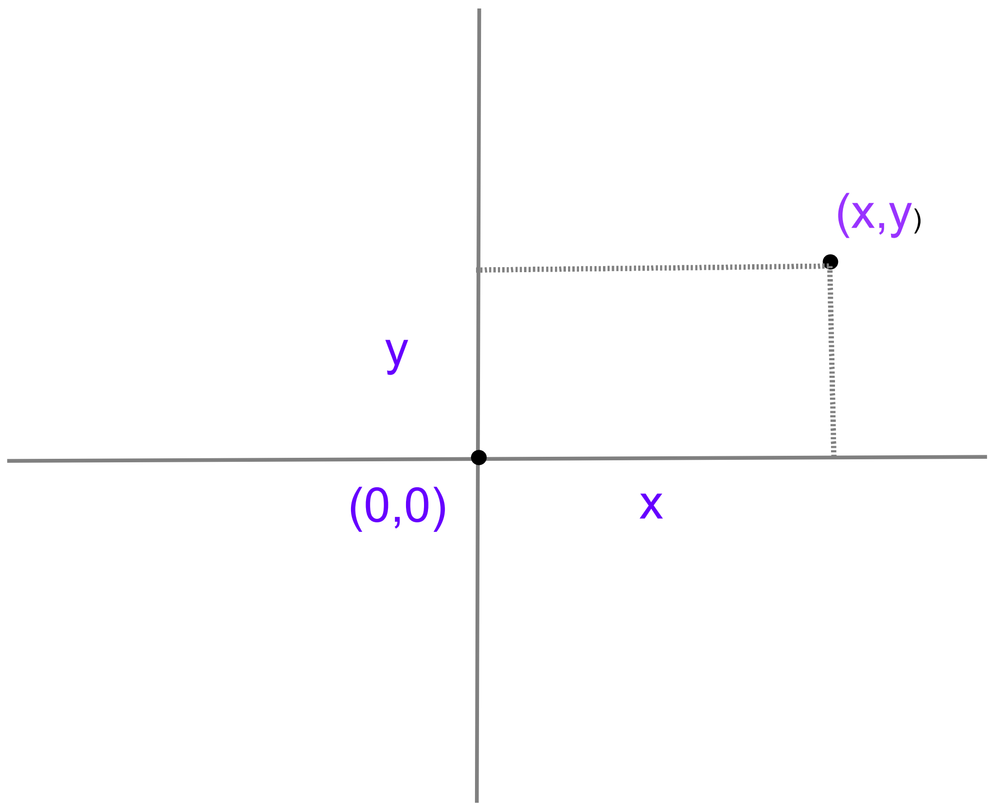
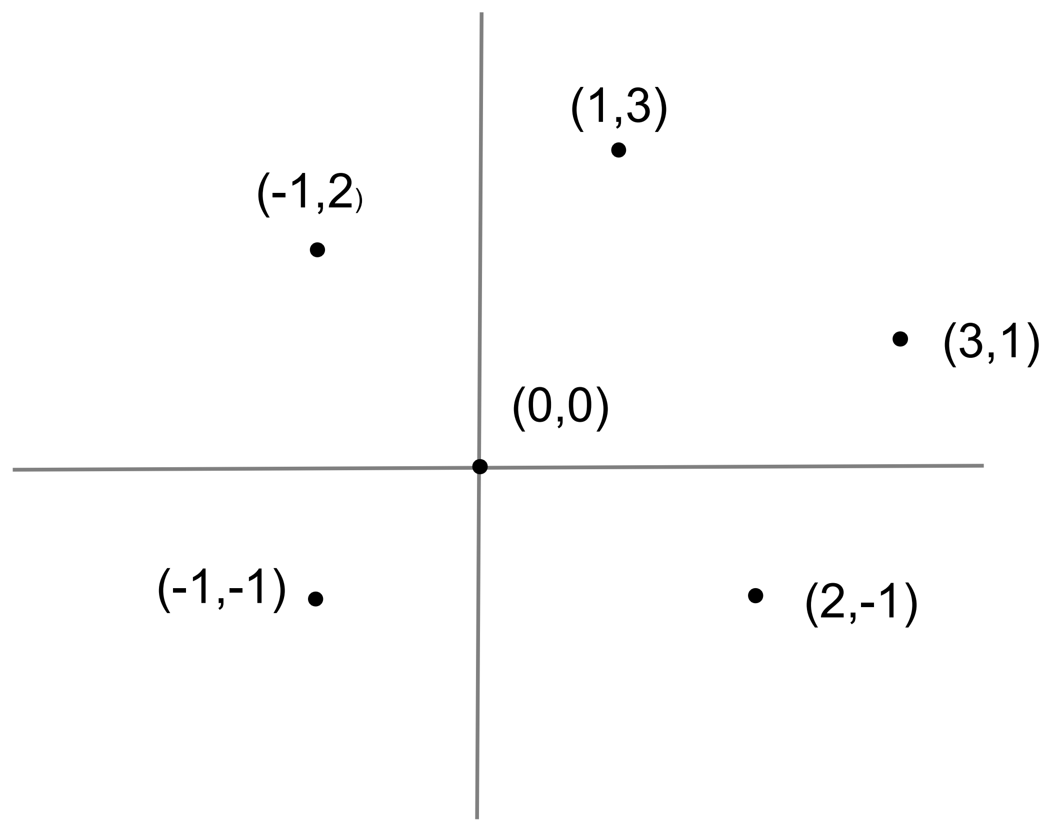
Coordenadas

Cada punto P del plano euclidiano puede identificarse con una pareja de números reales, que indican la distancia de P a dos rectas perpendiculares, esta distancia se considera negativa hacia un lado de cada eje.



Al punto con coordenadas (0,0) se le llama el *origen*.



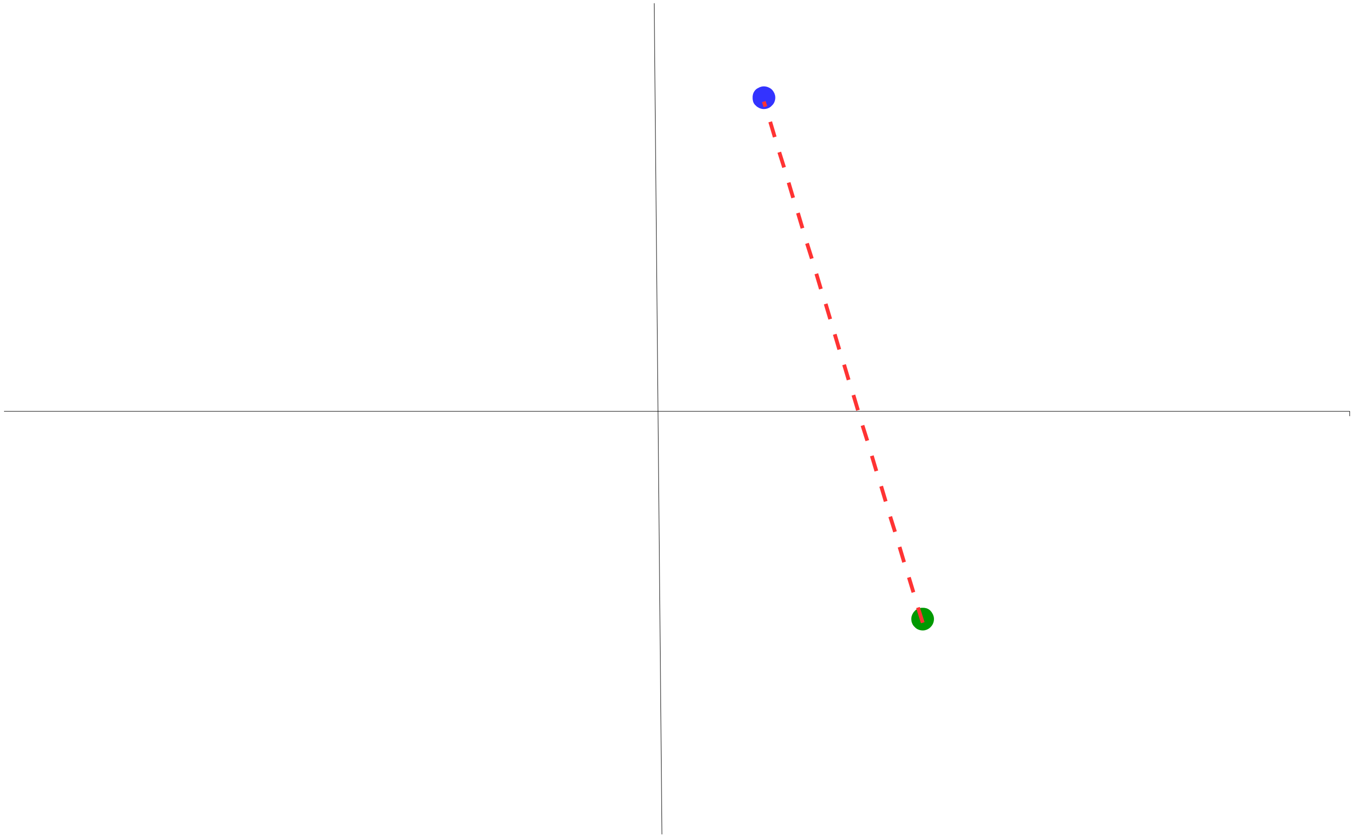
Esta identificación da una biyección entre los puntos del plano euclidiano y el conjunto de parejas de números reales
R^2 ={(x,y) / x,y T R} llamado el *plano cartesiano*.

Descartes y Fermat observaron que al darles coordenadas a los puntos muchos problemas geométricos podían transformarse en problemas algebraicos y viceversa.

Al estudio de la geometría usando coordenadas y álgebra se le conoce como *geometría analítica*.

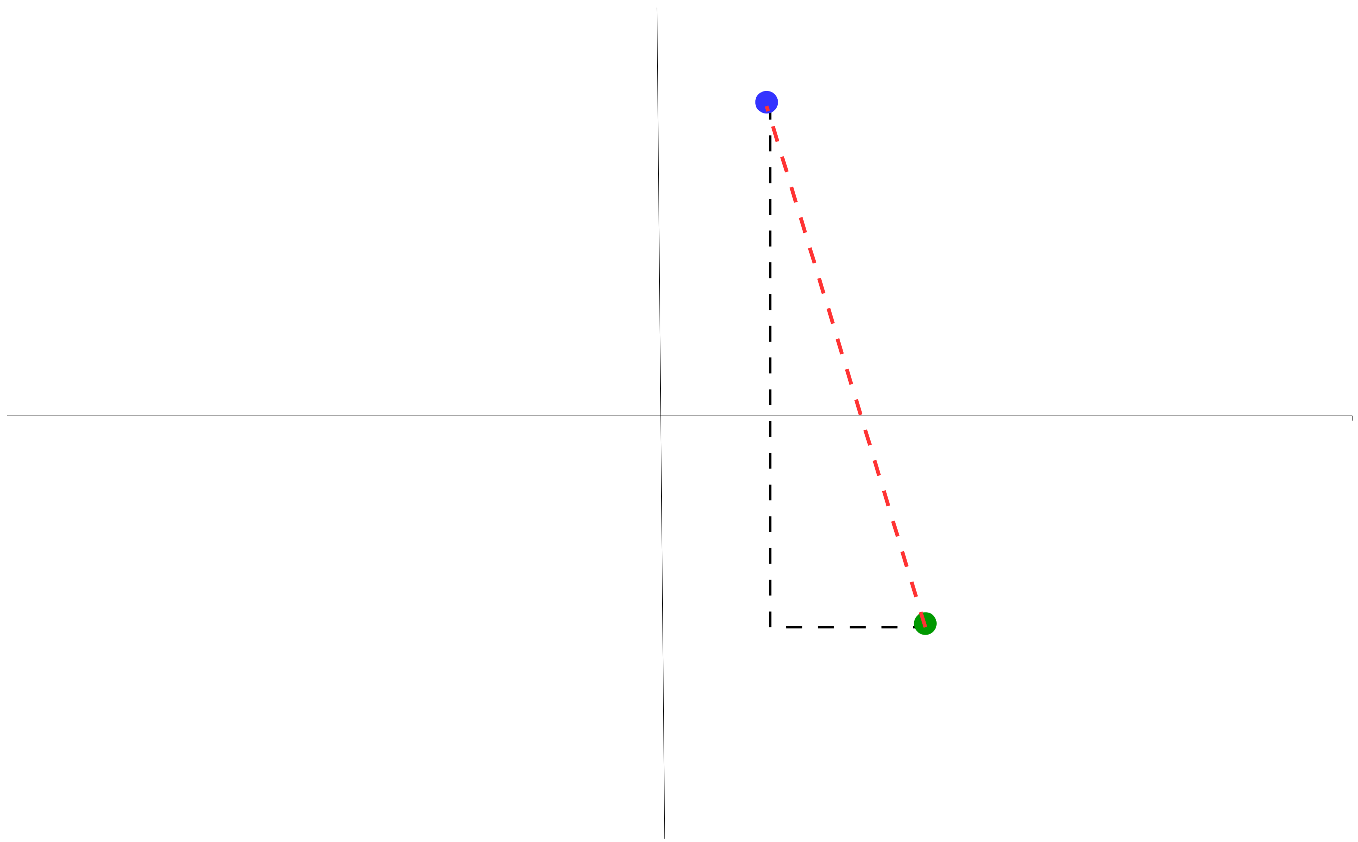
Las distancias entre puntos del plano cartesiano pueden calcularse fácilmente a partir de sus coordenadas.

Ejemplo. ¿Cual es la distancia de (2,7) a (5,-4)?



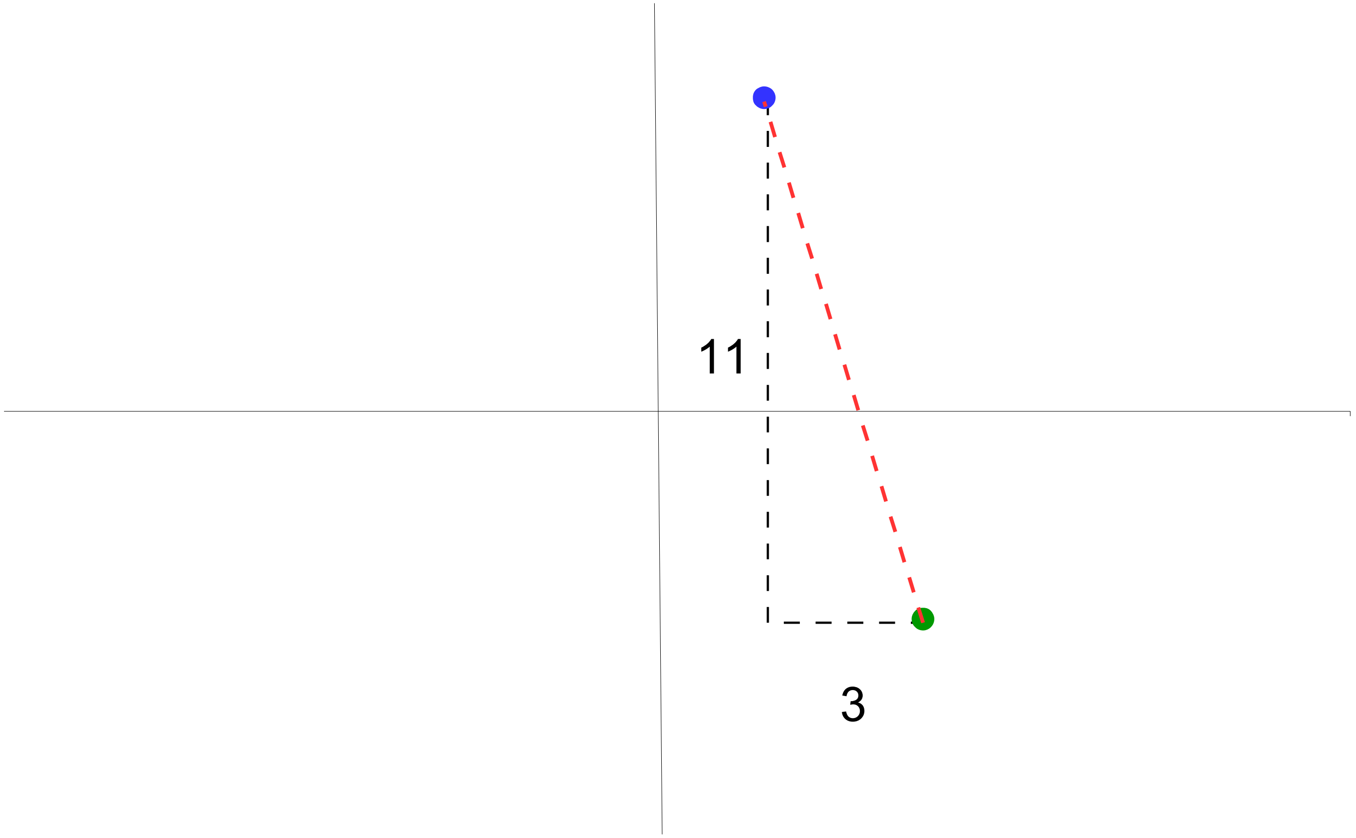
Las distancias entre puntos del plano cartesiano pueden calcularse fácilmente a partir de sus coordenadas.

Ejemplo. ¿Cual es la distancia de (2,7) a (5,-4)?



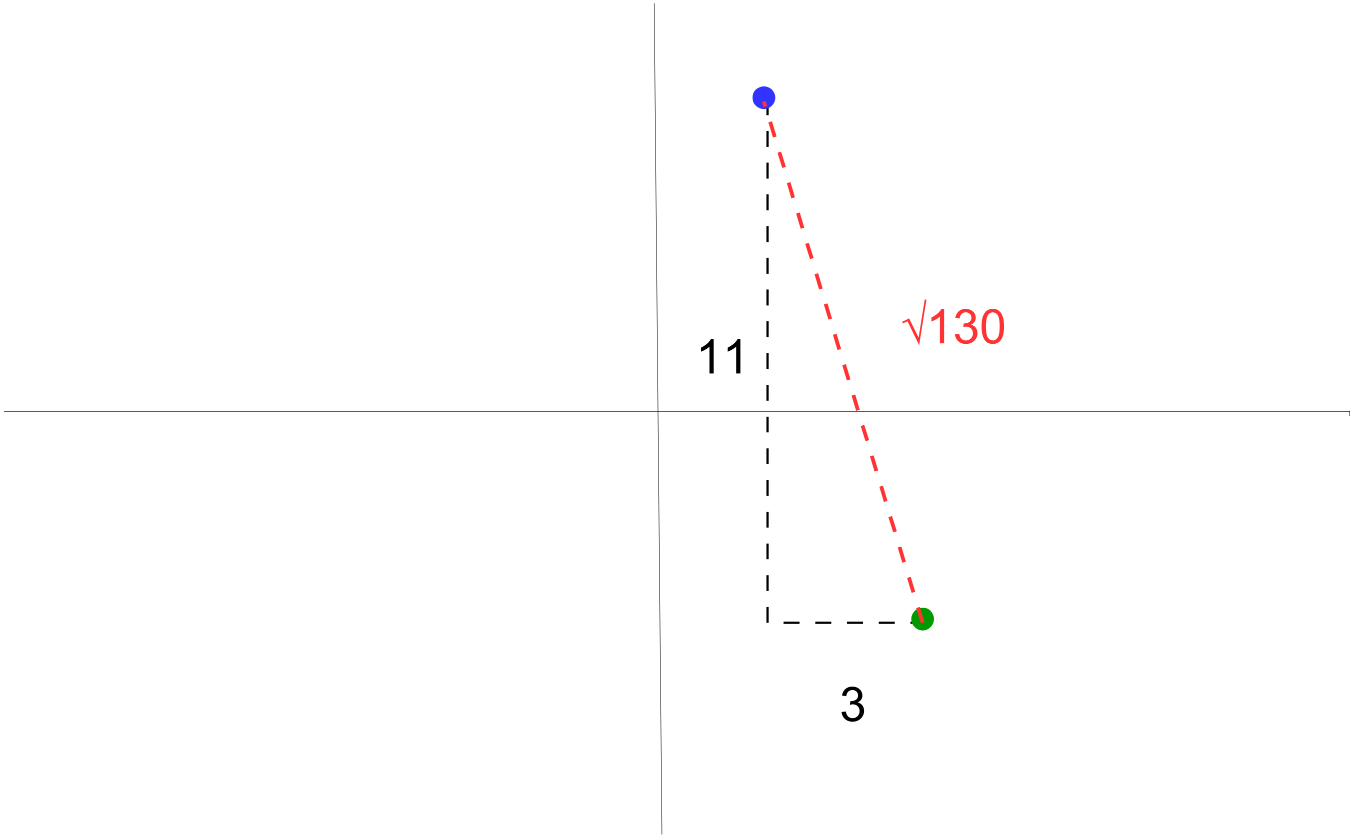
Las distancias entre puntos del plano cartesiano pueden calcularse fácilmente a partir de sus coordenadas.

Ejemplo. ¿Cual es la distancia de (2,7) a (5,-4)?

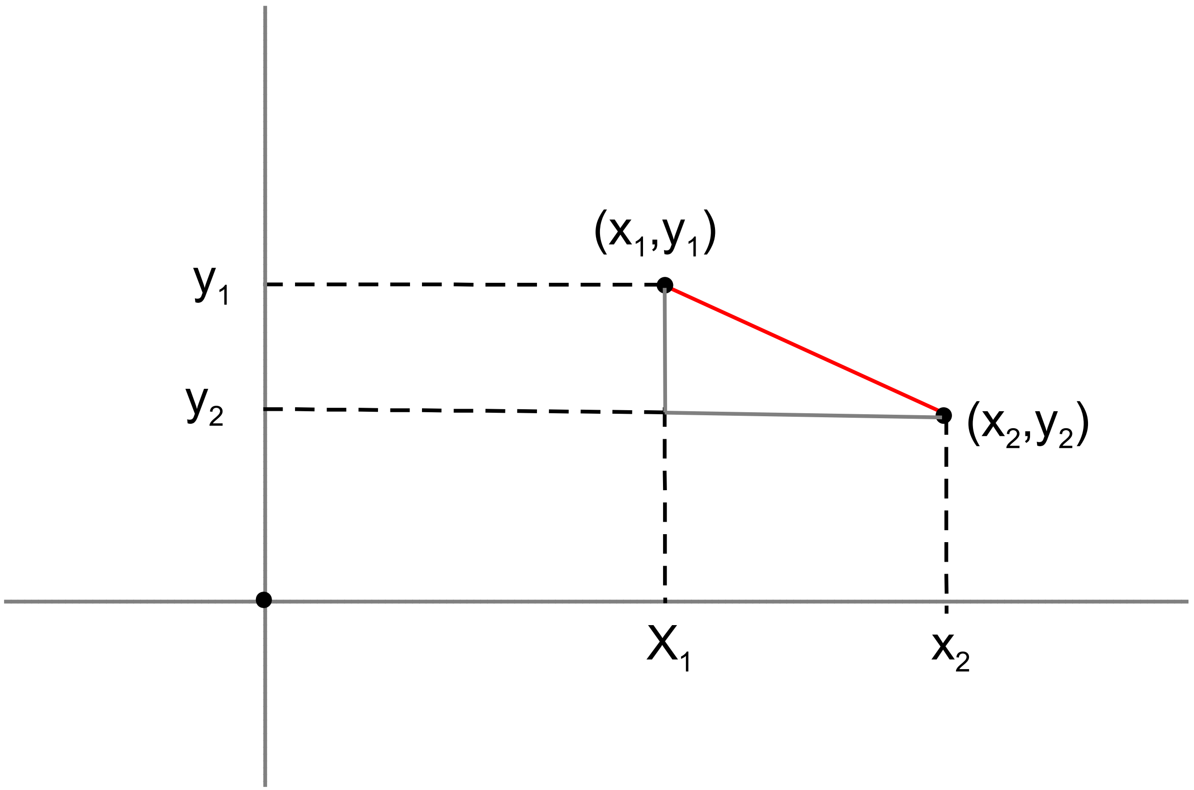


Las distancias entre puntos del plano cartesiano pueden calcularse fácilmente a partir de sus coordenadas.

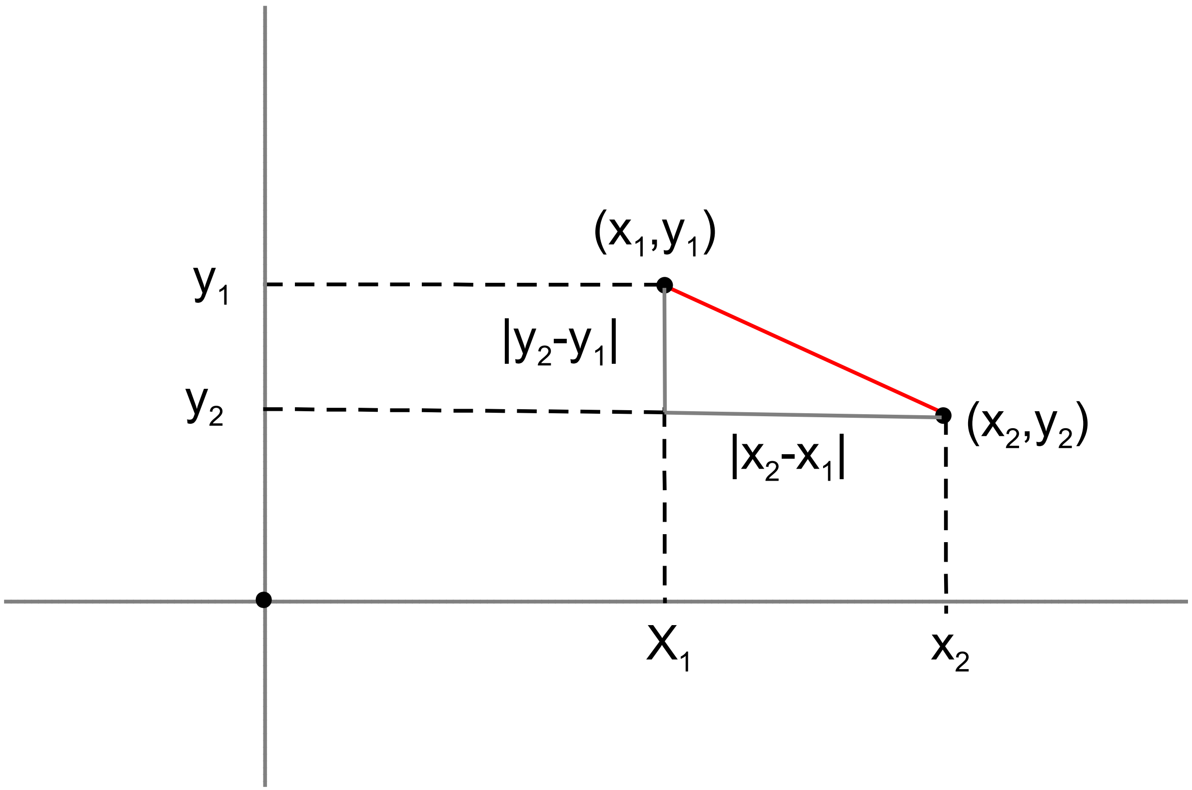
Ejemplo. ¿Cual es la distancia de (2,7) a (5,-4)?



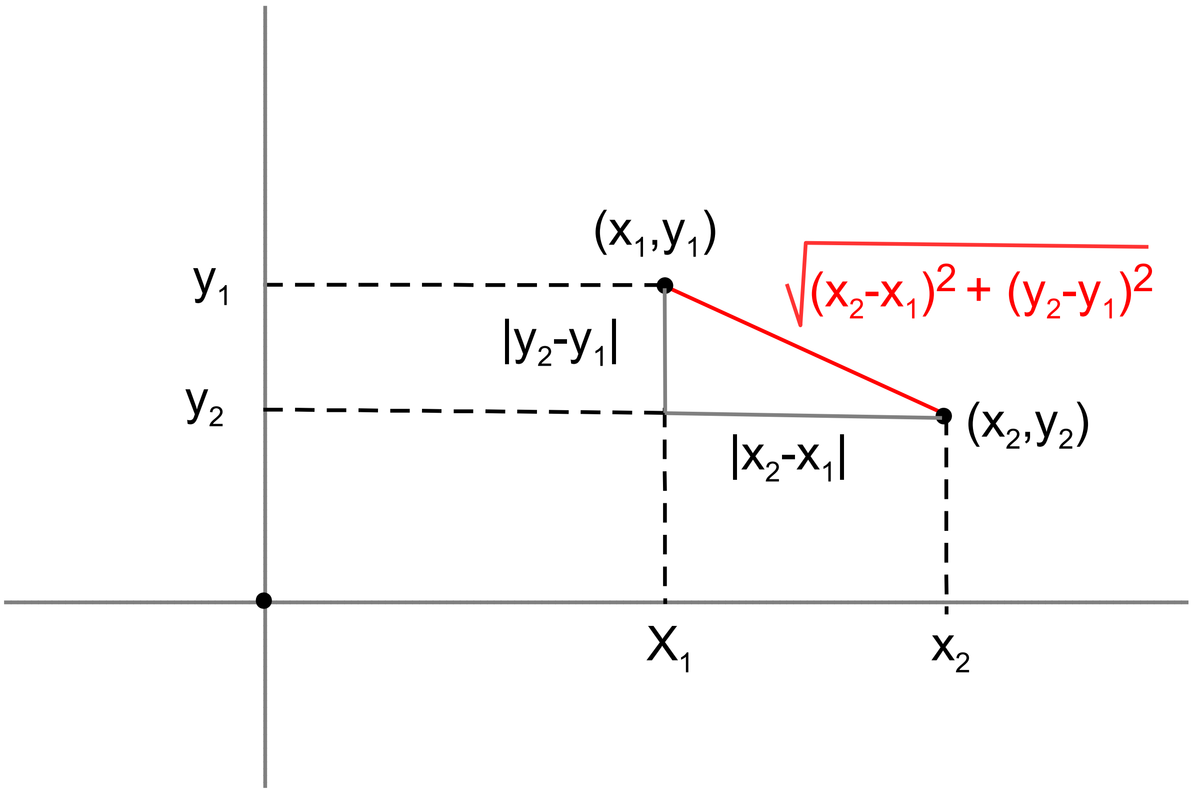
Las distancias entre puntos del plano cartesiano pueden calcularse fácilmente a partir de sus coordenadas usando el teorema de Pitagoras:



Las distancias entre puntos del plano cartesiano pueden calcularse fácilmente a partir de sus coordenadas usando el teorema de Pitagoras:

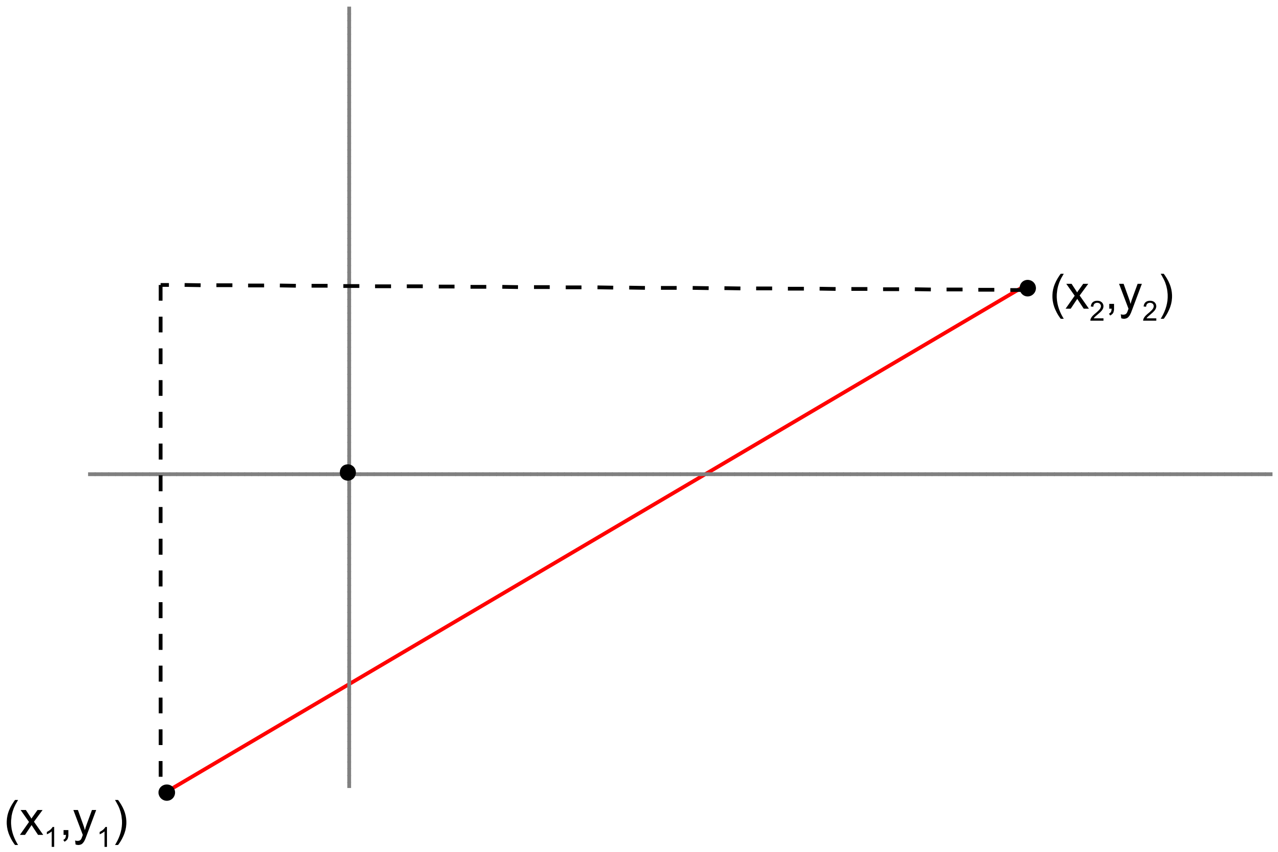


Las distancias entre puntos del plano cartesiano pueden calcularse fácilmente a partir de sus coordenadas usando el teorema de Pitagoras:



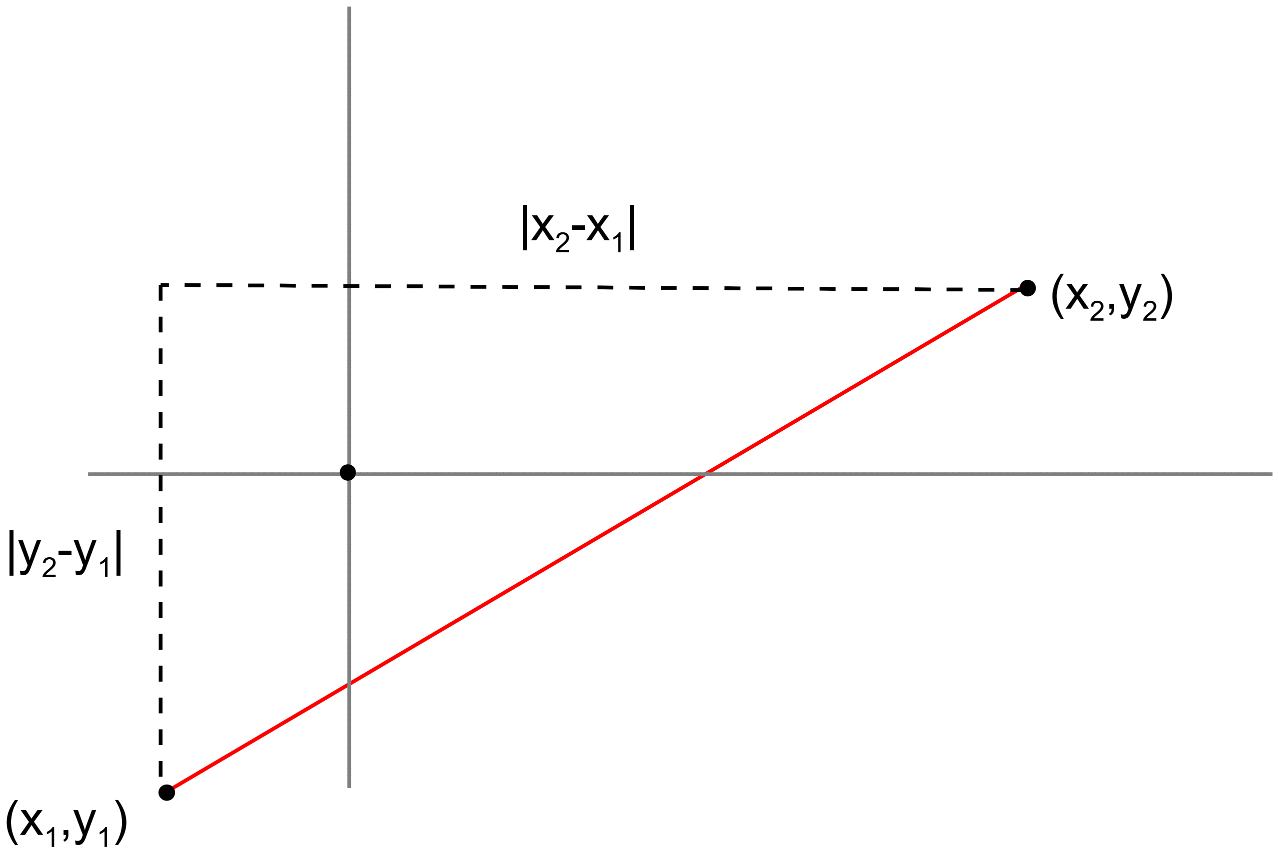
Las distancias entre puntos del plano cartesiano pueden calcularse fácilmente a partir de sus coordenadas usando el teorema de Pitagoras:

La misma fórmula funciona sin importar donde estén los puntos



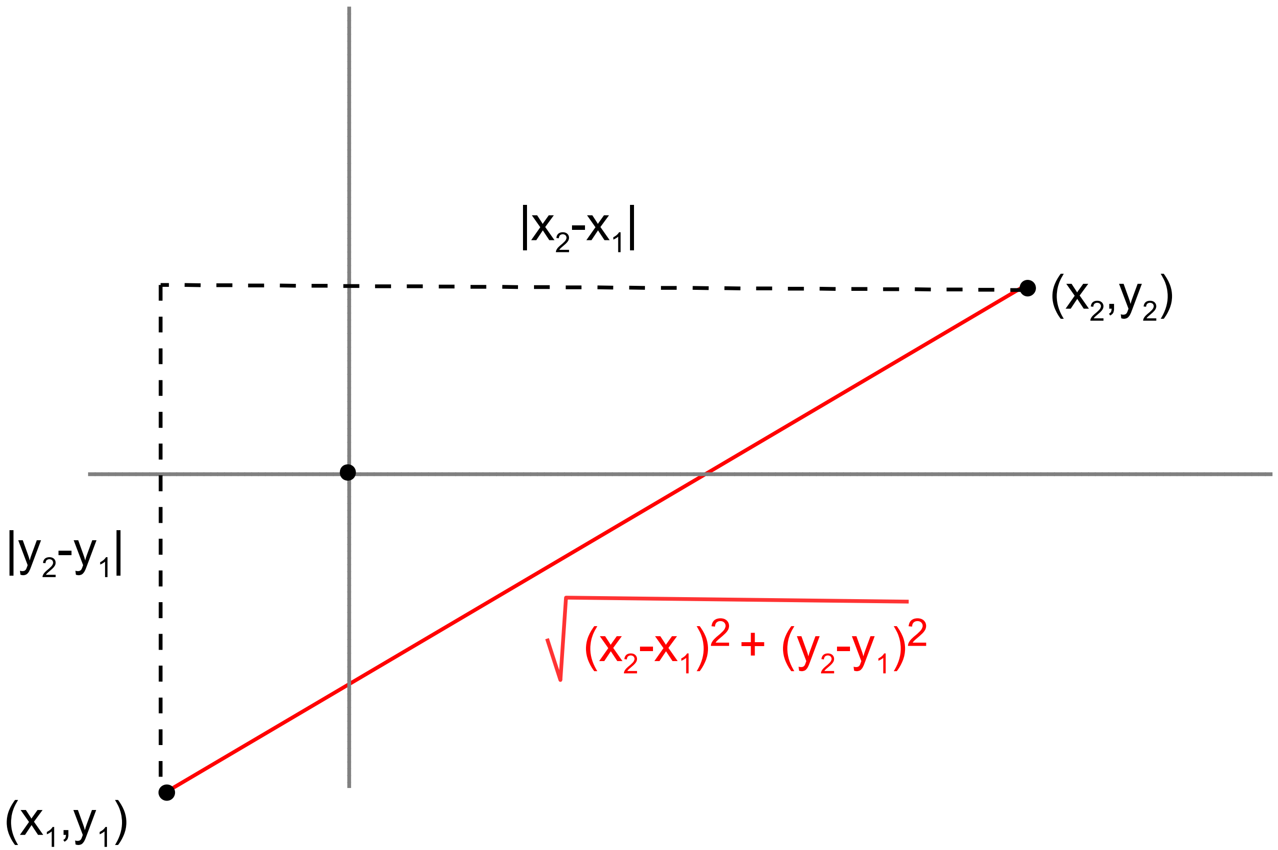
Las distancias entre puntos del plano cartesiano pueden calcularse fácilmente a partir de sus coordenadas usando el teorema de Pitagoras:

La misma fórmula funciona sin importar donde estén los puntos



Las distancias entre puntos del plano cartesiano pueden calcularse fácilmente a partir de sus coordenadas usando el teorema de Pitagoras:

La misma fórmula funciona sin importar donde estén los puntos

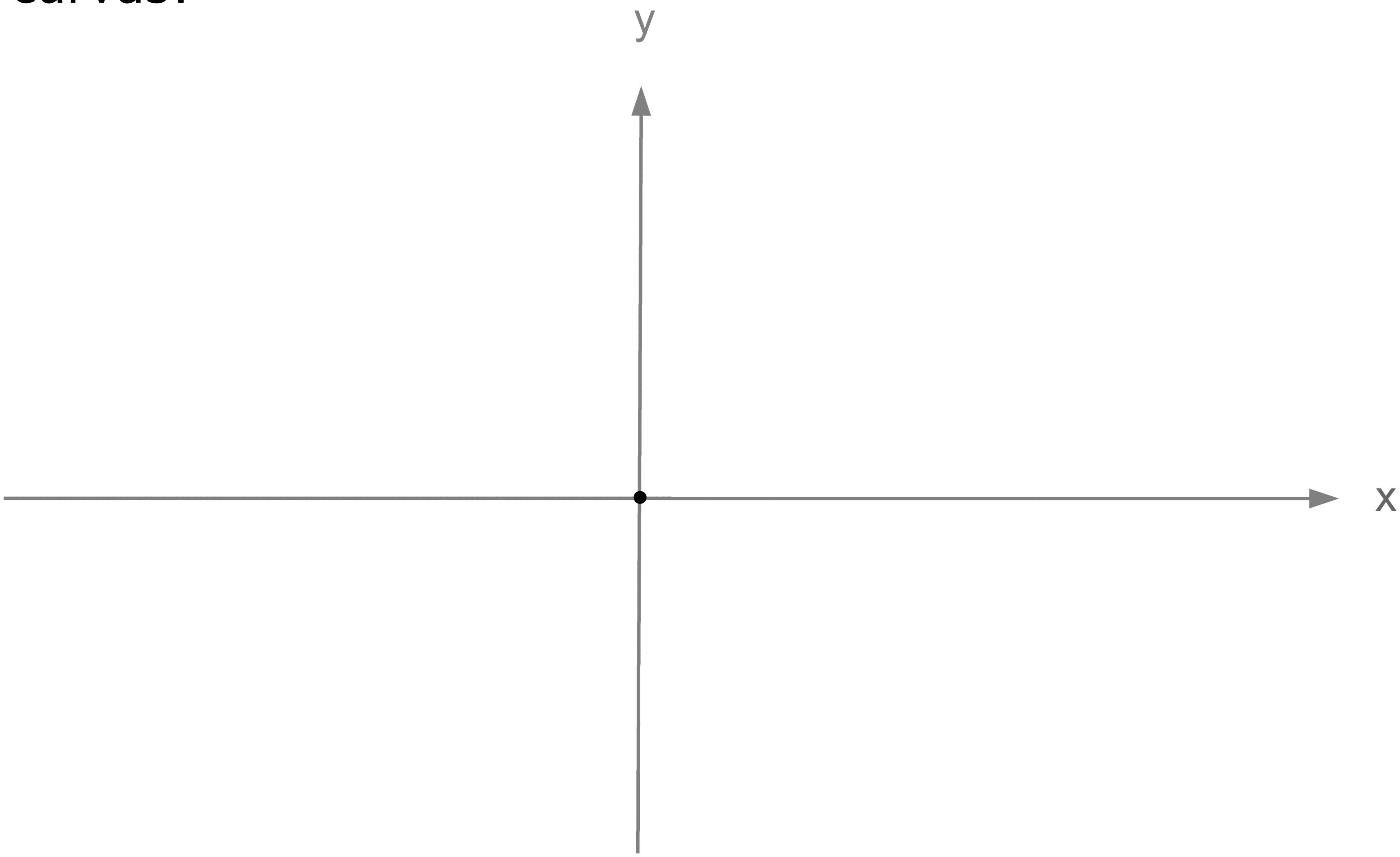


Ejercicio.

¿Cual es el lado mas largo del triángulo con vértices
$a=(4,3)$, $b=(2,-5)$ $c=(-4,1)$?

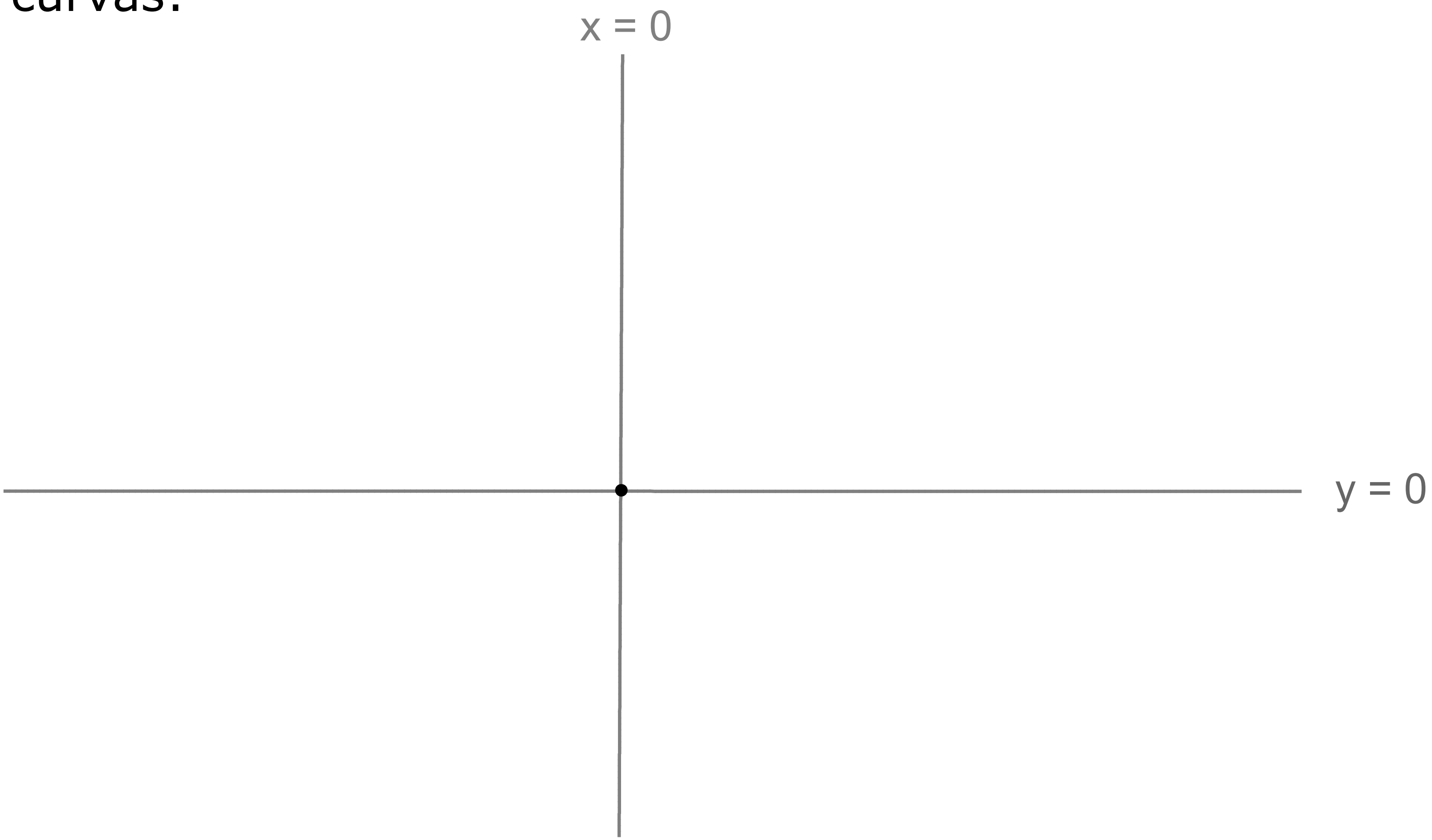
Curvas y ecuaciones

Las lineas y curvas pueden describirse por medio de relaciones entre las coordenadas de sus puntos, lo que da *ecuaciones* para las curvas:



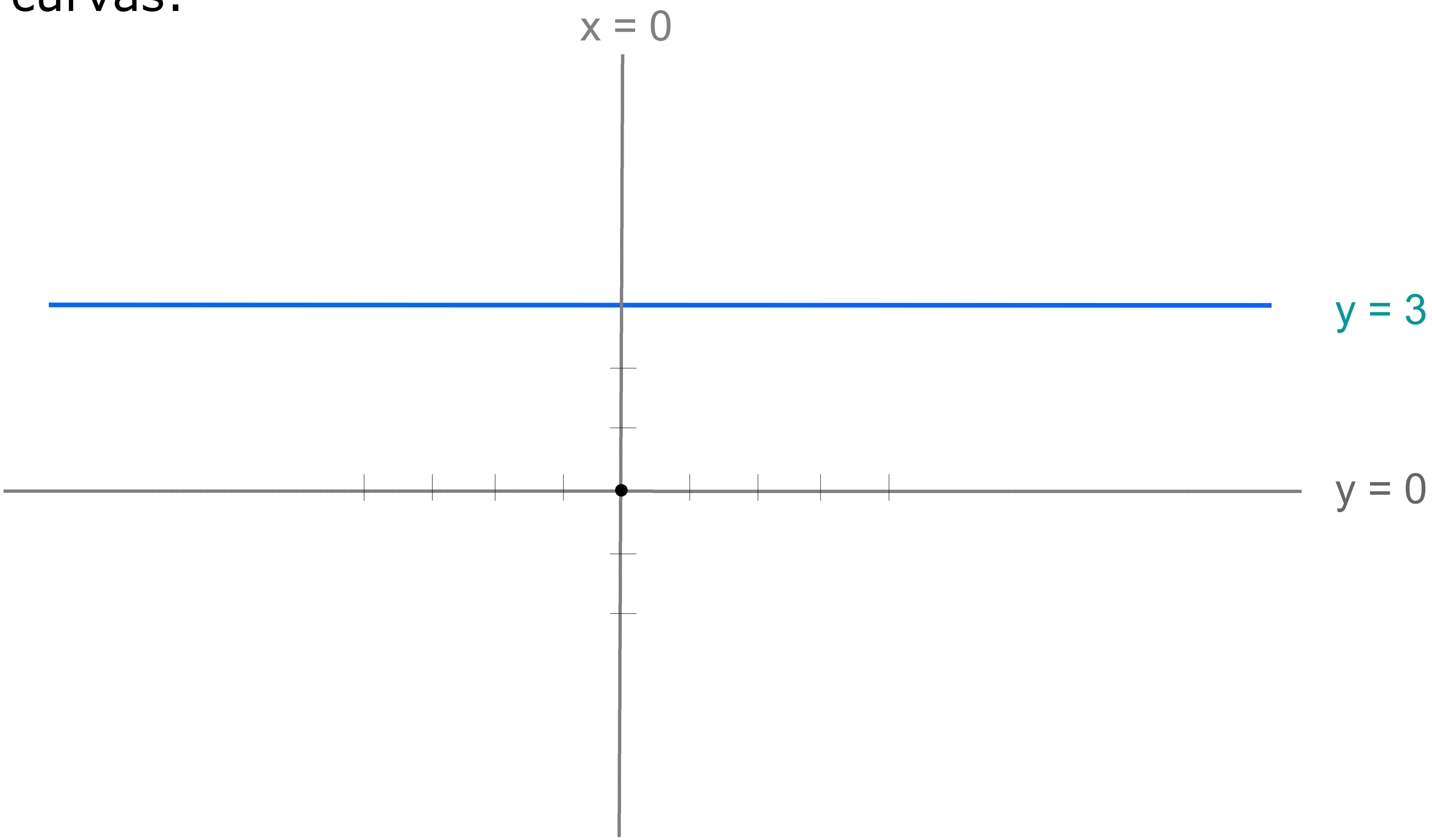
Curvas y ecuaciones

Las lineas y curvas pueden describirse por medio de relaciones entre las coordenadas de sus puntos, lo que da *ecuaciones* para las curvas:



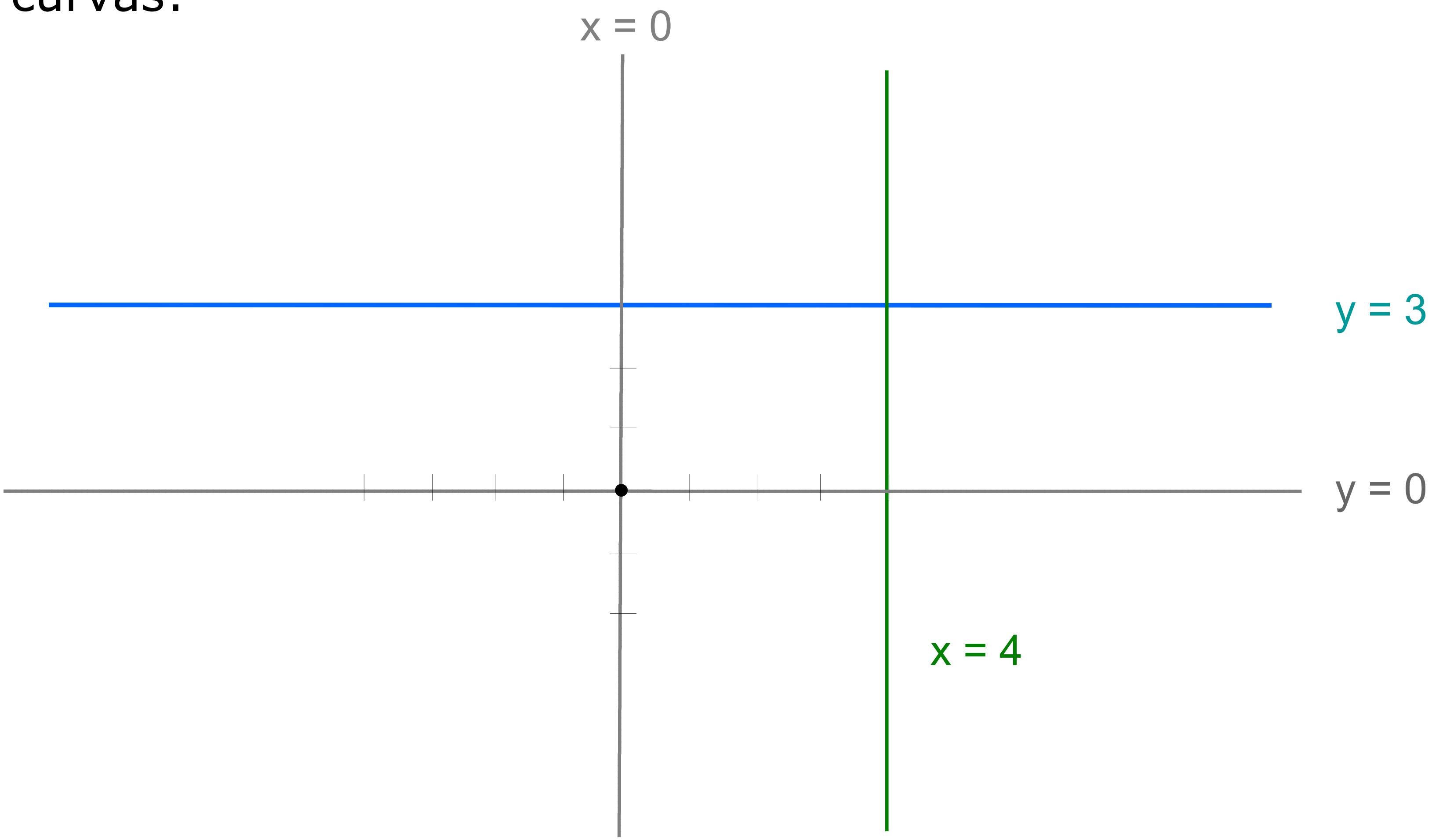
Curvas y ecuaciones

Las lineas y curvas pueden describirse por medio de relaciones entre las coordenadas de sus puntos, lo que da *ecuaciones* para las curvas:



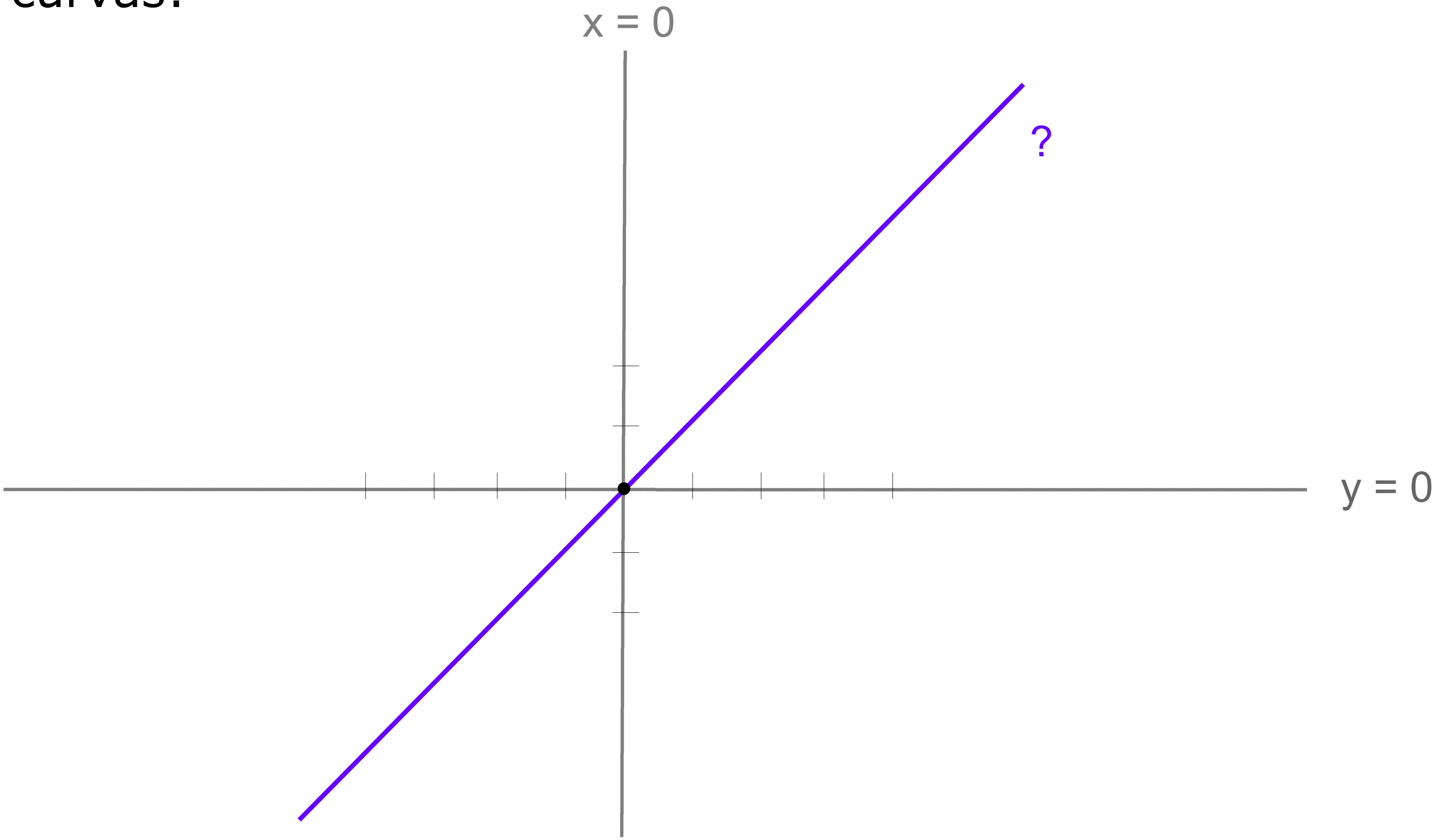
Curvas y ecuaciones

Las lineas y curvas pueden describirse por medio de relaciones entre las coordenadas de sus puntos, lo que da *ecuaciones* para las curvas:



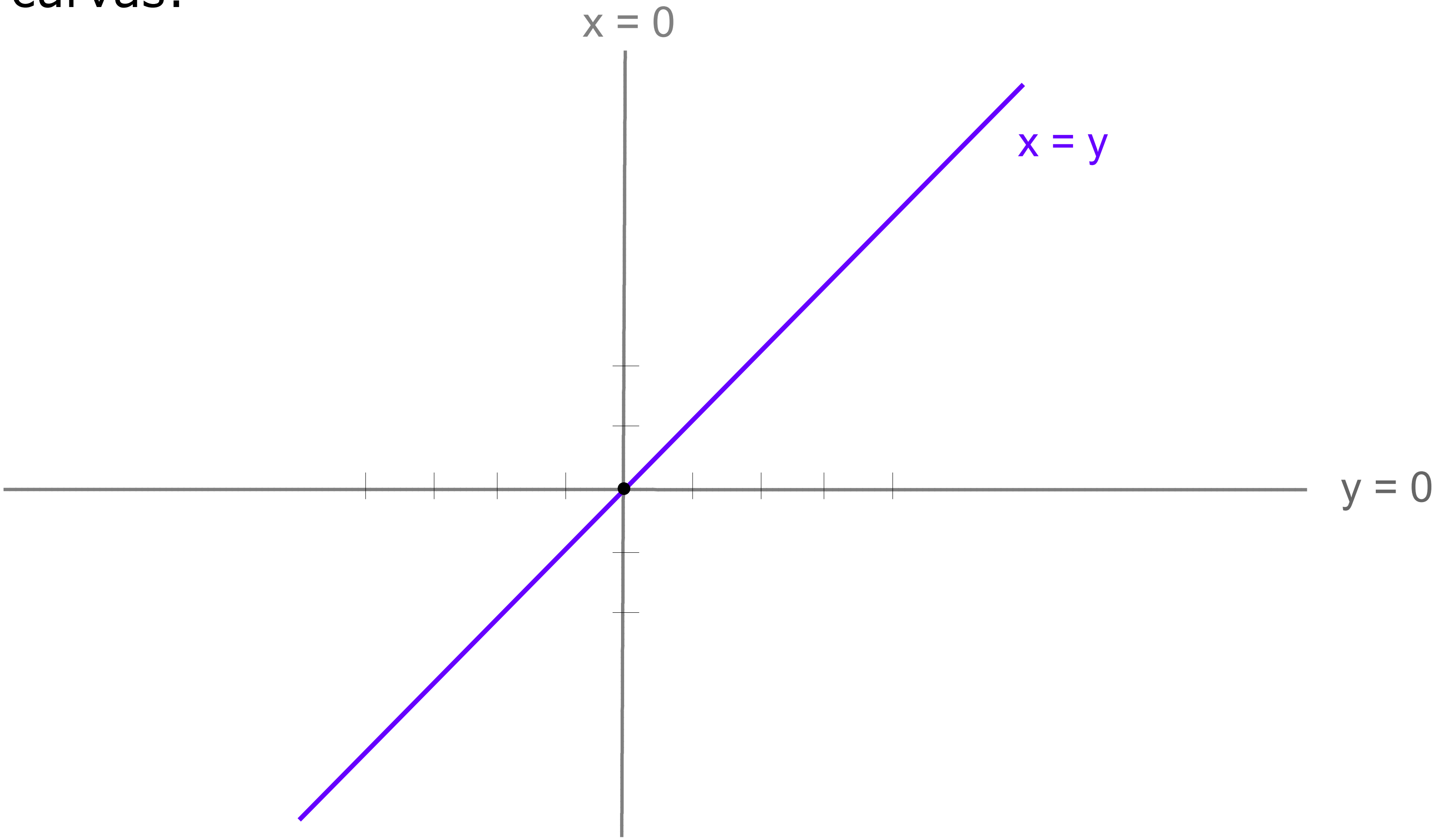
Curvas y ecuaciones

Las lineas y curvas pueden describirse por medio de relaciones entre las coordenadas de sus puntos, lo que da *ecuaciones* para las curvas:



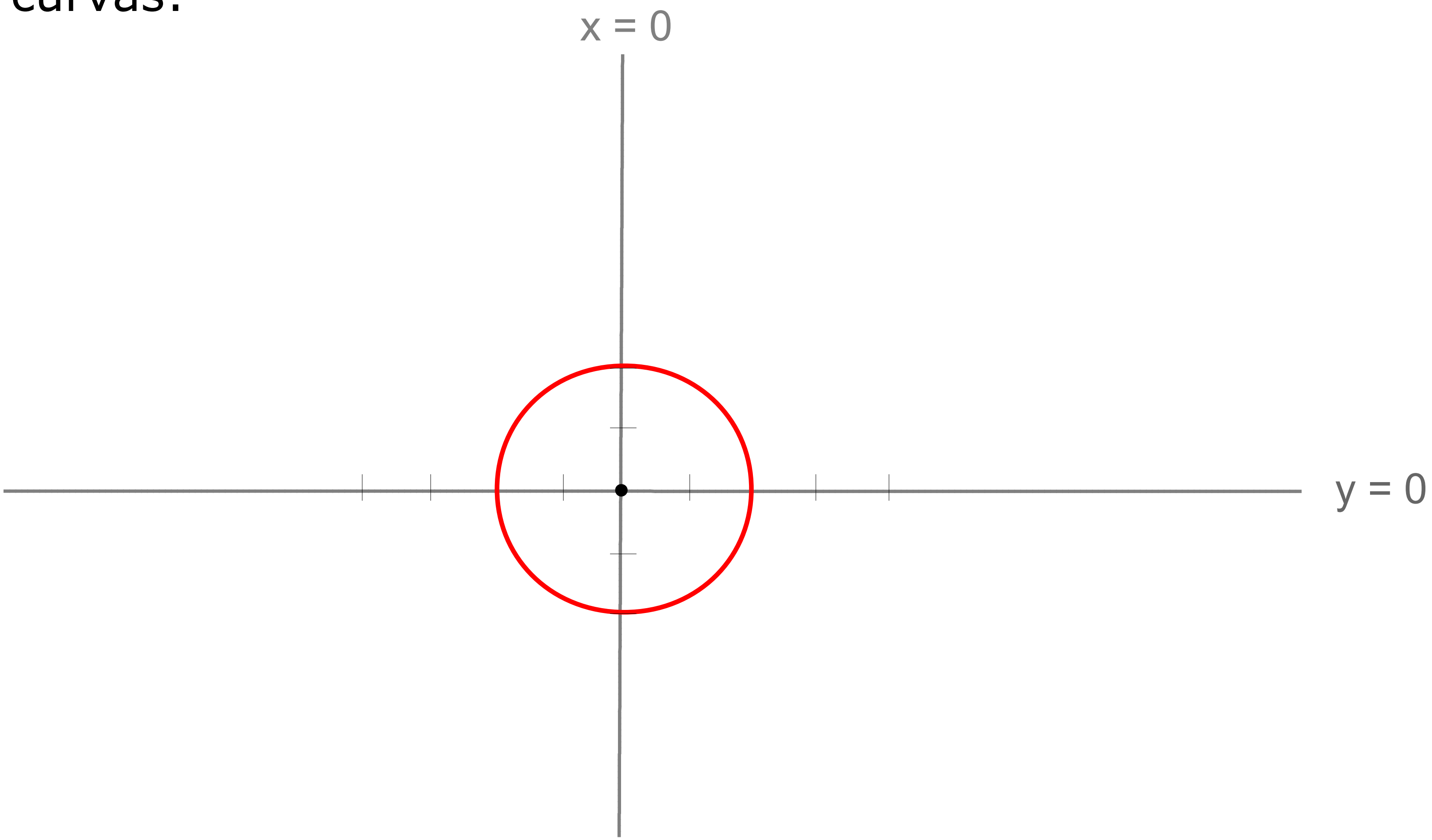
Curvas y ecuaciones

Las lineas y curvas pueden describirse por medio de relaciones entre las coordenadas de sus puntos, lo que da *ecuaciones* para las curvas:



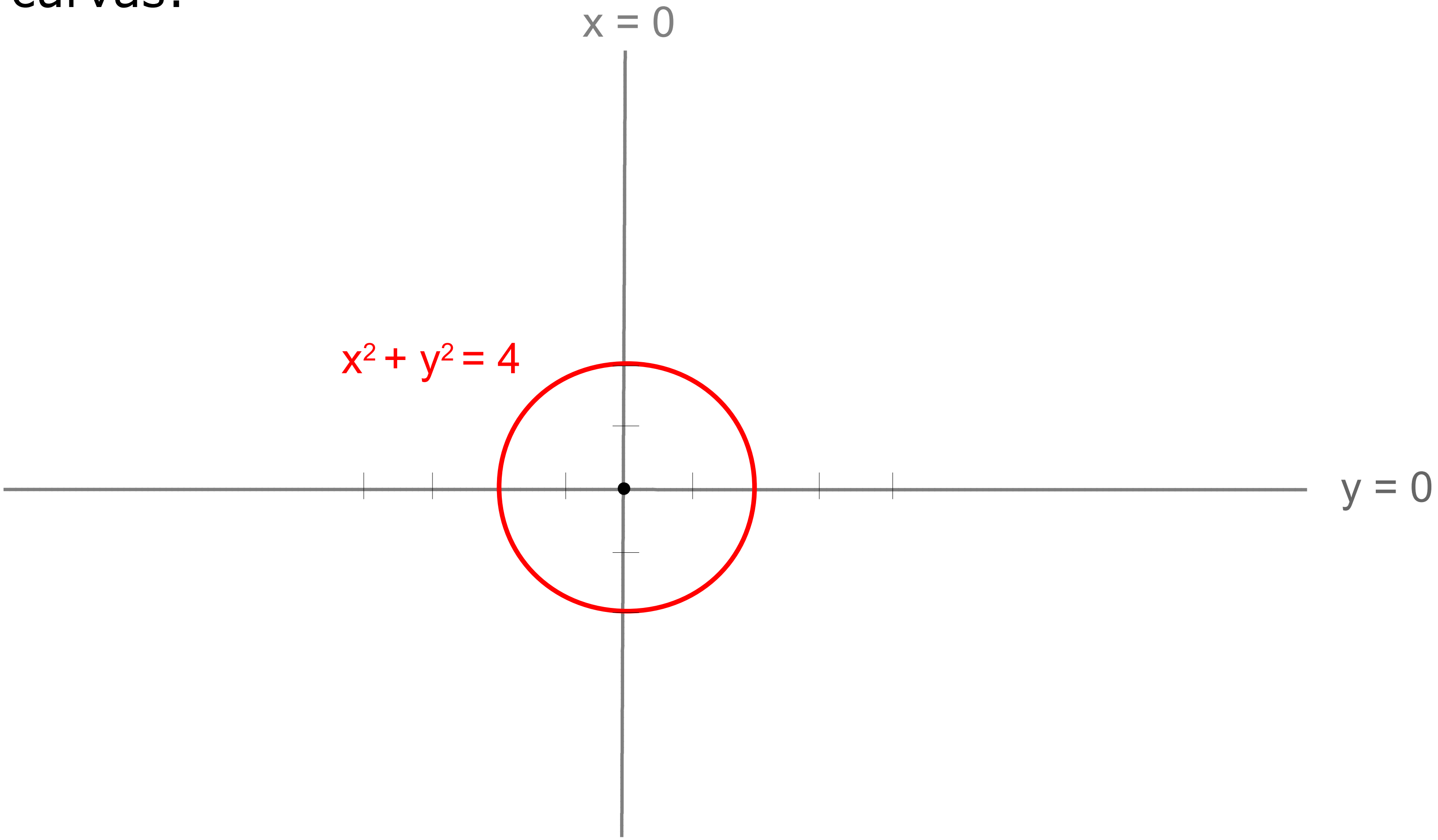
Curvas y ecuaciones

Las lineas y curvas pueden describirse por medio de relaciones entre las coordenadas de sus puntos, lo que da *ecuaciones* para las curvas:



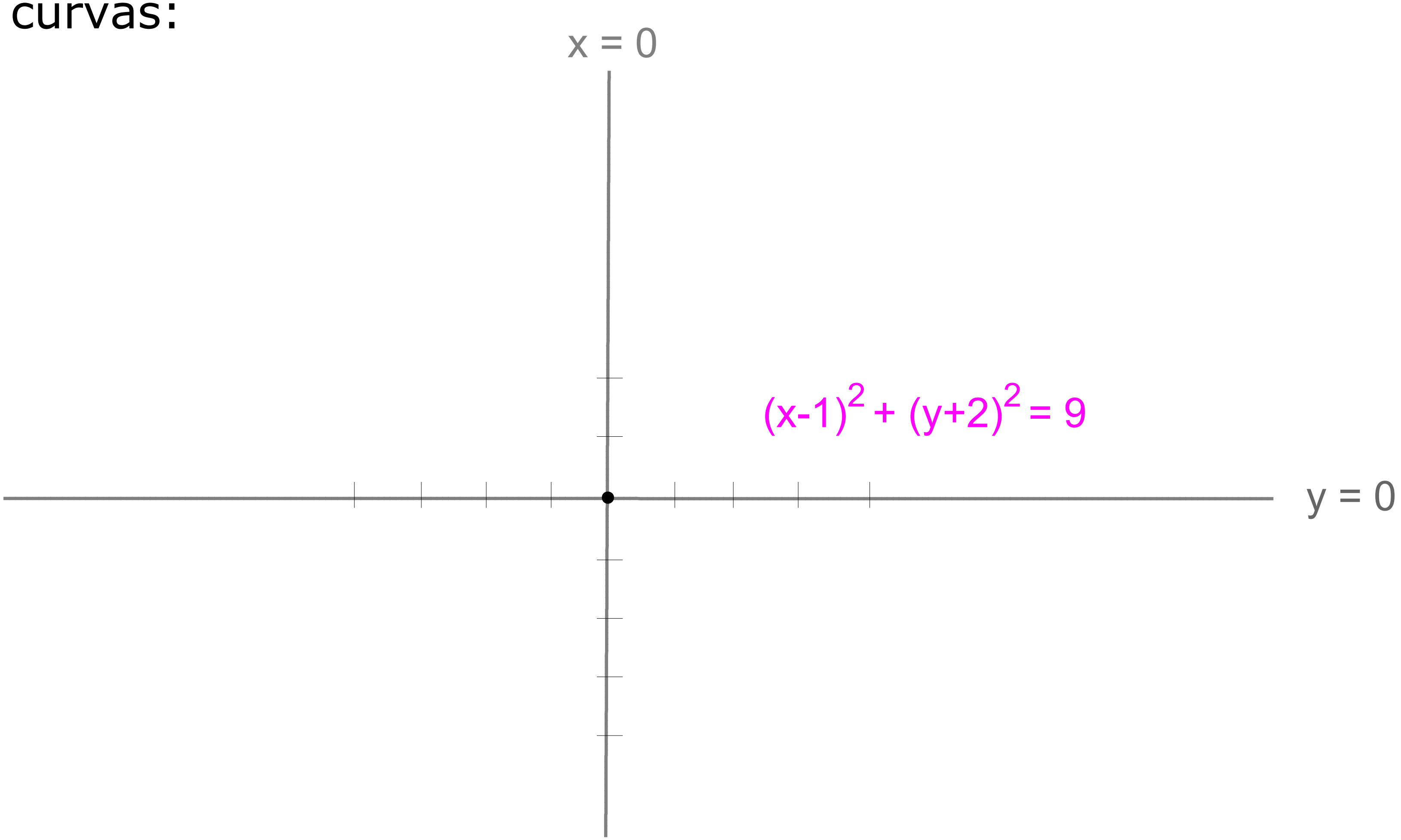
Curvas y ecuaciones

Las lineas y curvas pueden describirse por medio de relaciones entre las coordenadas de sus puntos, lo que da *ecuaciones* para las curvas:



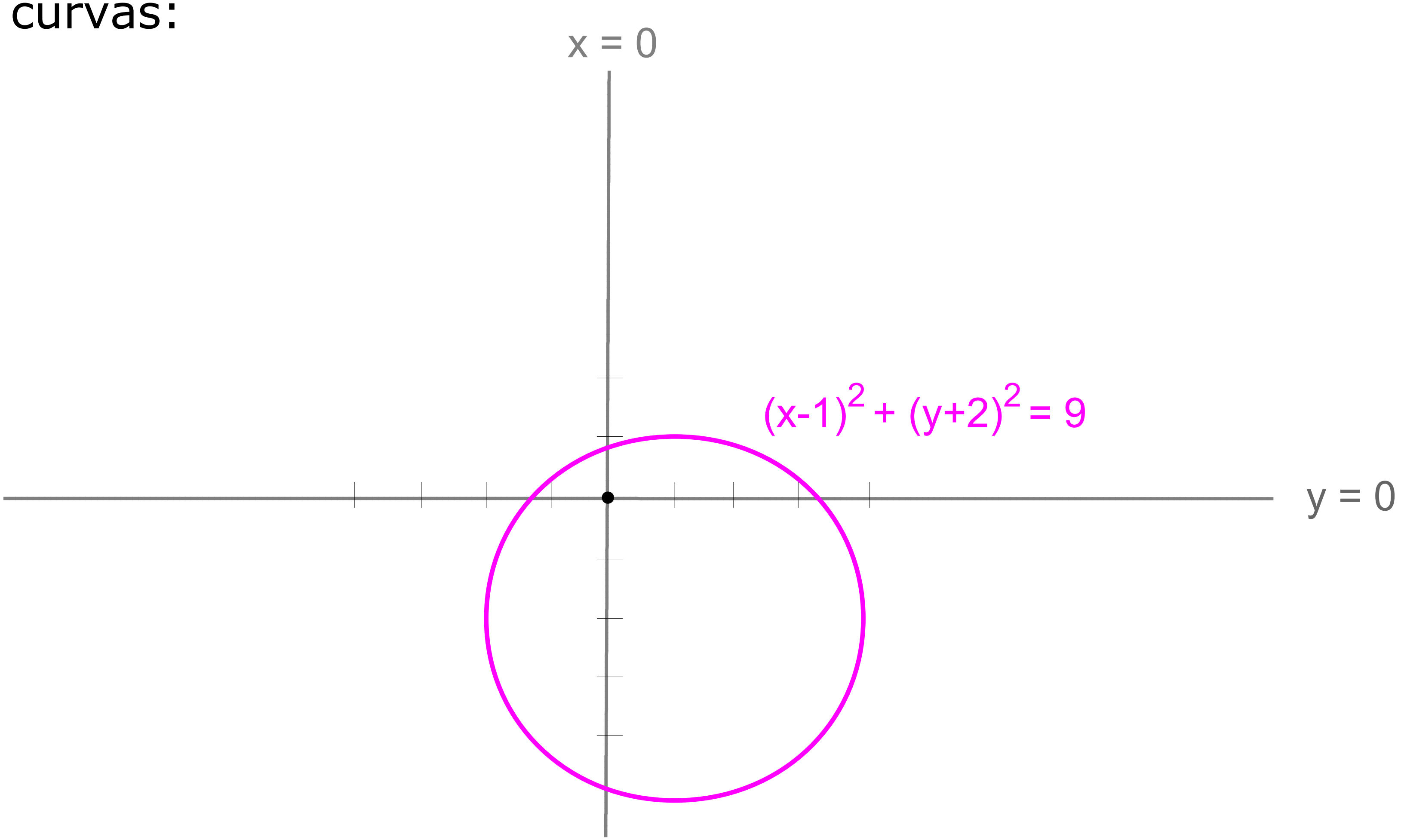
Curvas y ecuaciones

Las lineas y curvas pueden describirse por medio de relaciones entre las coordenadas de sus puntos, lo que da *ecuaciones* para las curvas:



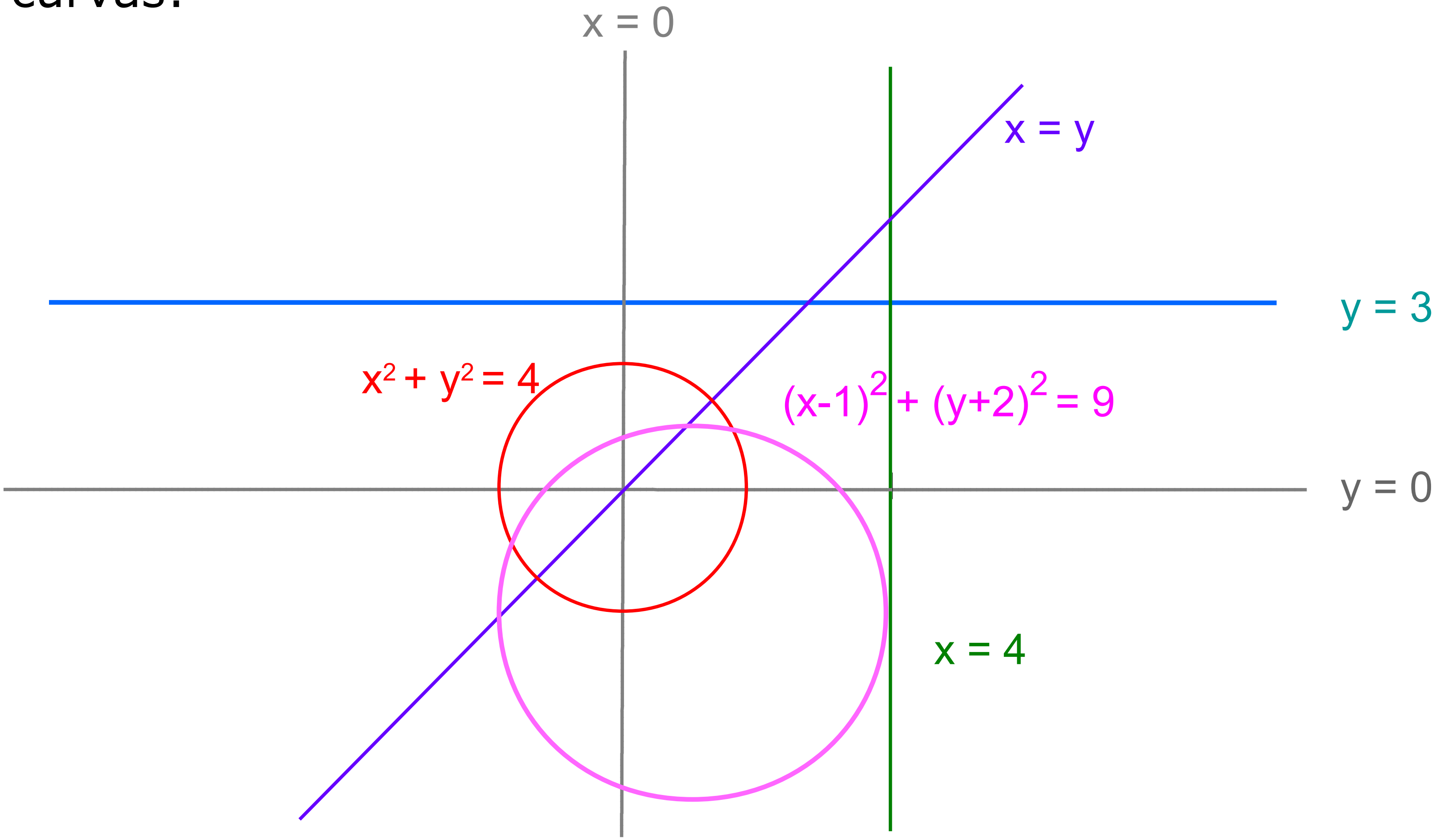
Curvas y ecuaciones

Las lineas y curvas pueden describirse por medio de relaciones entre las coordenadas de sus puntos, lo que da *ecuaciones* para las curvas:



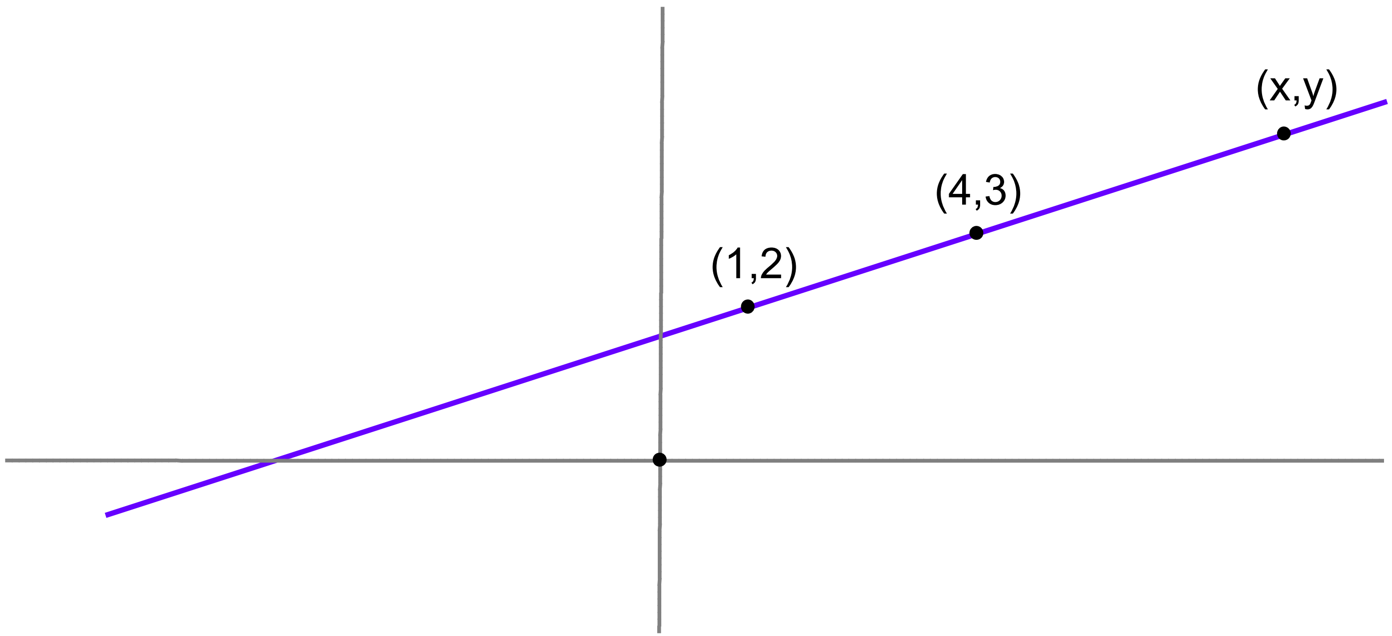
Curvas y ecuaciones

Las lineas y curvas pueden describirse por medio de relaciones entre las coordenadas de sus puntos, lo que da *ecuaciones* para las curvas:



Ejemplo:

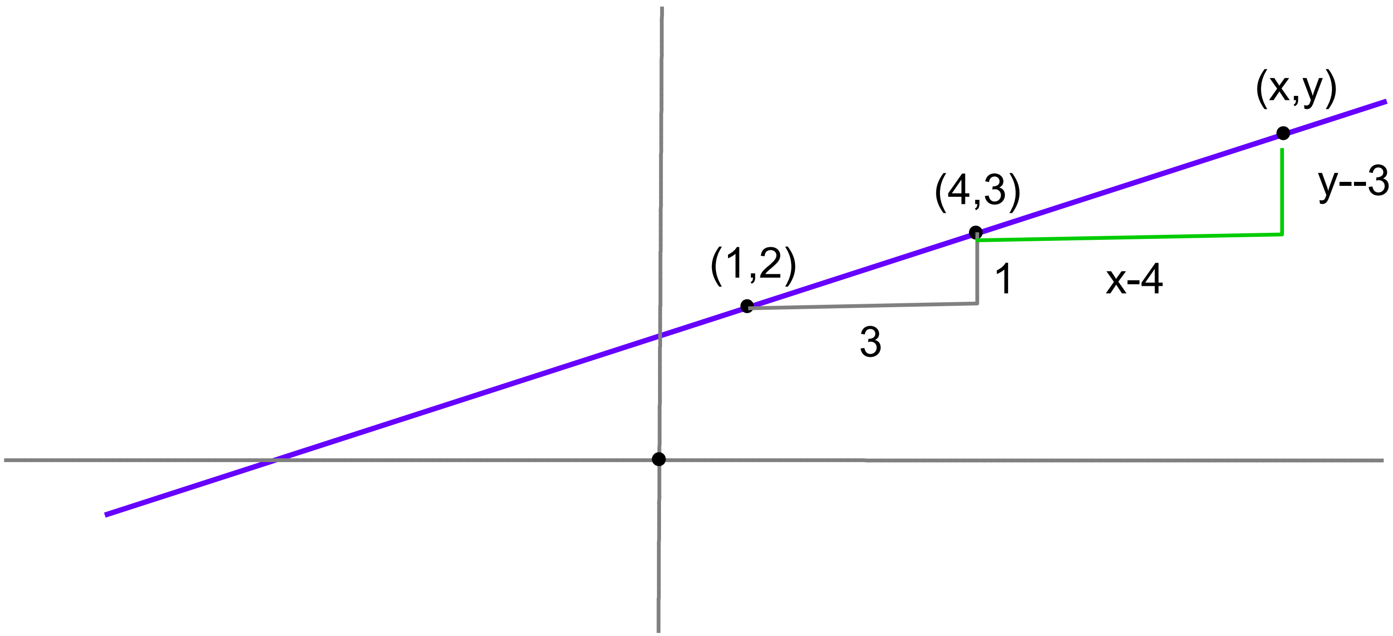
¿Que ecuación cumplen los puntos del plano alineados con (1,2) y (4,3)?



Ejemplo:

¿Que ecuación cumplen los puntos del plano alineados con (1,2) y (4,3)?

Por la semejanza de triángulos:



Ejemplo:

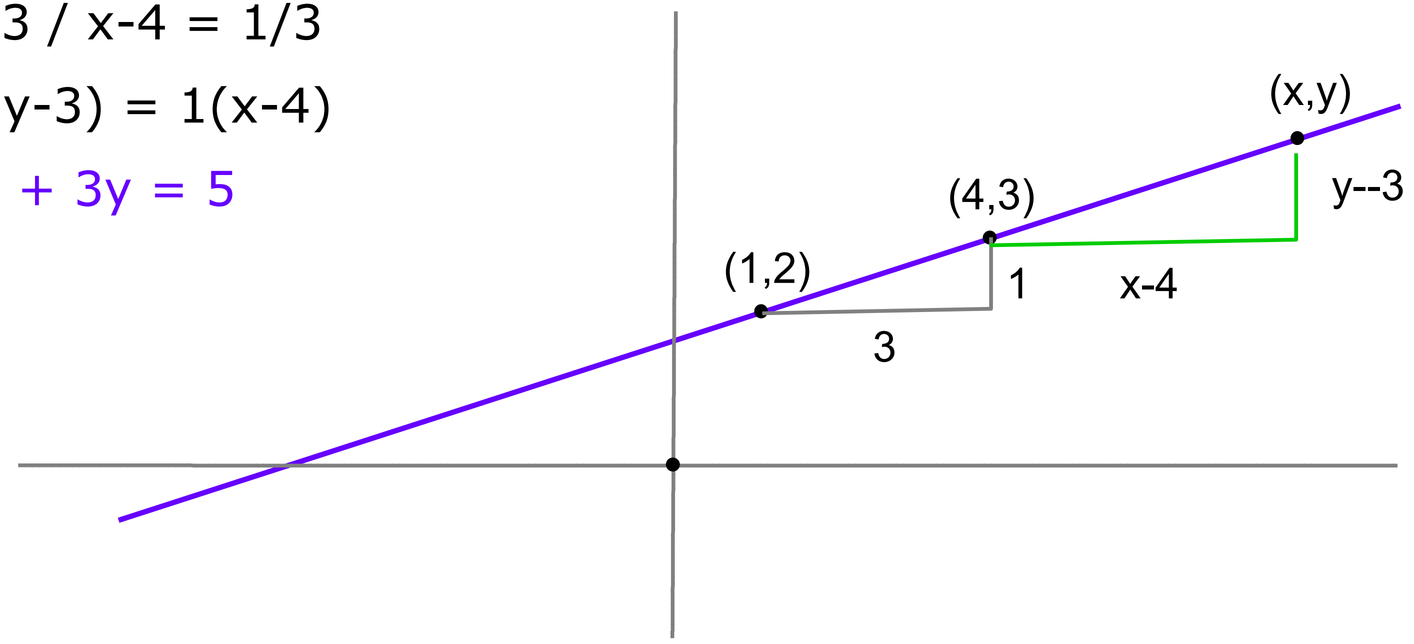
¿Que ecuación cumplen los puntos del plano alineados con (1,2) y (4,3)?

Por la semejanza de triángulos:

$y-3 / x-4 = 1/3$

$3(y-3) = 1(x-4)$

$-x + 3y = 5$



Ejemplo:

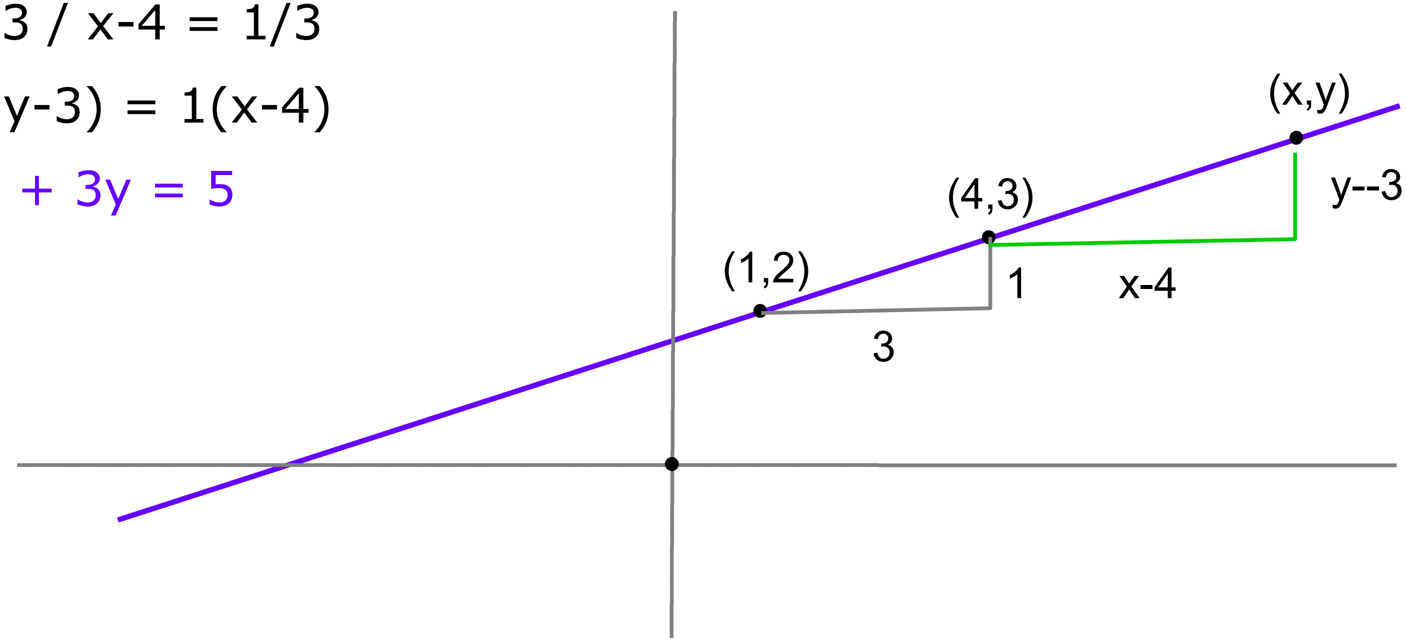
¿Que ecuación cumplen los puntos del plano alineados con (1,2) y (4,3)?

Por la semejanza de triángulos:

y-3 / x-4 = 1/3

3(y-3) = 1(x-4)

-x + 3y = 5



Así que los puntos de la recta que pasa por (1,2) y (4,3) satisfacen la ecuación -x + 3y = 5

Ejemplo:

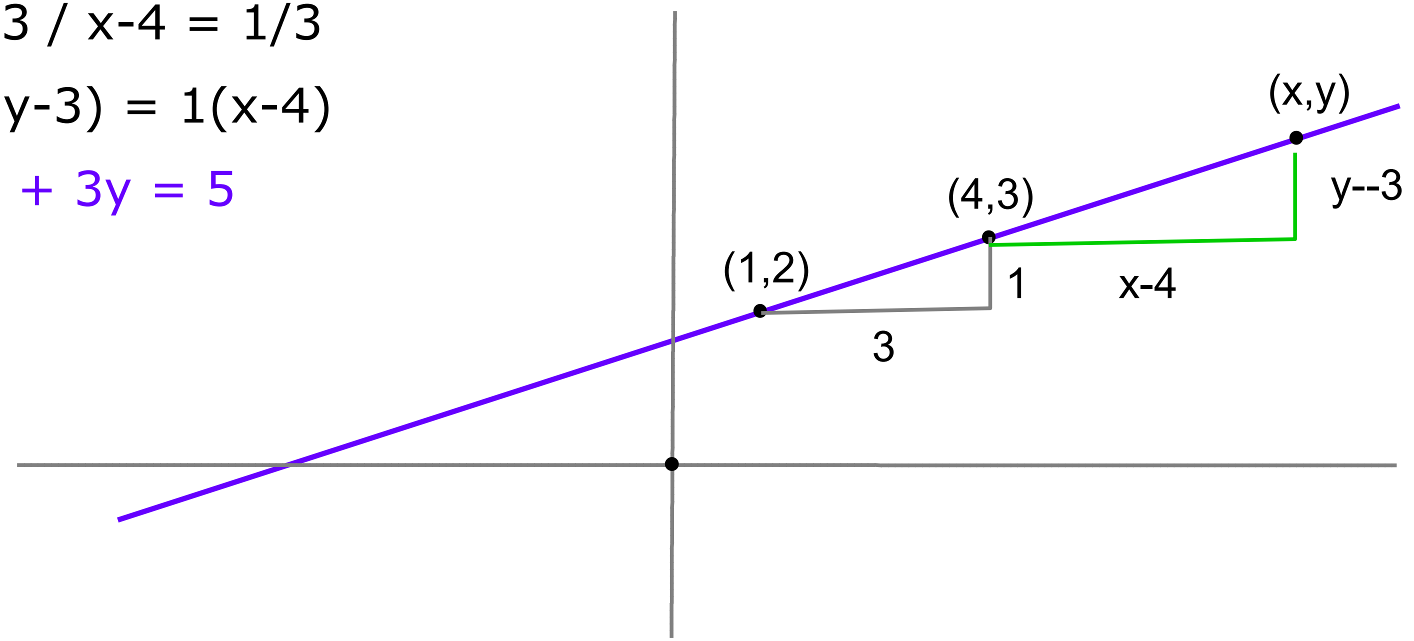
¿Que ecuación cumplen los puntos del plano alineados con (1,2) y (4,3)?

Por la semejanza de triángulos:

y-3 / x-4 = 1/3

3(y-3) = 1(x-4)

-x + 3y = 5



Así que los puntos de la recta que pasa por (1,2) y (4,3) satisfacen la ecuación -x + 3y = 5

¿El punto (87,31) estará en la recta o no?

Ejemplo:

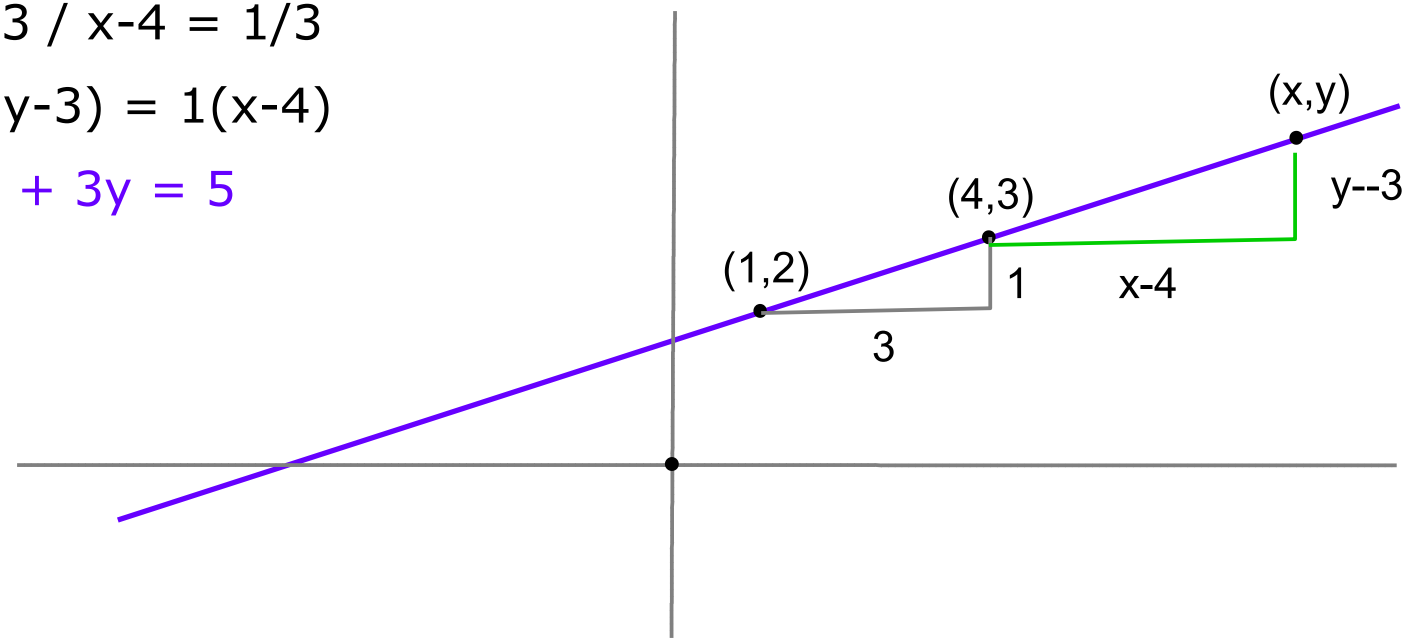
¿Que ecuación cumplen los puntos del plano alineados con (1,2) y (4,3)?

Por la semejanza de triángulos:

y-3 / x-4 = 1/3

3(y-3) = 1(x-4)

-x + 3y = 5



Así que los puntos de la recta que pasa por (1,2) y (4,3) satisfacen la ecuación -x + 3y = 5

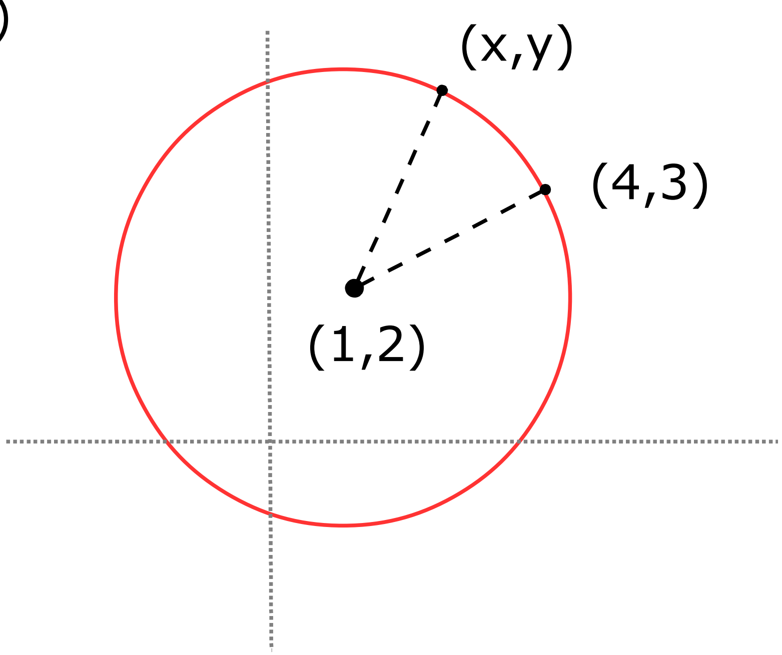
¿El punto (87,31) estará en la recta o no?

Basta checar si el punto cumple la ecuación:

-87 + 3(31) = 7 ≠ 5 así que el punto no esta en la recta.

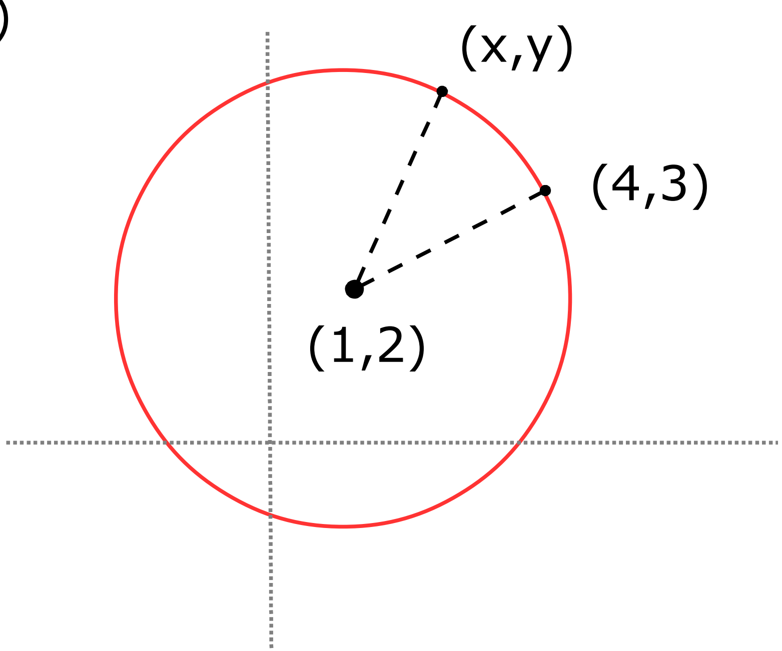
Ejemplo:

¿Que ecuación cumplen los puntos (x,y) del plano que están en el círculo con centro en (1,2) y que pasa por el punto (4,3)?



Ejemplo:

¿Que ecuación cumplen los puntos (x,y) del plano que están en el círculo con centro en (1,2) y que pasa por el punto (4,3)?



Deben satisfacer la ecuación

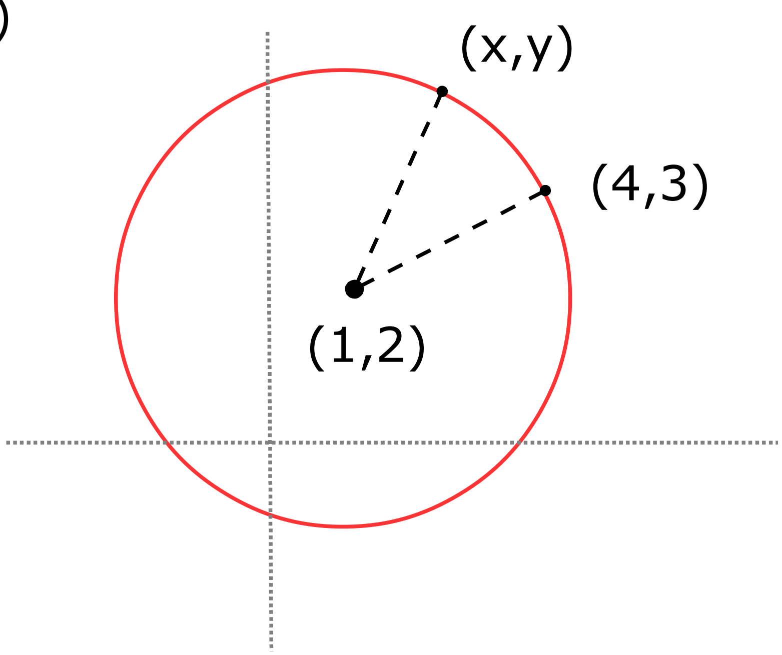
$$(x-1)^2 + (y-2)^2 = (4-1)^2 + (3-2)^2$$

que puede simplificarse a

$$x^2 + y^2 - 2x - 4y = 5$$

Ejemplo:

¿Que ecuación cumplen los puntos (x,y) del plano que están en el círculo con centro en (1,2) y que pasa por el punto (4,3)?



Deben satisfacer la ecuación

$(x-1)^2 + (y-2)^2 = (4-1)^2 + (3-2)^2$

que puede simplificarse a

$x^2 + y^2 - 2x - 4y = 5$

Para saber, por ejemplo, si el punto (3,-1) esta dentro o fuera del circulo, bastaría checar que le pasa con la ecuación:

$(3)^2 + (-1)^2 - 2(3) - 4(-1) = 8 > 5$

así que el punto (3,-1) esta afuera del circulo.

Un modelo del plano euclidiano

En lugar de poner las coordenadas puestas sobre el plano euclidiano, se puede proceder al revés: empezar con en el conjunto R^2 ={(x,y) / x,y T R} y usarlo como un *modelo* para el plano euclidiano, definiendo a los puntos como las parejas (x,y), definiendo a las rectas en términos algebráicos como los conjuntos de soluciones de ecuaciones de primer grado $Ax+By=C$ y demostrando que estas cumplen con los axiomas de la geometría euclidiana.

Un modelo del plano euclidiano

Hay que empezar por demostrar que por cada par de puntos (a,b) y (c,d) pasa una recta, es decir, que existe alguna ecuación Ax+By=C que tiene por soluciones a (a,b) y (c,d).

Ejemplo.¿Como sabemos que por los puntos (1,2) y (4,3) pasa una recta? Tenemos que hallar 3 números A,B,C de modo que la ecuación Ax+By=C tenga como soluciones a (1,2) y (3,4)

Un modelo del plano euclidiano

También hay que demostrar que cada par de rectas distintas se intersectan a lo mas en un punto, es decir, que si las ecuaciones $Ax+By=C$ y $Cx+Dy=E$ tienen distintas soluciones entonces sólo tienen una solución en común.

Ejemplo. ¿Como sabemos que las rectas $2x+3y=4$ y $5x+6y=7$ sólo tienen una solución común?

Un modelo del plano euclidiano

Definimos la distancia entre 2 puntos en R^2 como

$$d((x_1,y_1),(x_2,y_2)) = \sqrt{(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2}$$

con esto quedan definidos también los círculos.

Al modelo del plano euclidiano construido a partir de
$R^2 = \{(x,y) \ / \ x,y \ T \ R\}$ se le llama el **plano cartesiano**.

Ecuaciones y curvas

Descartes y Fermat observaron que al usar coordenadas muchos problemas geométricos podían transformarse en problemas algebraicos y viceversa. Al estudio de la geometría usando coordenadas y álgebra se le conoce como geometría *analítica*.

Ecuaciones y curvas

Descartes y Fermat observaron que al usar coordenadas muchos problemas geométricos podían transformarse en problemas algebraicos y viceversa. Al estudio de la geometría usando coordenadas y álgebra se le conoce como geometría *analítica*.

Mientras que Descartes buscaba hallar ecuaciones para las curvas conocidas, Fermat procedió al revés, al partir de ecuaciones algebraicas y tratar de hallar que forma geométrica tenían sus soluciones.

Ecuaciones y curvas

El conjunto de soluciones de una ecuación es usualmente una curva, pero puede ser otras cosas, como un punto, o nada.

Ecuaciones y curvas

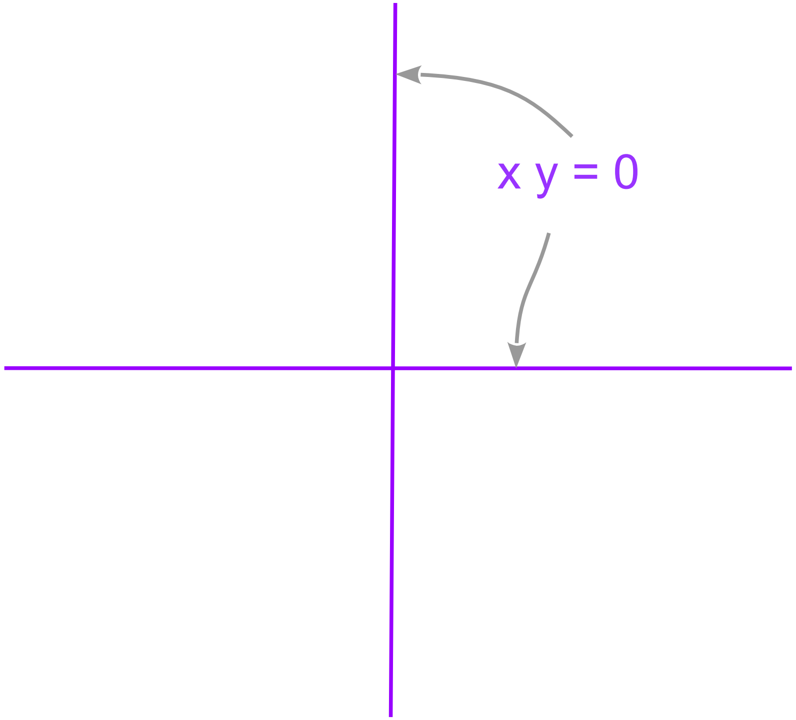
El conjunto de soluciones de una ecuación es usualmente una curva, pero puede ser otras cosas, como un punto, o nada.

Saber la forma de una curva a partir de la ecuación puede ser muy difícil, a menos que la ecuación sea sencilla y podamos manipularla para llevarla a una ecuación ya conocida, o a una ecuación donde podamos “ver” la propiedad geométrica que encierra.

Ejemplo.

¿Como son las soluciones de la ecuación $xy = 0$?

$xy = 0$ equivale a que $x = 0$ o $y = 0$, que son dos rectas



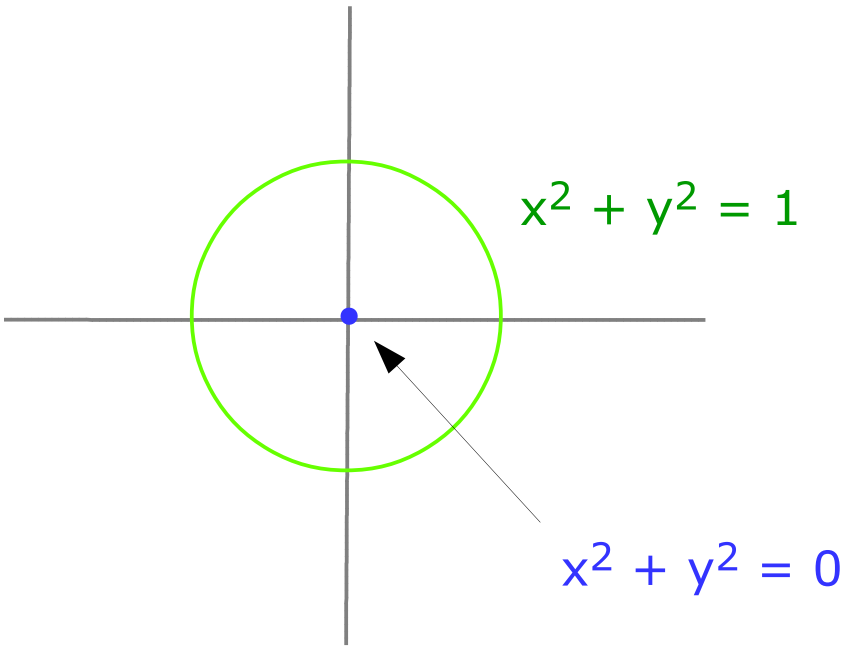
Ejemplo.

¿Como son las soluciones de las ecuaciones $x^2 + y^2 = r$?

$x^2 + y^2 = 1$ es un circulo de radio 1.

$x^2 + y^2 = 0$ equivale a que $x = 0$ y $y = 0$, que es un punto

$x^2 + y^2 = -1$ el vacío (la ecuación no tiene ninguna solución



Ejercicio: ¿Que forma tendrán estas curvas?

$x^3 + y^3 = 1$ $x^4 + y^4 = 1$

Ejercicio: ¿Que forma tendrán estas curvas?

$$x^3 + y^3 = 1 \qquad\qquad x^4 + y^4 = 1$$

Aun si saber su forma (que es la tarea), podemos decir que el conjunto de soluciones de $x^4 + y^4 = 1$ es *simétrico respecto al eje* y, ya que al cambiar x por -x la ecuación queda igual, y también que es simétrico respecto al eje x, ya que al cambiar y por -y la ecuación queda igual.

Ejercicio: ¿Que forma tendrán estas curvas?

$$x^3 + y^3 = 1 \qquad\qquad x^4 + y^4 = 1$$

Aun si saber su forma (que es la tarea), podemos decir que el conjunto de soluciones de $x^4 + y^4 = 1$ es *simétrico respecto al eje* y, ya que al cambiar x por -x la ecuación queda igual, y también que es simétrico respecto al eje x, ya que al cambiar y por -y la ecuación queda igual.

No sucede lo mismo con $x^3 + y^3 = 1$, al cambiar x por -x se convierte en $-x^3 + y^3 = 1$ y al cambiar y por -y se convierte en $x^3 - y^3 = 1$.

Así que la curva *no es simétrica respecto a ninguno de los ejes.*

Algebra y geometría

La geometría analítica forma un puente entre el álgebra y la geometría: permite traducir problemas geométricos en problemas algebraicos y viceversa, dándoles una perspectiva distinta.

Ejemplo.

¿Existen dos números reales tales que su suma sea 6 y su producto sea 7?

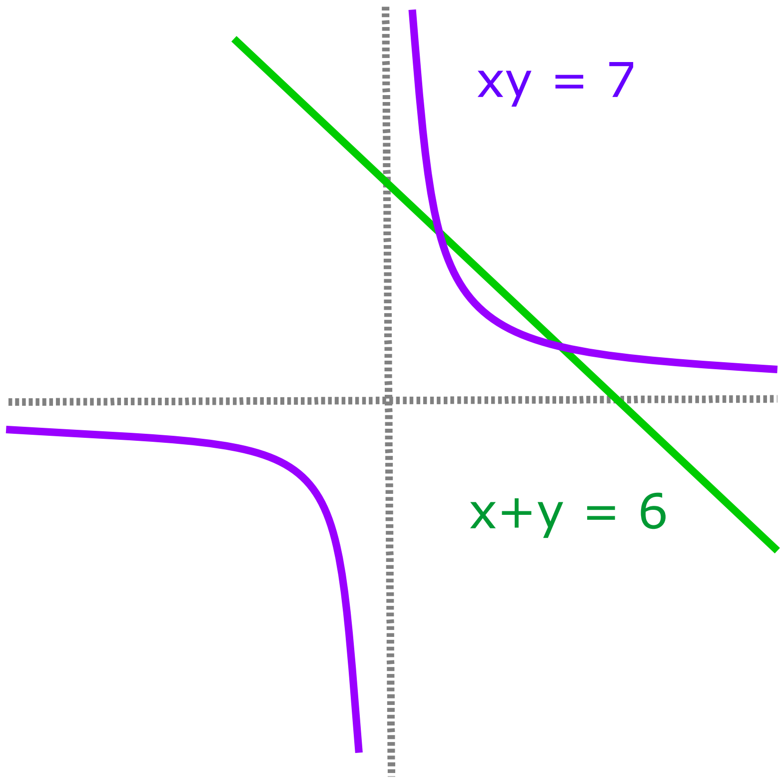
Si los números son x y y, la primera condición dice que $x+y = 6$ y la segunda que $xy = 7$.
Las soluciones del problema están dadas por los puntos de intersección de las dos curvas
$x+y = 5$ y $xy = 7$

En el dibujo se puede ver que hay dos soluciones

Ejemplo.

¿Existen dos números reales tales que su suma sea 6 y su producto sea 7?

Si los números son x y y, la primera condición dice que $x+y = 6$ y la segunda que $xy = 7$.
Las soluciones del problema están dadas por los puntos de intersección de las dos curvas
$x+y = 5$ y $xy = 7$



En el dibujo se puede ver que hay dos soluciones

Ejemplo.

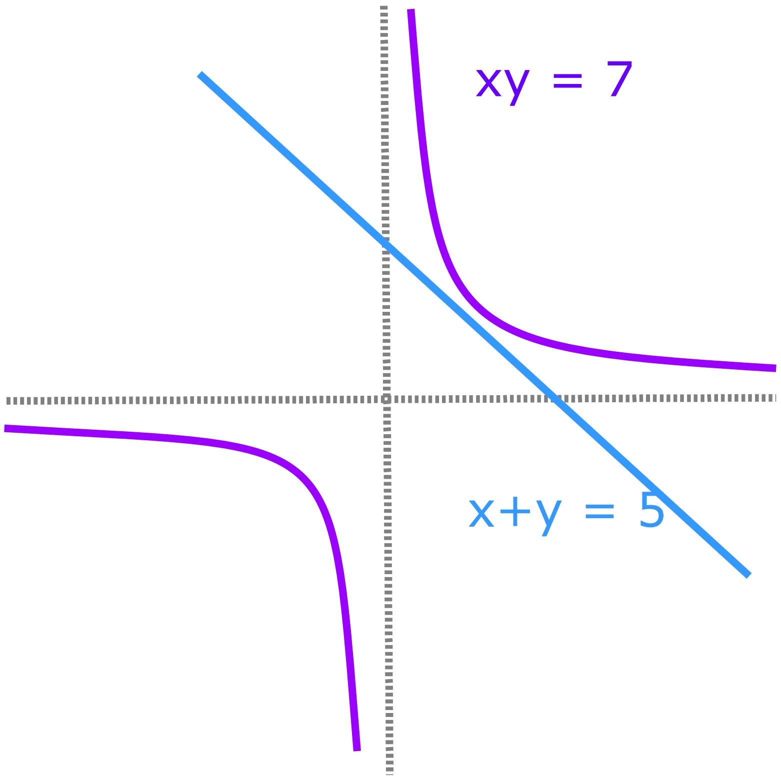
¿Existen dos números reales cuya suma sea 5 y su producto sea 7?

No, porque la línea $x+y = 5$ y la curva $xy = 7$ no se intersectan.

Ejemplo.

¿Existen dos números reales cuya suma sea 5 y su producto sea 7?

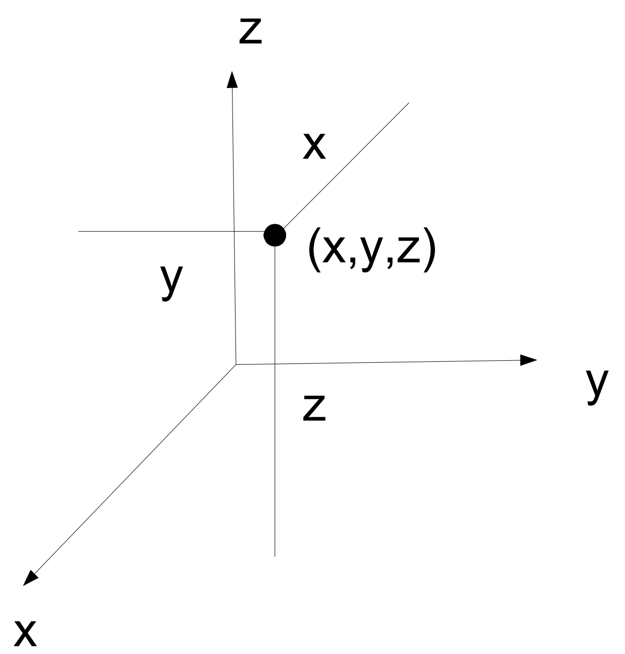
No, porque la línea $x+y = 5$ y la curva $xy = 7$ no se intersectan.



Coordenadas en el espacio euclidiano

Así como podemos modelar al plano euclidiano con el conjunto
R^2 = { (x,y) / x, y, z en R}
también podemos modelar al espacio euclidiano con el conjunto
R^3 = { (x,y,z) / x, y, z en R}

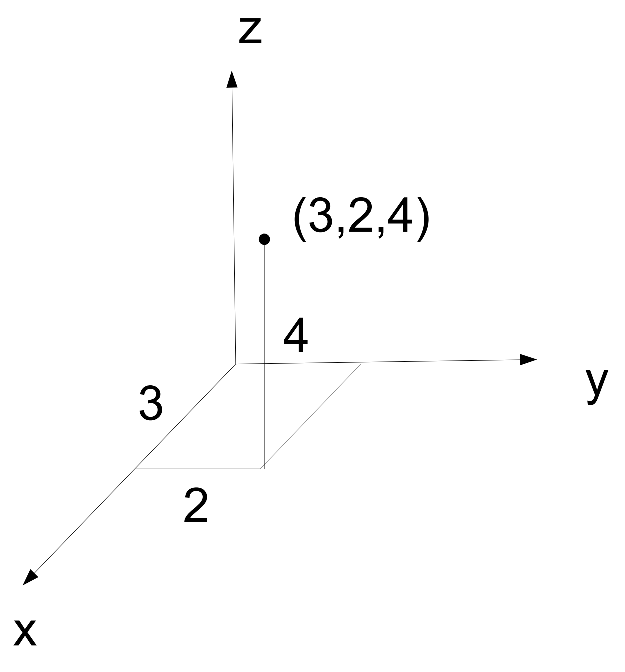
En este caso as coordenadas de un punto dan la distancia a 3 planos perpendiculares, cuyas intersecciones son los 3 ejes de coordenadas.



Coordenadas en el espacio euclidiano

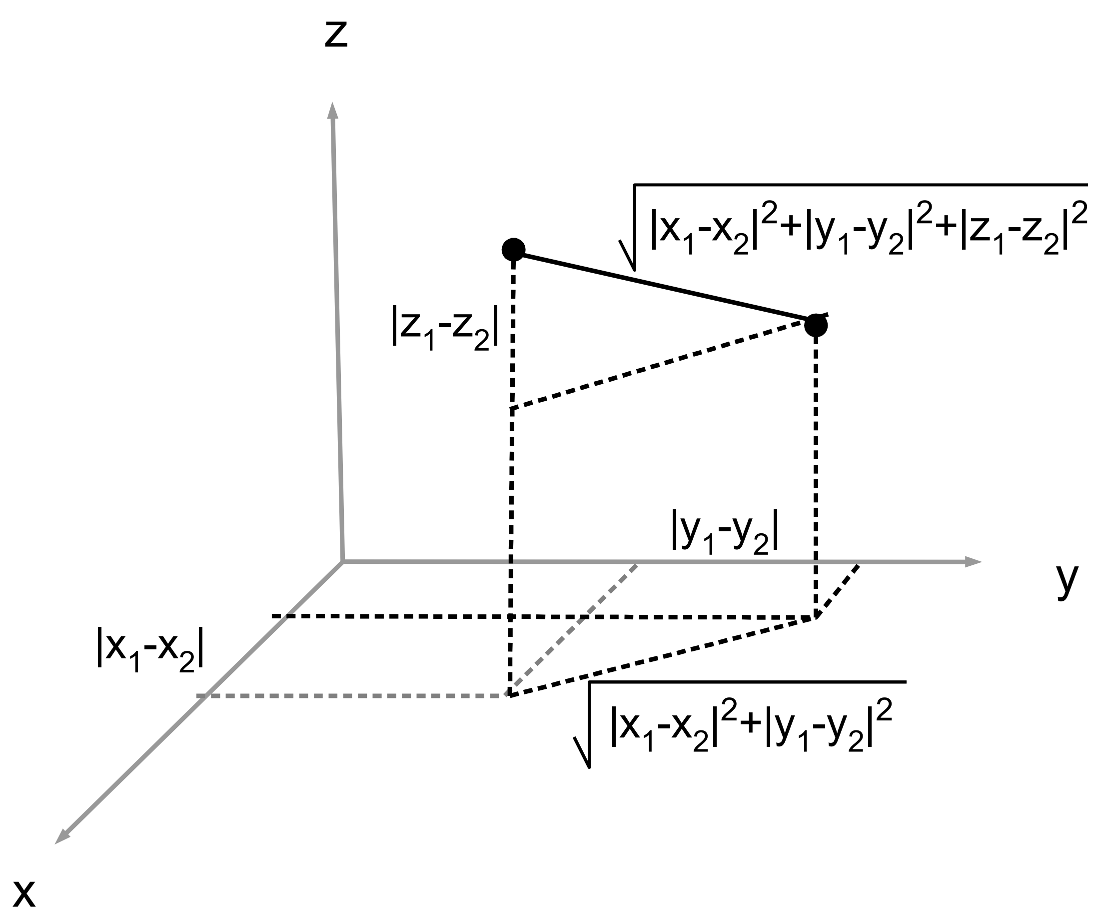
Así como podemos modelar al plano euclidiano con el conjunto
R^2 = { (x,y) / x, y, z en R}
también podemos modelar al espacio euclidiano con el conjunto
R^3 = { (x,y,z) / x, y, z en R}

En este caso as coordenadas de un punto dan la distancia a 3 planos perpendiculares, cuyas intersecciones son los 3 ejes de coordenadas.



¿Como se medirá la distancia entre 2 puntos

(x_1,y_1,z_1) y (x_2,y_2,z_2) ?



Ecuaciones en el espacio

Igual que en el plano cartesiano, en el espacio cartesiano podemos usar ecuaciones para expresar propiedades geométricas.

Ecuaciones en el espacio

Igual que en el plano cartesiano, en el espacio cartesiano podemos usar ecuaciones para expresar propiedades geométricas.

Ejemplos.

Las ecuaciones $x=0$ $y=2$ $z=-3$ corresponden a planos formados por los puntos a distancia fija de los planos coordenados.

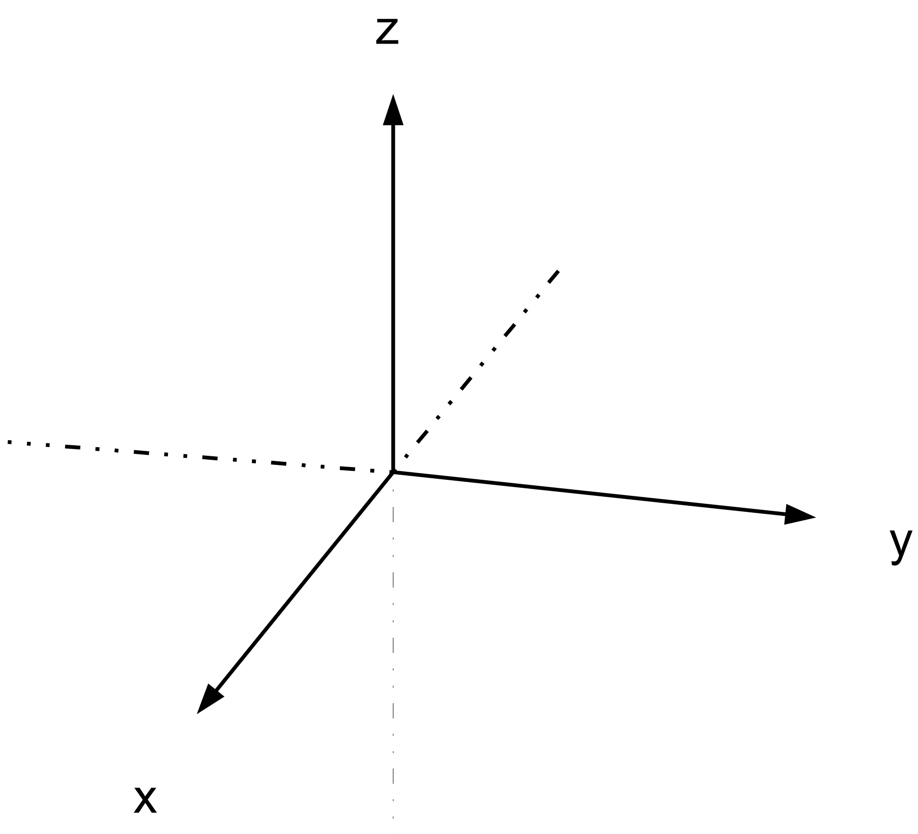
La ecuación $x^2+y^2+z^2 = 9$ corresponde a una esfera de radio 3 centrada en el origen.

Ecuaciones en el espacio

Así como las ecuaciones en dos variables x,y corresponden usualmente curvas en el plano (aunque también pueden corresponder a puntos o al vacío), las ecuaciones en 3 variables x,y,z corresponden usualmente a *superficies* (aunque también pueden corresponder a curvas, puntos o al vacío)

Ecuaciones en el espacio

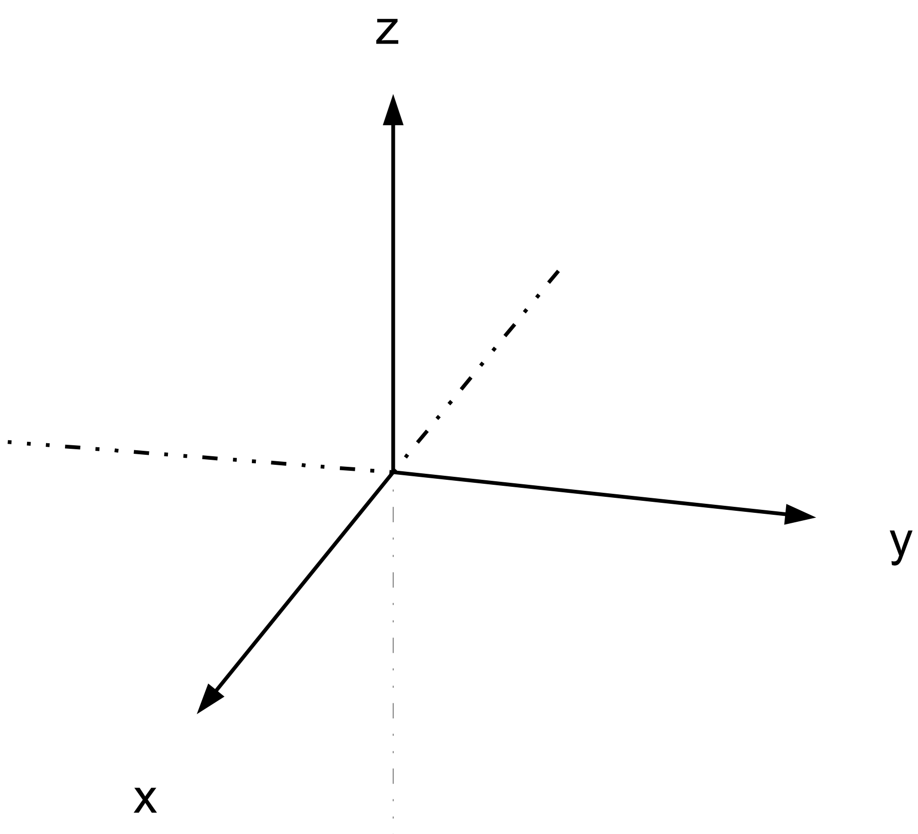
¿Que representan las ecuaciones en R^3?



Ecuaciones en el espacio

¿Que representan las ecuaciones en R^3?

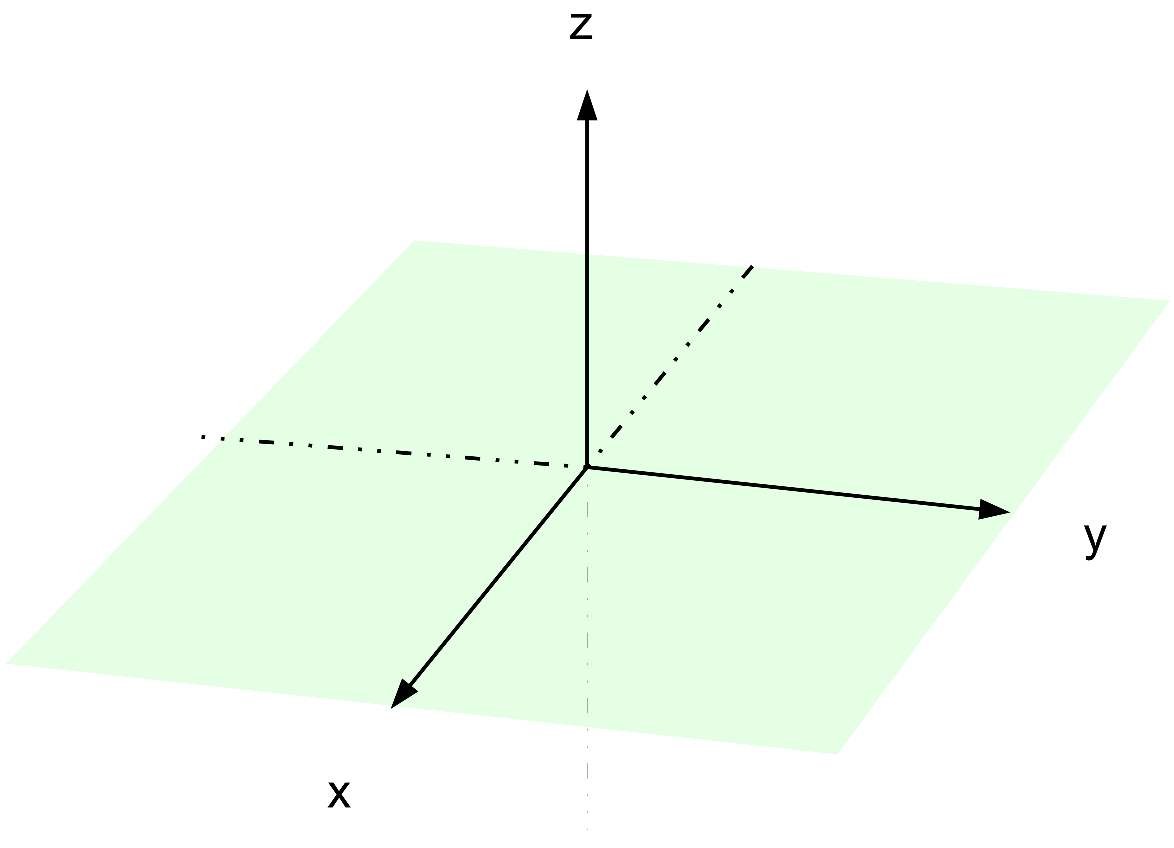
$z = 0$



Ecuaciones en el espacio

¿Que representan las ecuaciones en R^3?

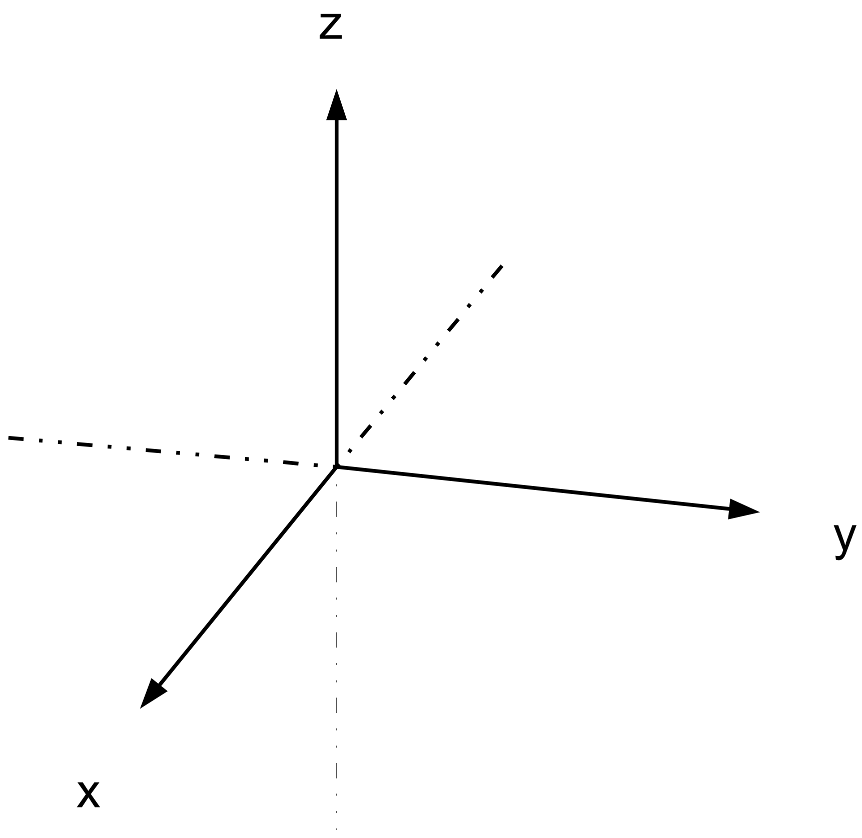
$z = 0$



Ecuaciones en el espacio

¿Que representan las ecuaciones en R^3?

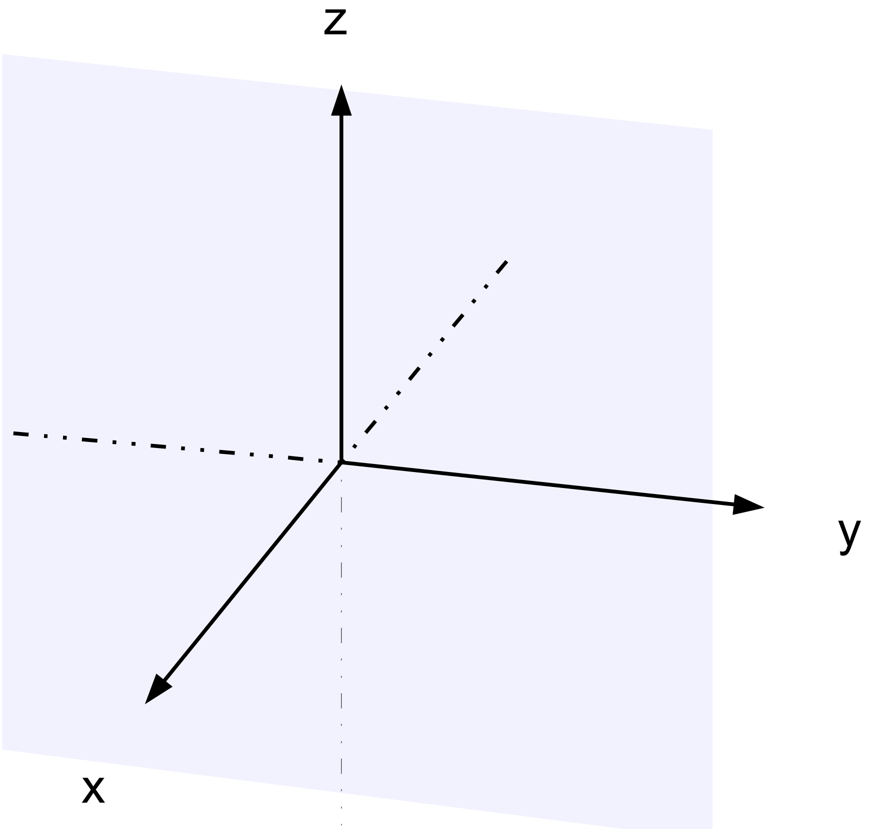
$x = 0$



Ecuaciones en el espacio

¿Que representan las ecuaciones en R^3?

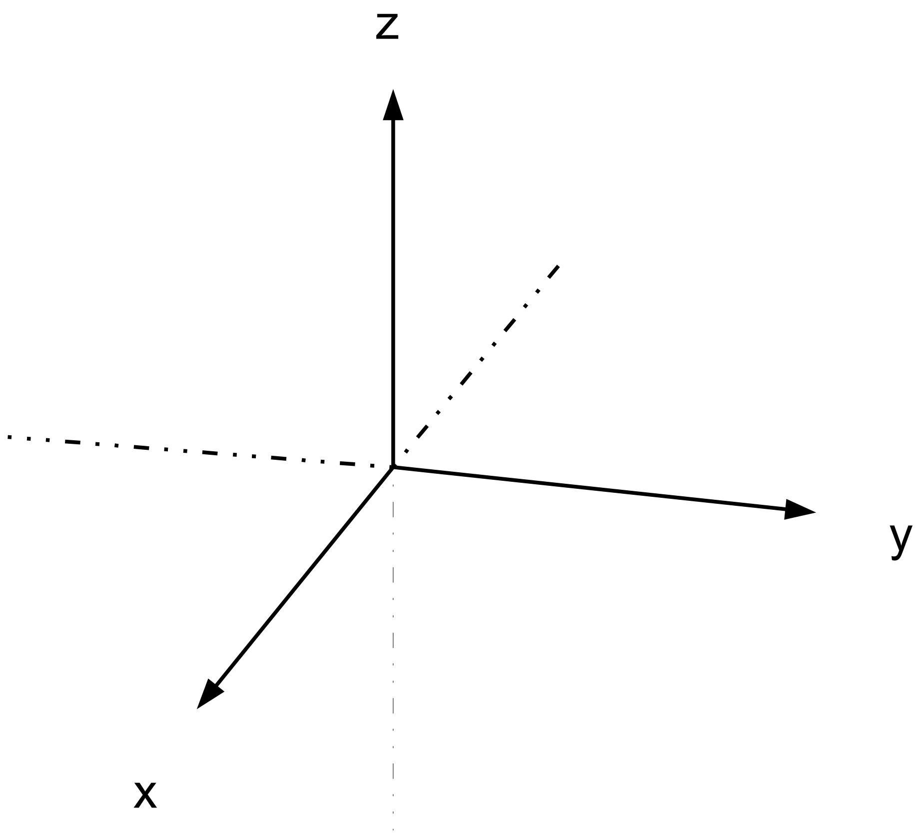
$x = 0$



Ecuaciones en el espacio

¿Que representan las ecuaciones en R^3?

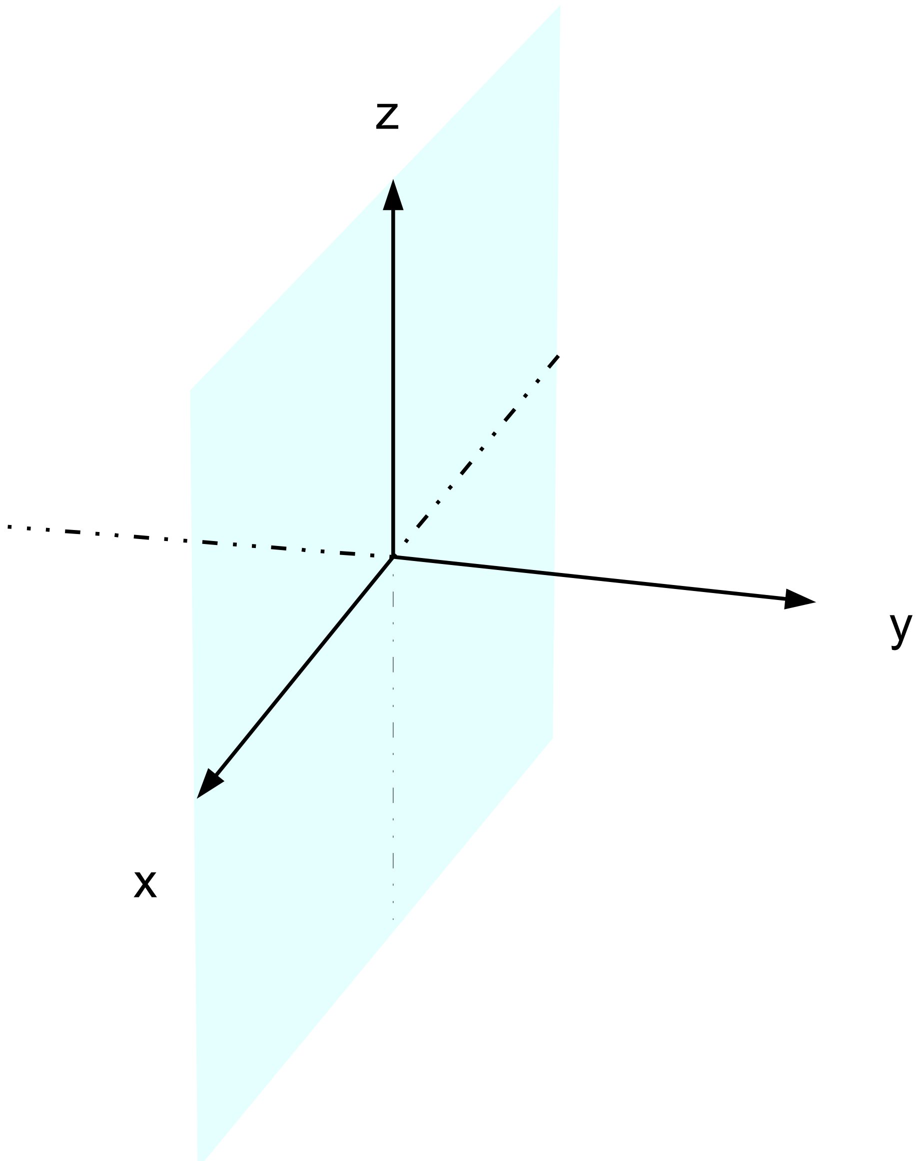
$y = 0$



Ecuaciones en el espacio

¿Que representan las ecuaciones en R^3?

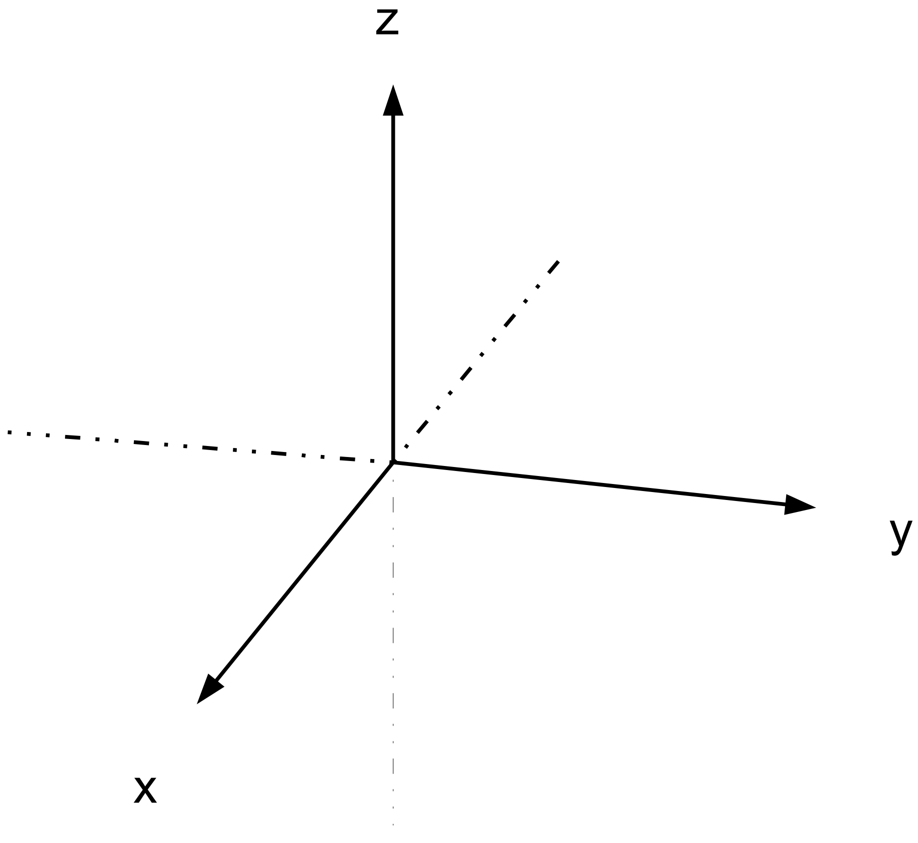
$y = 0$



Ecuaciones en el espacio

¿Que representan las ecuaciones en R^3?

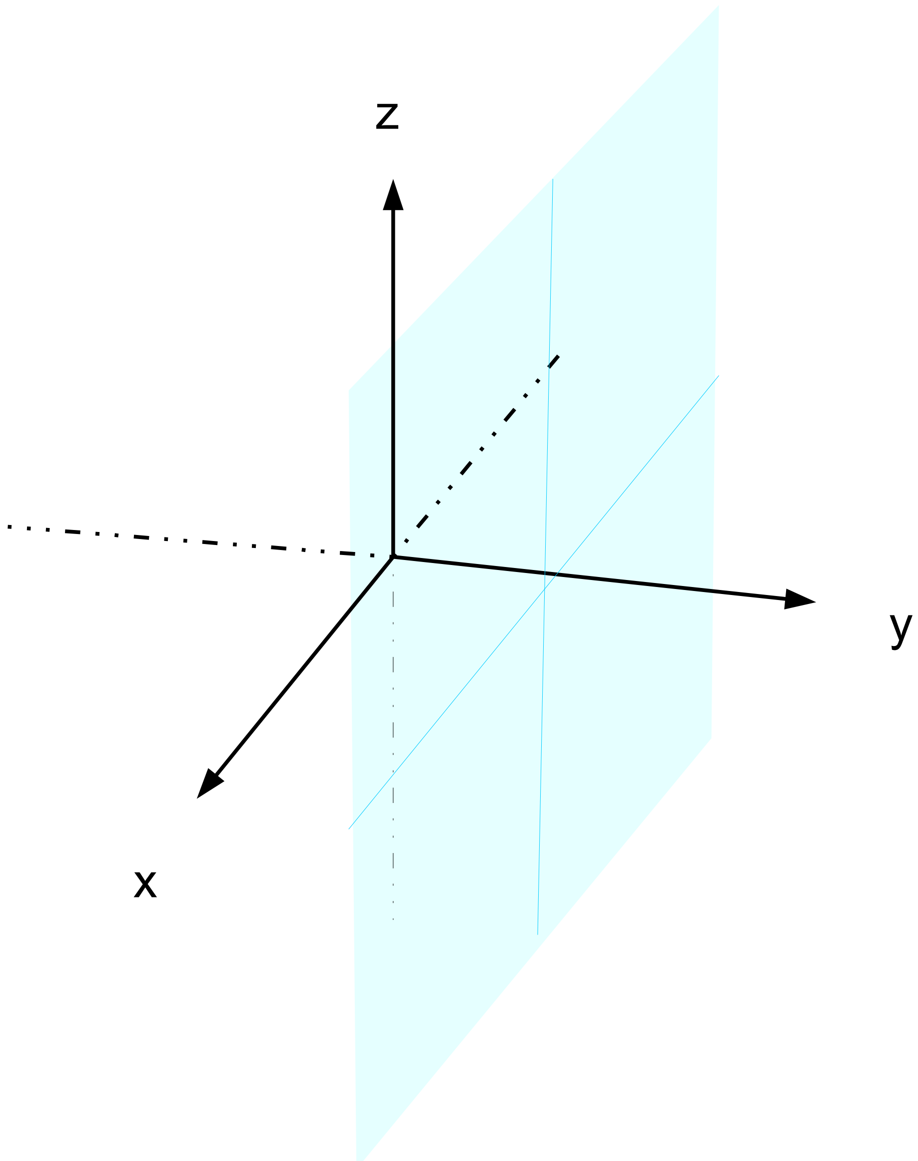
$y = 2$



Ecuaciones en el espacio

¿Que representan las ecuaciones en R^3?

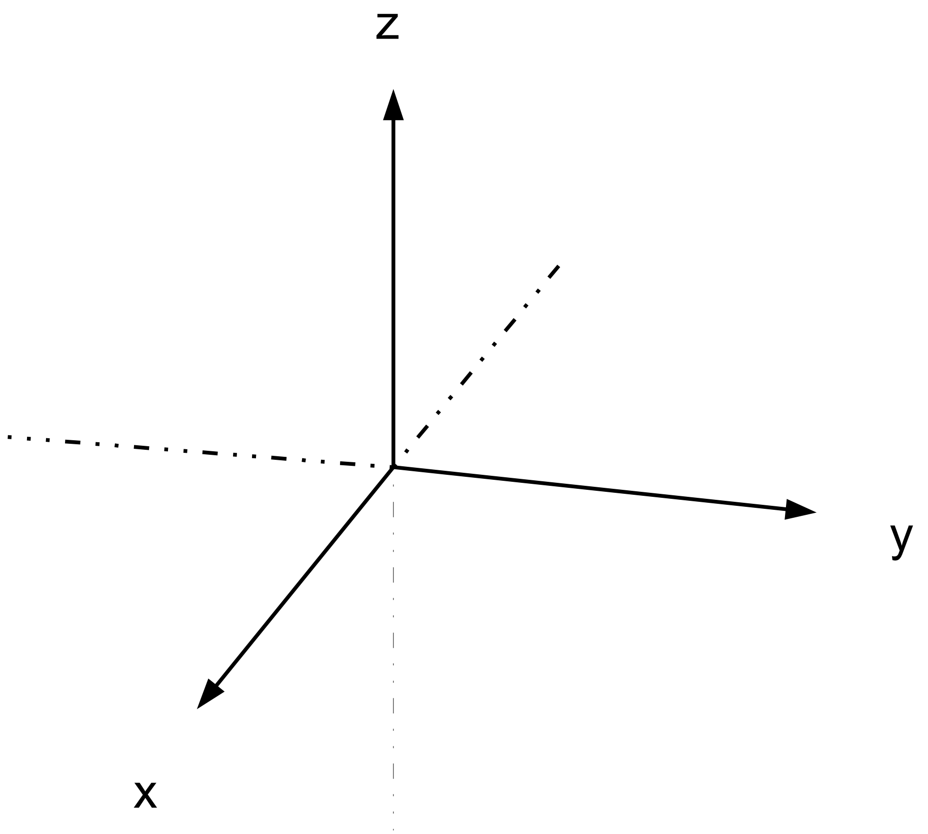
$y = 2$



Ecuaciones en el espacio

¿Que representan las ecuaciones en R^3?

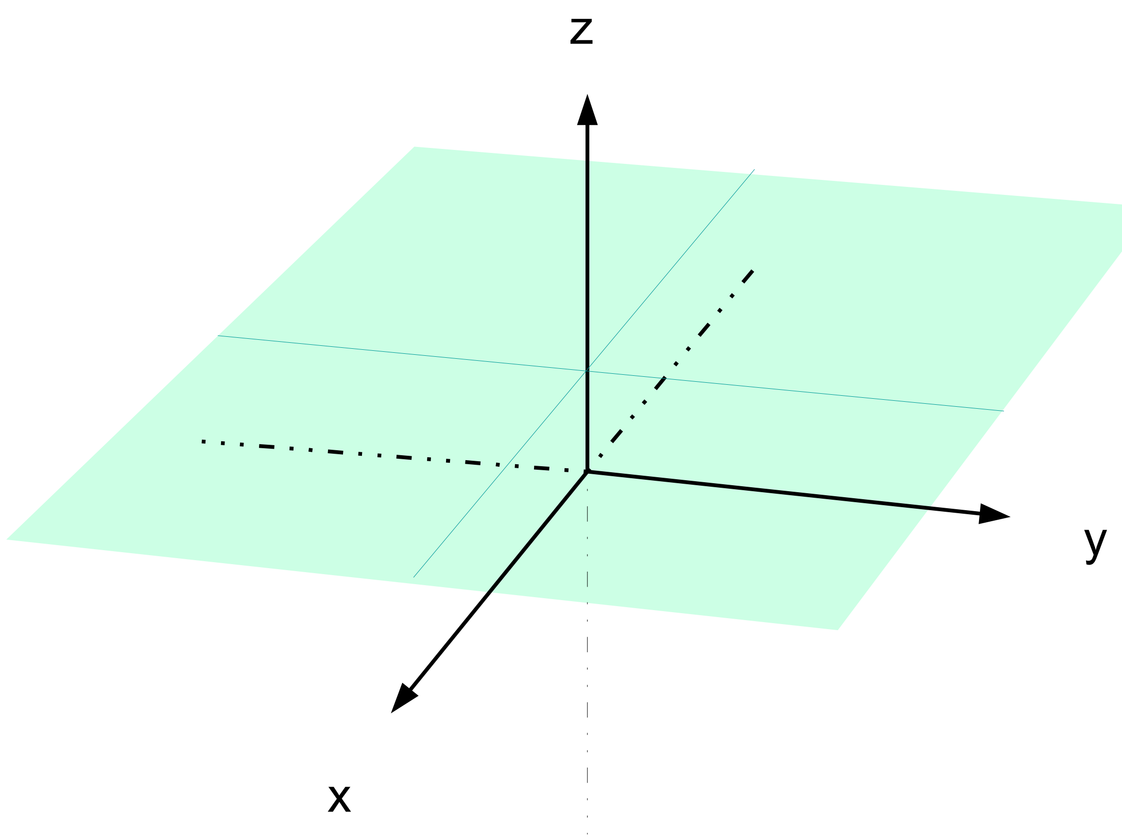
$z = 1$



Ecuaciones en el espacio

¿Que representan las ecuaciones en R^3?

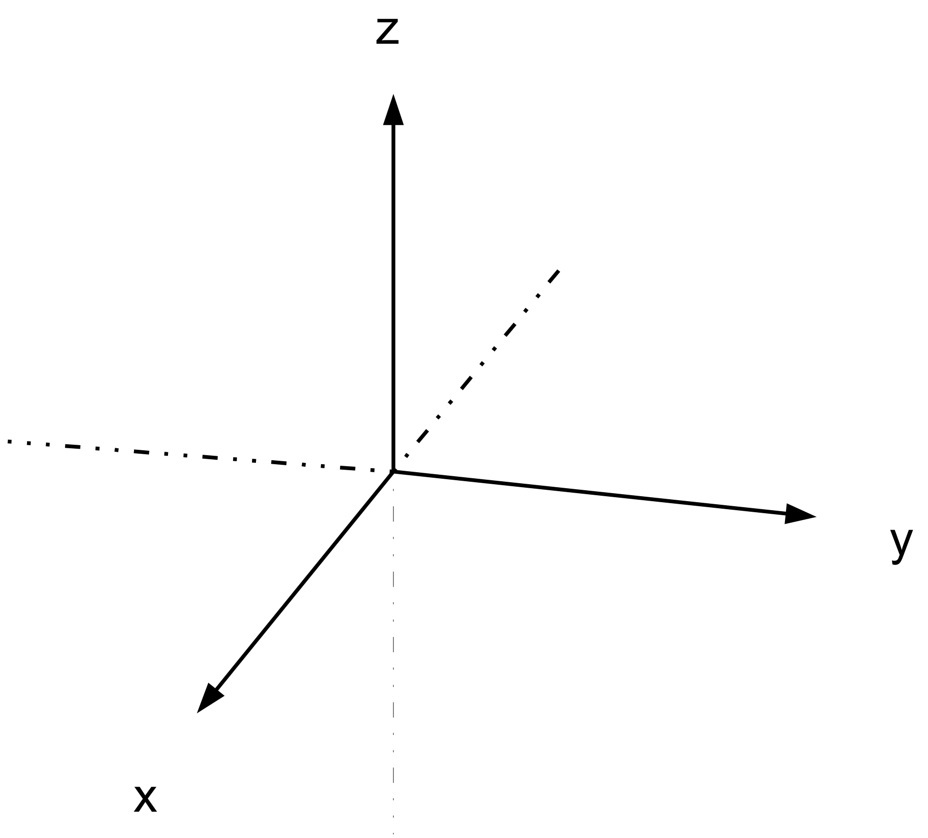
$z = 1$



Ecuaciones en el espacio

¿Que representan las ecuaciones en R^3?

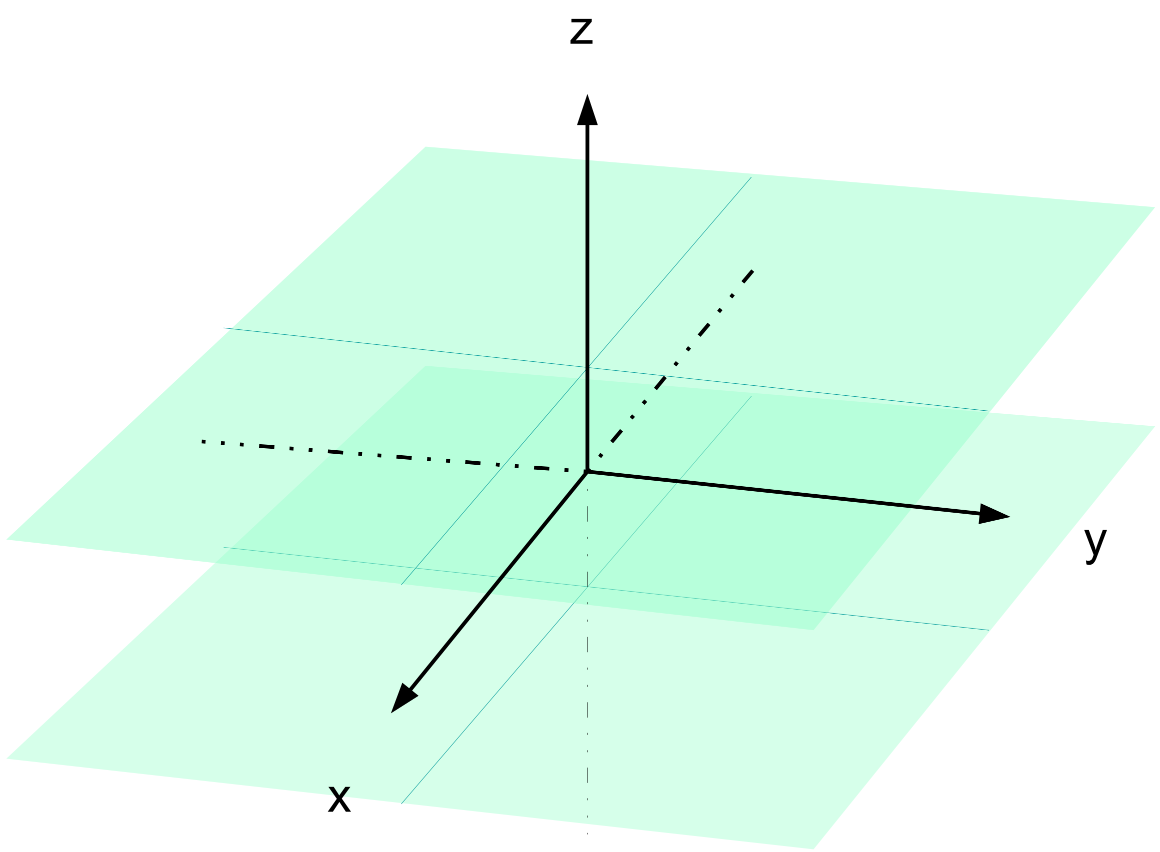
$z^2 = 1$



Ecuaciones en el espacio

¿Que representan las ecuaciones en R^3?

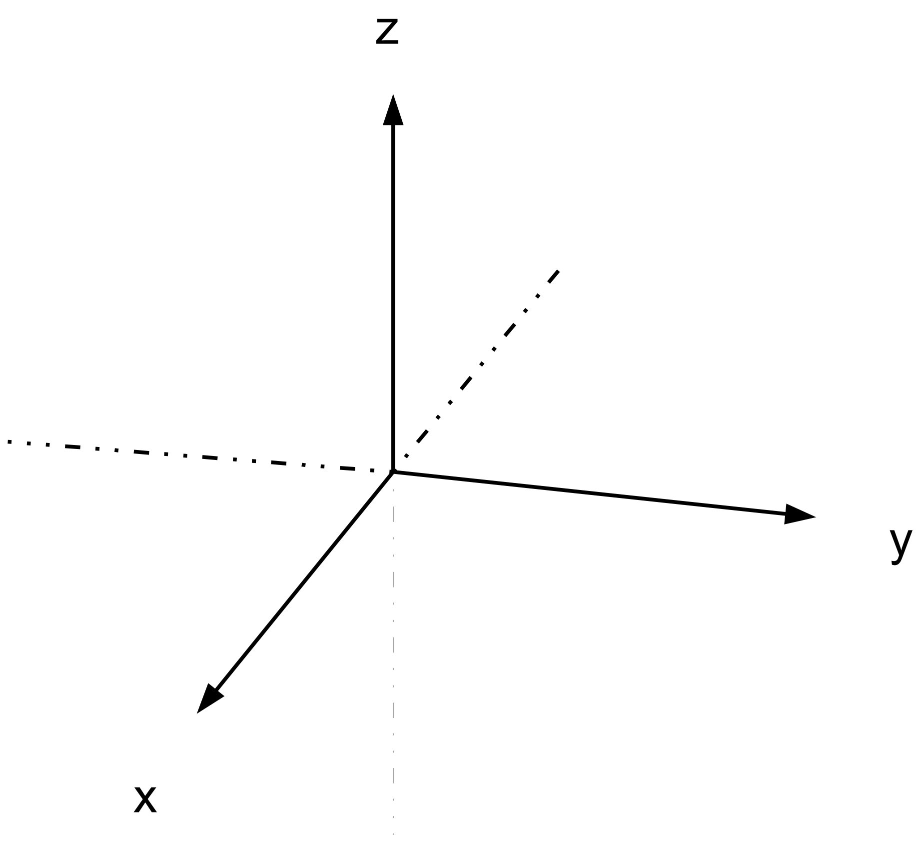
$z^2 = 1$



Ecuaciones en el espacio

¿Que representan las ecuaciones en R^3?

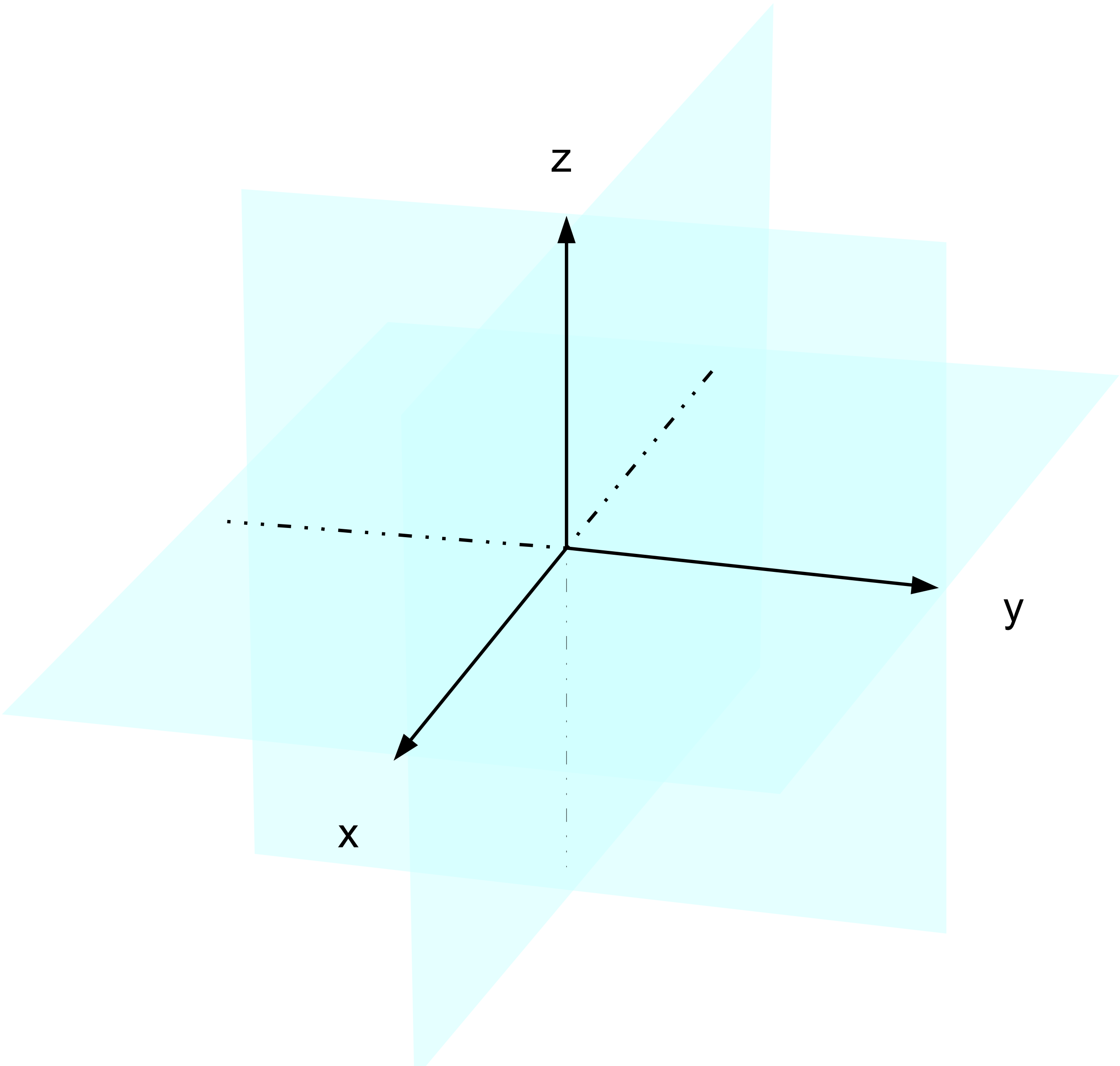
$xyz = 0$



Ecuaciones en el espacio

¿Que representan las ecuaciones en R^3?

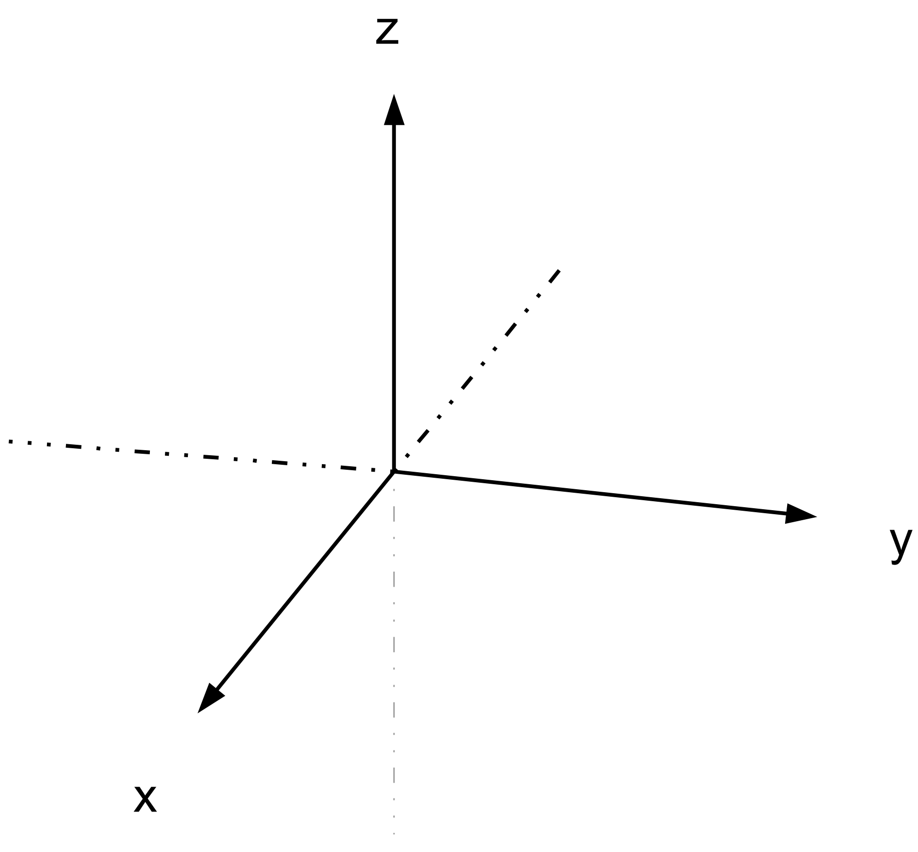
$xyz = 0$



Ecuaciones en el espacio

¿Que representan las ecuaciones en R^3?

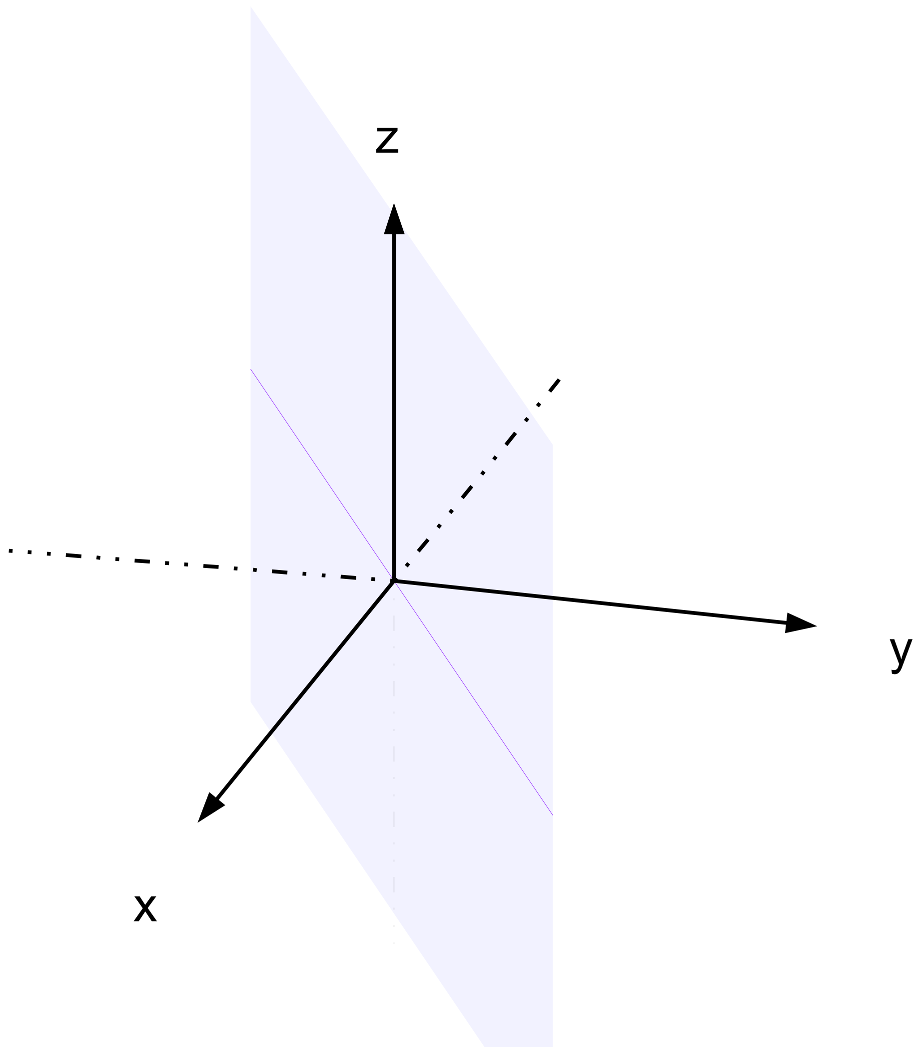
$x = y$



Ecuaciones en el espacio

¿Que representan las ecuaciones en R^3?

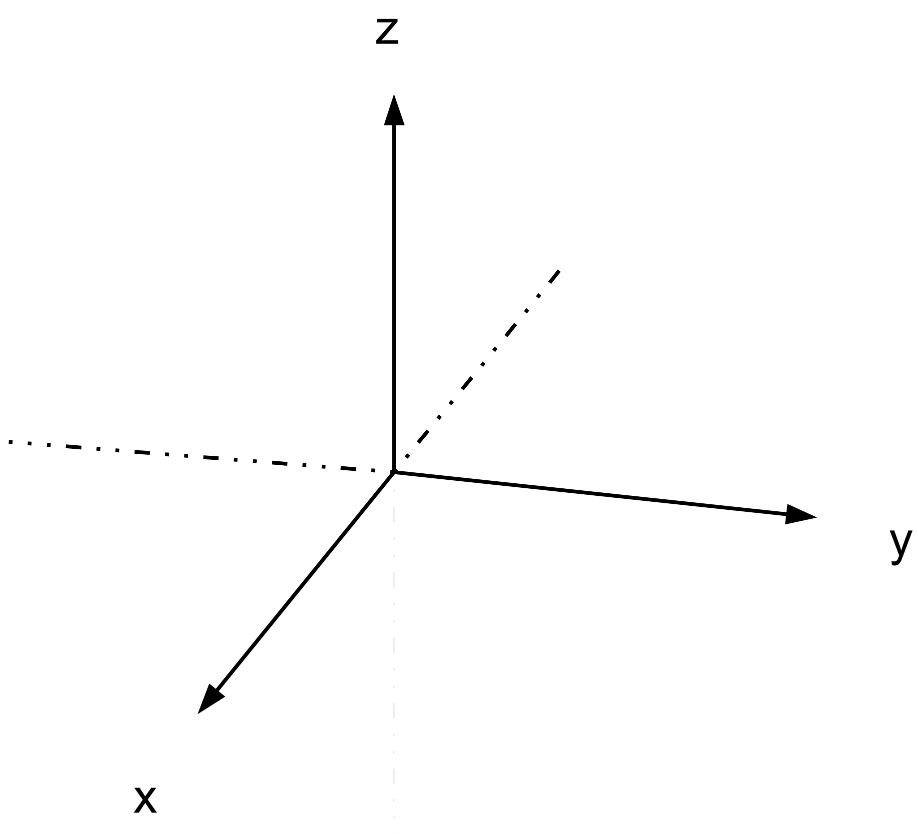
$x = y$



Ecuaciones en el espacio

¿Que representan las ecuaciones en R^3?

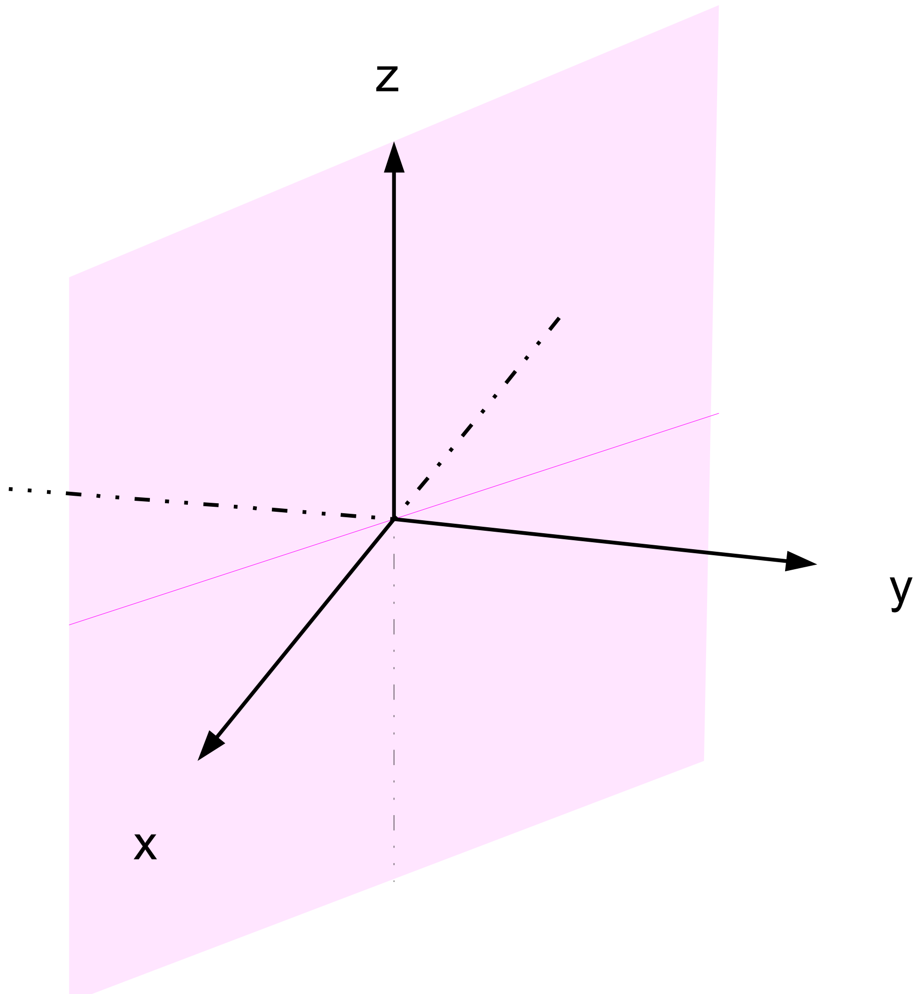
$x+y = 0$



Ecuaciones en el espacio

¿Que representan las ecuaciones en R^3?

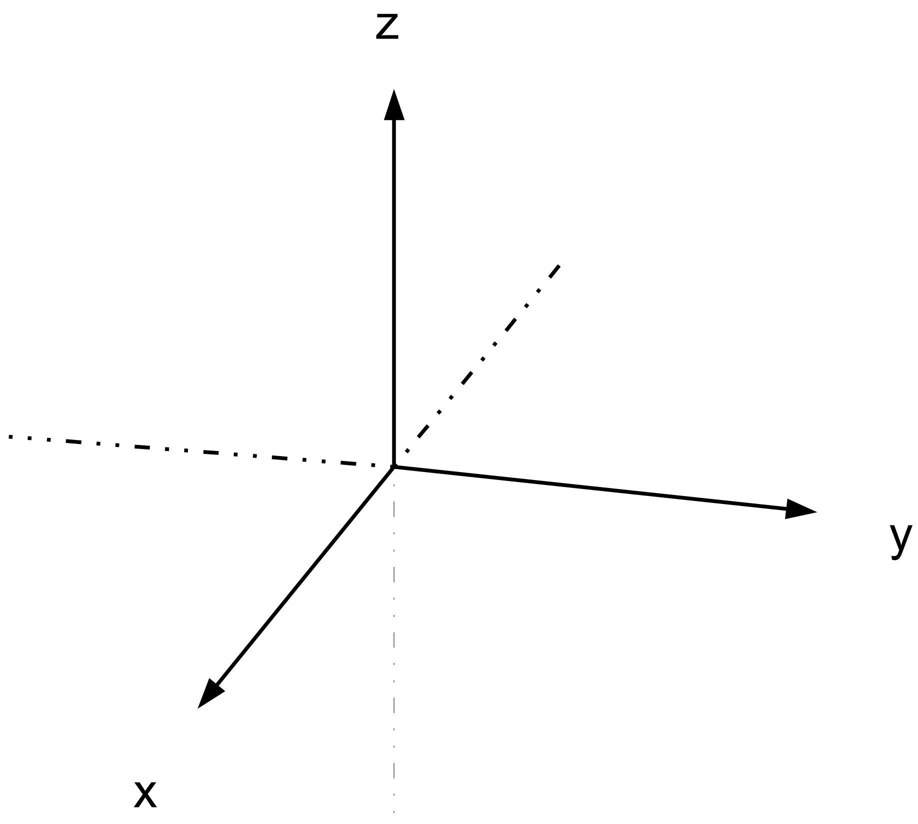
$x+y = 0$



Ecuaciones en el espacio

¿Que representan las ecuaciones en R^3?

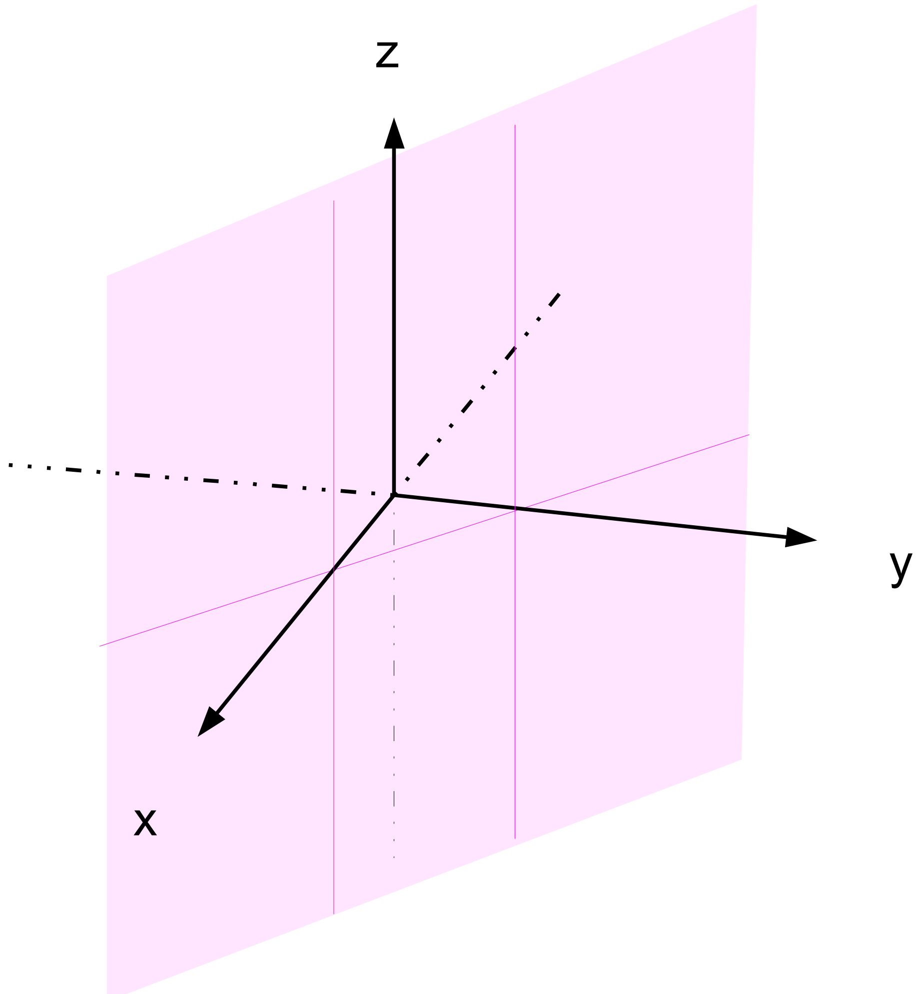
$x+y = 1$



Ecuaciones en el espacio

¿Que representan las ecuaciones en R^3?

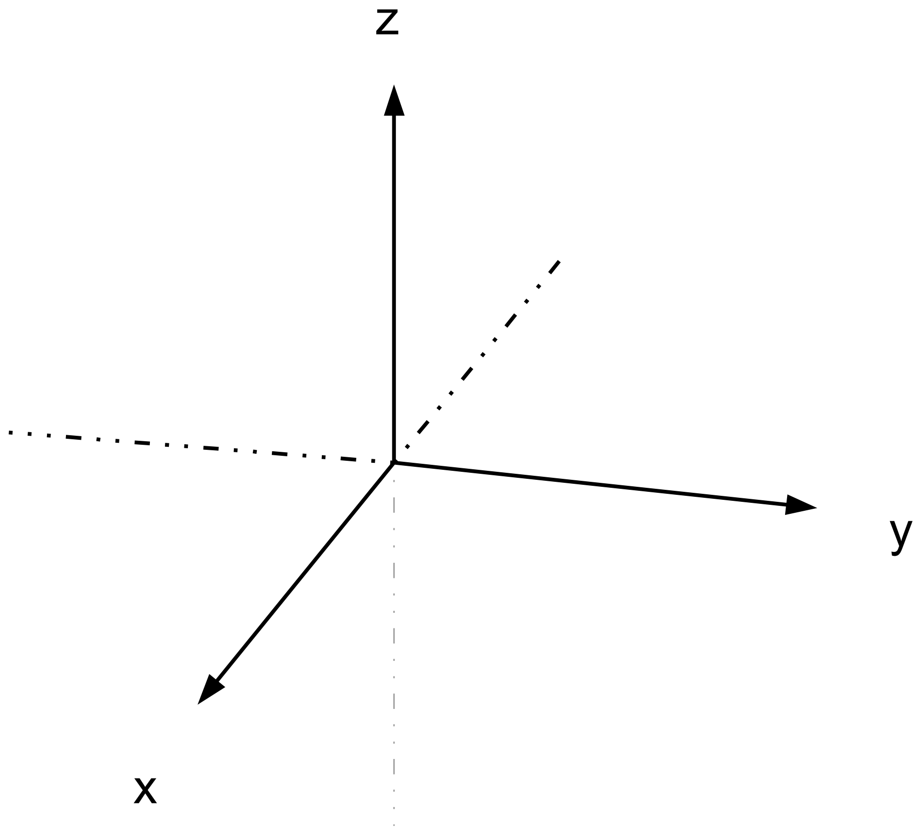
$x+y = 1$



Ecuaciones en el espacio

¿Que representan las ecuaciones en R^3?

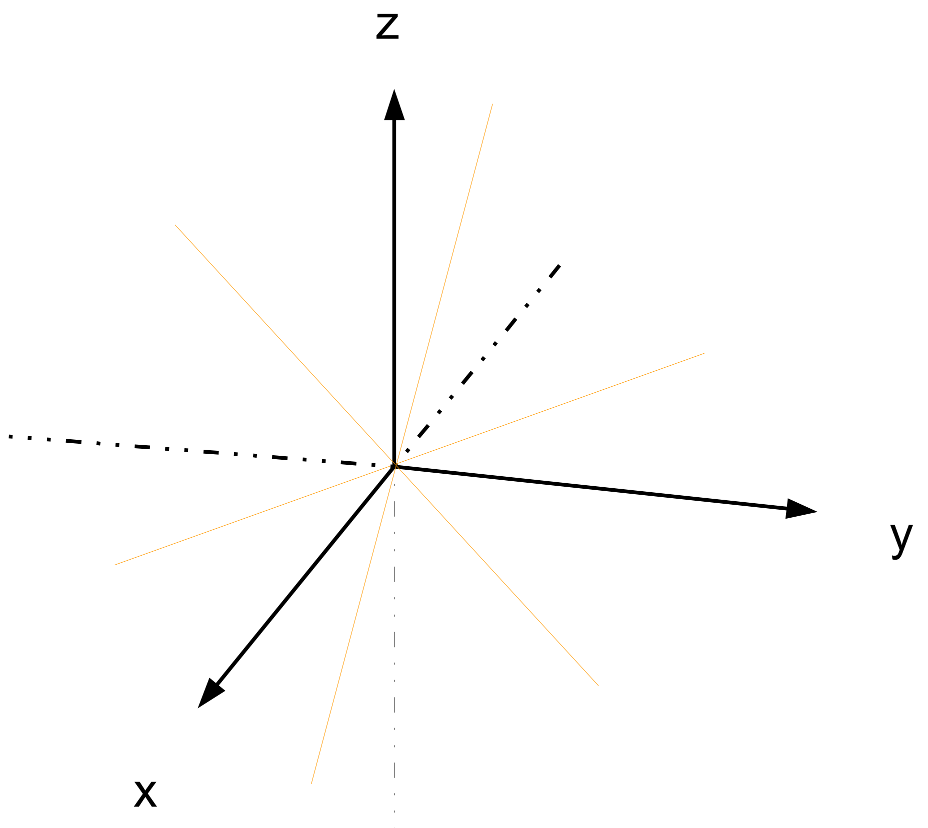
$x+y+z = 0$



Ecuaciones en el espacio

¿Que representan las ecuaciones en R^3?

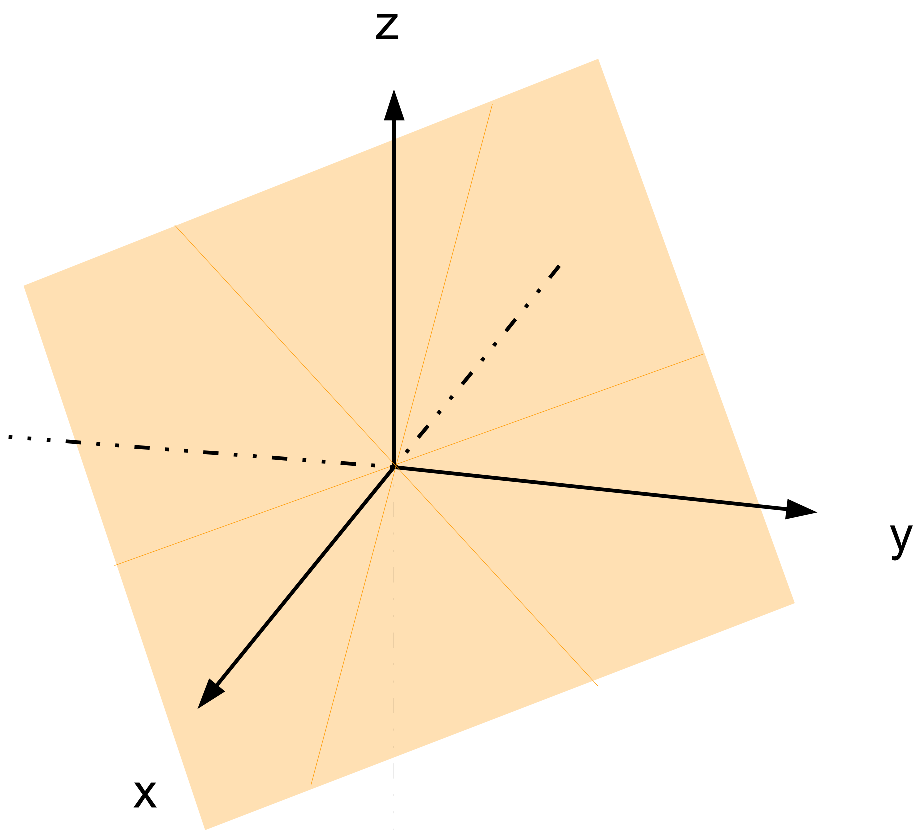
$x+y+z = 0$



Ecuaciones en el espacio

¿Que representan las ecuaciones en R^3?

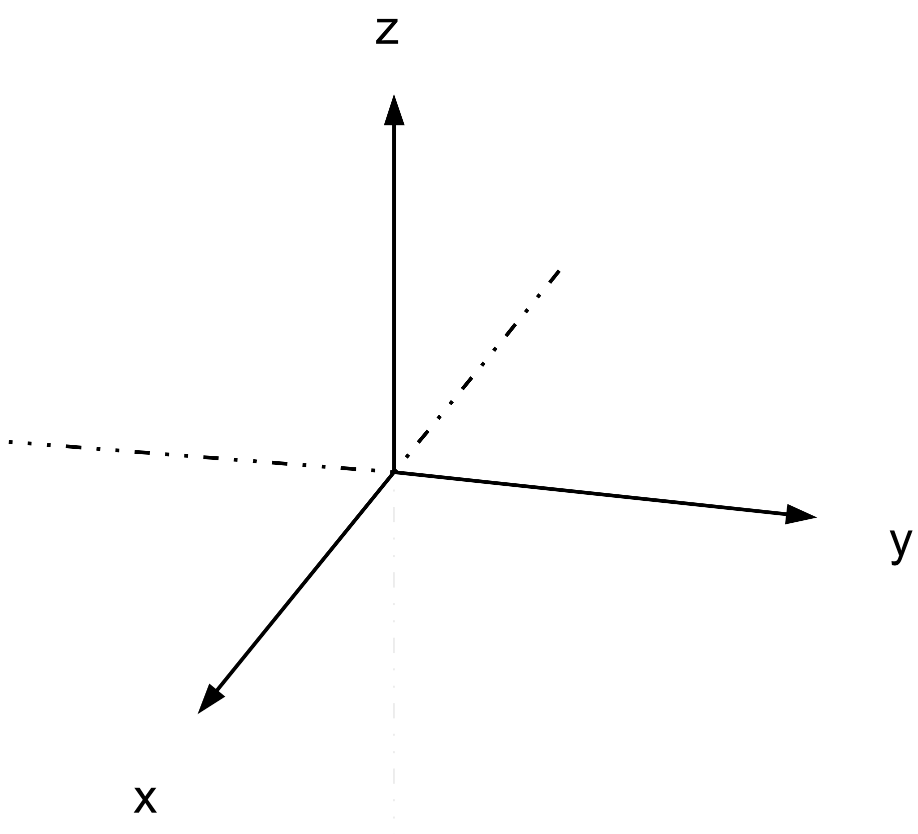
$x+y+z = 0$



Ecuaciones en el espacio

¿Que representan las ecuaciones en R^3?

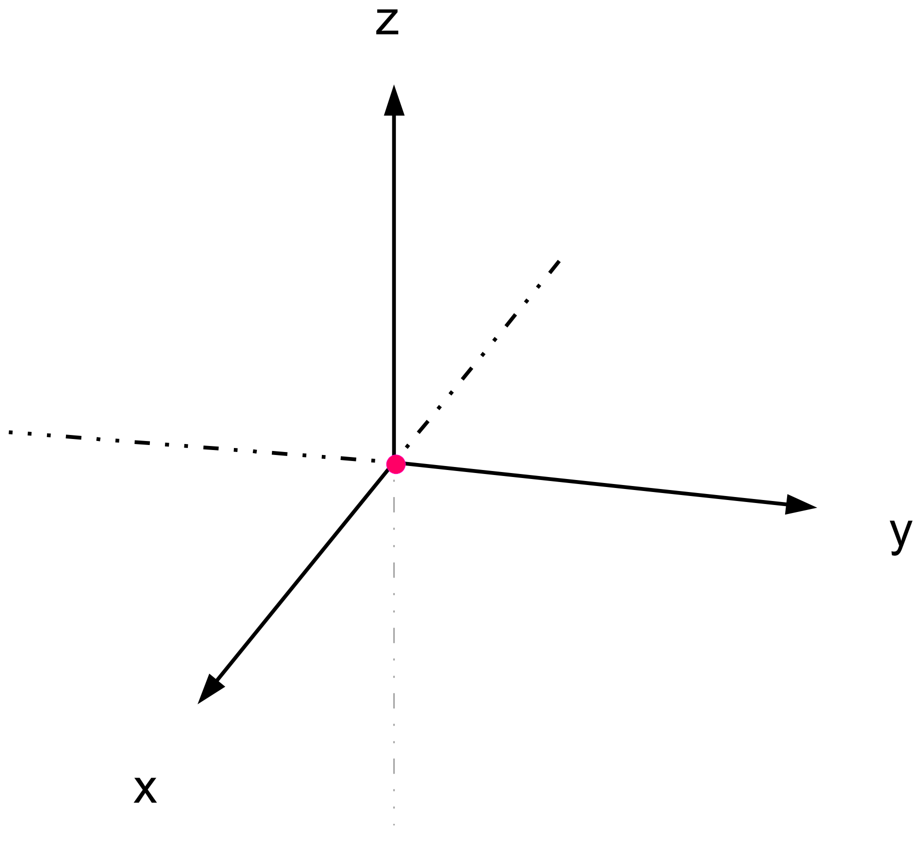
$x^2+y^2+z^2 = 0$



Ecuaciones en el espacio

¿Que representan las ecuaciones en R^3?

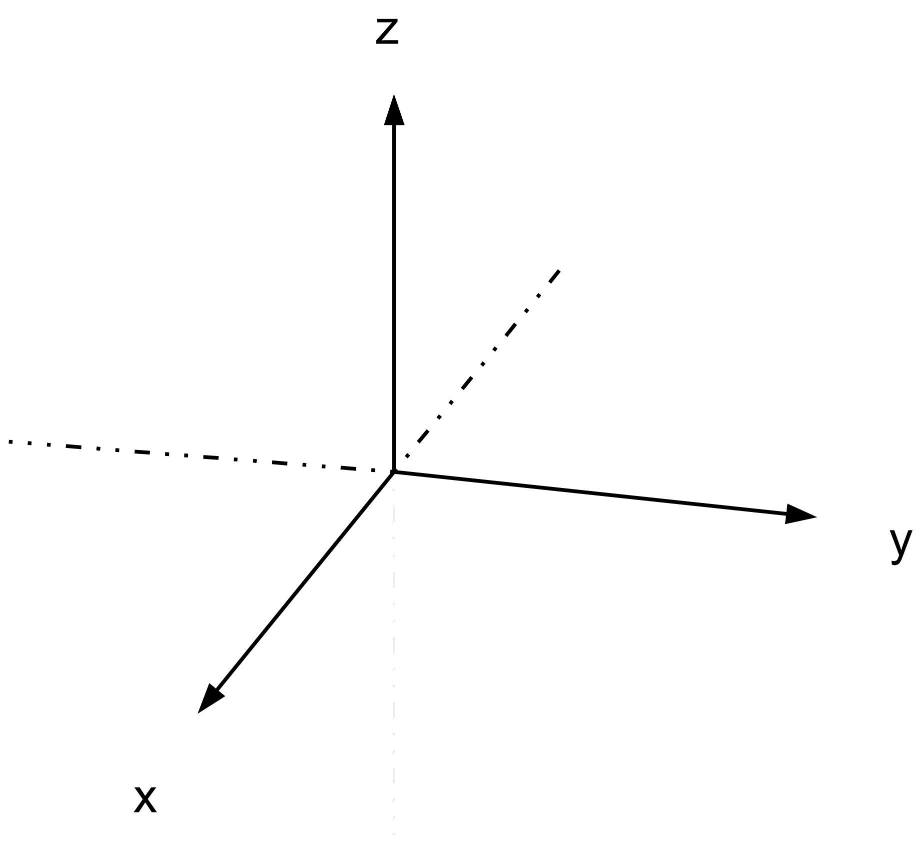
$x^2+y^2+z^2 = 0$



Ecuaciones en el espacio

¿Que representan las ecuaciones en R^3?

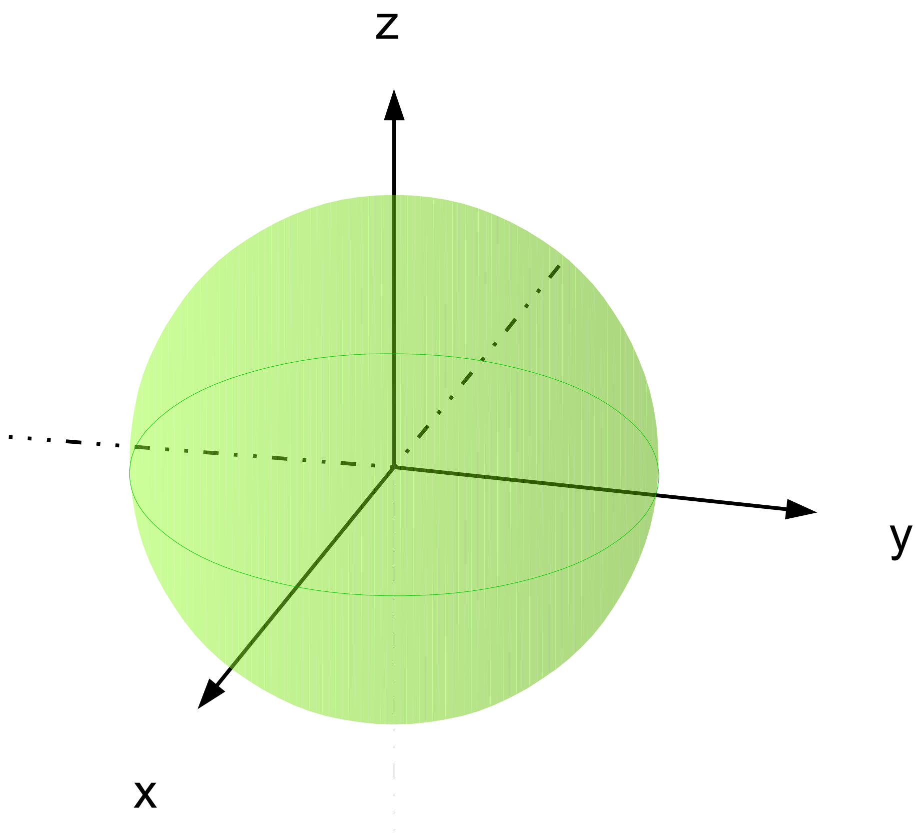
$x^2+y^2+z^2 = 9$



Ecuaciones en el espacio

¿Que representan las ecuaciones en R^3?

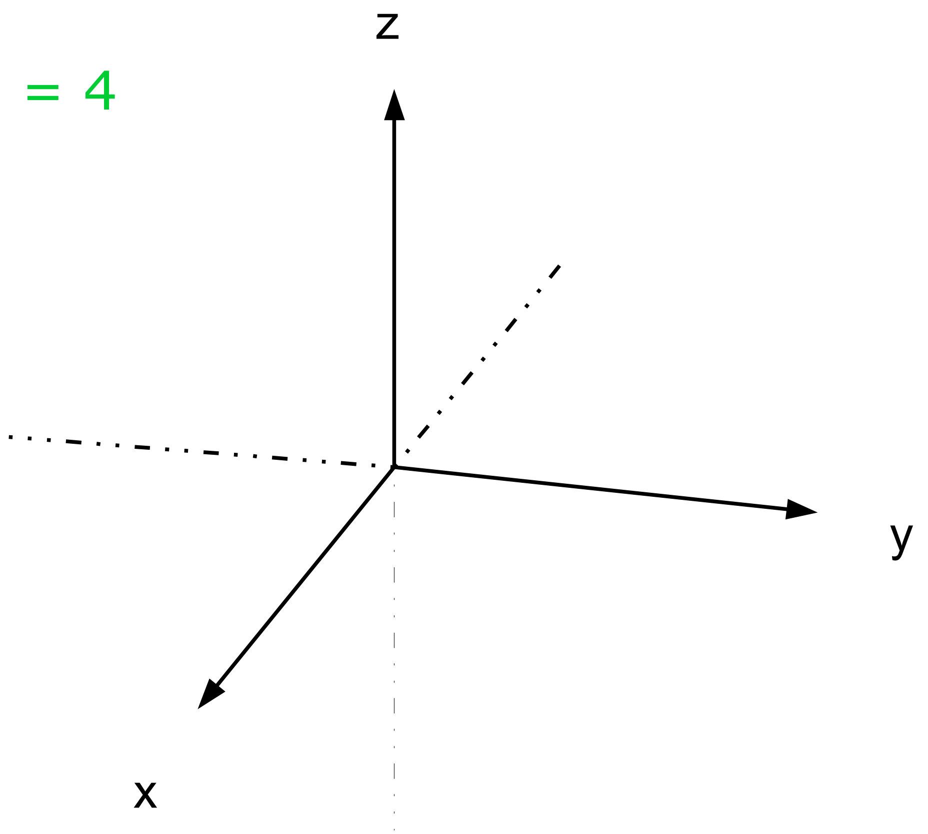
$x^2+y^2+z^2 = 9$



Ecuaciones en el espacio

¿Que representan las ecuaciones en R^3?

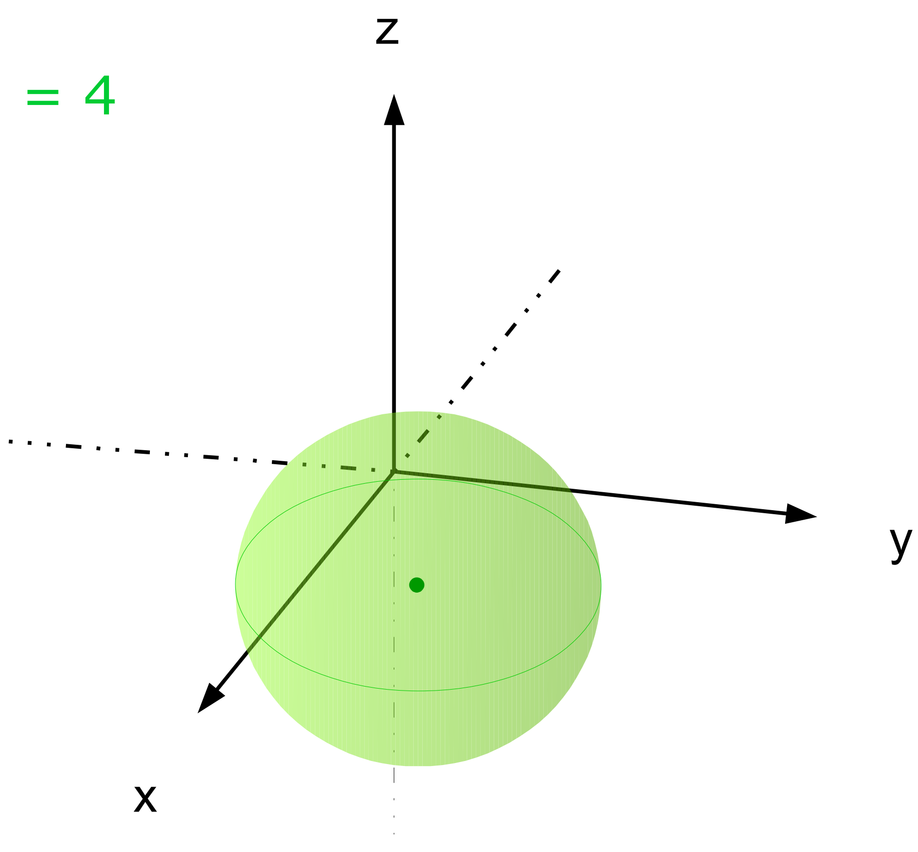
$(x-2)^2+(y-1)^2+z^2 = 4$



Ecuaciones en el espacio

¿Que representan las ecuaciones en R^3?

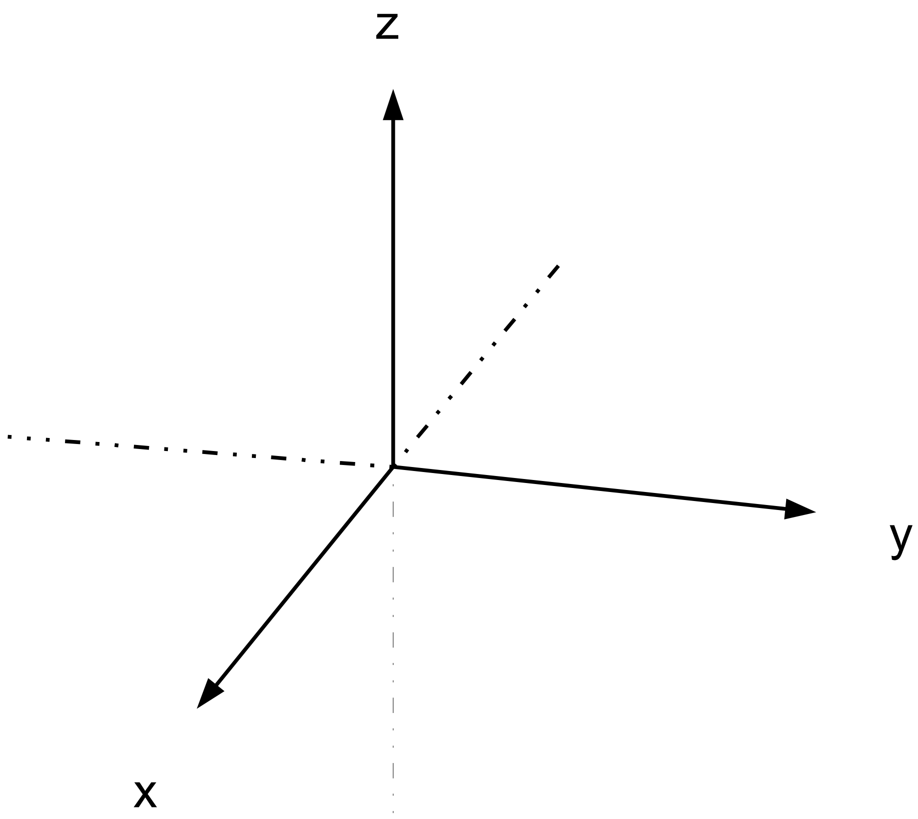
$(x-2)^2+(y-1)^2+z^2 = 4$



Ecuaciones en el espacio

¿Que representan las ecuaciones en R^3?

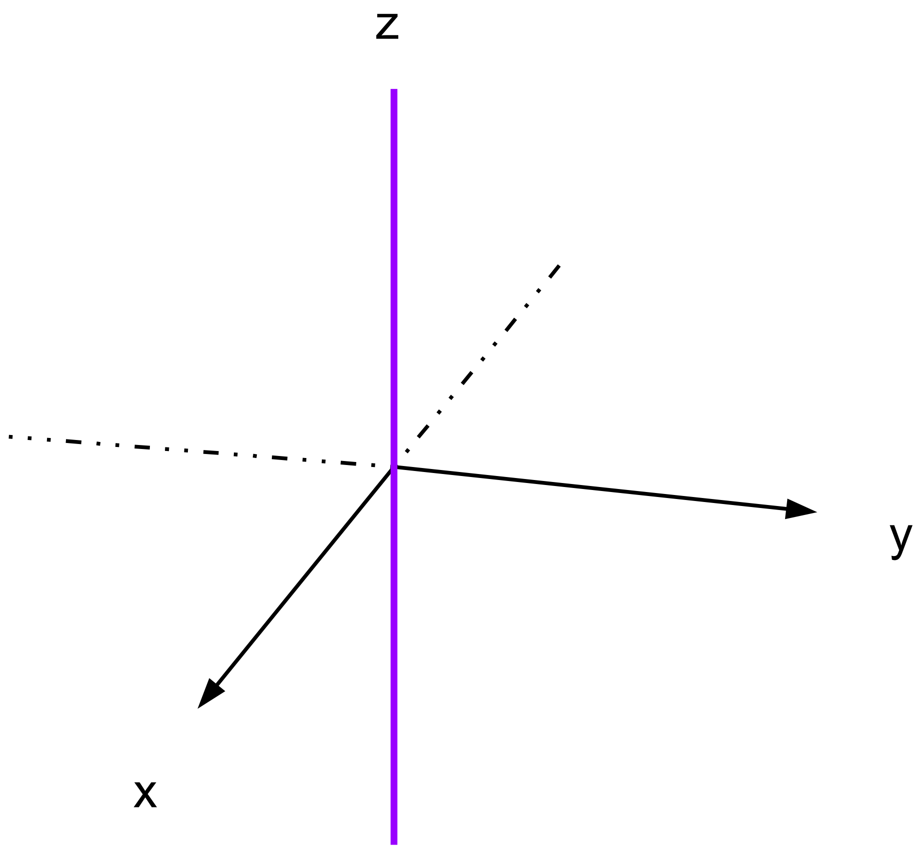
$x^2+y^2 = 0$



Ecuaciones en el espacio

¿Que representan las ecuaciones en R^3?

$x^2+y^2 = 0$



La geometría analítica es la base sobre la que se desarrolló el cálculo (en el siglo XVIII) y la geometría algebráica (en el siglo XIX).