Proporción y semejanza

Proporciones

Los pitagóricos, quienes descubrieron entre otras cosas la relación entre la armonía musical y las fracciones, se interesaron y estudiaron las proporciones en la geometría.

Proporciones

Los pitagóricos, quienes descubrieron entre otras cosas la relación entre la armonía musical y las fracciones, se interesaron y estudiaron las proporciones en la geometría.

En términos modernos, se dice que dos magnitudes A y B están en la *misma proporción* (o en la *misma razón*) que otras dos magnitudes C y D si A/B = C/D.

Proporciones

Los pitagóricos, quienes descubrieron entre otras cosas la relación entre la armonía musical y las fracciones, se interesaron y estudiaron las proporciones en la geometría.

En términos modernos, se dice que dos magnitudes A y B están en la *misma proporción* (o en la *misma razón*) que otras dos magnitudes C y D si $A/B = C/D$.

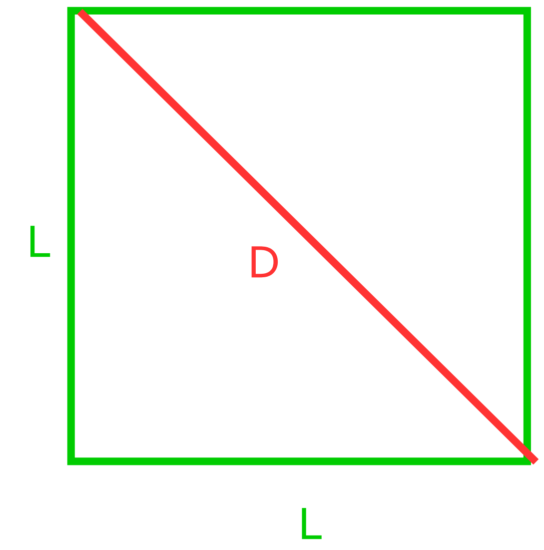
Ejemplo. Si A y B son 2 magnitudes y existe otra magnitud C tal que $A=mC$ y $B=nC$ entonces $A/B = mC/nC = m/n$. Así que A y B están en la misma razón que m y n.

Como los pitagóricos creían que todo estaba regido por los números naturales, les parecía natural pensar que cualquier proporción debía poder expresarse como el cociente de dos números naturales. Fue una gran sorpresa para ellos descubrir que *existen cantidades que no son conmensurables,* es decir que no existe ninguna magnitud de la que ambas sean múltiplos enteros, y por lo tanto la razón entre ellas no es igual a ninguna fracción.

Como los pitagóricos creían que todo estaba regido por los números naturales, les parecía natural pensar que cualquier proporción debía poder expresarse como el cociente de dos números naturales. Fue una gran sorpresa para ellos descubrir que *existen cantidades que no son conmensurables,* es decir que no existe ninguna magnitud de la que ambas sean múltiplos enteros, y por lo tanto la razón entre ellas no es igual a ninguna fracción.

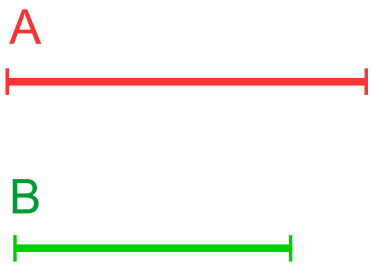
Proposición 2:10. *La diagonal de un cuadrado no es conmensurable con sus lados.*

(no existe ninguna magnitud C *tal que* L=mC *y* D=nC*, así que* D/L≠n/m *para* m,n *naturales)*



La existencia de cantidades inconmensurables hace que hablar de proporciones no sea tan fácil.

¿Cual será la razón entre estas 2 longitudes?



Si podemos encontrar una magnitud C de la que A y B sean múltiplos enteros ya acabamos. ¿Pero como podemos encontrar esa magnitud?

¿Y que pasa si tal magnitud no existe...?

Euclides encontró una manera de tratar las proporciones usando la multiplicación en lugar de la división:

En el ejemplo:

A

B

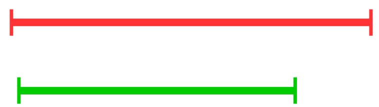
aproximadamente

Aquí podemos adivinar que $A/B \approx 4/3$, o sea que $3A/4B \approx 12/12 = 1/1$

En el ejemplo:

A

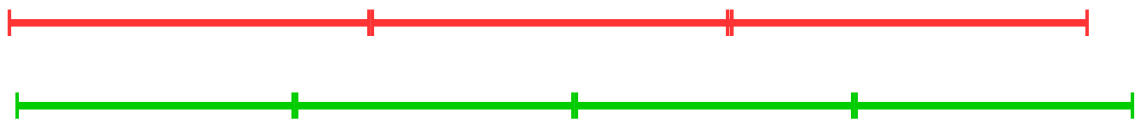
B



aproximadamente

Aquí podemos adivinar que $A/B \approx 4/3$, o sea que $3A/4B \approx 12/12=1/1$

si comparamos $3A$ y $4B$



vemos que $3A < 4B$ entonces en realidad $A/B < 4/3$

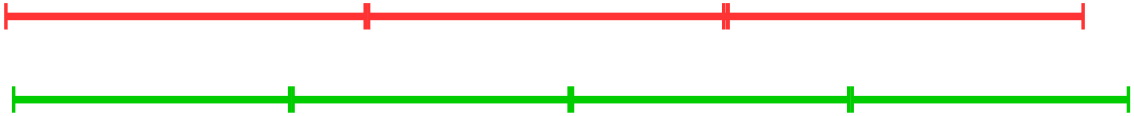
En el ejemplo:

A

B

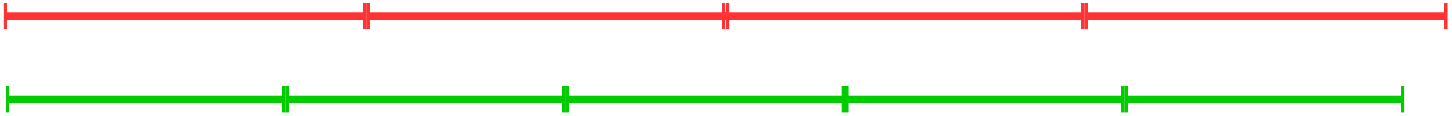
Aquí podemos adivinar que $A/B \approx 4/3$, o sea que $3A/4B \approx 12/12 = 1/1$

si comparamos $3A$ y $4B$



vemos que $3A < 4B$ entonces en realidad $A/B < 4/3$

¿Y que tal $A/B \approx 5/4$? Si esto sucede entonces $4A/5B \approx 20/20 = 1/1$ Veamos...



Como ahora $4A > 5B$ entonces en realidad $A/B > 5/4$

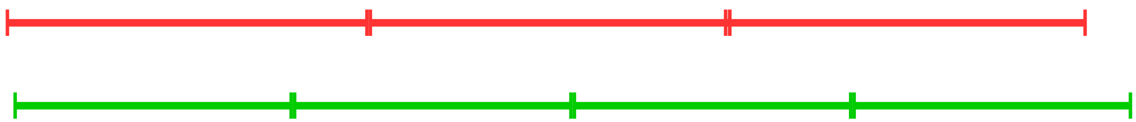
En el ejemplo:

A 

B 

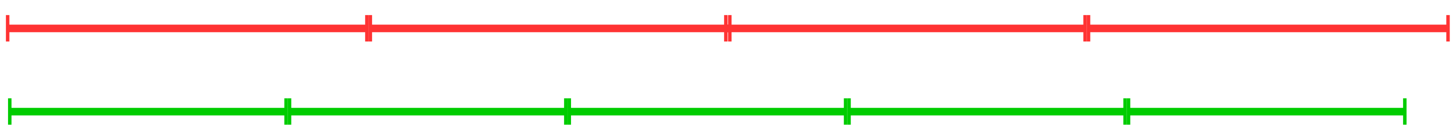
Aquí podemos adivinar que A/B≈4/3, o sea que 3A/4B ≈12/12=1/1

si comparamos 3A y 4B



vemos que 3A < 4B entonces en realidad A/B < 4/3

¿Y que tal A/B≈5/4 ? Si esto sucede entonces 4A/5B ≈20/20=1/1 Veamos...



Como ahora 4A > 5B entonces en realidad A/B > 5/4

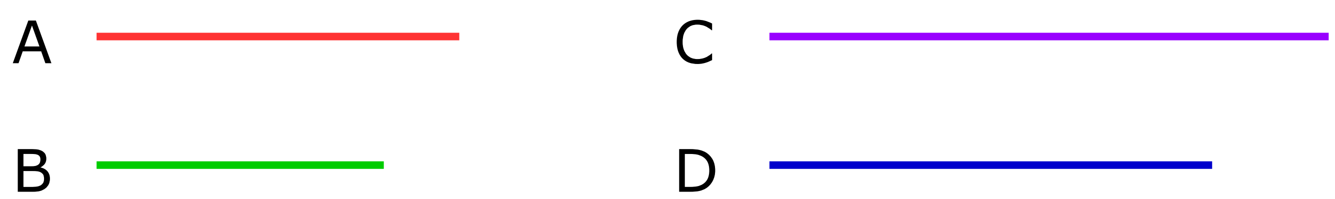
Así podemos hallar aproximaciones cada vez mejores de A/B,

aunque puede ser que nunca encontremos su valor exacto...

Para Euclides, las magnitudes A y B están en la misma proporción que las magnitudes C y D si los múltiplos enteros de A y B se comparan igual que los múltiplos enteros de C y D:

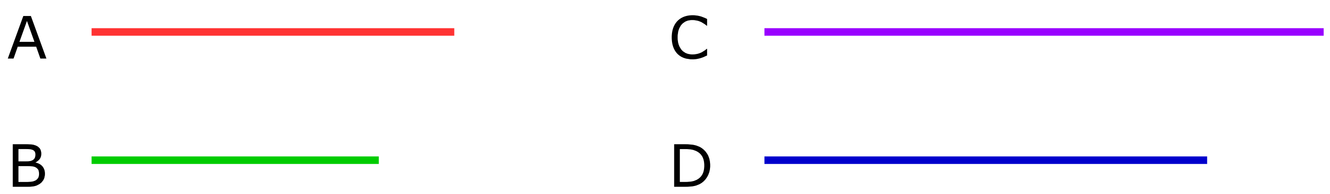
Para Euclides, las magnitudes A y B están en la misma proporción que las magnitudes C y D si los múltiplos enteros de A y B se comparan igual que los múltiplos enteros de C y D:

$$A/B = C/D \quad \text{si} \quad (\forall m,n \text{ en } \mathbf{N},\ \ mA \leq nB \Leftrightarrow mC \leq nD)$$



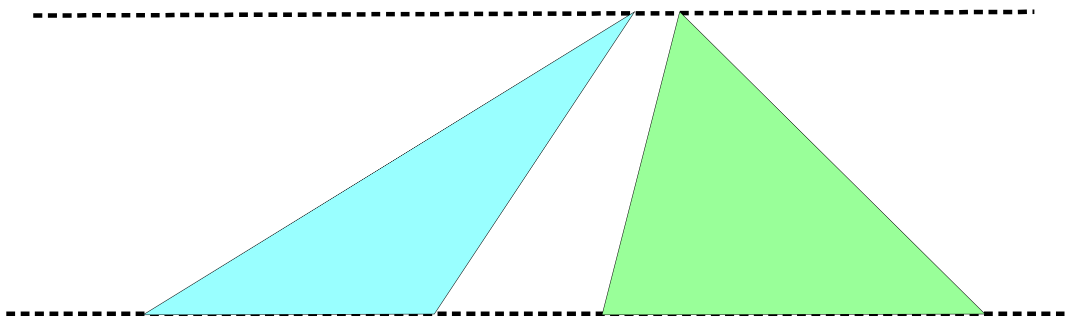
Para Euclides, las magnitudes A y B están en la misma proporción que las magnitudes C y D si los múltiplos enteros de A y B se comparan igual que los múltiplos enteros de C y D:

$$A/B = C/D \quad \text{si} \quad (\forall m,n \text{ en } \mathbf{N},\ mA \le nB \Leftrightarrow mC \le nD)$$

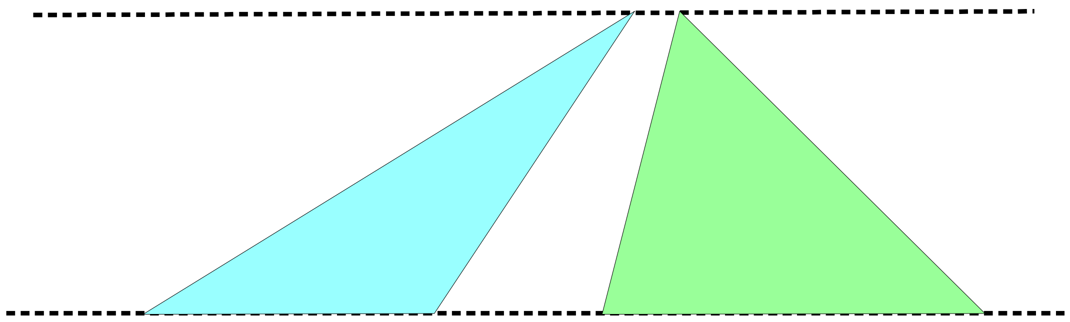


Esta definición es la que se usa en *Los Elementos* para comparar las proporciones de distintas magnitudes, como longitudes y áreas.

Proposición 6:2 *Si dos triángulos tienen la misma altura entonces sus áreas están en la misma proporción que sus bases.*

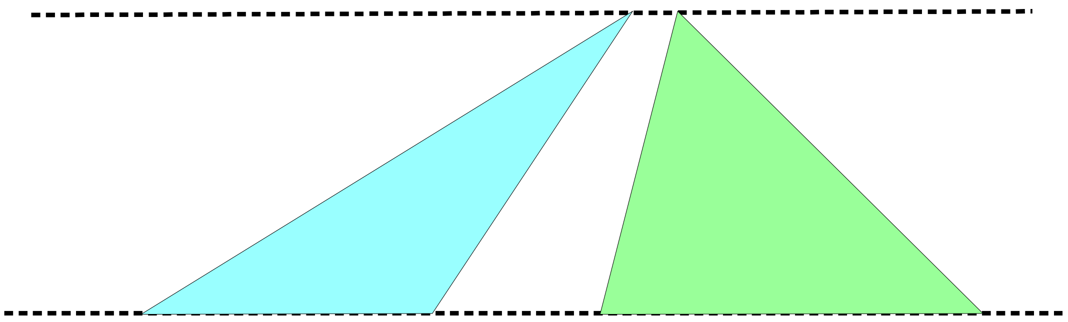


Proposición 6:2 *Si dos triángulos tienen la misma altura entonces sus áreas están en la misma proporción que sus bases.*



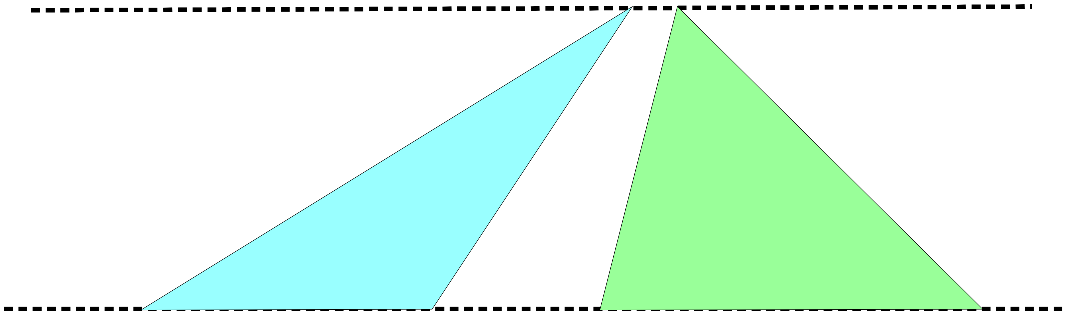
Demostración?

Proposición 6:2 *Si dos triángulos tienen la misma altura entonces sus áreas están en la misma proporción que sus bases.*



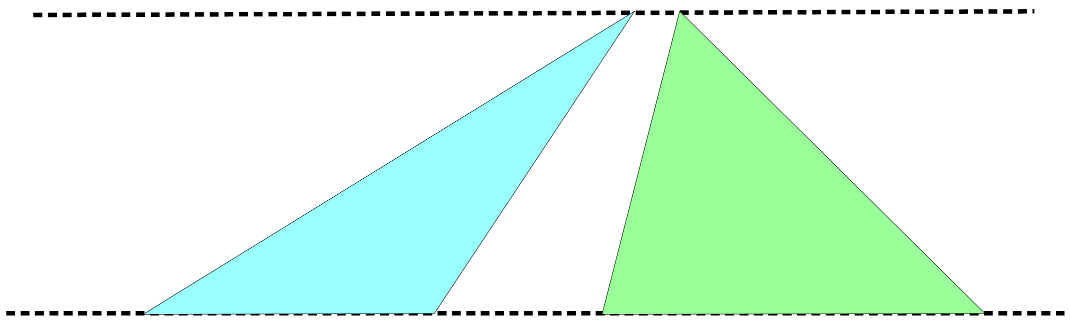
Demostración? *No se vale usar la fórmula del área (no la hemos demostrado) solo se vale usar que 2 triángulos con la misma base y la misma altura tienen las misma área.*

Proposición 6:2 *Si dos triángulos tienen la misma altura entonces sus áreas están en la misma proporción que sus bases.*



Demostración. Sean B y B´ las bases, h la altura y A y A´las áreas de los triángulos. Por definición B y B´ están en la misma proporción que A y A´si para todos m,n en **N**, $mB \leq nB' \Leftrightarrow mA \leq nA'$.

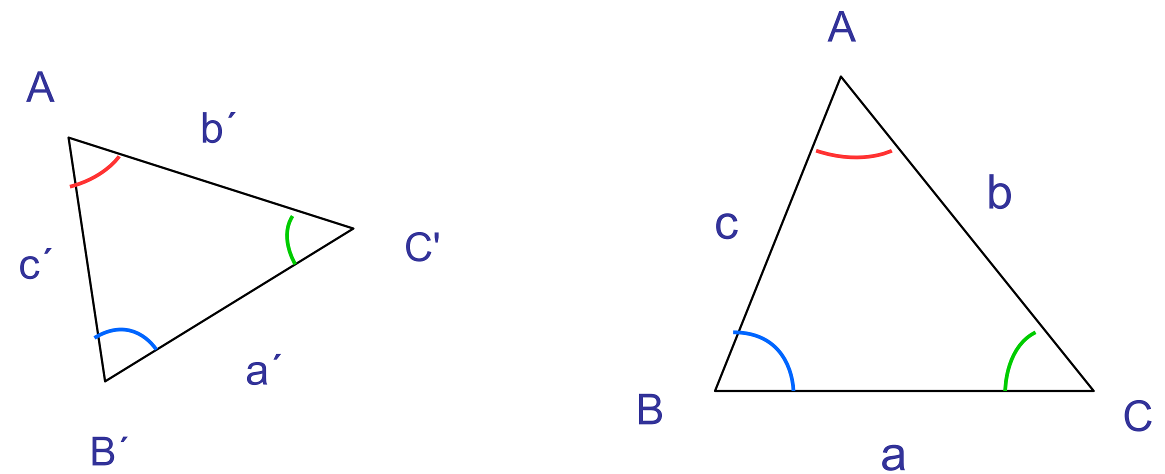
Proposición 6:2 *Si dos triángulos tienen la misma altura entonces sus áreas están en la misma proporción que sus bases.*



Demostración. Sean B y B´ las bases, h la altura y A y A´las áreas de los triángulos. Por definición B y B´ están en la misma proporción que A y A´si para todos m,n en **N**, $mB \le nB´ \Leftrightarrow mA \le nA´$.

Si $mB \le nB´$ entonces el área de un triángulo de base mB es menor o igual que el área de un triángulo de base nB´. Pero el área de un triángulo de base mB es m veces el área de un triángulo de base B y el área de un triángulo de base nB´ es n veces el área de un triángulo de base B´, así que $mA \le nA´$. La otra desigualdad se demuestra de manera similar.

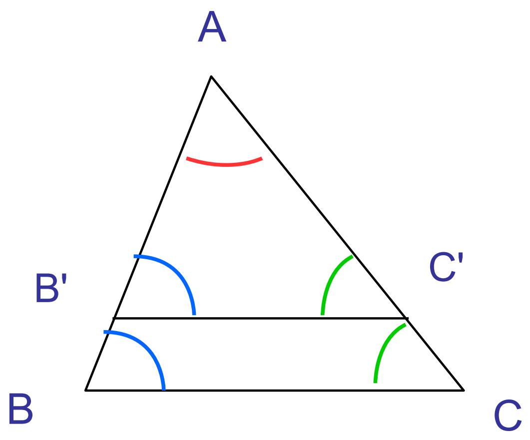
Proposición 6:4 *Si dos triángulos tienen ángulos iguales, entonces sus lados correspondientes son proporcionales.*



Tener lados proporcionales quiere decir que $a'/a = b'/b = c'/c$

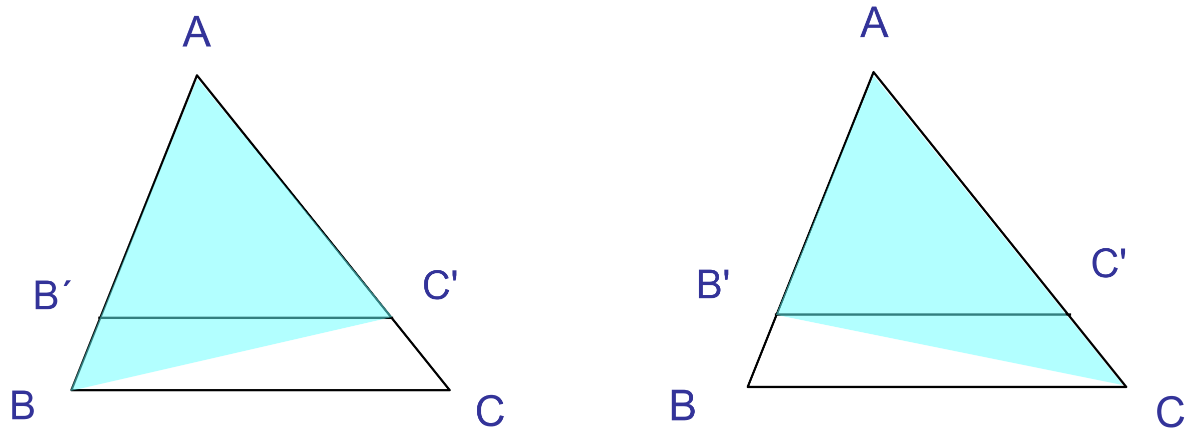
que equivale a $a/b = a'/b'$ $a/c = a'/c'$ $b/c = b'/c'$

Proposición 6:4 *Si dos triángulos tienen ángulos iguales, entonces sus lados correspondientes son proporcionales.*



Demostración. Si los triángulos ABC y AB'C' tienen los mismos ángulos, entonces podemos hacer que los ángulos en A y A' coincidan, de modo que B'C' será paralelo a BC.

Proposición 6:4 *Si dos triángulos tienen ángulos iguales, entonces sus lados correspondientes son proporcionales.*

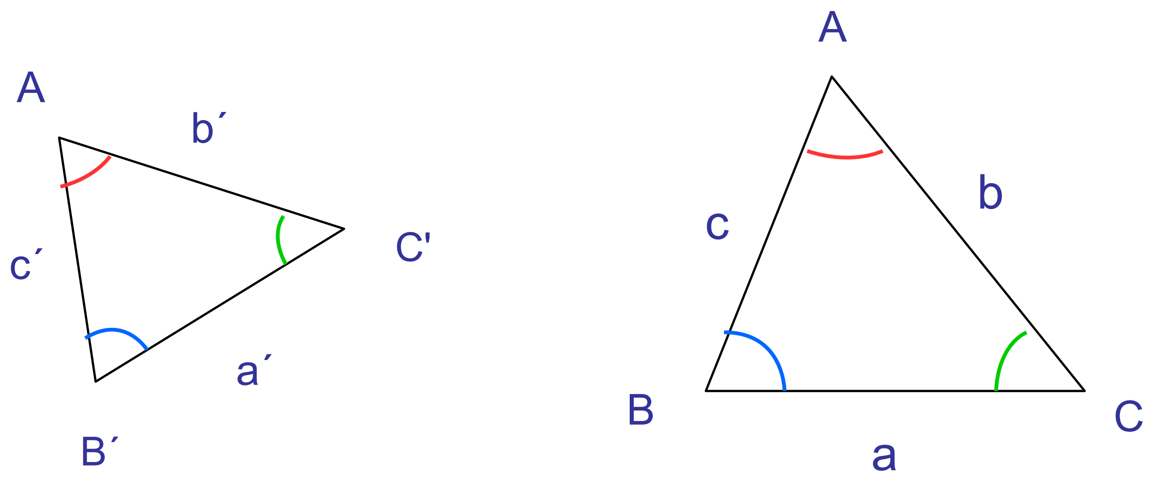


Demostración. Si los triángulos ABC y AB'C' tienen los mismos ángulos, entonces podemos hacer que los ángulos en A y A' coincidan, de modo que B'C' será paralelo a BC.

Los triángulos azules tienen áreas iguales, así que por **6:2** se tiene que

AB'/AB = Area AB'C'/Area ABC' = Area AC'B'/Area ACB' = AC'/AC •

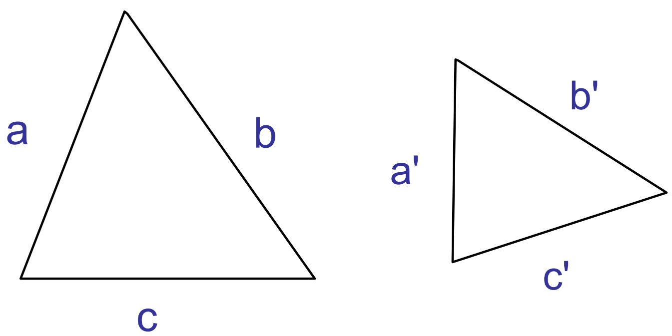
Proposición 6:5 *Si dos triángulos tienen lados proporcionales, entonces sus ángulos correspondientes son iguales.*



(es el recíproco de 6:4)

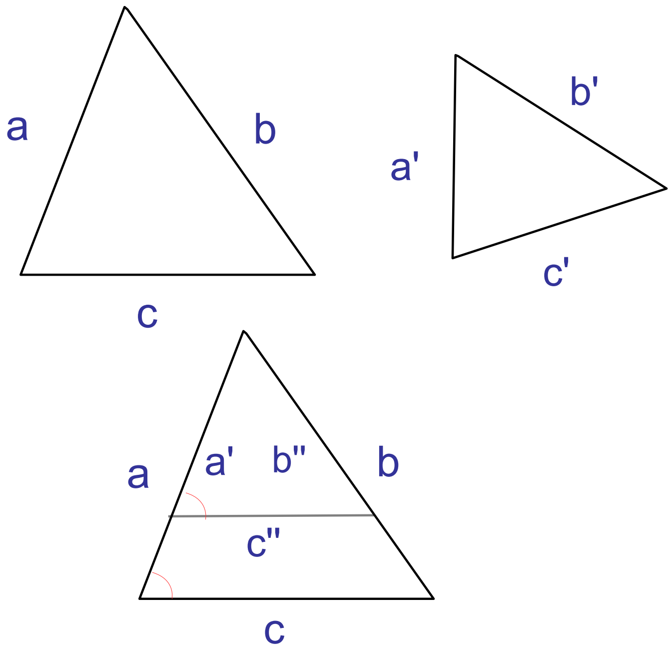
Proposición 6:5 Si dos triángulos tienen lados proporcionales, entonces sus ángulos correspondientes son iguales.

Demostración. Supongamos que los triángulos tienen lados de longitudes a, b, c y a', b', c' respectivamente y que a'/a= b'/b = c'/c



Proposición 6:5 Si dos triángulos tienen lados proporcionales, entonces sus ángulos correspondientes son iguales.

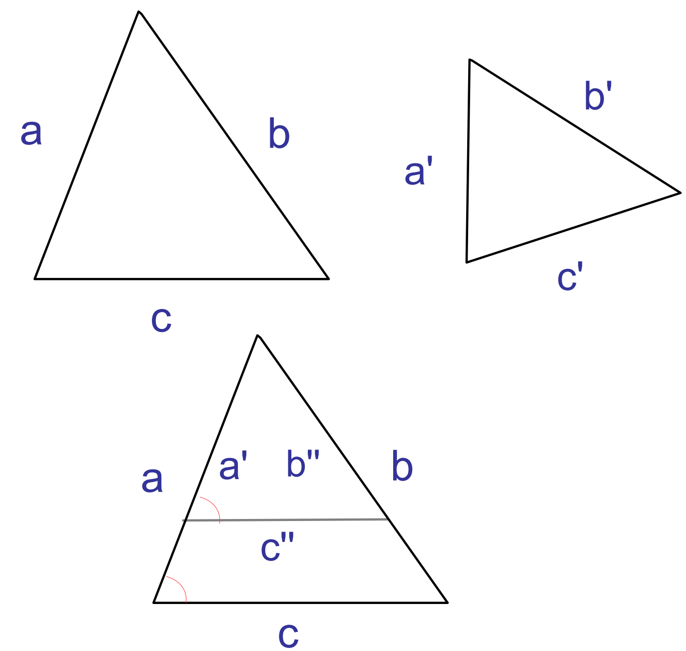
Demostración. Supongamos que los triángulos tienen lados de longitudes a, b, c y a', b', c' respectivamente y que a'/a= b'/b = c'/c



Sobre el lado de longitud a copiemos la longitud a' y donde termine tracemos una paralela al lado de longitud C. Obtenemos un triángulo de lados a', b'' y c''.

Proposición 6:5 *Si dos triángulos tienen lados proporcionales, entonces sus ángulos correspondientes son iguales.*

Demostración. Supongamos que los triángulos tienen lados de longitudes a, b, c y a', b', c' respectivamente y que a'/a= b'/b = c'/c

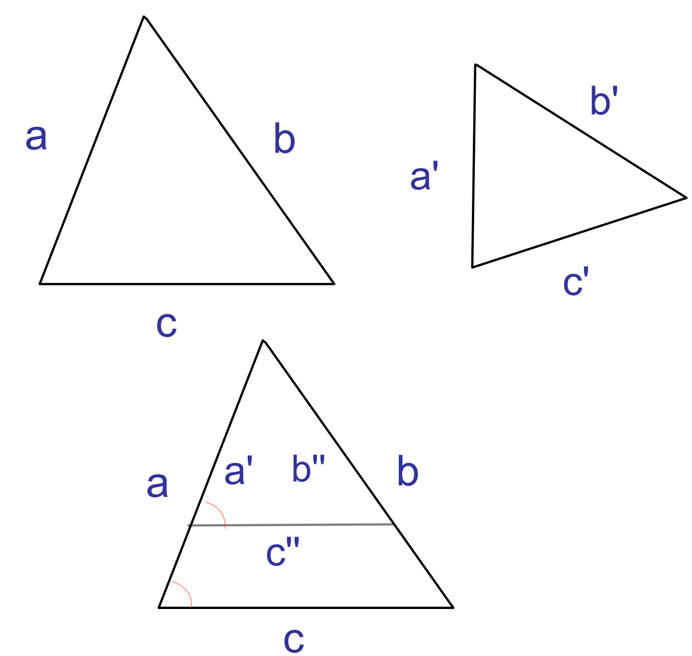


Sobre el lado de longitud a copiemos la longitud a' y donde termine tracemos una paralela al lado de longitud C. Obtenemos un triángulo de lados a', b'' y c''.

Este triángulo tiene ángulos iguales al de lados a,b c, así que a'/a = b''/b = c''/c.

Proposición 6:5 Si dos triángulos tienen lados proporcionales, entonces sus ángulos correspondientes son iguales.

Demostración. Supongamos que los triángulos tienen lados de longitudes a, b, c y a', b', c' respectivamente y que a'/a= b'/b = c'/c



Sobre el lado de longitud a copiemos la longitud a' y donde termine tracemos una paralela al lado de longitud C. Obtenemos un triángulo de lados a', b'' y c''.

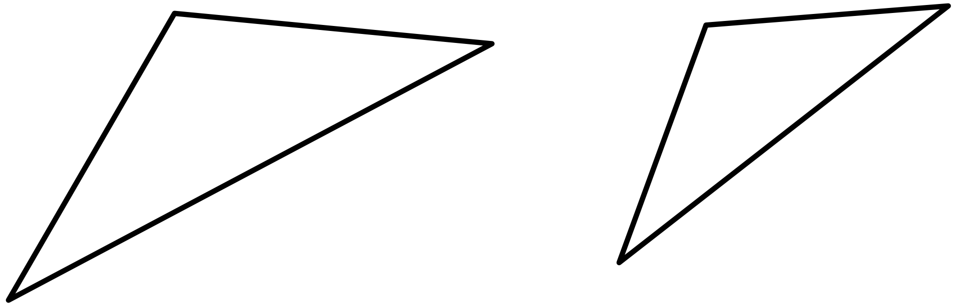
Este triángulo tiene ángulos iguales al de lados a,b c, así que a'/a = b''/b = c''/c.

Como ademas   a'/a= b'/b = c'/c entonces a´=a´, b'' = b' y   c'' = c' así que por LLL los triángulos con lados a', b', c' y a', b'', c'' tienen ángulos iguales. •

Decimos que dos figuras son **semejantes** si tienen lados proporcionales y ángulos iguales.

Decimos que dos figuras son **semejantes** si tienen lados proporcionales y ángulos iguales.

Las proposiciones 6.3 y 6.4 dicen que para que dos triángulos sean semejantes basta con que se cumpla una de las condiciones para que se cumpla la otra.



Decimos que dos figuras son **semejantes** si tienen lados proporcionales y ángulos iguales.

Las proposiciones 6.3 y 6.4 dicen que para los triángulos basta con que se cumpla una de las condiciones para que se cumpla la otra.

¿Será cierto esto para otros polígonos?

Decimos que dos figuras son **semejantes** si tienen lados proporcionales y ángulos iguales.

Las proposiciones 6.3 y 6.4 dicen que para los triángulos basta con que se cumpla una de las condiciones para que se cumpla la otra.

Lados proporcionales

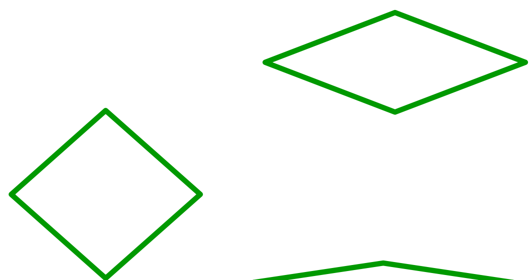
pero ángulos distintos

Angulos iguales

lados no proporcionales

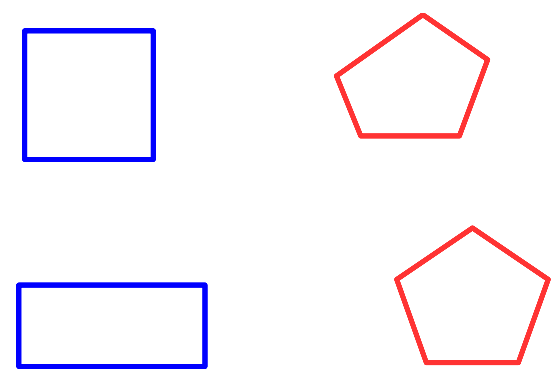
Decimos que dos figuras son **semejantes** si tienen lados proporcionales y ángulos iguales.

Las proposiciones 6.3 y 6.4 dicen que para los triángulos basta con que se cumpla una de las condiciones para que se cumpla la otra.



Lados proporcionales

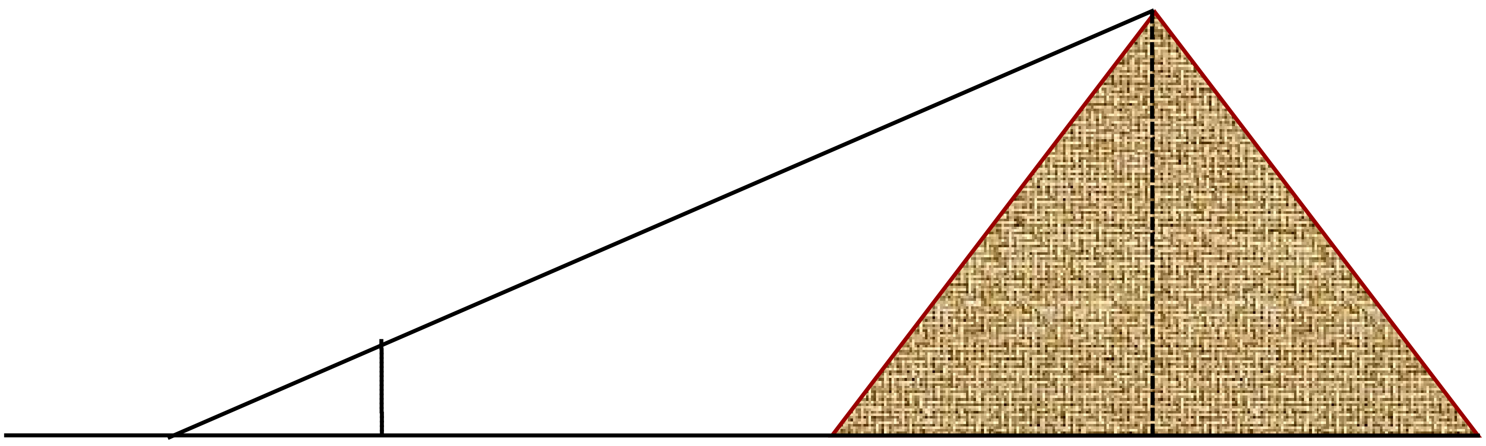
pero ángulos distintos



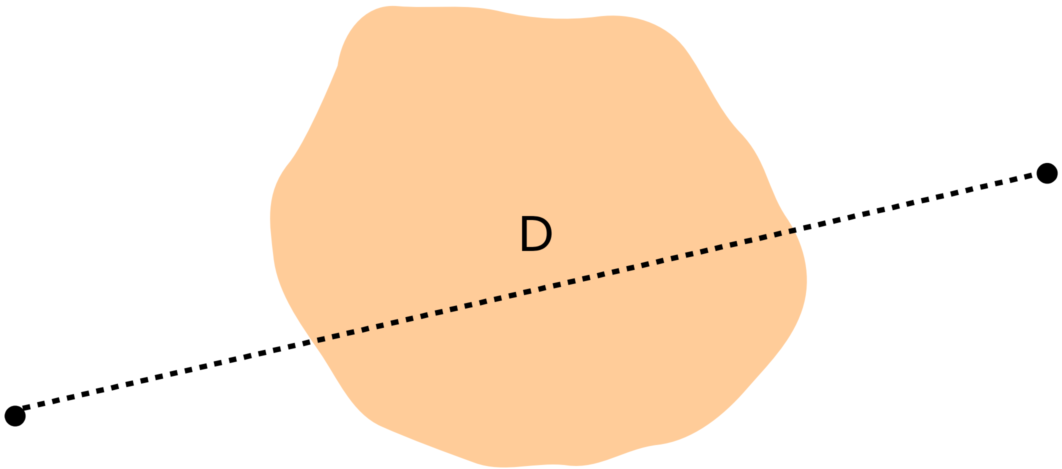
Angulos iguales

lados no proporcionales

En el siglo VI AC, Thales uso proporciones para calcular la altura de las pirámides de Egipto.

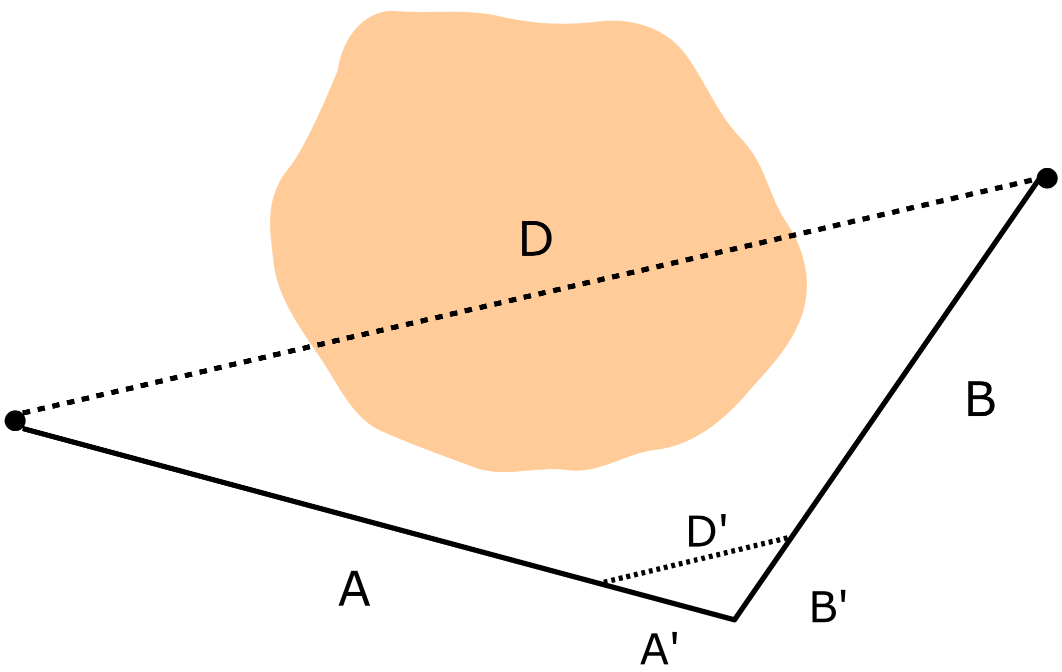


Los teoremas de de semejanza de triángulos han tenido muchas aplicaciones practicas.



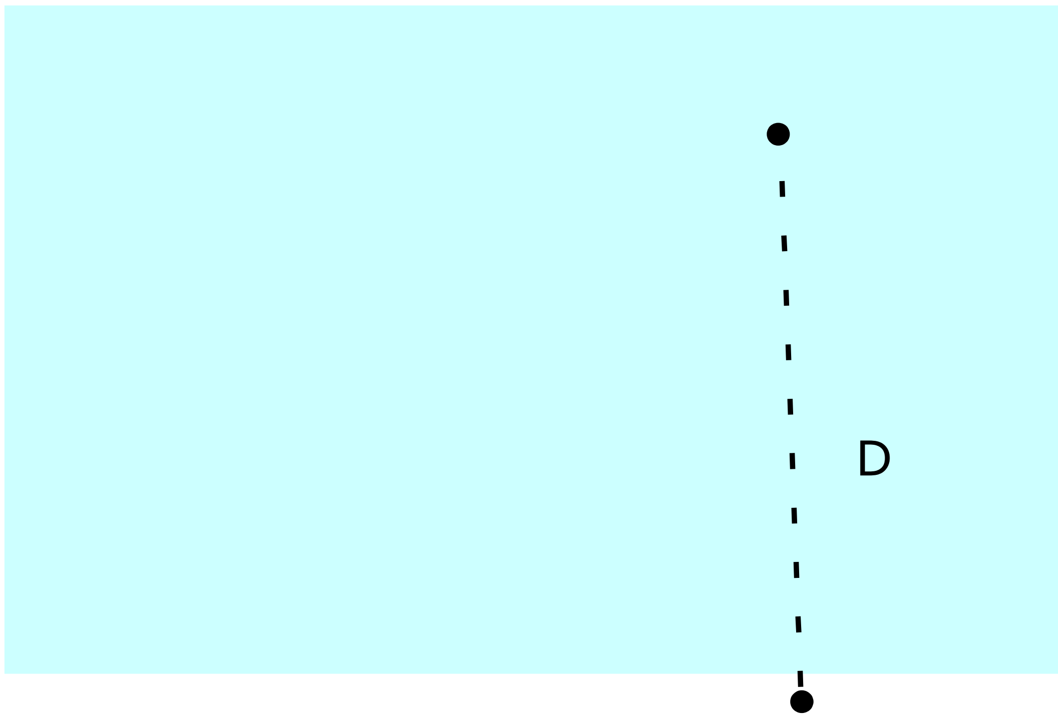
Ejemplo 1. Calcular la distancia entre dos puntos si hay un obstáculo entre ellos (como una montaña)

Los teoremas de de semejanza de triángulos han tenido muchas aplicaciones practicas.



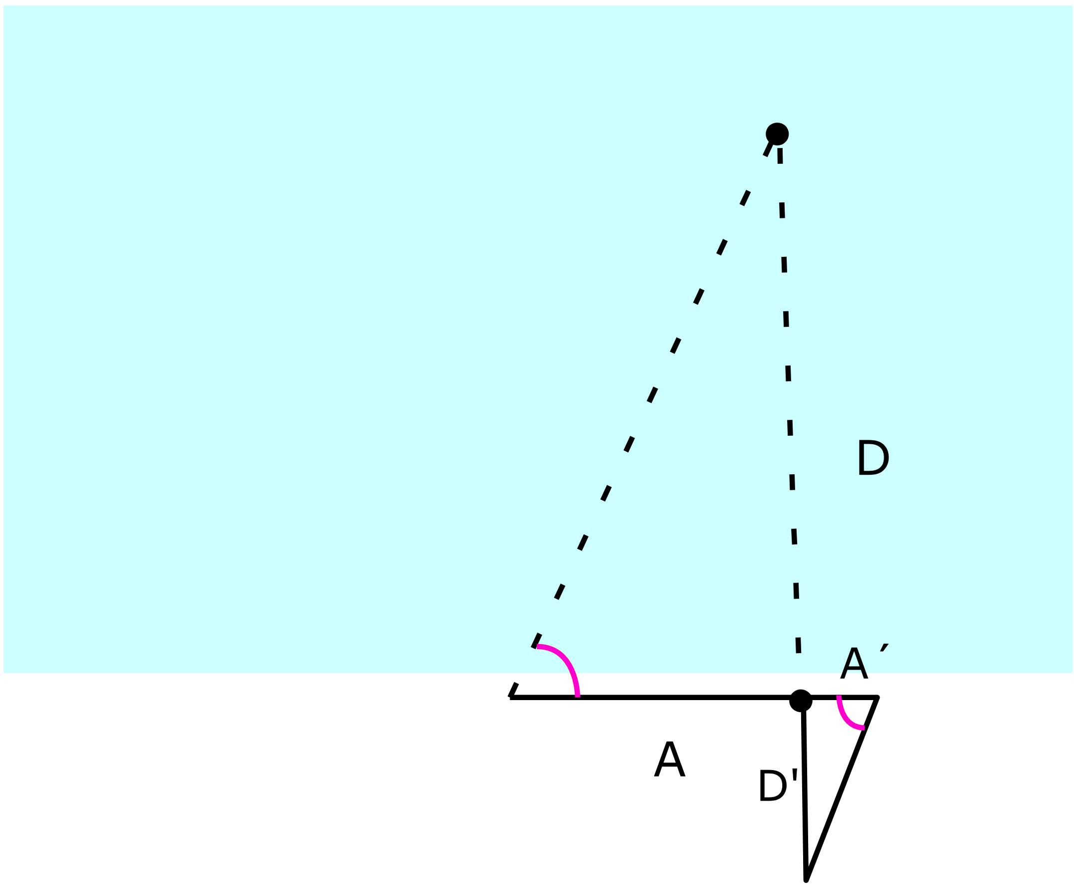
Ejemplo 1. Calcular la distancia entre dos puntos si hay un obstáculo entre ellos (como una montaña)

Los teoremas de de semejanza de triángulos han tenido muchas aplicaciones practicas.



Ejemplo 2. Calcular la distancia de un punto a otro punto inaccesible (como la distancia a un barco desde la playa)

Los teoremas de de semejanza de triángulos han tenido muchas aplicaciones practicas.



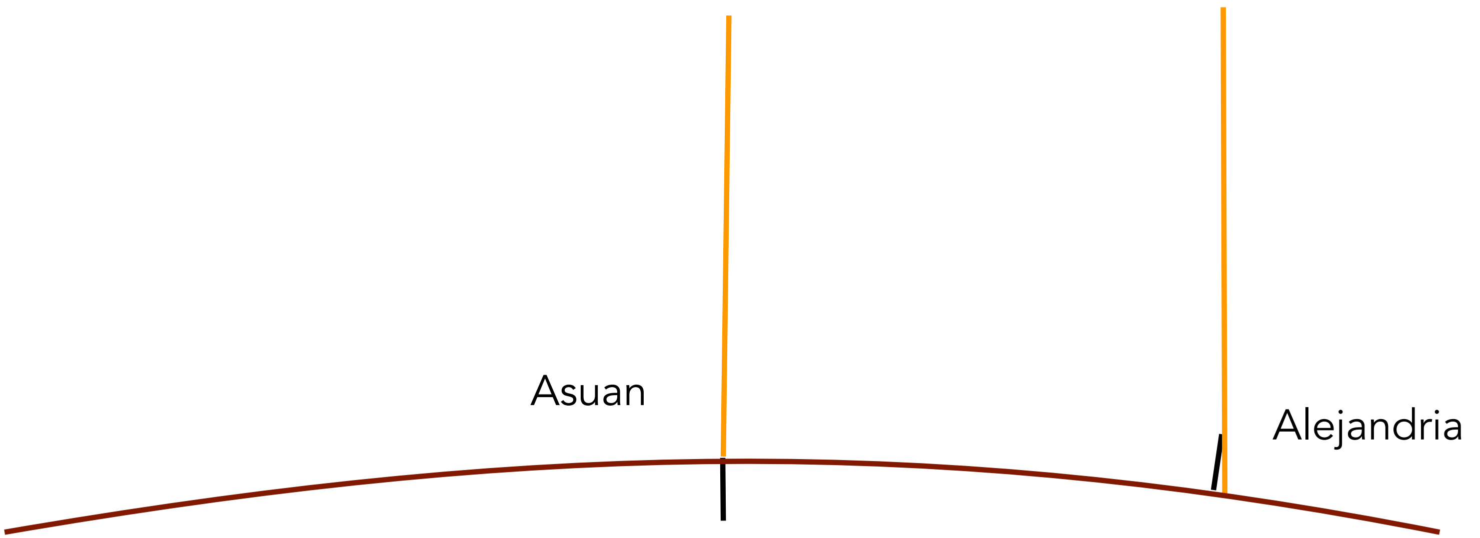
Ejemplo 2. Calcular la distancia de un punto a otro punto inaccesible (como la distancia a un barco desde la playa)

En el siglo III AC Eratostenes calculó por primera vez la circunferencia de la tierra usando proporciones.

En el siglo III AC Eratóstenes calculó por primera vez la circunferencia de la tierra usando proporciones.

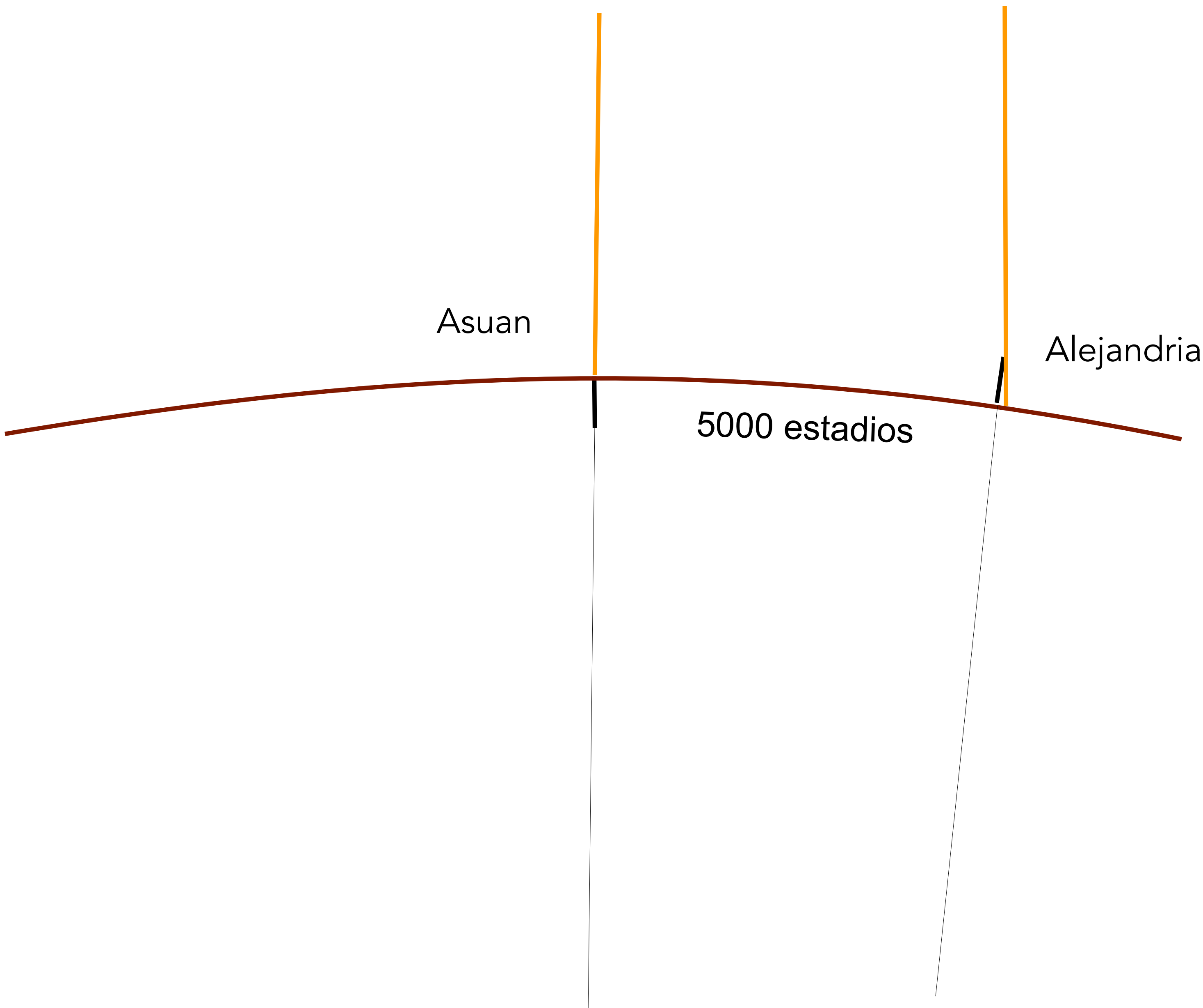
Se enteró que un día al año, al mediodía, los rayos del sol llegaban al fondo de un pozo profundo en Asuán. A esa misma hora en Alejandría los rayos no llegaban verticalmente, sino que formaban un ángulo de 7° 1/5 con una columna vertical.

En el siglo III AC Eratostenes calculó por primera vez la circunferencia de la tierra usando proporciones.



Sabia que el Sol estaba muy lejos, por lo que sus rayos debían llegar casi paralelos a la Tierra. Averiguó la distancia de Aswan y Alejandría y con eso pudo calcular la circunferencia de la tierra.

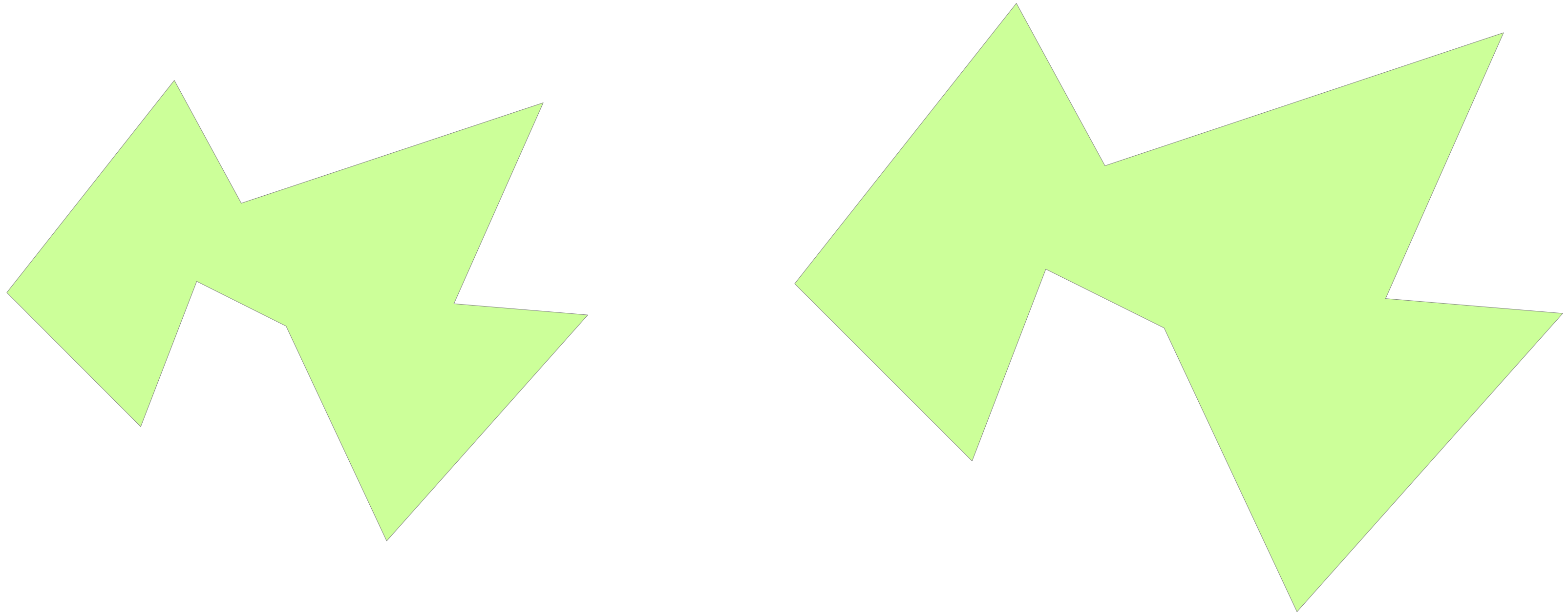
En el siglo III AC Eratostenes calculó por primera vez la circunferencia de la tierra usando proporciones.



Areas y Perímetros

En el plano euclidiano existen polígonos semejantes de todos los tamaños.

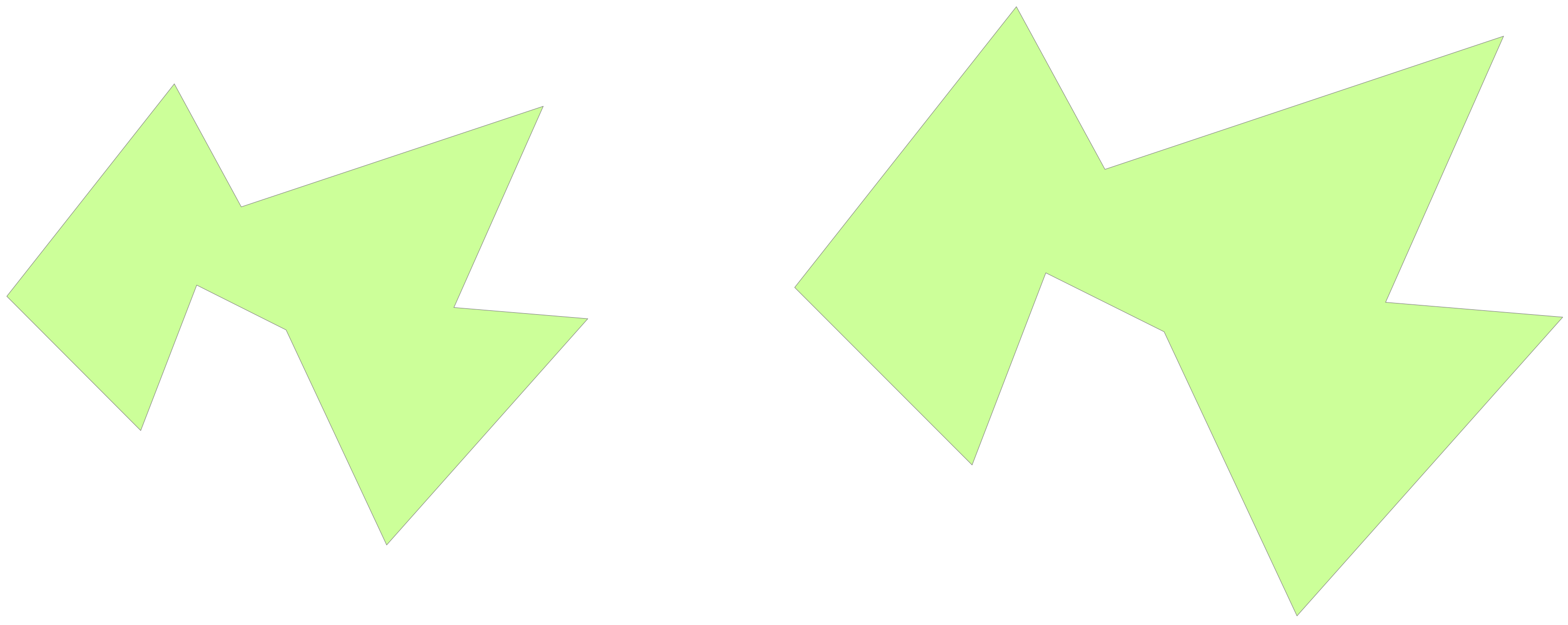
Al cambiar el tamaño de los polígonos sin cambiar su forma ¿como cambiarán sus perímetros y sus áreas?



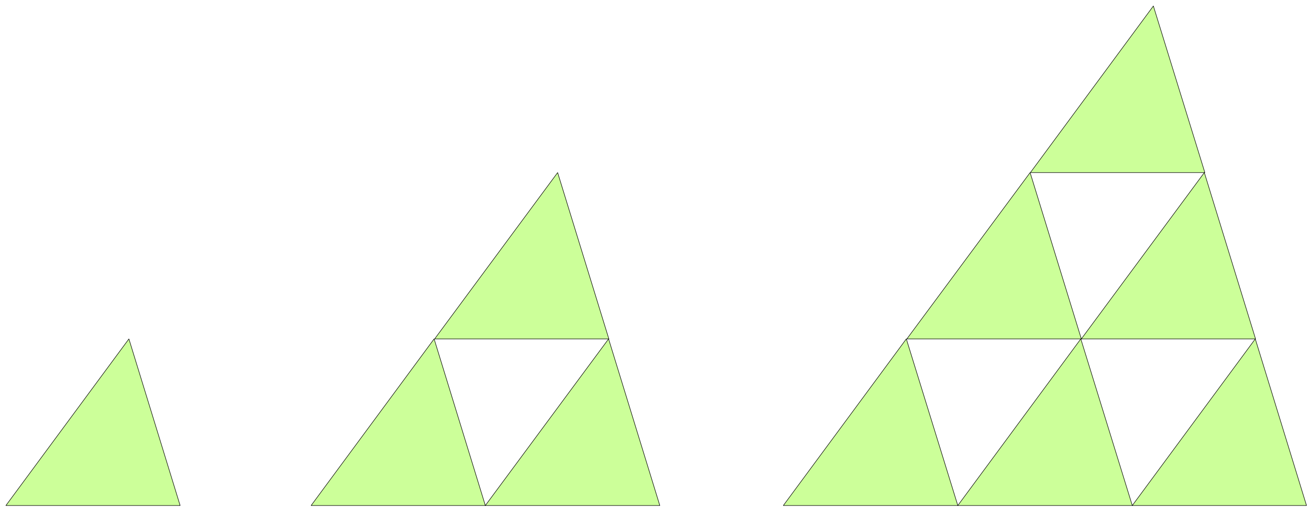
En el plano euclidiano existen polígonos semejantes de todos los tamaños.

Los perímetros de los polígonos cambian proporcionalmente a la escala, ya que cada lado lo hace.

Veamos que las áreas de los polígonos cambian proporcionalmente al *cuadrado* de la escala.



Para ver que el área de un triángulo cambia proporcionalmente a la escala, observar que un triángulo n veces mas grande puede dividirse en n^2 triángulos congruentes al original:

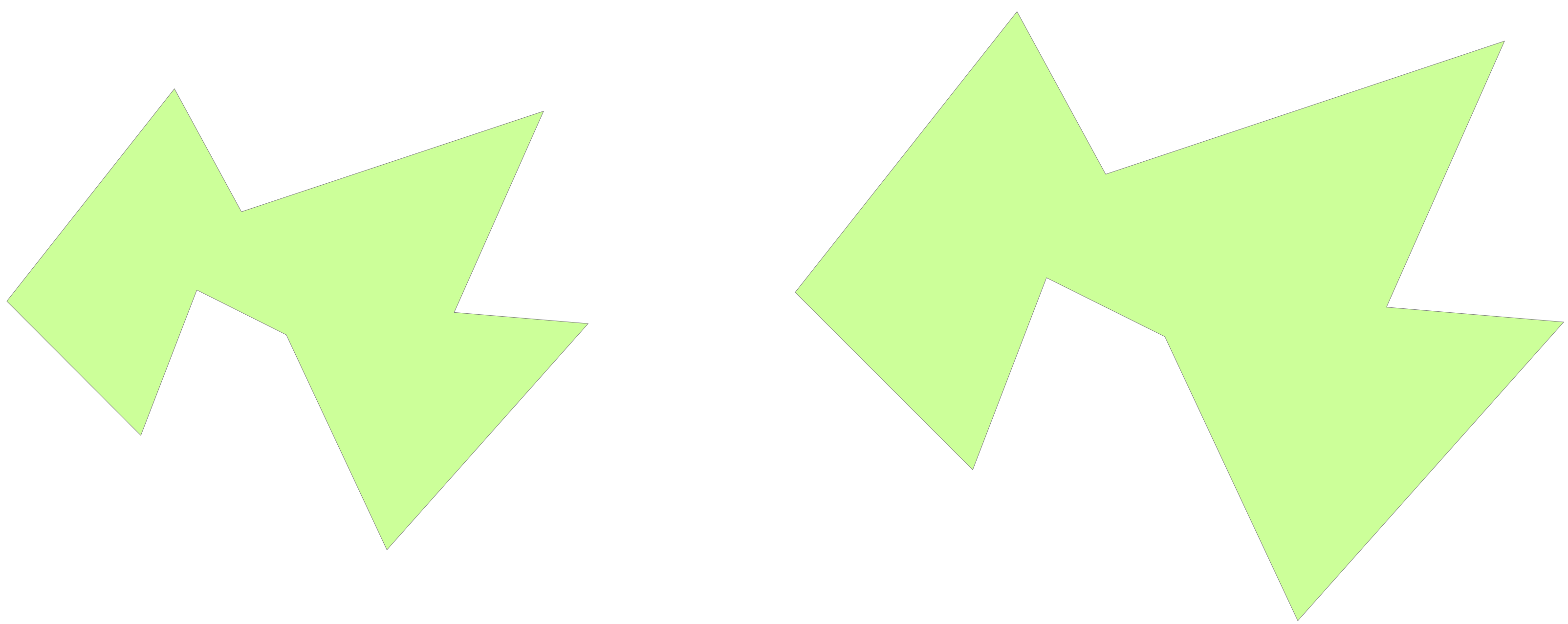


Por la misma razón, cada triángulo puede dividirse en m^2 triángulos congruentes que son m veces mas chicos.

Así que un triángulo n/m veces mas grande se puede dividir en n^2 triángulos de área m^2 mas chica que el original, así que su área es n^2/m^2 veces el área del triángulo original.

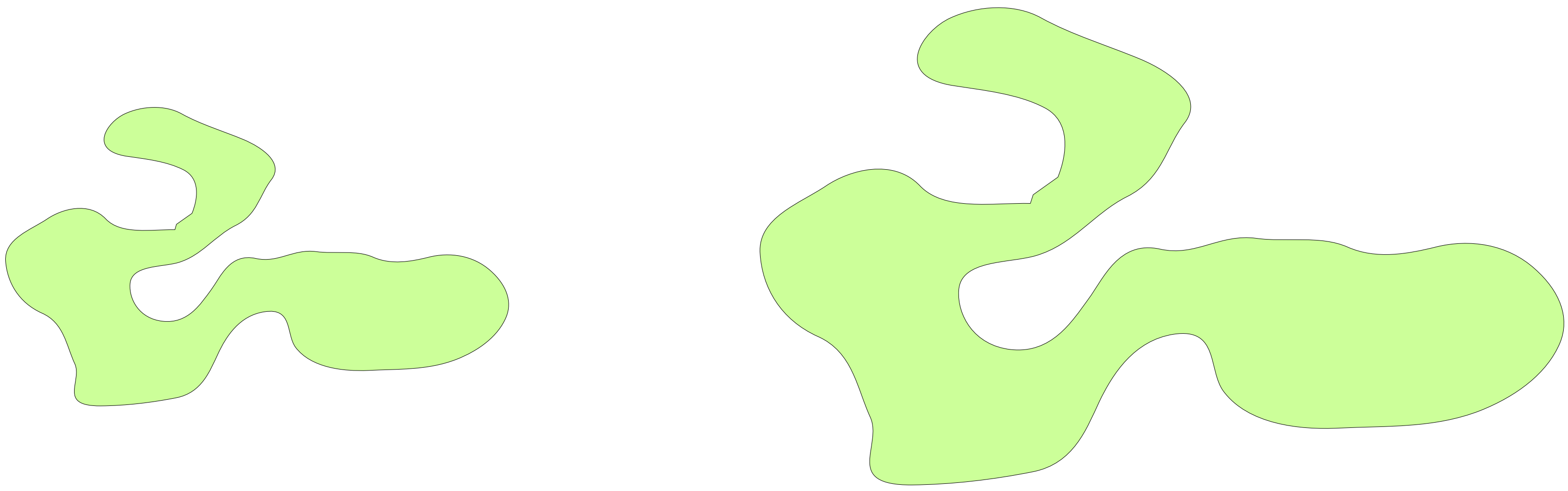
Si la escala e no es una fracción n/m, podemos irla aproximando por fracciones. Como las áreas resultantes son proporcionales el cuadrado de las fracciones, el área correspondiente a e también es proporcional al cuadrado de e.

Ya sabiendo que las áreas de los triángulos son proporcionales al cuadrado de la escala, podemos ver que lo mismo sucede para todos los polígonos, ya que cada polígono se puede dividir en triángulos y el área del polígono es la suma de sus áreas



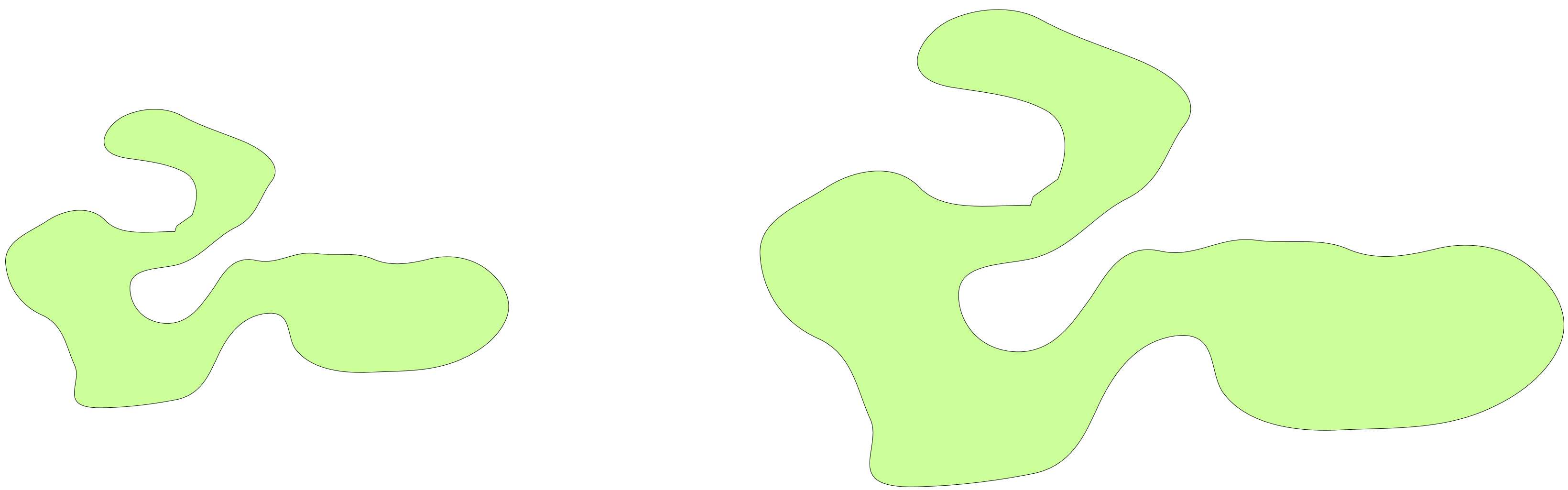
¿Y que pasará con figuras que no son polígonos?

¿será cierto que al escalarlas sus perímetros cambiarán en proporción a la escala y sus áreas cambiarán en proporción al cuadrado de la escala?



¿Y que pasará con figuras que no son polígonos?

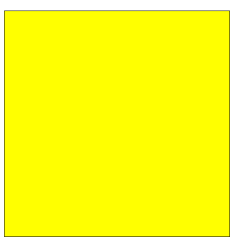
¿será cierto que al escalarlas sus perímetros cambiarán en proporción a la escala y sus áreas cambiarán en proporción al cuadrado de la escala?



Esto es cierto si las figuras pueden aproximarse por polígonos, de modo que los perímetros y las áreas de los polígonos se aproximen al área de la figura.

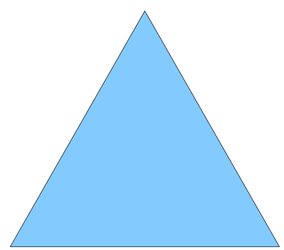
Ejemplo.

Como al cambiar el tamaño de los polígonos sus perímetros cambian proporcionalmente a la escala, mientras que sus áreas cambian proporcionalmente al cuadrado de la escala, entonces para los polígonos regulares el perímetro debe ser un múltiplo del lado y el área debe ser un múltiplo del lado al cuadrado:



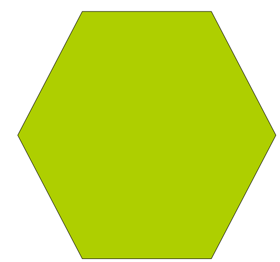
$P = 4\,L$

$A = L^2$



$P = 3\,L$

$A = ?$

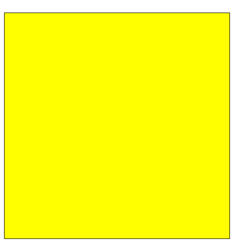


$P = 6\,L$

$A = ?$

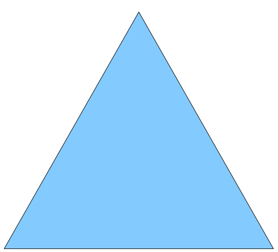
Ejemplo.

Como al cambiar el tamaño de los polígonos sus perímetros cambian proporcionalmente a la escala, mientras que sus áreas cambian proporcionalmente al cuadrado de la escala, entonces para los polígonos regulares el perímetro debe ser un múltiplo del lado y el área debe ser un múltiplo del lado al cuadrado:



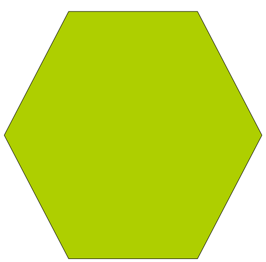
$P = 4\,L$

$A = L^2$



$P = 3\,L$

$A = {}^{\sqrt{3}}/_{4}\, L^2$



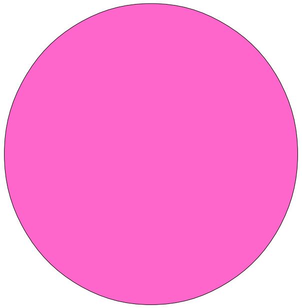
$P = 6\,L$

$A = {}^{3\sqrt{3}}/_{2}\, L^2$

En el siglo IV AC Eudoxo (quien dio la definición de proporcionalidad para las magnitudes inconmensurables) demostró que la circunferencia del círculo es proporcional al radio y el área del círculo es proporcional al cuadrado del radio.

En el siglo III AC, Arquímedes calculó por primera vez el área exacta del círculo.

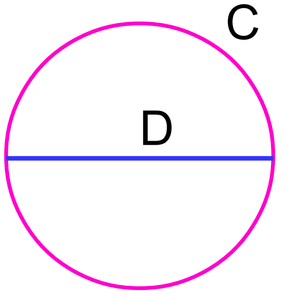
Como un círculo se puede aproximar con polígonos, su perímetro (la circunferencia) debe ser proporcional al radio y el área debe ser proporcional al cuadrado del radio.



$C = \; ? \; R$

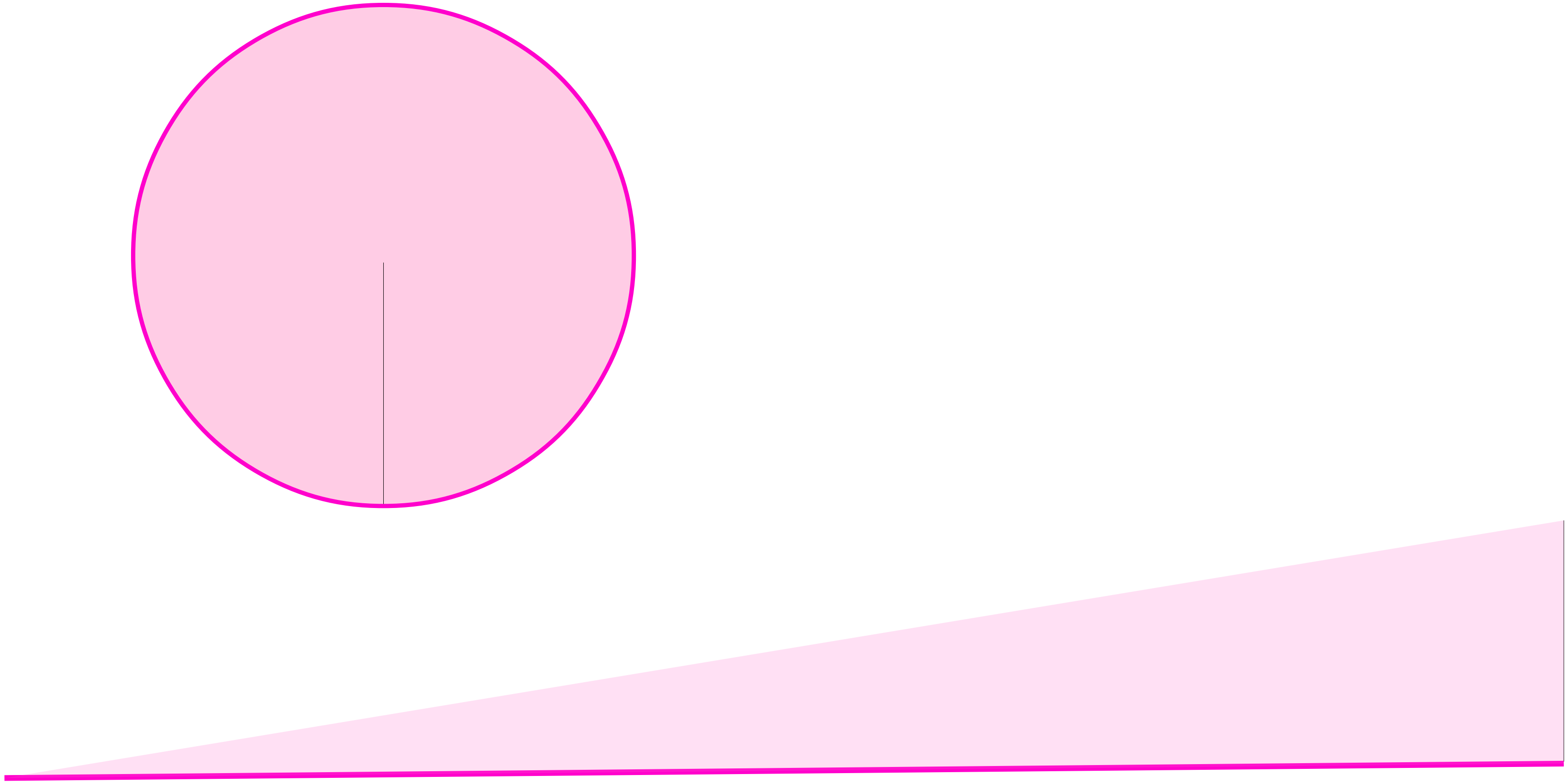
$A = \; ? \; R^2$

π es, por definición, la proporción C/D entre la circunferencia y el diámetro de un círculo:



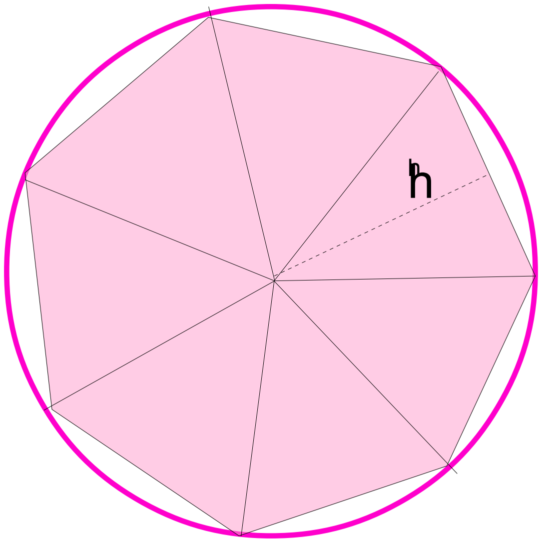
$$C = \pi D$$

Teorema (Arquímedes). *El área de un círculo es igual a la de un triángulo cuya base es la circunferencia y cuya altura es el radio del círculo.*



Teorema (Arquímedes). *El área de un círculo es igual a la de un triángulo cuya base es la circunferencia y cuya altura es el radio del círculo.*

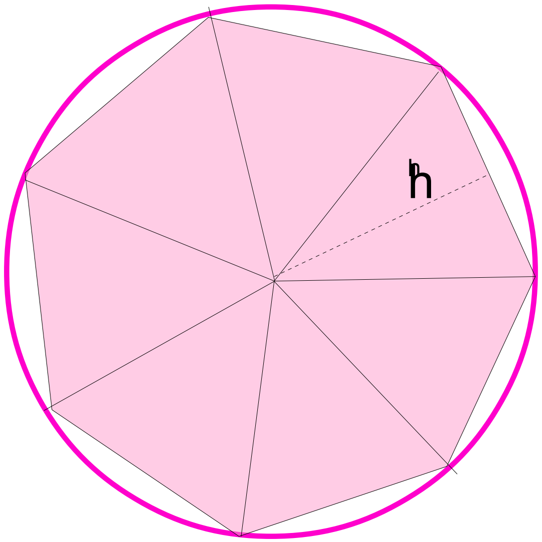
Demostración. Consideremos los polígonos regulares inscritos en el círculo:



Teorema (Arquímedes). *El área de un círculo es igual a la de un triángulo cuya base es la circunferencia y cuya altura es el radio del círculo.*

Demostración. Consideremos los polígonos regulares inscritos en el círculo:

El área del polígono es la suma de las áreas de los triángulos. Como el área de un triángulo es igual a la altura multiplicada por la base y dividida entre 2, el área del polígono es la altura h multiplicada por el perímetro (que es la suma de las bases) y dividida entre 2.

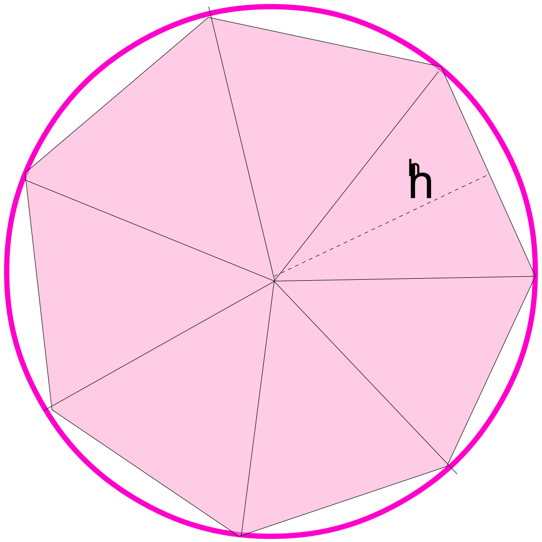


$A = h \cdot P/2$ donde P es el perímetro del polígono

Teorema (Arquímedes). *El área de un círculo es igual a la de un triángulo cuya base es la circunferencia y cuya altura es el radio del círculo.*

Demostración. Consideremos los polígonos regulares inscritos en el círculo:

El área del polígono es la suma de las áreas de los triángulos. Como el área de un triángulo es igual a la altura multiplicada por la base y dividida entre 2, el área del polígono es la altura h multiplicada por el perímetro (que es la suma de las bases) y dividida entre 2.



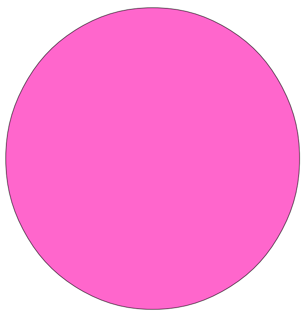
$A = h \cdot P / 2$ donde P es el perímetro del polígono

Si tomamos polígonos con mas y mas lados, sus áreas se aproximarán cada vez mas al área del círculo y sus perímetros se aproximarán a la circunferencia, mientras que h se aproximará al radio. En el límite, obtenemos que el área del círculo es el radio multiplicado por el perímetro y dividido entre 2: $A = R \cdot C / 2$ •

Las fórmulas de la circunferencia y el área del círculo salen de la definición de π y del teorema de Arquímedes

$$C = \pi D = 2\pi R$$

$$A = R \cdot C/2 = R \cdot \pi \cdot 2R/2 = \pi R^2$$



Los métodos de aproximación de Eudoxo y de Arquímedes son muy convincentes, pero si pensamos con cuidado surge una duda:

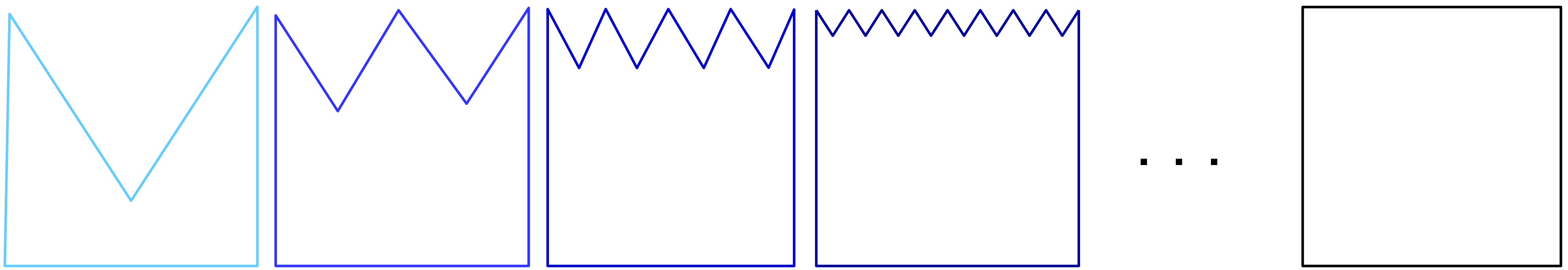
¿Será cierto que si nos aproximamos a una figura F con otras figuras entonces los perímetros se aproximan al perímetro de F y que las áreas se aproximan al área de F?

Los métodos de aproximación de Eudoxo y de Arquímedes son muy convincentes, pero si pensamos con cuidado surge una duda:

¿Será cierto que si nos aproximamos a una figura F con otras figuras entonces los perímetros se aproximan al perímetro de F y que las áreas se aproximan al área de F?

No necesariamente! Depende de como sea la aproximación.

Ejemplo:



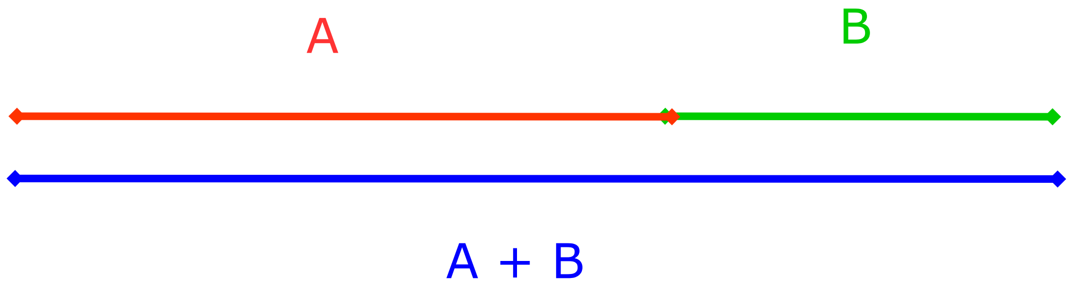
Todos estos polígonos tienen perímetro 5L pero se aproximan a un polígono de perímetro 4L (el cuadrado)

Aritmética y geometría

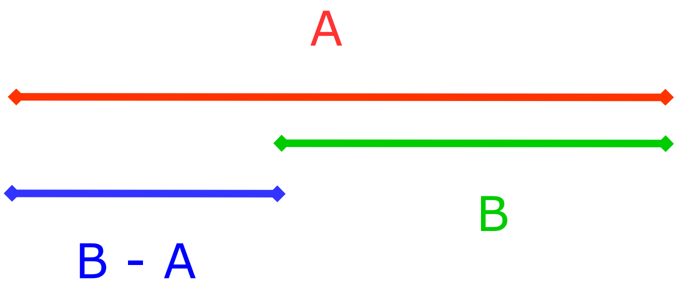
En *Los Elementos* las magnitudes y proporciones no se trataran con aritmética sino en términos puramente geométricos.

Las magnitudes pueden expresarse como longitudes:

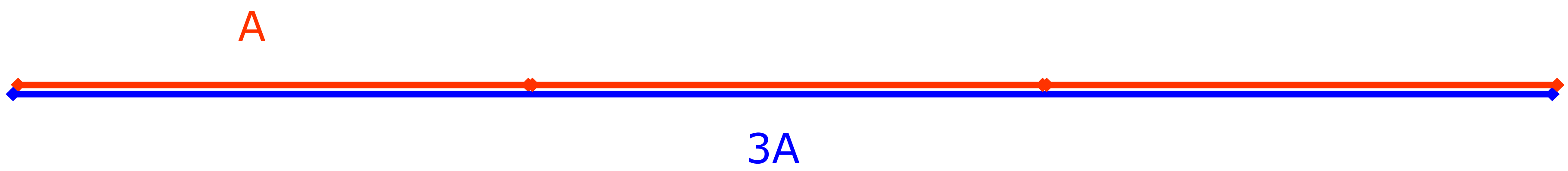
¿Como podemos sumar magnitudes?



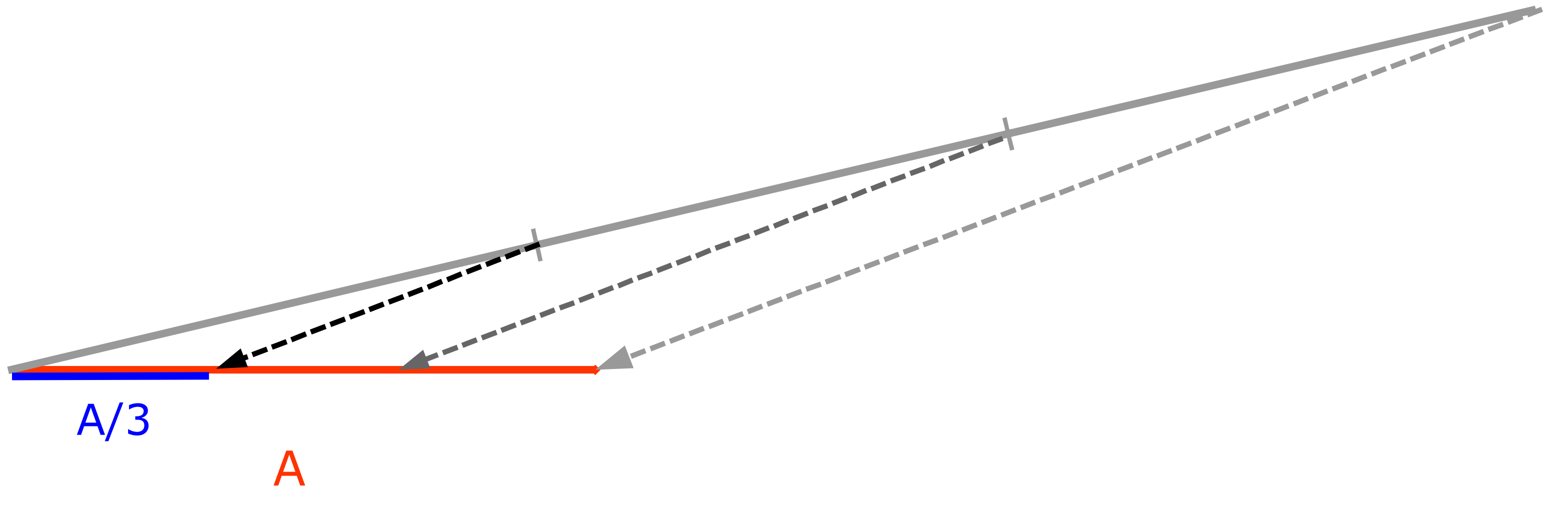
¿Y restarlas?



¿Cómo podemos multiplicar una magnitud por un número n?



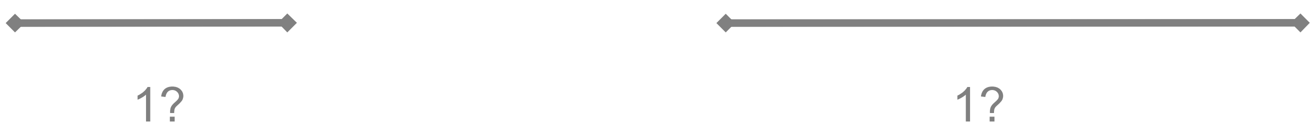
¿Y como podemos dividir una magnitud en n partes iguales?



¿Cómo podemos multiplicar geométricamente dos magnitudes (que pueden no ser enteros ni fracciones)?

¿Cómo podemos multiplicar geométricamente dos magnitudes (que pueden no ser enteros ni fracciones)?

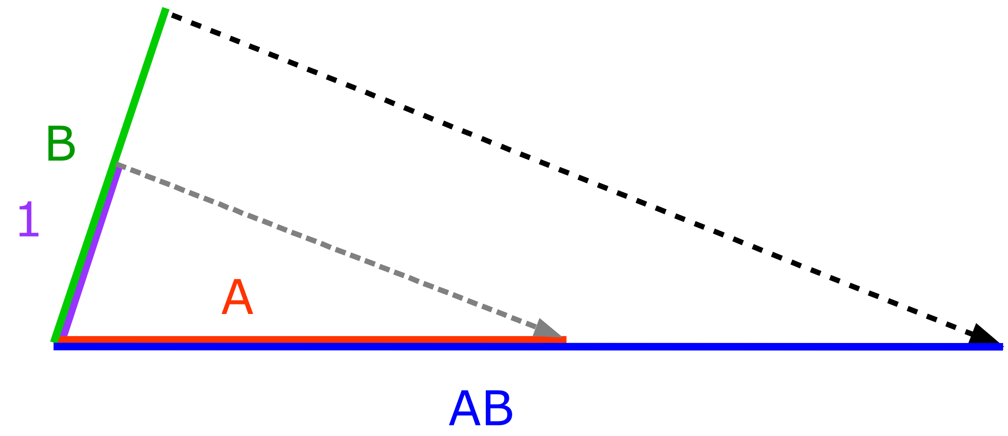
Observar que el resultado de la multiplicación depende del tamaño de la unidad, ya que si multiplicamos una magnitud por algo mayor que 1 debemos obtener una magnitud mayor, pero si multiplicamos por algo menor que 1 debemos obtener algo menor.



¿Cómo podemos multiplicar geométricamente dos magnitudes (que pueden no ser enteros ni fracciones)?

Si fijamos la unidad (la magnitud 1 que al multiplicarla por si misma no cambia) entonces AB es la magnitud que guarda con B la misma proporción que la magnitud A guarda con 1.

¿Cómo podemos multiplicar geométricamente dos magnitudes?



Dibujamos un triángulo con lados A y 1.

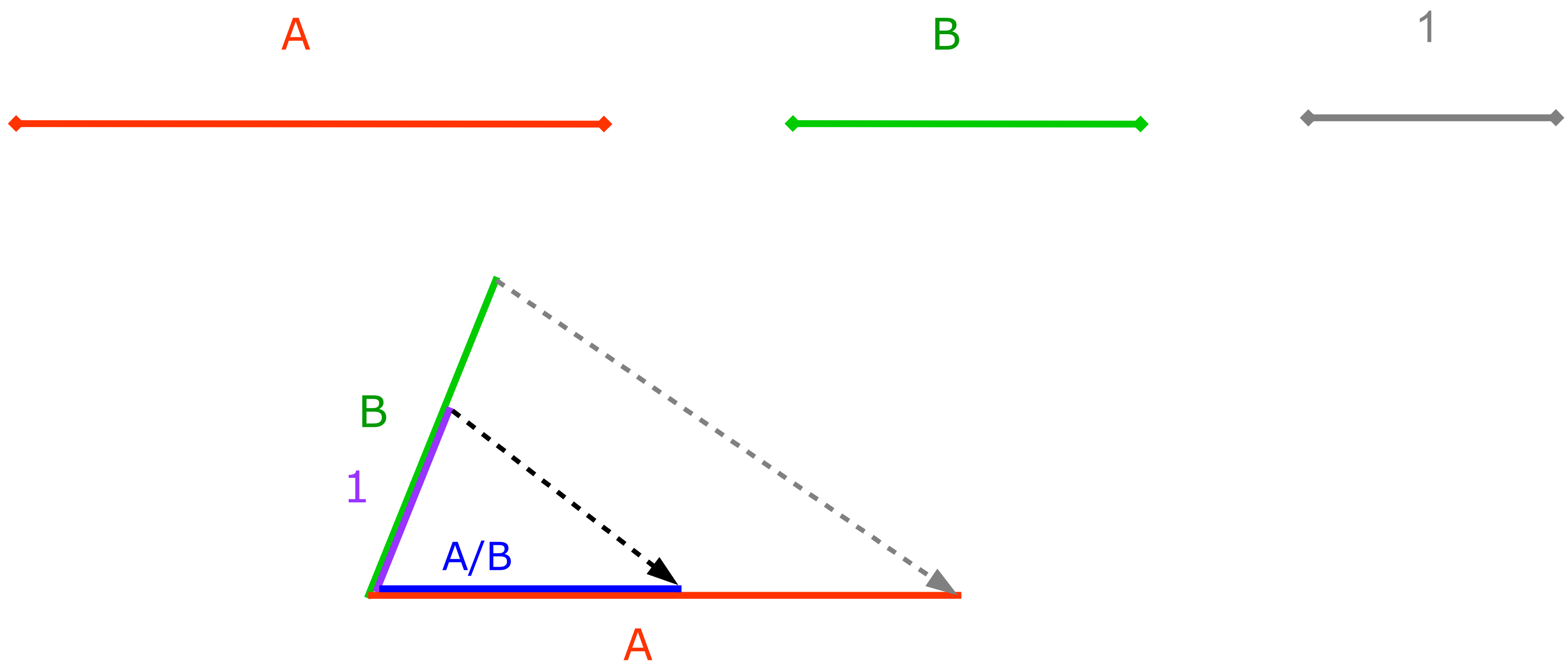
Dibujamos un triángulo semejante cuyo lado correspondiente a 1 tenga longitud B, entonces su lado correspondiente a A tendrá longitud AB.

¿Cómo podemos dividir geométricamente dos magnitudes?

¿Cómo podemos dividir geométricamente dos magnitudes?

Otra vez el resultado depende de la unidad

¿Cómo podemos dividir geométricamente dos magnitudes?



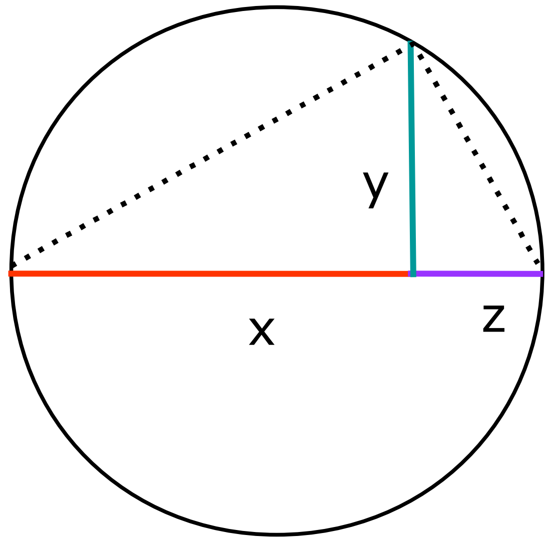
Dibujemos un triangulo con lados A y B

Dibujemos un triangulo semejante cuyo lado correspondiente a B tenga longitud 1, entonces su lado correspondiente a A tendrá longitud A/B.

¿Como se puede obtener la raíz cuadrada de una magnitud?

El tamaño de la raíz depende de la unidad

¿Como se puede obtener la raíz cuadrada de una magnitud?



Observar que los triángulos formados por el diámetro de un círculo y una línea perpendicular son semejantes, así que $x/y=y/z$ por lo tanto $xz=y^2$.

¿Como se puede obtener la raíz cuadrada de una magnitud?