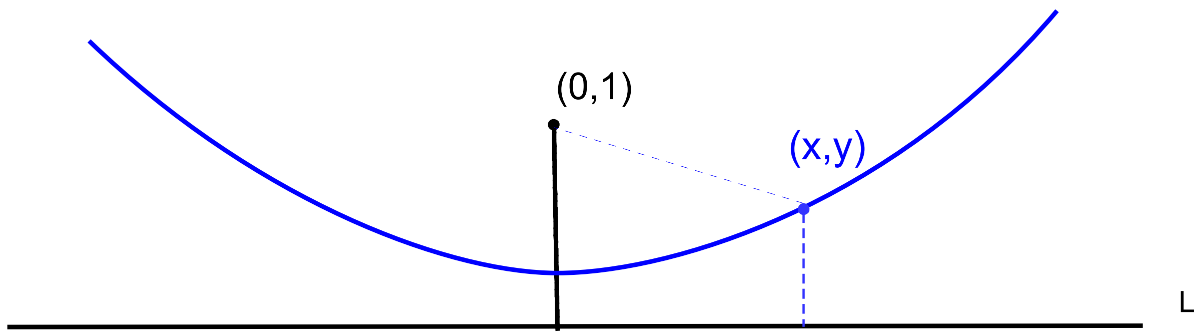
es una hipérbola vertical centrada en (0,-1).



Lema. El lugar geométrico de los puntos del plano cuya distancia a un punto p es $\boldsymbol{e}$ veces la distancia a una recta L es una elipse, una parábola o una hipérbola, dependiendo del valor de $\mathbf{e}$.

Lema. El lugar geométrico de los puntos del plano cuya distancia a un punto *p* es ***e*** veces la distancia a una recta *L* es una elipse, una parábola o una hipérbola, dependiendo del valor de **e**.

Demostración. Si elegimos el sistema de coordenadas de modo que la recta L sea y = 0 y el punto P sea (1,0) entonces un punto (x,y) cuya distancia a L sea e veces su distancia a p debe cumplir:



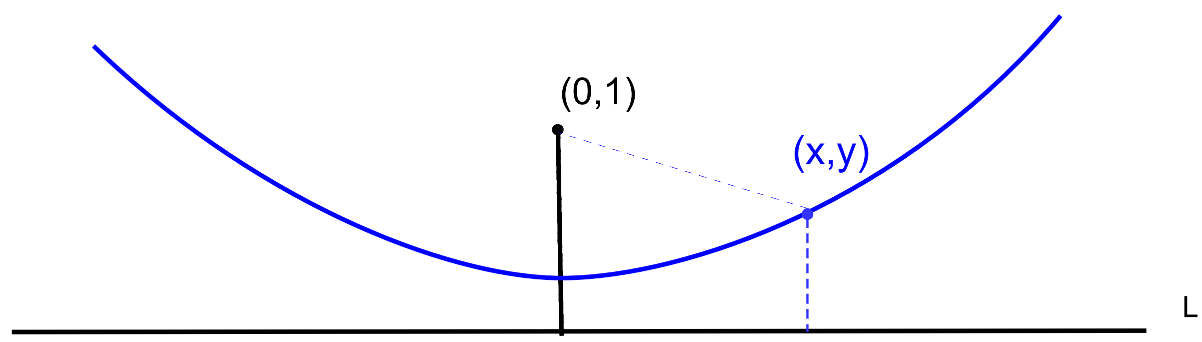
Lema. El lugar geométrico de los puntos del plano cuya distancia a un punto *p* es ***e*** veces la distancia a una recta *L* es una elipse, una parábola o una hipérbola, dependiendo del valor de **e**.

Demostración. Si elegimos el sistema de coordenadas de modo que la recta L sea y = 0 y el punto P sea (1,0) entonces un punto (x,y) cuya distancia a L sea e veces su distancia a p debe cumplir:

$$\sqrt{x^2+(y-1)^2} = e\,|y|$$

$$x^2 + y^2 - 2y + 1 = e^2y^2$$

$$x^2 + (1-e^2)\,y^2 - 2y = -1$$



Lema. El lugar geométrico de los puntos del plano cuya distancia a un punto *p* es ***e*** veces la distancia a una recta *L* es una elipse, una parábola o una hipérbola, dependiendo del valor de **e**.

Demostración. Si elegimos el sistema de coordenadas de modo que la recta L sea y = 0 y el punto P sea (1,0) entonces un punto (x,y) cuya distancia a L sea e veces su distancia a p debe cumplir:

$$\sqrt{x^2+(y-1)^2} = e\,|y|$$

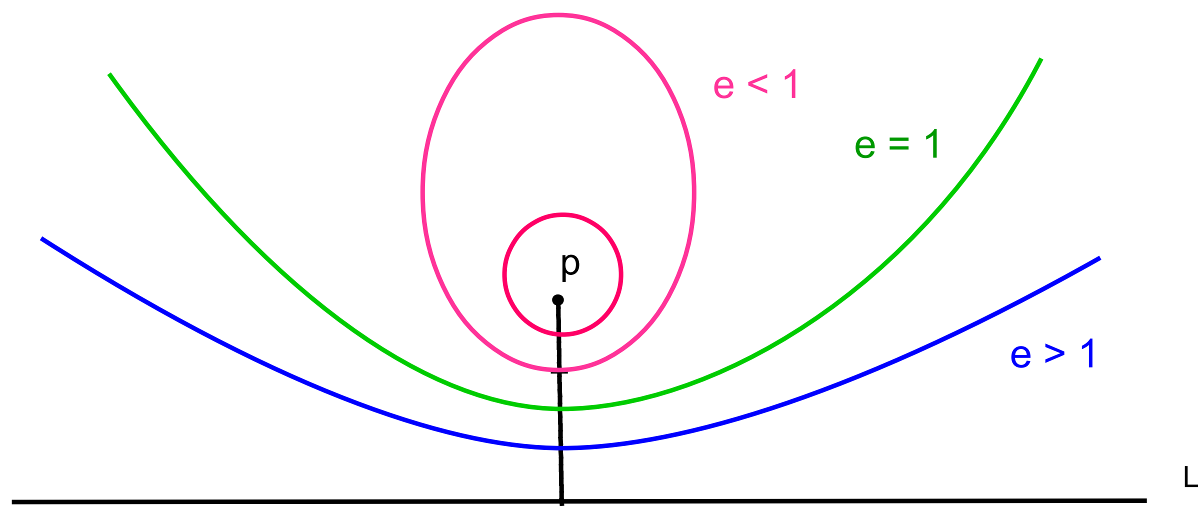
$$x^2 + y^2 - 2y + 1 = e^2y^2$$

$$x^2 + (1-e^2)\, y^2 - 2y = -1$$

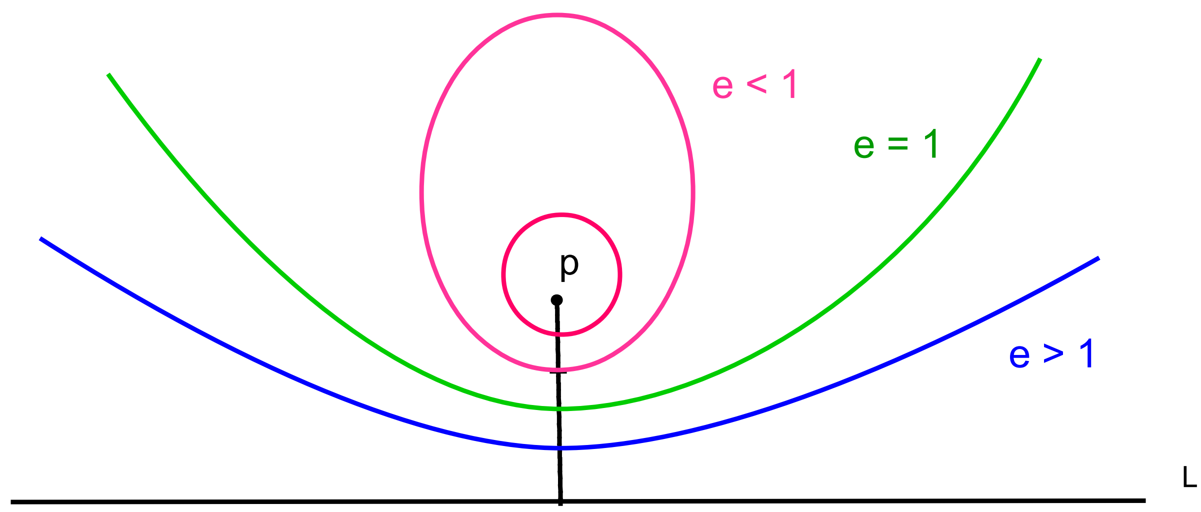
Si $0<e<1$ es una elipse.

Si $e=1$ es una parábola.

Si $e>1$ es una hipérbola.



¿Que tiene que ver el punto P con los focos de la cónica?



¿Que tiene que ver el punto P con los focos de la cónica?

Si la elipse (o hipérbola) tiene sus focos en (c,0) y (-c,0) y la suma (o diferencia) de las distancias es 2a entonces su ecuación es

$\sqrt{(x-c)^2+y^2} \pm \sqrt{(x+c)^2+y^2} = 2a$

$\sqrt{(x-c)^2+y^2} - 2a = \pm \sqrt{(x+c)^2+y^2}$ elevando al cuadrado

$(x-c)^2+y^2 - 4a\sqrt{(x-c)^2+y^2} + 4a^2 = (x+c)^2+y^2$

$4a\sqrt{(x-c)^2+y^2} = -4a^2 +(x+c)^2+y^2 -(x-c)^2-y^2$

$4a\sqrt{(x-c)^2+y^2} = -4a^2 + 4cx$ dividiendo entre 4a

$\sqrt{(x-c)^2+y^2} = - a + c/a\ x$

$\sqrt{(x-c)^2+y^2} = c/a\ (x - a^2/c)$

¿Que tiene que ver el punto P con los focos de la cónica?

Si la elipse (o hipérbola) tiene sus focos en (c,0) y (-c,0) y la suma (o diferencia) de las distancias es 2a entonces su ecuación es

$\sqrt{(x-c)^2+y^2} \pm \sqrt{(x+c)^2+y^2} = 2a$

$\sqrt{(x-c)^2+y^2} - 2a = \pm \sqrt{(x+c)^2+y^2}$ elevando al cuadrado

$(x-c)^2+y^2 - 4a\sqrt{(x-c)^2+y^2} + 4a^2 = (x+c)^2+y^2$

$4a\sqrt{(x-c)^2+y^2} = -4a^2 + (x-c)^2+y^2 - (x+c)^2 - y^2$

$4a\sqrt{(x-c)^2+y^2} = -4a^2 - 4cx$ dividiendo entre 4a

$\sqrt{(x-c)^2+y^2} = - a - c/a\ x$

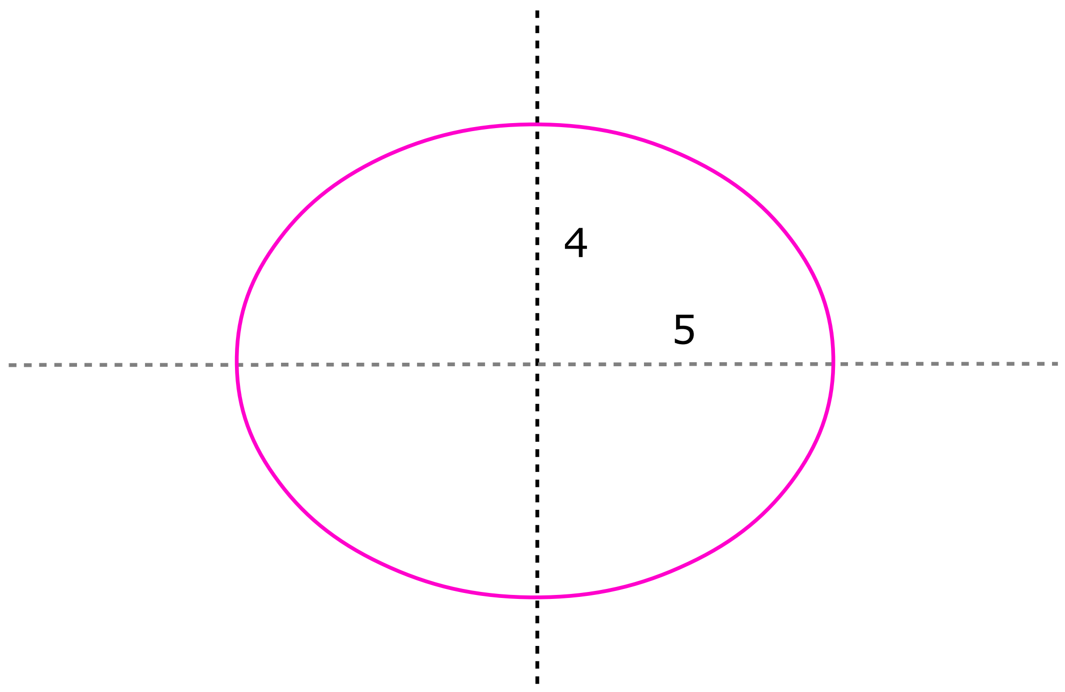
$\sqrt{(x-c)^2+y^2} = c/a\ (x - a^2/c)$

La distancia de (x,y) a (c,0) es c/a veces la distancia de (x,y) a la recta x= a^2/c

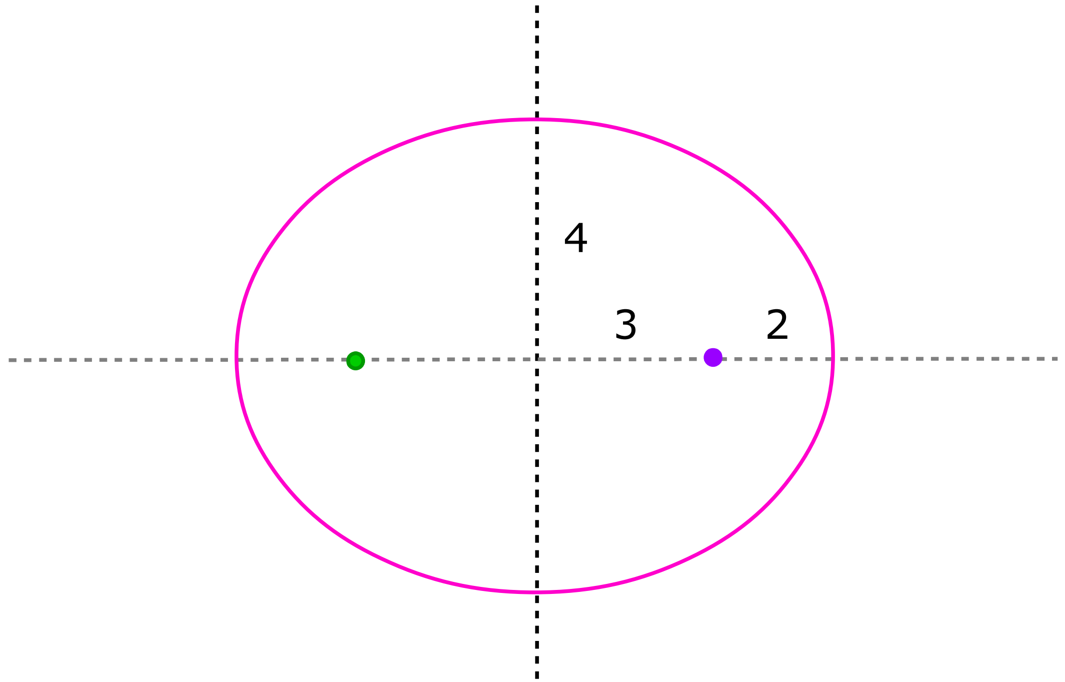
De modo que p es un foco de la cónica y **e** es su *excentricidad*, c/a.

A la linea L se le llama *directriz*.

Ejemplo. ¿Donde están las directríces de la elipse $x^2/25 + y^2/16 = 1$?

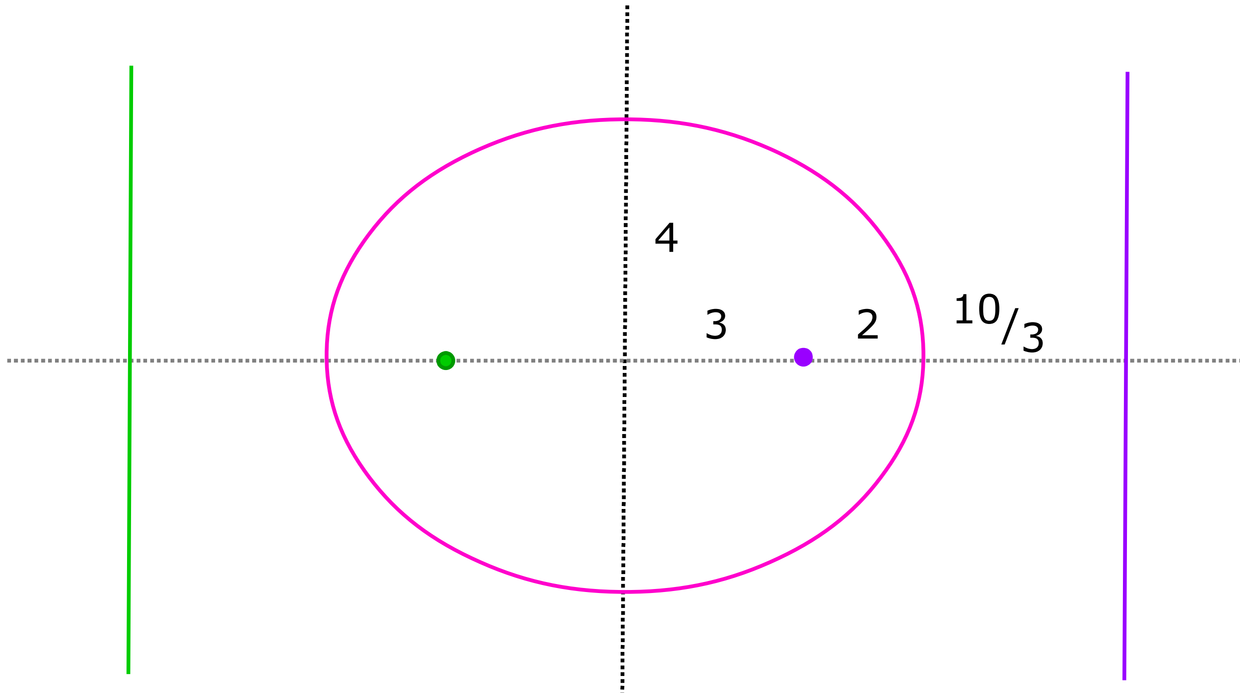


Ejemplo. ¿Donde están las directríces de la elipse $x^2/25 + y^2/16 = 1$?



Aquí $a=5$, $b=4$ así que $c=\sqrt{25-16} = 3$ y la elipse tiene excentricidad $e=c/a= {}^3/_5$.

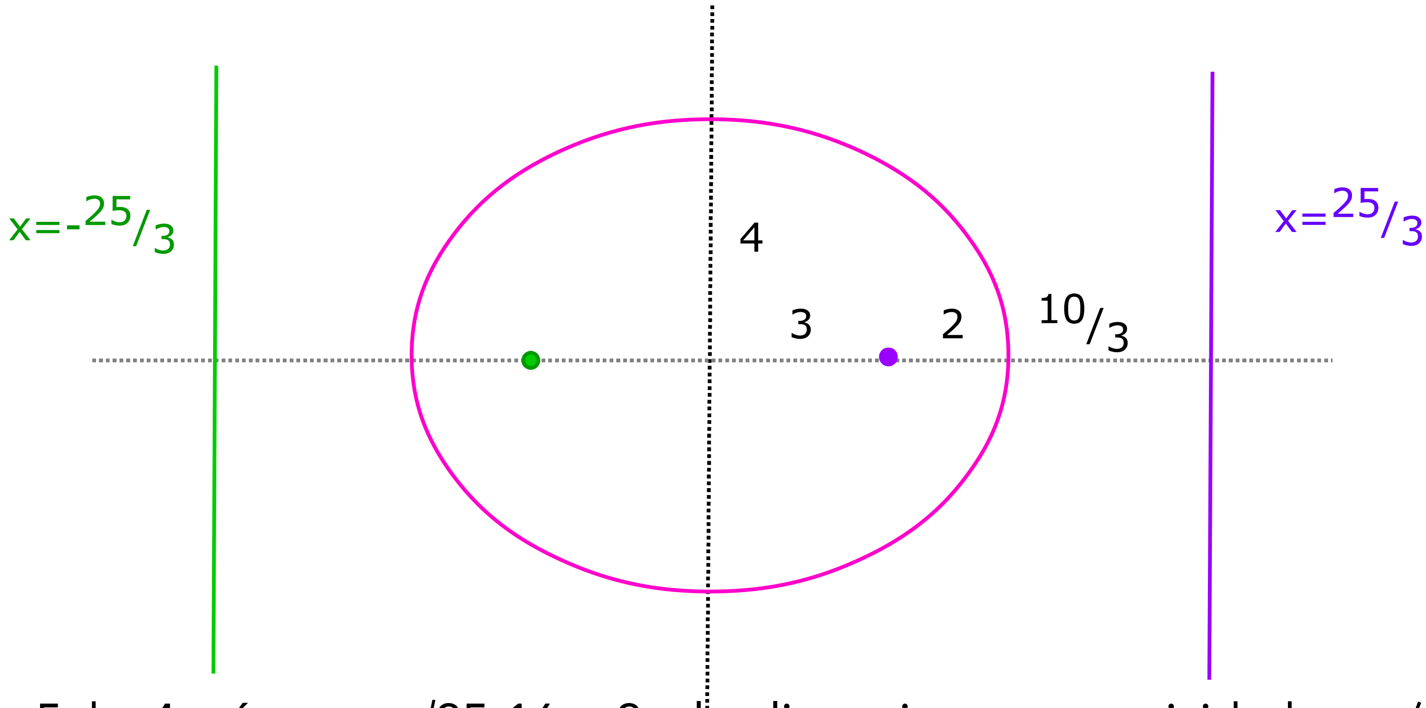
Ejemplo. ¿Donde están las directríces de la elipse $x^2/25 + y^2/16 = 1$?



Aquí $a=5$, $b=4$ así que $c=\sqrt{25-16} = 3$ y la elipse tiene excentricidad $e=c/a= {}^3/_5$.

Las directrices son perpendiculares a la linea de los focos y vértices, y la distancia del vértice al foco (que es 2) es ${}^3/_5$ de la distancia del vértice a la directriz. Así que la distancia de la directriz al vértice es ${}^5/_3(2)= {}^{10}/_3$

Ejemplo. ¿Donde están las directríces de la elipse $x^2/25 + y^2/16 = 1$?



Aquí a=5, b=4 así que $c=\sqrt{25-16} = 3$ y la elipse tiene excentricidad $e=c/a= {}^3/_5$.

Las directrices son perpendiculares a la linea de los focos y vértices, y la distancia del vértice al foco (que es 2) es ${}^3/_5$ de la distancia del vértice a la directriz. Así que la distancia de la directriz al vértice es ${}^5/_3(2)= {}^{10}/_3$