Ecuaciones de segundo grado

Las cónicas con ejes son paralelos a los ejes coordenados tienen ecuaciones de la forma

$$Ax^2+By^2+Cx+Dy=E$$

A partir de estas ecuaciones podemos deducir su forma y posición.

Las cónicas con ejes son paralelos a los ejes coordenados tienen ecuaciones de la forma

$$\mathbf{Ax^2+By^2+Cx+Dy=E}$$

A partir de estas ecuaciones podemos deducir su forma y posición.

¿Y que pasa cuando las cónicas están en otra posición?

Ejemplo. ¿Cual es la ecuación de la elipse formada por los puntos del plano cuyas distancias a $(1,0)$ y $(0,2)$ suman 3?

Ejemplo. ¿Cual es la ecuación de la elipse formada por los puntos del plano cuyas distancias a (1,0) y (0,2) suman 3?

$$\sqrt{(x-1)^2+y^2} + \sqrt{x^2+(y-2)^2} = 3$$

Ejemplo. ¿Cual es la ecuación de la elipse formada por los puntos del plano cuyas distancias a (1,0) y (0,2) suman 3?

$$\sqrt{(x-1)^2+y^2} + \sqrt{x^2+(y-2)^2} = 3$$

$$\sqrt{(x-1)^2+y^2} = 3 - \sqrt{x^2+(y-2)^2}$$

$$(x-1)^2+y^2 = 9 - 6\sqrt{x^2+(y-2)^2} + x^2+(y-2)^2$$

$$(x-1)^2+y^2 -9 - x^2 -(y-2)^2 = - 6\sqrt{x^2+(y-2)^2}$$

$$-2x + 4y -4 = - 6\sqrt{x^2+(y-2)^2}$$

$$(-2x+4y-4)^2 = 36[x^2+(y-2)^2]$$

$$4x^2 +16y^2+16-16xy+16x-32y = 36x^2+36y^2-144y+144$$

$$-32x^2 -16xy -20y^2 +112y -144 +16x = 128$$

Todas las cónicas en el plano tienen ecuaciones de segundo grado

$$\mathbf{Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey = F}$$

Todas las cónicas en el plano tienen ecuaciones de segundo grado

$$Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey = F$$

¿Como podemos saber si una ecuación de estas corresponde a una elipse, hipérbola, parábola o a alguna otra curva? ¿Será posible saber la forma viendo la ecuación?

Todas las cónicas en el plano tienen ecuaciones de segundo grado

$$Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey = F$$

¿Como podemos saber si una ecuación de estas corresponde a una elipse, hipérbola, parábola o a alguna otra curva? ¿Será posible saber la forma viendo la ecuación?

¿Será cierto que todas las ecuaciones de segundo grado corresponden a cónicas o a cónicas degeneradas en alguna posición?

Todas las cónicas en el plano tienen ecuaciones de segundo grado

$$Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey = F$$

¿Como podemos saber si una ecuación de estas corresponde a una elipse, hipérbola, parábola o a alguna otra curva? ¿Será posible saber la forma viendo la ecuación?

¿Será cierto que todas las ecuaciones de segundo grado corresponden a cónicas o a cónicas degeneradas en alguna posición?

Para contestar estas preguntas es mejor proceder al revés: viendo como cambian las ecuaciones de las curvas al girarlas. Para esto necesitamos saber como cambian las coordenadas de sus puntos.

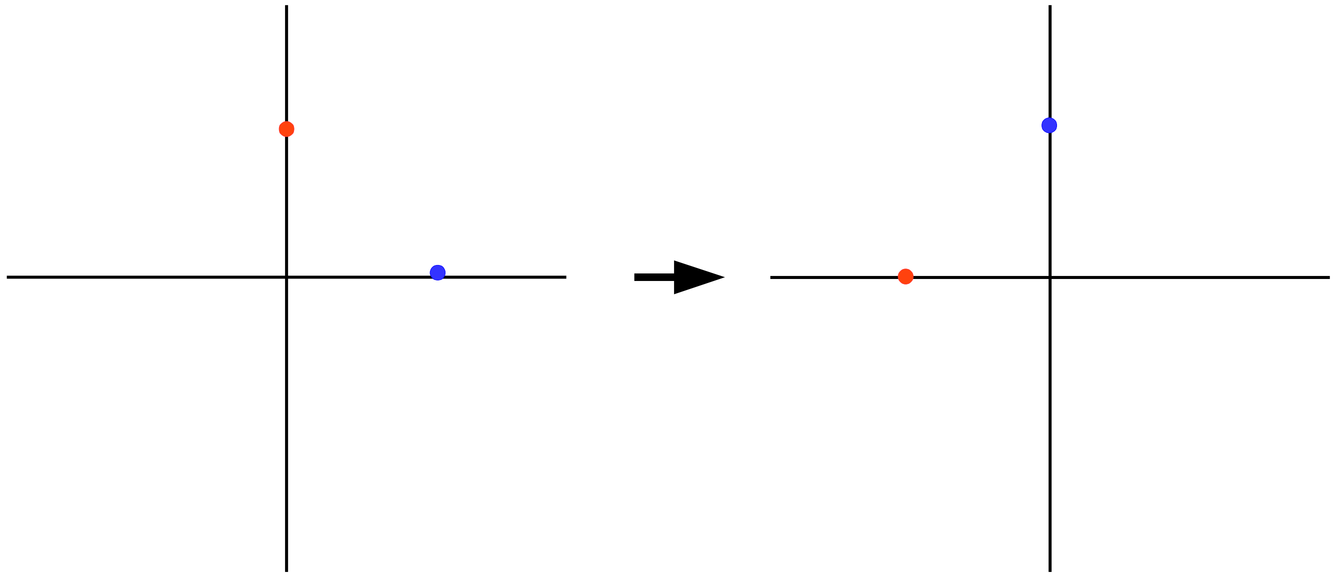
Ejemplo. ¿A donde va el punto (x,y) si lo giramos 90° alrededor del origen?

Ejemplo. ¿A donde va el punto (x,y) si lo giramos 90° alrededor del origen?

$(1,0) \to (0,1)$

$(0,1) \to (-1,0)$

$(x,y) \;\; \to \;\; ?$

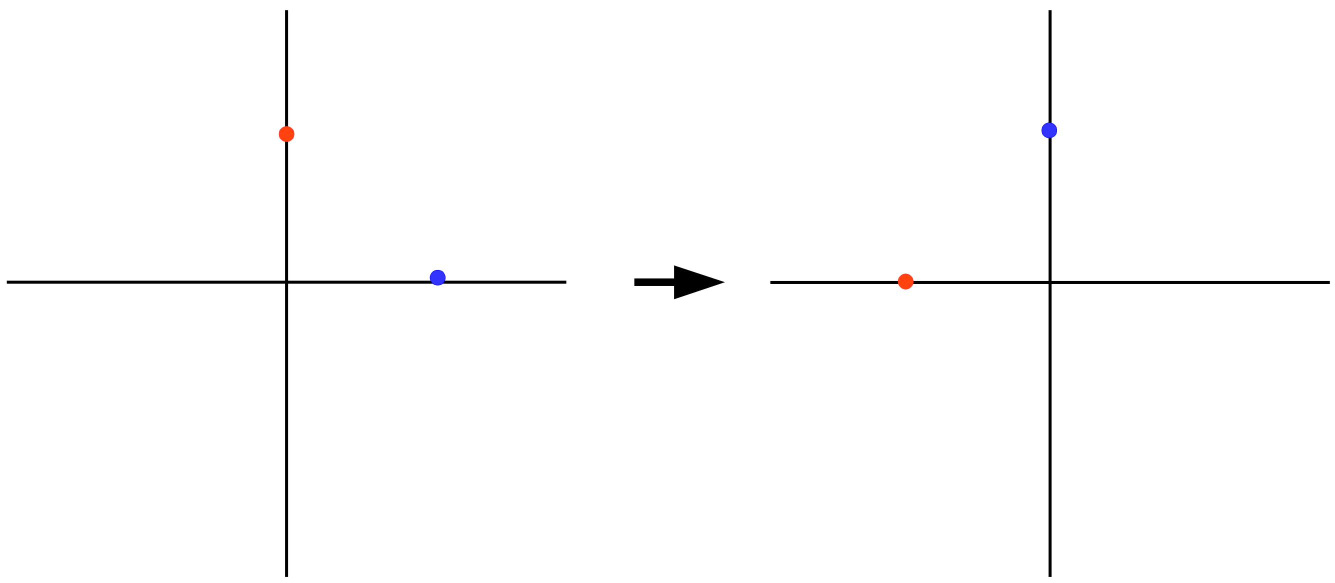


Ejemplo. ¿A donde va el punto (x,y) si lo giramos 90° alrededor del origen?

$(1,0) \to (0,1)$

$(0,1) \to (-1,0)$

$(x,y) \to ?$



$(x,y) = x(1,0)+y(0,1) \to (0,x)+(-y,0) = (-y,x)$

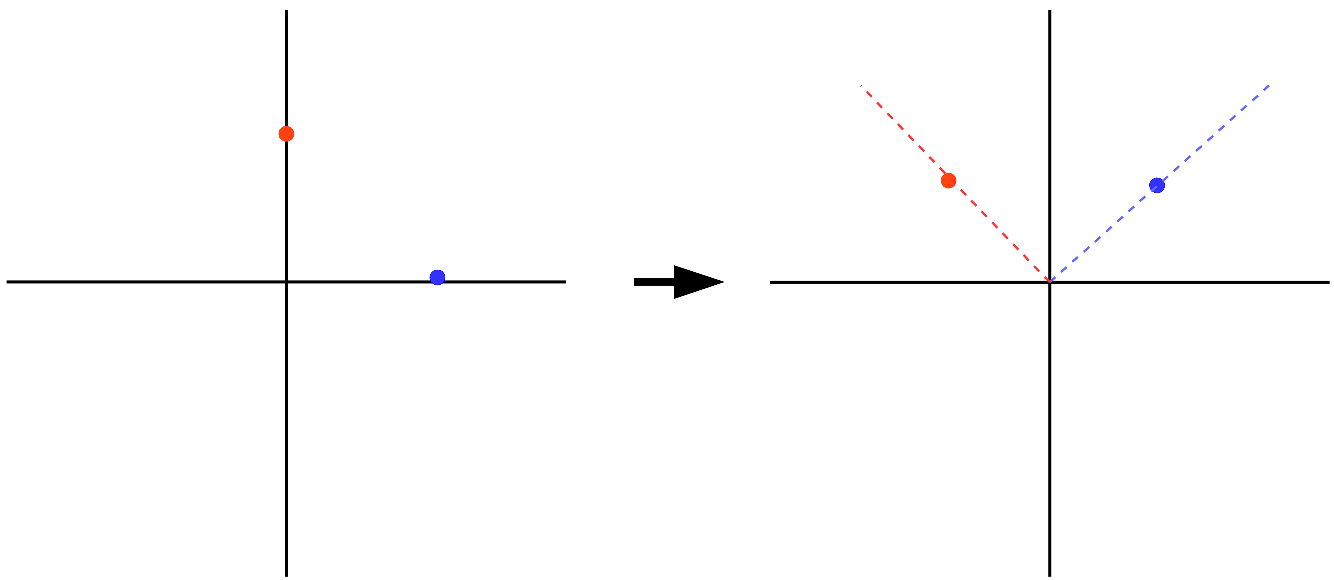
Ejemplo. ¿A donde va el punto (x,y) si lo giramos 45° alrededor del origen?

Ejemplo. ¿A donde va el punto (x,y) si lo giramos 45° alrededor del origen?

$(1,0) \longrightarrow (1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{2})$

$(0,1) \longrightarrow (-1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{2})$

$(x,y) \longrightarrow$?

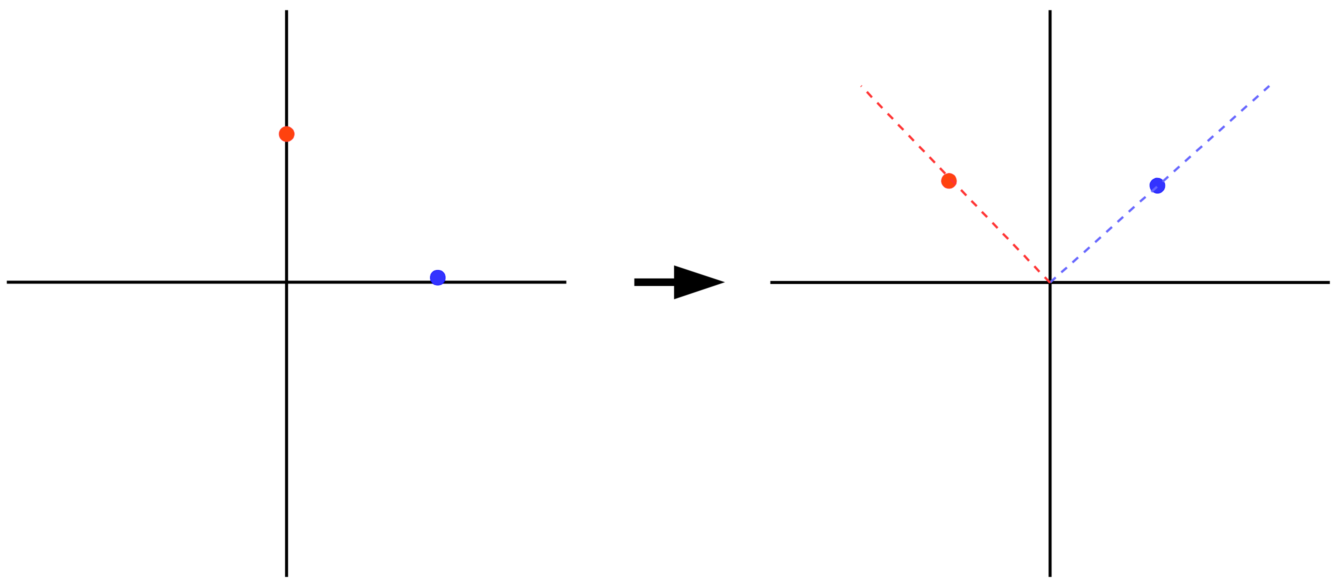


Ejemplo. ¿A donde va el punto (x,y) si lo giramos 45° alrededor del origen?

$(1,0) \longrightarrow (1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{2})$

$(0,1) \longrightarrow (-1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{2})$

$(x,y) \longrightarrow \; ?$



$$(x,y) = x(1,0)+y(0,1) \longrightarrow (1/\sqrt{2}\, x, 1/\sqrt{2}\, x)+(-1/\sqrt{2}\, y, 1/\sqrt{2}\, y)$$
$$= (1/\sqrt{2}\, x - 1/\sqrt{2}\, y,\; 1/\sqrt{2}\, x + 1/\sqrt{2}\, y)$$

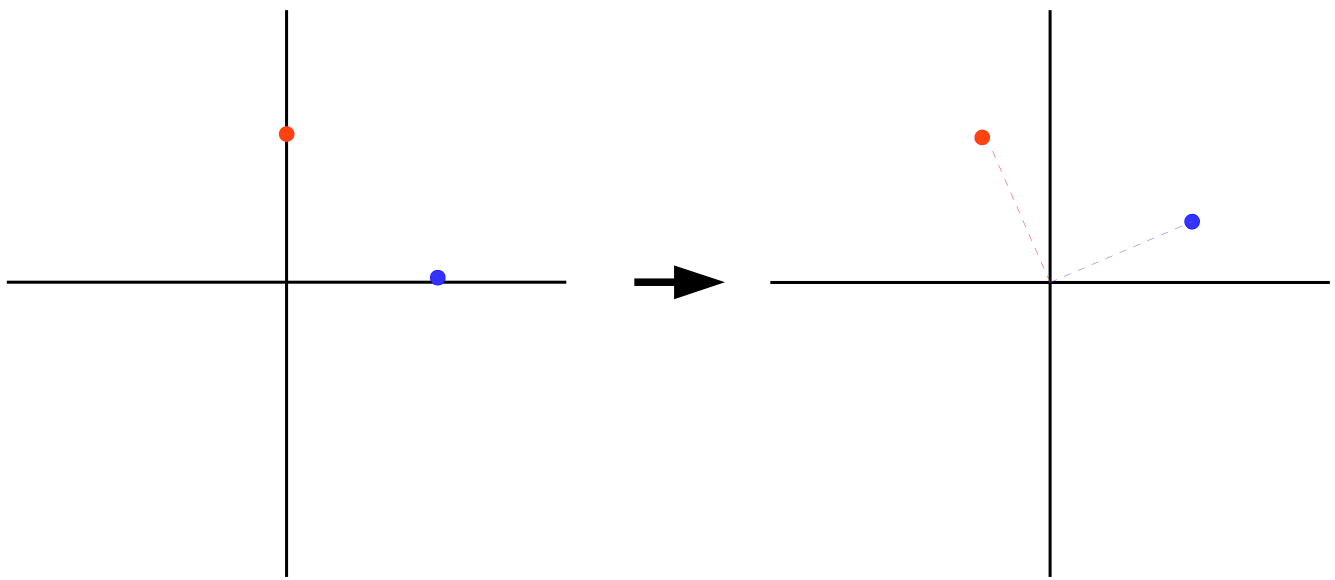
¿A donde va el punto (x,y) si lo giramos un ángulo θ alrededor del origen?

¿A donde va el punto (x,y) si lo giramos un ángulo θ alrededor del origen?

$(1,0) \longrightarrow (\cos\theta, \operatorname{sen}\theta)$

$(0,1) \longrightarrow (-\operatorname{sen}\theta, \cos\theta)$

$(x,y) \longrightarrow ?$

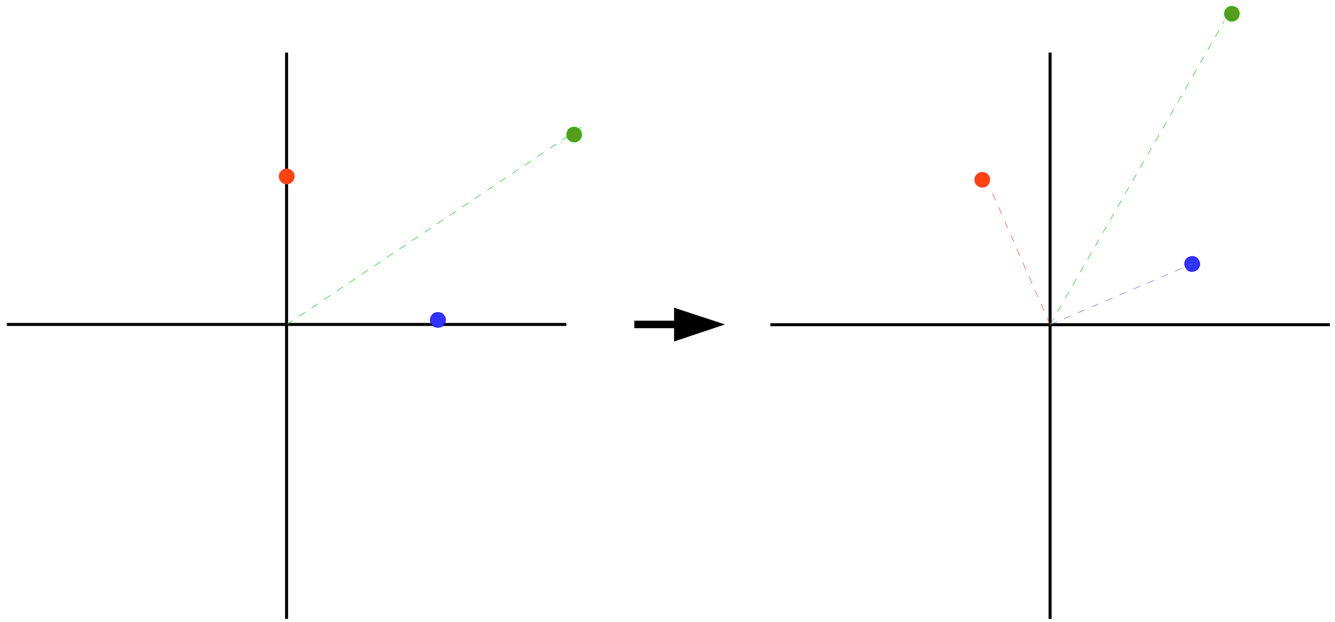


¿A donde va el punto (x,y) si lo giramos un ángulo θ alrededor del origen?

$(1,0) \longrightarrow (\cos\theta, \operatorname{sen}\theta)$

$(0,1) \longrightarrow (-\operatorname{sen}\theta, \cos\theta)$

$(x,y) \longrightarrow ?$

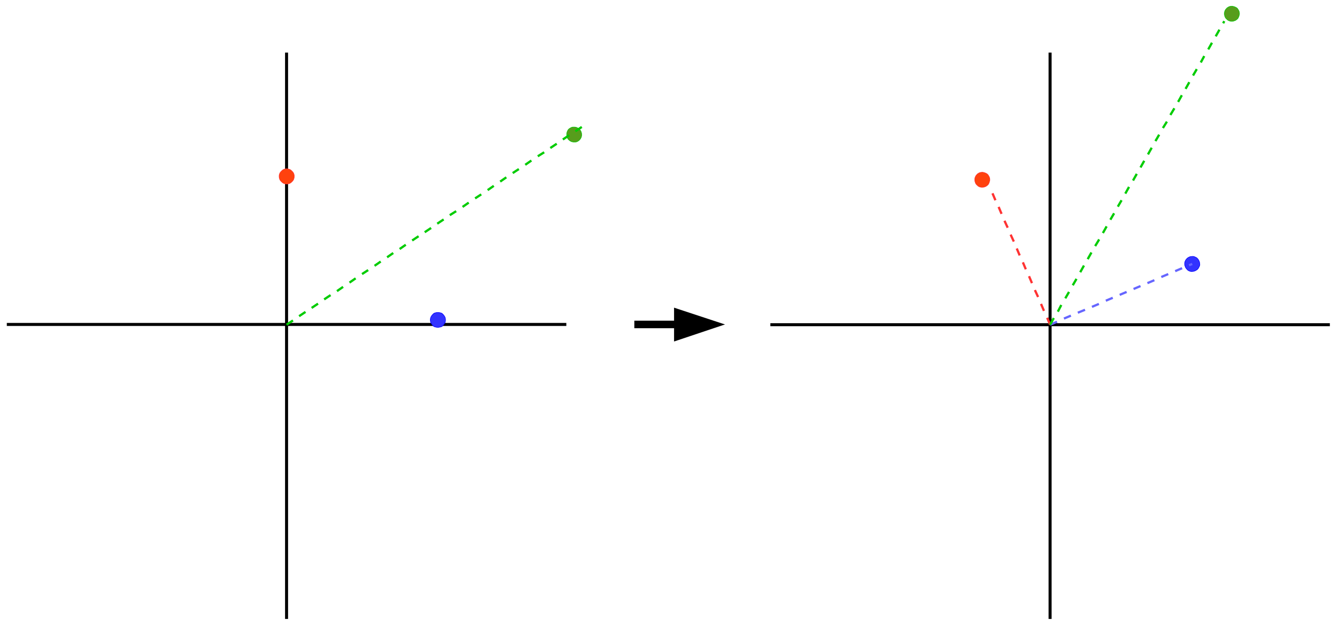


$$(x,y) = x(1,0)+y(0,1) \quad \longrightarrow \quad (\cos\theta\ x, \operatorname{sen}\theta\ x)+(-\operatorname{sen}\theta\ y, \cos\theta\ y)$$
$$= (\cos\theta\ x - \operatorname{sen}\theta\ y, \operatorname{sen}\theta\ x + \cos\theta\ y)$$

¿A donde va el punto (x,y) si lo giramos un ángulo θ alrededor del origen?

$(1,0) \rightarrow (\cos\theta, \text{sen}\theta)$

$(0,1) \rightarrow (-\text{sen}\theta, \cos\theta)$



$(x,y) \rightarrow ?$

$$(x,y) = x(1,0)+y(0,1) \quad \rightarrow \quad (\cos\theta\ x,\ \text{sen}\theta\ x)+(-\text{sen}\theta\ y,\ \cos\theta\ y)$$
$$= (\cos\theta\ x - \text{sen}\theta\ y,\ \text{sen}\theta\ x + \cos\theta\ y)$$

Ejemplo.

Sii giramos 60° entonces $\cos 60° = {}^{1}/_{2}$, $\text{sen}60° = {}^{\sqrt{3}}/_{2}$

$$(x,y) \rightarrow ({}^{1}/_{2}\ x - {}^{\sqrt{3}}/_{2}\ y,\ {}^{\sqrt{3}}/_{2}\ x + {}^{1}/_{2}\ y)$$

¿Como cambian las ecuaciones de las curvas al cambiar su posición?

Si al girar una curva las coordenadas de sus puntos cambian de (x,y) a otras coordenadas (x',y'), entonces la ecuación original que cumplen x y y debe cambiar a una nueva ecuación que cumplan x' y y'. Para hallar la nueva ecuación basta reescribir la ecuación original en términos de las nuevas coordenadas.

Ejemplo. ¿Como cambia la ecuación de la parábola $y=x^2$ al rotarla 90°?

Ejemplo. ¿Como cambia la ecuación de la parábola $y=x^2$ al rotarla 90°?

$x' = -y$

$y' = x$

Ejemplo. ¿Como cambia la ecuación de la parábola $y=x^2$ al rotarla 90°?

$x´ = -y$

$y´ = x$

Si despejamos x y y en términos de x' y y'

$x = y'$

$y = -x'$

Ejemplo. ¿Como cambia la ecuación de la parábola $y=x^2$ al rotarla 90°?

$x' = -y$

$y' = x$

Si despejamos x y y en términos de x' y y'

$x = y'$

$y = -x'$

La ecuación $y=x^2$ cambia a

$- x' = y^2$

Ejemplo. ¿Como cambia la ecuación de la elipse $6x^2 + 4y^2 = 10$ al rotarla 45°?

Ejemplo. ¿Como cambia la ecuación de la elipse $6x^2 + 4y^2 = 10$ al rotarla 45°?

La rotación de 45° está dada por $(x',y') = \left(\frac{1}{\sqrt{2}} x - \frac{1}{\sqrt{2}} y \, , \, \frac{1}{\sqrt{2}} x + \frac{1}{\sqrt{2}} y \right)$

Así que las nuevas coordenadas de los puntos son

$x' = \frac{1}{\sqrt{2}} x - \frac{1}{\sqrt{2}} y$

$y' = \frac{1}{\sqrt{2}} x + \frac{1}{\sqrt{2}} y$

Ejemplo. ¿Como cambia la ecuación de la elipse $6x^2 + 4y^2 = 10$ al rotarla 45°?

La rotación de 45° está dada por $(x',y') = \left({}^{1}/_{\sqrt{2}}\, x - {}^{1}/_{\sqrt{2}}\, y \,,\ {}^{1}/_{\sqrt{2}}\, x + {}^{1}/_{\sqrt{2}}\, y \right)$

Así que las nuevas coordenadas de los puntos son

$x' = {}^{1}/_{\sqrt{2}}\, x - {}^{1}/_{\sqrt{2}}\, y$

$y' = {}^{1}/_{\sqrt{2}}\, x + {}^{1}/_{\sqrt{2}}\, y$

Si despejamos a x y y en términos de x' y y' queda

$x = {}^{1}/_{\sqrt{2}}\, x' + {}^{1}/_{\sqrt{2}}\, y'$

$y = -{}^{1}/_{\sqrt{2}}\, x' + {}^{1}/_{\sqrt{2}}\, y'$

Ejemplo. ¿Como cambia la ecuación de la elipse $6x^2 + 4y^2 = 10$ al rotarla 45°?

La rotación de 45° está dada por $(x',y') = ({}^1/_{\sqrt{2}}\, x - {}^1/_{\sqrt{2}}\, y \,,\, {}^1/_{\sqrt{2}}\, x + {}^1/_{\sqrt{2}}\, y)$

Así que las nuevas coordenadas de los puntos son

$x' = {}^1/_{\sqrt{2}}\, x - {}^1/_{\sqrt{2}}\, y$

$y' = {}^1/_{\sqrt{2}}\, x + {}^1/_{\sqrt{2}}\, y$

Si despejamos a x y y en términos de x' y y' queda

$x = {}^1/_{\sqrt{2}}\, x' + {}^1/_{\sqrt{2}}\, y'$

$y = -{}^1/_{\sqrt{2}}\, x' + {}^1/_{\sqrt{2}}\, y'$

La ecuación $6x^2 + 4y^2 = 10$ cambia a

$6({}^1/_{\sqrt{2}}\, x'+{}^1/_{\sqrt{2}}\, y')^2 + 4(-{}^1/_{\sqrt{2}}\, x'+{}^1/_{\sqrt{2}}\, y')^2 = 10$

$6({}^1/_2\, x'^2+x'y'+{}^1/_2\, y'^2)+ 4({}^1/_2\, x'^2 -xy +{}^1/_2\, y'^2) = 10$

$5x'^2 + 2\, x'y'+ 5y'^2 = 10$

Ejemplo. ¿ Y como cambia la ecuación de la elipse $6x^2 + 4y^2 = 10$ al hacer la rotación $(x'y') = ({}^3/_5\, x+{}^4/_5 y, -{}^4/_5 x+{}^3/_5 y)$?

Ejemplo. ¿ Y como cambia la ecuación de la elipse $6x^2 + 4y^2 = 10$ al hacer la

rotación $(x'y') = ({}^3/_5\, x+{}^4/_5 y, -{}^4/_5 x+{}^3/_5 y)$?

Las nuevas coordenadas son

$$\begin{aligned} x' &= {}^3/_5\, x+{}^4/_5\, y \\ y' &= -{}^4/_5\, x+{}^3/_5\, y \end{aligned} \longrightarrow \begin{aligned} x &= {}^3/_5\, x' -{}^4/_5\, y' \\ y &= {}^4/_5\, x'+{}^3/_5\, y' \end{aligned}$$

Ejemplo. ¿ Y como cambia la ecuación de la elipse $6x^2 + 4y^2 = 10$ al hacer la rotación $(x'y') = ({}^3/_5\, x+{}^4/_5 y, -{}^4/_5 x+{}^3/_5 y)$?

Las nuevas coordenadas son

$$x' = {}^3/_5\, x + {}^4/_5\, y \qquad\qquad x = {}^3/_5\, x' - {}^4/_5\, y'$$

$$\longrightarrow$$

$$y' = -{}^4/_5\, x + {}^3/_5\, y \qquad\qquad y = {}^4/_5\, x' + {}^3/_5\, y'$$

La ecuación cambia a

$$6({}^3/_5 x' - {}^4/_5\, y')^2 + 4({}^4/_5\, x' + {}^3/_5\, y')^2 = 10$$

$$6({}^9/_{25} x'^2 - {}^{24}/_{25}\, x'y' + {}^{16}/_{25}\, y'^2) + 4({}^{16}/_{25}\, x'^2 + {}^{24}/_{25}\, x'y' + {}^9/_{25}\, y'^2) = 10$$

$${}^{118}/_{25}\, x'^2 - {}^{72}/_{25}\, x'y' + {}^{132}/_{25}\, y'^2 = 10$$

Veamos como cambia la ecuación $Ax^2+Bxy+Cy^2+Dx+Ey=F$ al rotar por un ángulo θ.

Veamos como cambia la ecuación $Ax^2+Bxy+Cy^2+Dx+Ey=F$ al rotar por un ángulo θ.

Las coordenadas de los puntos cambian así:

$x' = x \cos\theta - y \operatorname{sen}\theta$

$y' = x \operatorname{sen}\theta + y \cos\theta$

Veamos como cambia la ecuación $Ax^2+Bxy+Cy^2+Dx+Ey=F$ al rotar por un ángulo θ.

Las coordenadas de los puntos cambian así:

$x' = x \cos\theta - y \operatorname{sen}\theta$

$y' = x \operatorname{sen}\theta + y \cos\theta$

Si abreviaremos $c=\cos\theta$, $s=\operatorname{sen}\theta$

$x' = cx - sy$

$y' = sx + cy$

Veamos como cambia la ecuación $Ax^2+Bxy+Cy^2+Dx+Ey=F$ al rotar por un ángulo θ.

Las coordenadas de los puntos cambian así:

$x' = x \cos\theta - y \operatorname{sen}\theta$

$y' = x \operatorname{sen}\theta + y \cos\theta$

Si abreviaremos $c=\cos\theta$, $s=\operatorname{sen}\theta$

$$\begin{array}{lcl} x' = cx - sy & & x = cx' + sy' \\ & \longrightarrow & \\ y' = sx + cy & & y = -sx' + cy' \end{array}$$

Veamos como cambia la ecuación $Ax^2+Bxy+Cy^2+Dx+Ey=F$ al rotar por un ángulo θ.

Las coordenadas de los puntos cambian así:

$x' = x\cos\theta - y\,\mathrm{sen}\theta$

$y' = x\,\mathrm{sen}\theta + y\cos\theta$

Si abreviaremos $c=\cos\theta$, $s=\mathrm{sen}\theta$

$$\begin{aligned} x' &= cx - sy \\ y' &= sx+cy \end{aligned} \longrightarrow \begin{aligned} x &= cx' + sy' \\ y &= -sx' + cy' \end{aligned}$$

Si sustituimos estos valores en la ecuación $Ax^2+Bxy+Cy^2+Dx+Ey = F$ obtenemos

$$A(cx'+sy')^2 + B(cx'+sy')(-sx'+cy') + C(-sx'+cy')^2 + D(cx'+sy') + E(-sx'+cy') = F$$

Veamos como cambia la ecuación $Ax^2+Bxy+Cy^2+Dx+Ey=F$ al rotar por un ángulo θ.

Las coordenadas de los puntos cambian así:

$x' = x\cos\theta - y\,\mathrm{sen}\theta$

$y' = x\,\mathrm{sen}\theta + y\cos\theta$

Si abreviaremos $c=\cos\theta$, $s=\mathrm{sen}\theta$

$$\left.\begin{array}{l} x' = cx - sy \\ y' = sx + cy \end{array}\right. \longrightarrow \left.\begin{array}{l} x = cx' + sy' \\ y = -sx' + cy' \end{array}\right.$$

Si sustituimos estos valores en la ecuación $Ax^2+Bxy+Cy^2+Dx+Ey = F$ obtenemos

$A(cx'+sy')^2 + B(cx'+sy')(-sx'+cy') + C(-sx'+cy')^2 + D(cx'+sy') + E(-sx'+cy') = F$

expandiendo queda

$A(c^2x'^2+2csx'y'+s^2y'^2)+B(-csx'^2+c^2x'y-s^2x'y'+csy'^2)+C(s^2x'-2csx'y'+c^2y'^2)+D(cx'+sy')+E(-sx'+cy') = F$

Veamos como cambia la ecuación $Ax^2+Bxy+Cy^2+Dx+Ey=F$ al rotar por un ángulo θ.

Las coordenadas de los puntos cambian así:

$x' = x \cos\theta - y \operatorname{sen}\theta$

$y' = x \operatorname{sen}\theta + y \cos\theta$

Si abreviaremos $c=\cos\theta$, $s=\operatorname{sen}\theta$

$$\begin{array}{lcl} x' = cx - sy & & x = cx' + sy' \\ & \longrightarrow & \\ y' = sx + cy & & y = -sx' + cy' \end{array}$$

Si sustituimos estos valores en la ecuación $Ax^2+Bxy+Cy^2+Dx+Ey = F$ obtenemos

$$A(cx'+sy')^2 + B(cx'+sy')(-sx'+cy') + C(-sx'+cy')^2 + D(cx'+sy') + E(-sx'+cy') = F$$

expandiendo queda

$$A(c^2x'^2+2csx'y'+s^2y'^2)+B(-csx'^2+c^2x'y-s^2x'y'+csy'^2)+C(s^2x'-2csx'y'+c^2y'^2)+D(cx'+sy')+E(-sx'+cy') = F$$

y reordenando los términos queda

$$(Ac^2-Bcs+Cs^2)x'^2 + (2Acs+Bc^2-Bs^2-2Ccs)x'y' + (As^2+Bcs+Cc^2)y'^2 + (Dc-Es)x' + (Ds+Ec)y'= F$$

Veamos como cambia la ecuación $Ax^2+Bxy+Cy^2+Dx+Ey=F$ al rotar por un ángulo θ.

Las coordenadas de los puntos cambian así:

$x' = x \cos\theta - y \operatorname{sen}\theta$

$y' = x \operatorname{sen}\theta + y \cos\theta$

Si abreviaremos $c=\cos\theta$, $s=\operatorname{sen}\theta$

$$\begin{aligned} x' &= cx - sy \\ y' &= sx + cy \end{aligned} \quad \longrightarrow \quad \begin{aligned} x &= cx' + sy' \\ y &= -sx' + cy' \end{aligned}$$

Si sustituimos estos valores en la ecuación $Ax^2+Bxy+Cy^2+Dx+Ey = F$ obtenemos

$A(cx'+sy')^2 + B(cx'+sy')(-sx'+cy') + C(-sx'+cy')^2 + D(cx'+sy') + E(-sx'+cy') = F$

expandiendo queda

$A(c^2x'^2+2csx'y'+s^2y'^2)+B(-csx'^2+c^2x'y-s^2x'y'+csy'^2)+C(s^2x'-2csx'y'+c^2y'^2)+D(cx'+sy')+E(-sx'+cy') = F$

y reordenando los términos queda

$(Ac^2-Bcs+Cs^2)x'^2 + (2Acs+Bc^2-Bs^2-2Ccs)x'y' + (As^2+Bcs+Cc^2)y'^2 + (Dc-Es)x' + (Ds+Ec)y'= F$

Así que la ecuación se convierte en otra de la forma $A'x'^2 + B'xy + C'y'^2 + D'x' + E'y' = F'$

Donde los coeficientes son combinaciones de los anteriores con $\cos\theta$ y $\operatorname{sen}\theta$

Teorema: Todas las ecuaciones de 2° grado: $Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey = F$ corresponden a cónicas (círculos, elipses, hipérbolas, o parábolas) o cónicas degeneradas (2 rectas, una recta, un punto o el vacío).

Teorema: Todas las ecuaciones de 2° grado: $Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey = F$ corresponden a cónicas (círculos, elipses, hipérbolas, o parábolas) o cónicas degeneradas (2 rectas, una recta, un punto o el vacío).

Demostración. Sabemos que las ecuaciones de la forma $Ax^2 + Cy^2 + Dx + Ey = F$ corresponden a cónicas (quizá degeneradas) con ejes paralelos a los ejes de coordenadas.

Para ver que todas las ecuaciones de la forma $Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey = F$ corresponden a cónicas, basta ver que hay alguna rotación que hace que esta ecuación se convierta en
$A'x'^2 + C'y'^2 + D'x' + E'y' = F$ (es decir con $B' = 0$).

Teorema: Todas las ecuaciones de 2° grado: $Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey = F$ corresponden a cónicas (círculos, elipses, hipérbolas, o parábolas) o cónicas degeneradas (2 rectas, una recta, un punto o el vacío).

*Demostración. S*abemos que las ecuaciones de la forma $Ax^2 + Cy^2 + Dx + Ey = F$ corresponden a cónicas (quizá degeneradas) con ejes paralelos a los ejes de coordenadas.

Para ver que todas las ecuaciones de la forma $Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey = F$ corresponden a cónicas, basta ver que hay alguna rotación que hace que esta ecuación se convierta en $A'x'^2 + C'y'^2 + D'x' + E'y' = F$ (es decir con $B' = 0$).

Al rotar la curva un ángulo θ los coeficientes de la ecuación cambian de modo que

$B' = 2(A-C) \cos\theta \,\mathrm{sen}\theta - B(\cos^2\theta - \mathrm{sen}^2\theta)$

$= (A-C)\, \mathrm{sen}2\theta - B \cos2\theta$ (ya que $2\cos\theta \,\mathrm{sen}\theta = \mathrm{sen}2\theta$ y $\cos^2\theta - \mathrm{sen}^2\theta = \cos2\theta$)

Teorema: Todas las ecuaciones de 2° grado: $Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey = F$ corresponden a cónicas (círculos, elipses, hipérbolas, o parábolas) o cónicas degeneradas (2 rectas, una recta, un punto o el vacío).

*Demostración. S*abemos que las ecuaciones de la forma $Ax^2 + Cy^2 + Dx + Ey = F$ corresponden a cónicas (quizá degeneradas) con ejes paralelos a los ejes de coordenadas.

Para ver que todas las ecuaciones de la forma $Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey = F$ corresponden a cónicas, basta ver que hay alguna rotación que hace que esta ecuación se convierta en $A'x'^2 + C'y'^2 + D'x' + E'y' = F$ (es decir con $B' = 0$).

Al rotar la curva un ángulo θ los coeficientes de la ecuación cambian de modo que

$B' = 2(A-C)\cos\theta\,\mathrm{sen}\theta - B(\cos^2\theta - \mathrm{sen}^2\theta)$

$= (A-C)\,\mathrm{sen}2\theta - B\cos 2\theta$ (ya que $2\cos\theta\,\mathrm{sen}\theta = \mathrm{sen}2\theta$ y $\cos^2\theta - \mathrm{sen}^2\theta = \cos 2\theta$)

Por lo tanto $B' = 0$ si $\cot 2\theta = \cos 2\theta/\mathrm{sen}2\theta = (A-C)/B$.

Teorema: Todas las ecuaciones de 2° grado: $Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey = F$ corresponden a cónicas (círculos, elipses, hipérbolas, o parábolas) o cónicas degeneradas (2 rectas, una recta, un punto o el vacío).

*Demostración. S*abemos que las ecuaciones de la forma $Ax^2 + Cy^2 + Dx + Ey = F$ corresponden a cónicas (quizá degeneradas) con ejes paralelos a los ejes de coordenadas.

Para ver que todas las ecuaciones de la forma $Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey = F$ corresponden a cónicas, basta ver que hay alguna rotación que hace que esta ecuación se convierta en $A'x'^2 + C'y'^2 + D'x' + E'y' = F$ (es decir con $B' = 0$).

Al rotar la curva un ángulo θ los coeficientes de la ecuación cambian de modo que

$$B' = 2(A\text{-}C) \cos\theta \operatorname{sen}\theta - B(\cos^2\theta - \operatorname{sen}^2\theta)$$

$$= (A\text{-}C) \operatorname{sen}2\theta - B \cos 2\theta \qquad \text{(ya que } 2\cos\theta \operatorname{sen}\theta = \operatorname{sen}2\theta \quad \text{y} \quad \cos^2\theta - \operatorname{sen}^2\theta = \cos 2\theta\text{)}$$

Por lo tanto $B' = 0$ si $\cot 2\theta = \cos 2\theta/\operatorname{sen}2\theta = (A\text{-}C)/B$.

Y siempre hay un valor de θ para el que esto ocurre porque la cotangente toma todos los valores entre $-\infty$ y ∞. •

Teorema. Todas las ecuaciones de 2° grado: $Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey = F$ corresponden a cónicas (círculos, elipses, hipérbolas, o parábolas) o cónicas degeneradas (2 rectas, una recta, un punto o el vacío).

$(A-C)/B$ indica que tan inclinados están los ejes de la cónica.

Ejemplo. ¿A que cónica corresponde la ecuación $x^2+3xy+y^2 =1$?

Ejemplo. ¿A que cónica corresponde la ecuación $x^2+3xy+y^2=1$?

A=1, B=3, C=1 así que (A-C)/B = (1-1)/3 = 0

$\cot 2\theta = 0$ si $2\theta=90°$ o sea $\theta=45°$.

Si rotamos la curva 45°

$x' = {}^1/_{\sqrt{2}}\, x - {}^1/_{\sqrt{2}}\, y$ $\qquad x = {}^1/_{\sqrt{2}}\, x' + {}^1/_{\sqrt{2}}\, y'$

$y' = {}^1/_{\sqrt{2}}\, x + {}^1/_{\sqrt{2}}\, y$ $\qquad y = -{}^1/_{\sqrt{2}}\, x' + {}^1/_{\sqrt{2}}\, y'$

la ecuación $x^2 + 3xy + y^2 = 1$ se convierte en

$$({}^1/_{\sqrt{2}}\, x' + {}^1/_{\sqrt{2}}\, y')^2 + 3({}^1/_{\sqrt{2}}\, x' + {}^1/_{\sqrt{2}}\, y')(-{}^1/_{\sqrt{2}}\, x' + {}^1/_{\sqrt{2}}\, y') + (-{}^1/_{\sqrt{2}}\, x' + {}^1/_{\sqrt{2}}\, y')^2 = 1$$

$$({}^1/_2\, x'^2 + x'y' + {}^1/_2\, y'^2) + 3(-{}^1/_2\, x'^2 + {}^1/_2\, y'^2) + ({}^1/_2\, x'^2 - xy + {}^1/_2\, y'^2) = 1$$

y simplificando queda

$-{}^1/_2\, x'^2 + {}^5/_2\, y'^2 = 1$ *que es una hipérbola.*

Al rotar una cónica, su ecuación:

$$Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey = F$$

se convierte en otra:

$$A'x'^2 + B'x'y' + C'y'^2 + D'x' + E'y' = F$$

Como la forma de la curva no cambia, debe haber algo en las ecuaciones que no cambie.

Al rotar una cónica, su ecuación:

$$Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey = F$$

se convierte en otra:

$$A'x'^2 + B'x'y' + C'y'^2 + D'x' + E'y' = F$$

Como la forma de la curva no cambia, debe haber algo en las ecuaciones que no cambie.

Ejemplo. Estas 3 ecuaciones corresponden a una cónica con distintas rotaciones. ¿Que tienen en común?

$6x^2 + 4y^2 = 10$

$5x'^2 + 2\,x'y' + 5y'^2 = 10$

$^{118}/_{25}\,x'^2 - {}^{72}/_{25}\,x'y' + {}^{132}/_{25}\,y'^2 = 10$

Al rotar un ángulo θ , la ecuación:

$$Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey = F$$

se convierte en:

$$A'x'^2 + B'x'y' + C'y'^2 + D'x' + E'y' = F$$

donde

$$A' = A \cos^2\theta - B \cos\theta \,\mathrm{sen}\theta + C \,\mathrm{sen}^2\theta$$

$$B' = 2(A-C) \cos\theta \,\mathrm{sen}\theta - B (\cos^2\theta - \mathrm{sen}^2\theta)$$

$$C' = A \,\mathrm{sen}^2\theta + B \,\mathrm{sen}\theta \cos\theta + C \cos^2\theta$$

$$D' = D \cos\theta - E \,\mathrm{sen}\theta$$

$$E' = D \,\mathrm{sen}\theta + E \cos\theta$$

¿que son las cosas que no cambian?

Afirmación:

$A' + C' = A + C$

$D'^2 + E'^2 = D^2 + E^2$

$4A'C' - B'^2 = 4AC - B^2$

Afirmación:

$A' + C' = A + C$

$D'^2 + E'^2 = D^2 + E^2$

$4A'C' - B'^2 = 4AC - B^2$

Demostración. Tarea (hay que hacer las cuentas)

Afirmación:

$A' + C' = A + C$

$D'^2 + E'^2 = D^2 + E^2$

$4A'C' - B'^2 = 4AC - B^2$

Demostración: Tarea (hay que hacer las cuentas)

Estas cantidades invariantes contienen información sobre la forma de la curva, que es independiente de las coordenadas, y que permiten saber como quedara la ecuación después de la rotación *sin tener que hacerla.*

Ejemplo. ¿Qué forma tiene la curva determinada por la ecuación $x^2 + 2xy + 3y^2 = 4$?

$\mp$

Ejemplo. ¿Qué forma tiene la curva determinada por la ecuación $x^2 + 2xy + 3y^2 = 4$?

$A=1$, $B=2$, $C=3$

Si la rotamos para que $B' = 0$

$A'+C' = A+C = 4$ $\quad$ $4A'C' = 4AC - B^2 = 8$ $\quad$ (ya que $B' = 0$)

$\mp$

Ejemplo. ¿Qué forma tiene la curva determinada por la ecuación $x^2 + 2xy + 3y^2 = 4$?

$A=1$, $B=2$, $C=3$

Si la rotamos para que $B' = 0$

$A' + C' = A + C = 4$ $\quad$ $4A'C' = 4AC - B^2 = 8$ $\quad$ (ya que $B' = 0$)

así que

$C' = 4 - A'$ $\quad$ $4A'(4 - A') = 8$

por lo tanto

$4A'^2 - 16A' + 8 = 0$ $\quad$ $A' = 2 \pm \sqrt{2}$ $\quad$ $C' = 2 \mp \sqrt{2}$

Ejemplo. ¿Qué forma tiene la curva determinada por la ecuación $x^2 + 2xy + 3y^2 = 4$?

$A=1$, $B=2$, $C=3$

Si la rotamos para que $B' = 0$

$A'+C' = A+C = 4$ $\quad$ $4A'C' = 4AC - B^2 = 8$ $\quad$ (ya que $B' = 0$)

así que

$C' = 4-A'$ $\quad$ $4A'(4-A') = 8$

por lo tanto

$4A'^2 - 16A' + 8 = 0$ $\quad$ $A' = 2 \pm \sqrt{2}$ $\quad$ $C' = 2 \mp \sqrt{2}$

y la ecuación queda

$(2+\sqrt{2})x'^2 + (2-\sqrt{2})y'^2 = 4$

Ejemplo. ¿Qué forma tiene la curva determinada por la ecuación $x^2 + 2xy + 3y^2 = 4$?

$A=1$, $B=2$, $C=3$

Si la rotamos para que $B'= 0$

$A'+C'= A+C = 4$ $\quad$ $4A'C' = 4AC - B^2 = 8$ $\quad$ (ya que $B' = 0$)

así que

$C' = 4-A'$ $\quad$ $4A'(4-A') = 8$

por lo tanto

$4A'^2 - 16A' + 8 = 0$ $\quad$ $A' = 2 \pm \sqrt{2}$ $\quad$ $C' = 2 \mp \sqrt{2}$

y la ecuación queda

$(2+\sqrt{2})x'^2 + (2-\sqrt{2})y'^2 = 4$ *es una elipse.*

Ejemplo. ¿Qué forma tiene la curva determinada por la ecuación $x^2 + 3xy + 2y^2 = 4$?

Ejemplo. ¿Qué forma tiene la curva determinada por la ecuación $x^2 + 3xy + 2y^2 = 4$?

$A=1$, $B=3$, $C=2$

Si la rotamos para que $B' = 0$

$A' + C' = A + C = 3 \qquad 4A'C' = 4AC - B^2 = -1$ (ya que $B' = 0$)

Ejemplo. ¿Qué forma tiene la curva determinada por la ecuación $x^2 + 3xy + 2y^2 = 4$?

$A=1$, $B=3$, $C=2$

Si la rotamos para que $B' = 0$

$A'+C' = A+C = 3$ $\quad 4A'C' = 4AC - B^2 = -1$ $\quad$ (ya que $B' = 0$)

así que

$C' = 3-A'$ $\quad 4A'(3-A') = -1$

Por lo tanto

$4A'^2 - 12A' - 1 = 0$ $\quad A' = \frac{3 \pm\sqrt{10}}{2}$ $\quad C' = \frac{3 \mp\sqrt{10}}{2}$

Ejemplo. ¿Qué forma tiene la curva determinada por la ecuación $x^2 + 3xy + 2y^2 = 4$?

$A=1$, $B=3$, $C=2$

Si la rotamos para que $B'= 0$

$A'+C'= A+C = 3 \qquad 4A'C' = 4AC - B^2 = -1$ (ya que $B' = 0$)

así que

$C' = 3-A' \qquad 4A'(3-A') = -1$

Por lo tanto

$$4A'^2 - 12A' - 1 = 0 \qquad A' = \frac{3 \pm\sqrt{10}}{2} \qquad C' = \frac{3 \mp\sqrt{10}}{2}$$

y la ecuación queda

$\frac{3 \pm\sqrt{10}}{2} x'^2 + \frac{3 \mp\sqrt{10}}{2} y'^2 = 4$ *es una hipérbola* *(ya que* $3 - \sqrt{10} < 0$ *)*

El discriminante.

Al rotar la ecuación $Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey = F$ se convierte en otra ecuación

$A'x'^2 + B'x'y' + C'y'^2 + D'x' + E'y' = F$ donde $4A'C' - B'^2 = 4AC - B^2$

Este número es el **discriminante** de la ecuación.

El discriminante.

Al rotar la ecuación $Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey = F$ se convierte en otra ecuación

$A'x'^2 + B'x'y' + C'y'^2 + D'x' + E'y' = F$ donde $4A'C' - B'^2 = 4AC - B^2$

Este número es el **discriminante** de la ecuación.

Cuando $B' = 0$ la forma de la curva $A'x'^2 + C'y'^2 + D'x' + E'y' = F$ depende (excepto en casos degenerados) de los signos de A' y C' : en las elipses tienen el mismo signo, en las hipérbolas tienen signo contrario y en las parábolas alguno es 0).

El discriminante.

Al rotar la ecuación $Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey = F$ se convierte en otra ecuación

$A'x'^2 + B'x'y' + C'y'^2 + D'x' + E'y' = F$ donde $4A'C' - B'^2 = 4AC - B^2$

Este número es el **discriminante** de la ecuación.

Cuando $B' = 0$ la forma de la curva $A'x'^2 + C'y'^2 + D'x' + E'y' = F$ depende (excepto en casos degenerados) de los signos de A' y C' : en las elipses tienen el mismo signo, en las hipérbolas tienen signo contrario y en las parábolas alguno es 0).

Así que para reconocer entre elipses, hipérbolas o parábolas (quizas degeneradas) basta entonces saber el *signo* de $A'C'$, que es el signo del discriminante de la ecuación.

Ejemplos

¿Qué forma tiene la curva determinada por la ecuación $x^2 + 2xy + 3y^2 = 4$?

Ejemplos

¿Qué forma tiene la curva determinada por la ecuación $x^2 + 2xy + 3y^2 = 4$?

$4AC - B^2 = 4 \cdot 1 \cdot 3 - 2^2 = 8 > 0$ así *que debe ser una elipse, un punto o el vacío*

($x^2 + 2xy + 3y^2 = 0$ es *un punto* , $x^2 + 2xy + 3y^2 = -1$ es el vacío)

Ejemplos

¿Qué forma tiene la curva determinada por la ecuación $x^2 + 2xy + 3y^2 = 4$?

$4AC - B^2 = 4 \cdot 1 \cdot 3 - 2^2 = 8 > 0$ así *que debe ser una elipse, un punto o el vacío*

($x^2 + 2xy + 3y^2 = 0$ es *un punto* , $x^2 + 2xy + 3y^2 = -1$ es el vacío)

¿Qué forma tiene la curva determinada por la ecuación $x^2 + 3xy + 2y^2 = 4$?

Ejemplos

¿Qué forma tiene la curva determinada por la ecuación $x^2 + 2xy + 3y^2 = 4$?

$4AC - B^2 = 4 \cdot 1 \cdot 3 - 2^2 = 8 > 0$ así *que debe ser una elipse, un punto o el vacío*

($x^2 + 2xy + 3y^2 = 0$ es *un punto* , $x^2 + 2xy + 3y^2 = -1$ es el vacío)

¿Qué forma tiene la curva determinada por la ecuación $x^2 + 3xy + 2y^2 = 4$?

$4AC - B^2 = 4 \cdot 1 \cdot 2 - 3^2 = -1 < 0$ *debe ser una hipérbola o 2 rectas que se cruzan*

($x^2 + 3xy + 2y^2 = 0$ es *un par de rectas*)

Ejemplos

¿Qué forma tiene la curva determinada por la ecuación $x^2 + 2xy + 3y^2 = 4$?

$4AC - B^2 = 4 \cdot 1 \cdot 3 - 2^2 = 8 > 0$ así *que debe ser una elipse, un punto o el vacío*

($x^2 + 2xy + 3y^2 = 0$ es *un punto* , $x^2 + 2xy + 3y^2 = -1$ es el vacío)

¿Qué forma tiene la curva determinada por la ecuación $x^2 + 3xy + 2y^2 = 4$?

$4AC - B^2 = 4 \cdot 1 \cdot 2 - 3^2 = -1 < 0$ *debe ser una hipérbola o 2 rectas que se cruzan*

($x^2 + 3xy + 2y^2 = 0$ es *un par de rectas*)

¿Qué forma tiene la curva determinada por la ecuación $x^2 + 2xy + y^2 = 4$?

Ejemplos

¿Qué forma tiene la curva determinada por la ecuación $x^2 + 2xy + 3y^2 = 4$?

$4AC - B^2 = 4 \cdot 1 \cdot 3 - 2^2 = 8 > 0$ así *que debe ser una elipse, un punto o el vacío*

($x^2 + 2xy + 3y^2 = 0$ es *un punto* , $x^2 + 2xy + 3y^2 = -1$ es el vacío)

¿Qué forma tiene la curva determinada por la ecuación $x^2 + 3xy + 2y^2 = 4$?

$4AC - B^2 = 4 \cdot 1 \cdot 2 - 3^2 = -1 < 0$ *debe ser una hipérbola o 2 rectas que se cruzan*

($x^2 + 3xy + 2y^2 = 0$ es *un par de rectas*)

¿Qué forma tiene la curva determinada por la ecuación $x^2 + 2xy + y^2 = 4$?

$4AC - B^2 = 4 \cdot 1 \cdot 1 - 2^2 = 0$ *debe ser una parábola, o una o 2 rectas paralelas*

es *un par de rectas* ($x^2 + 2xy + y^2 = 0$ es *una recta*)