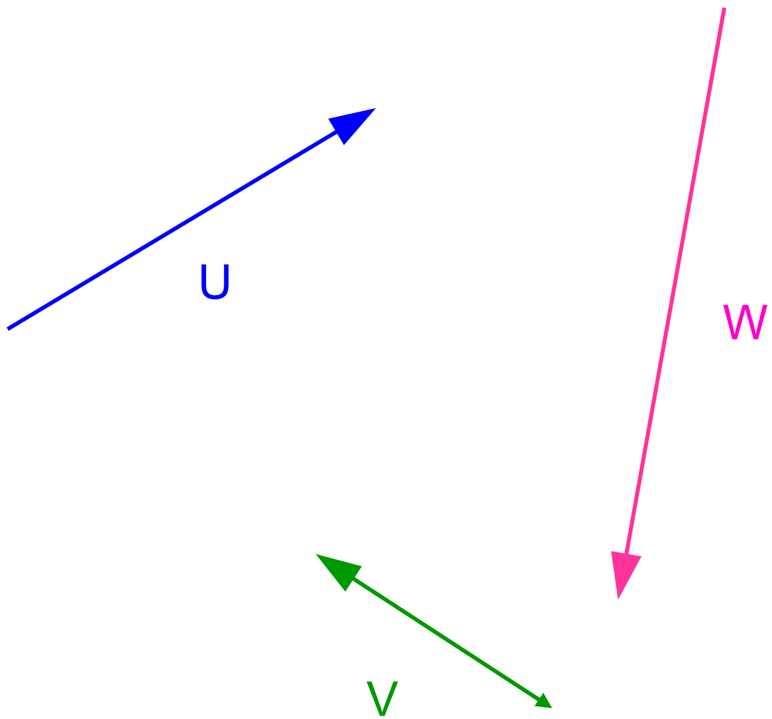
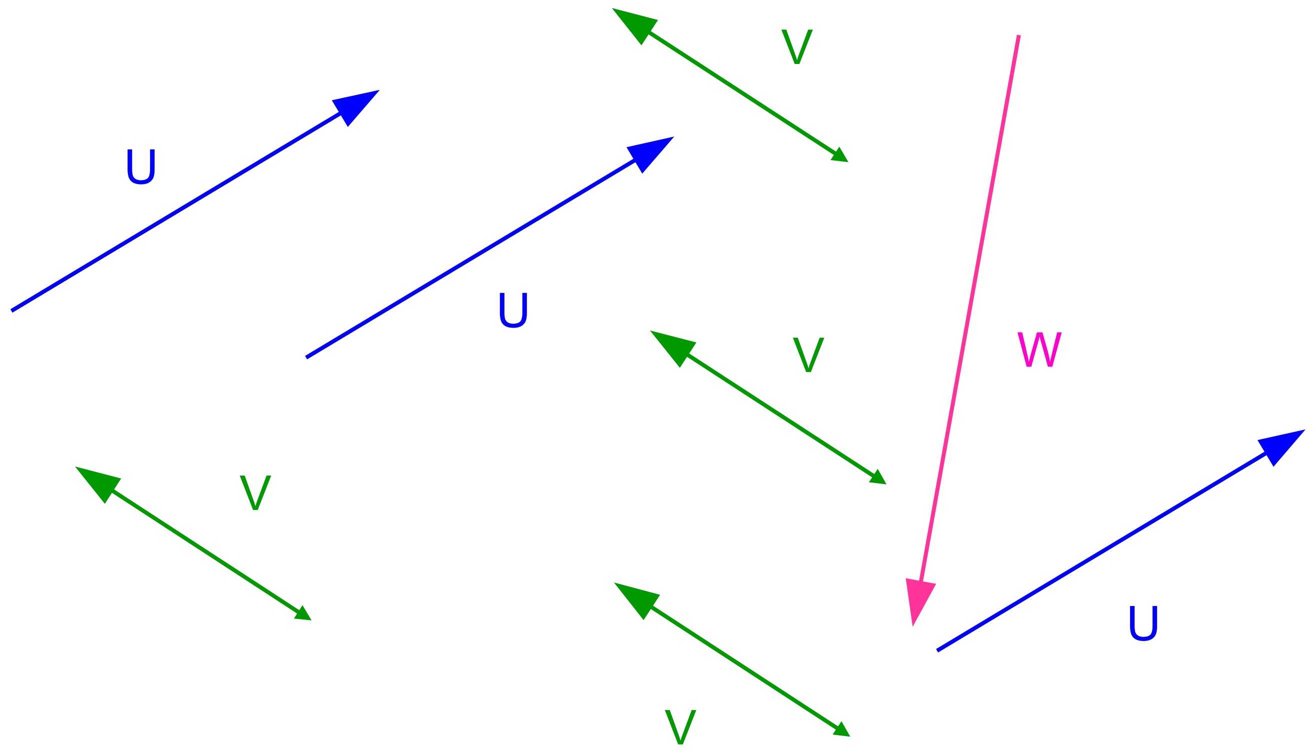
Vectores

Un *vector* es un segmento de recta dirigido en el plano o el espacio euclidiano.



Un *vector* es un segmento de recta dirigido en el plano o el espacio euclidiano.



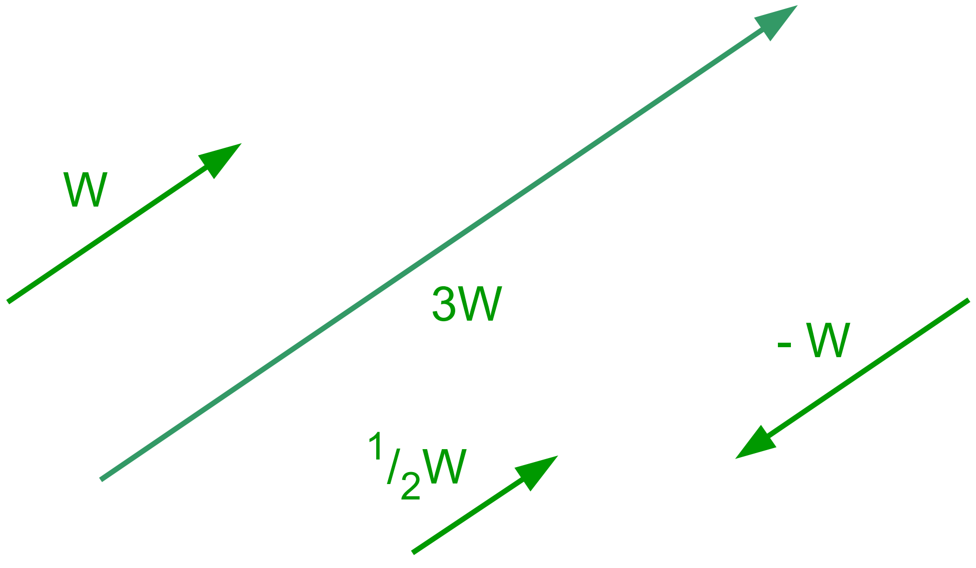
Diremos que dos vectores son *iguales* si tienen la misma dirección, magnitud (tamaño) y sentido, sin importar donde estén.

Los vectores pueden representar muchas cosas distintas: posiciones relativas, desplazamientos, velocidades, fuerzas...

Los vectores pueden multiplicarse por un número real r:

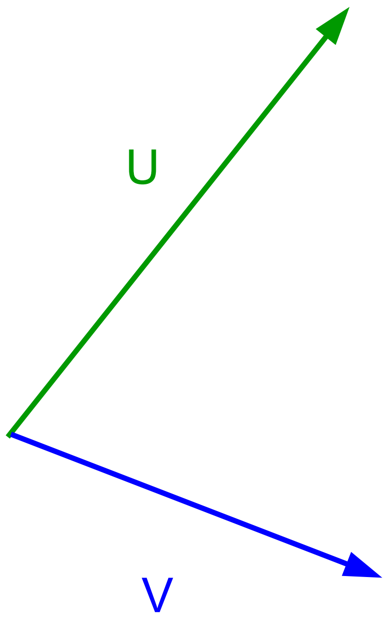
rV tiene la misma dirección que V, tiene |r| veces su magnitud y tiene el mismo sentido si r>0 y el sentido opuesto si r<0

Los vectores pueden multiplicarse por un número real r:

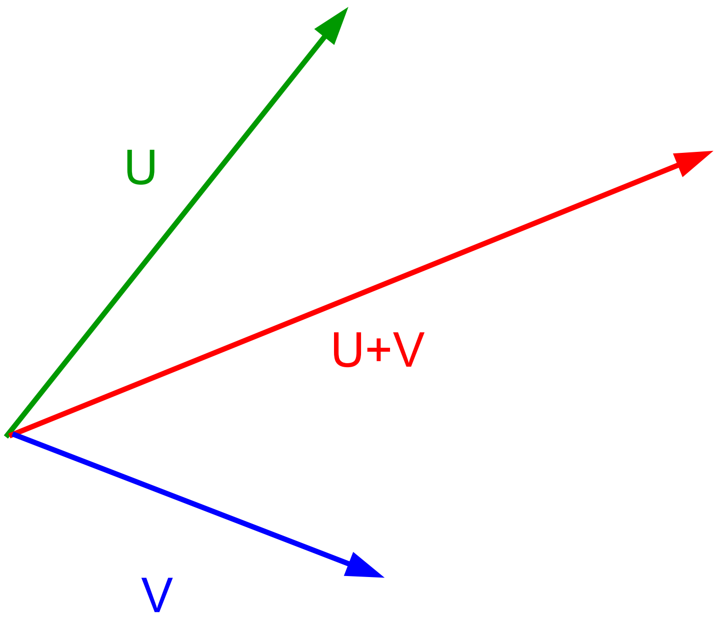


rV tiene la misma dirección que V, tiene |r| veces su magnitud y tiene el mismo sentido si r>0 y el sentido opuesto si r<0

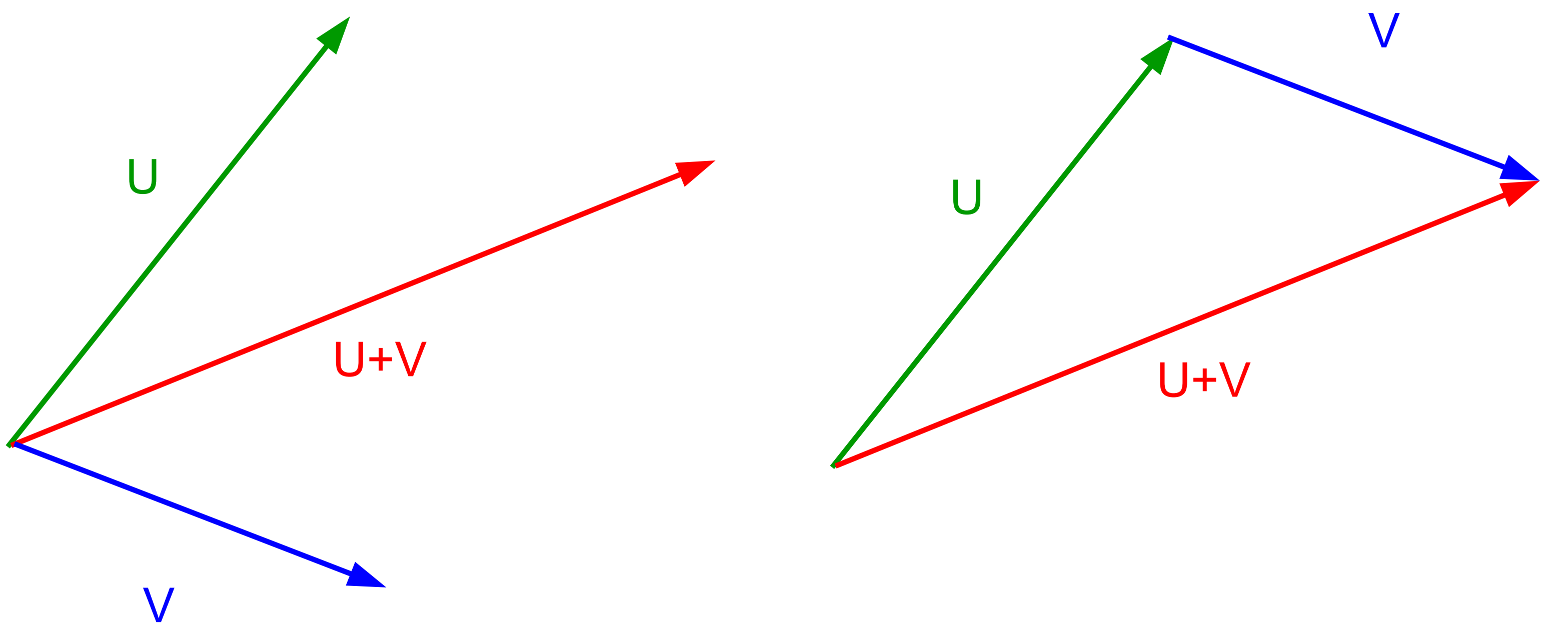
Los vectores se pueden sumar:



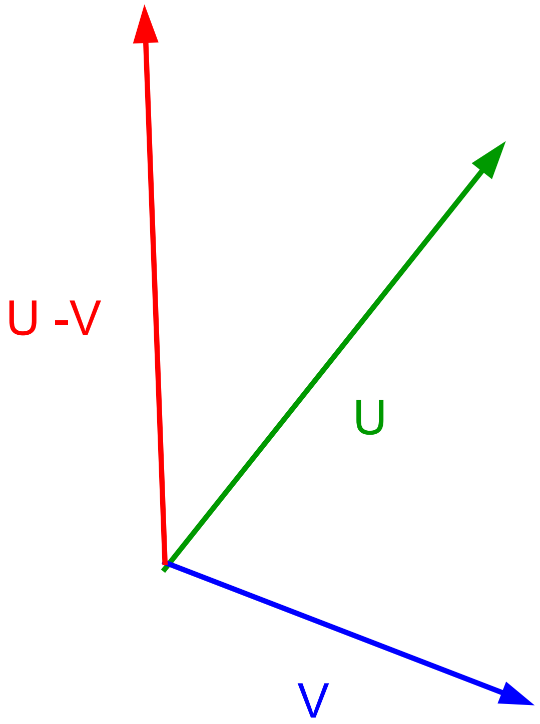
Los vectores se pueden sumar:



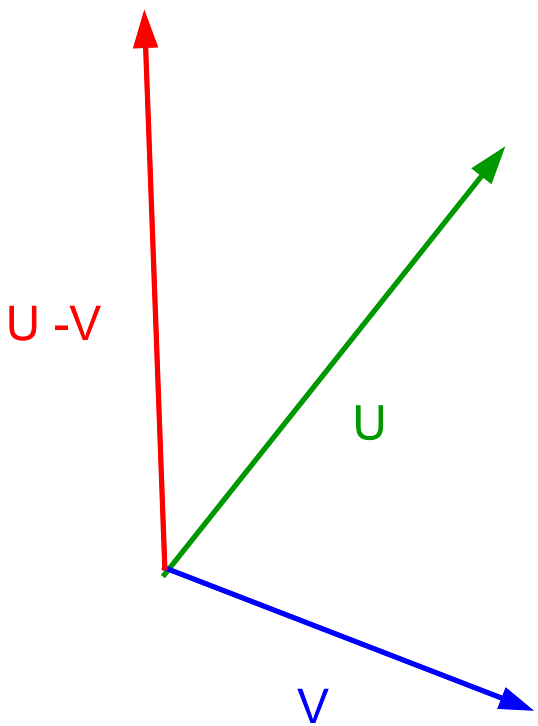
Los vectores se pueden sumar:

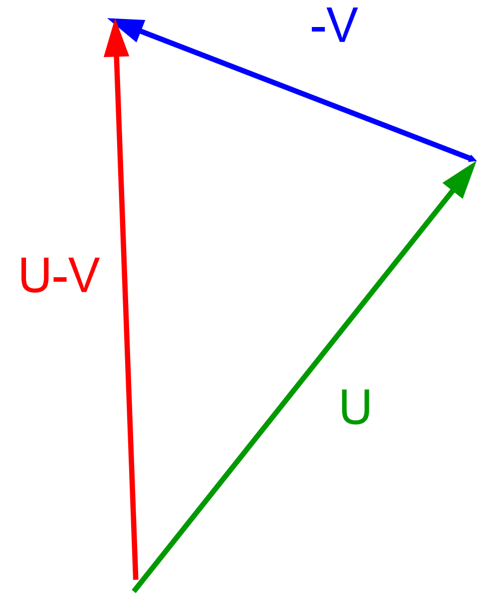


Los vectores también se pueden restar:



Los vectores también se pueden restar:

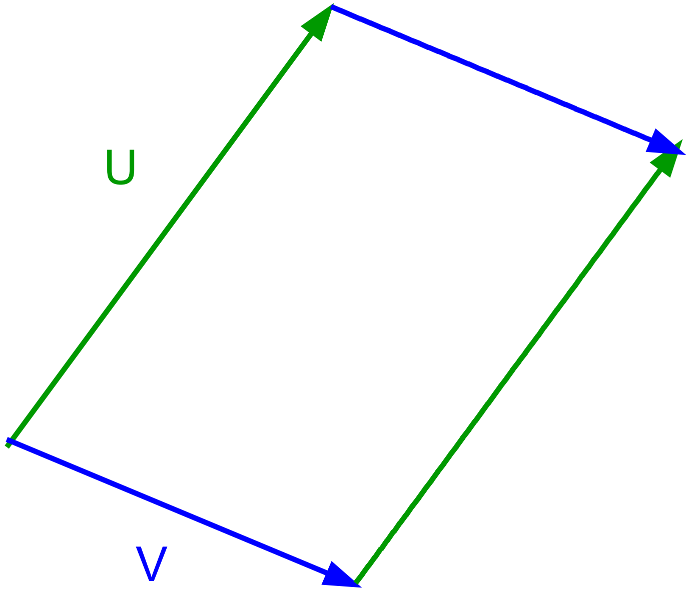




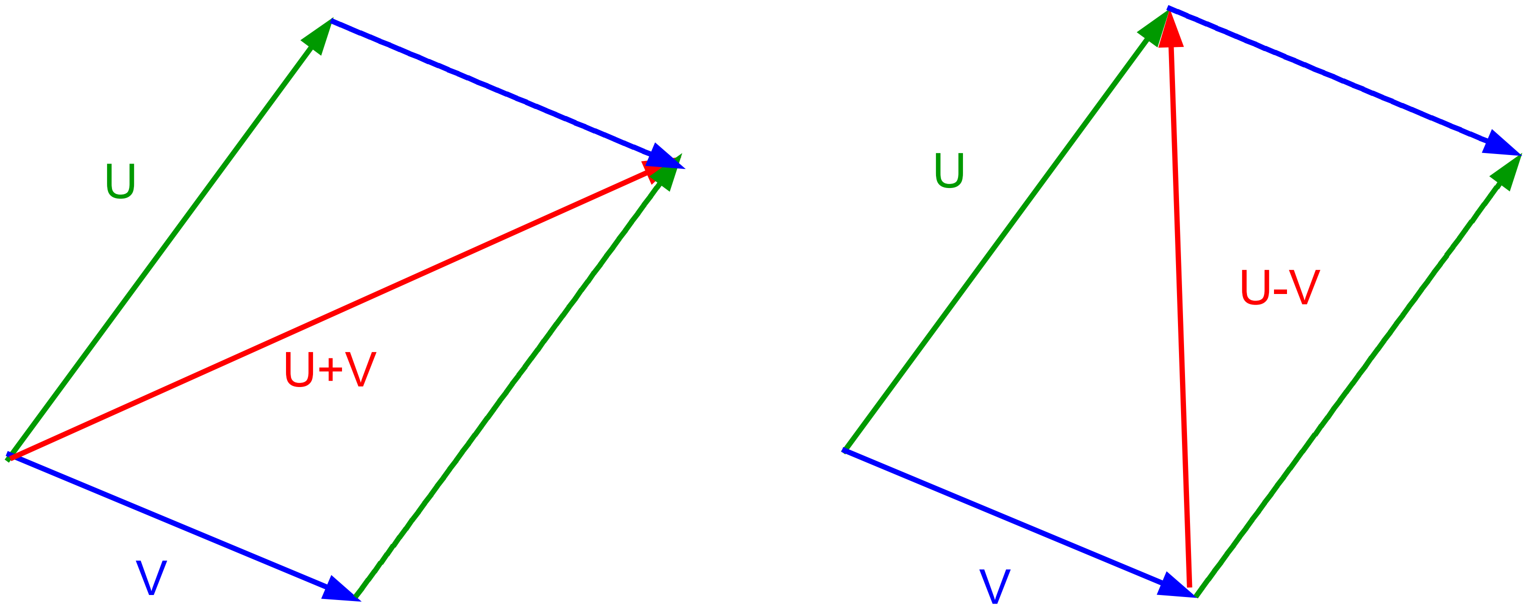
U - V = U+(-V)

U-V es el vector que al sumarle V da U

La regla del paralelogramo:

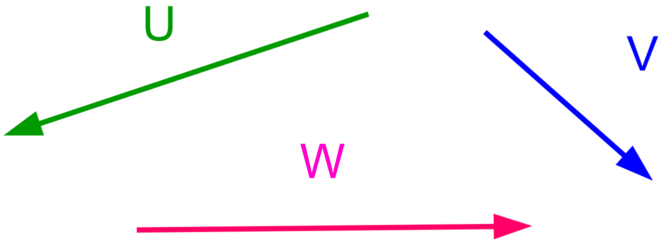


La regla del paralelogramo:



La suma y resta de dos vectores basados en el mismo punto están dadas por las diagonales del paralelogramo definido por los dos vectores.

Ejemplo.



1/2 U

-3V

U+W

V-U

U+2V-3W

Propiedades de la suma de vectores y su multiplicación por escalares:

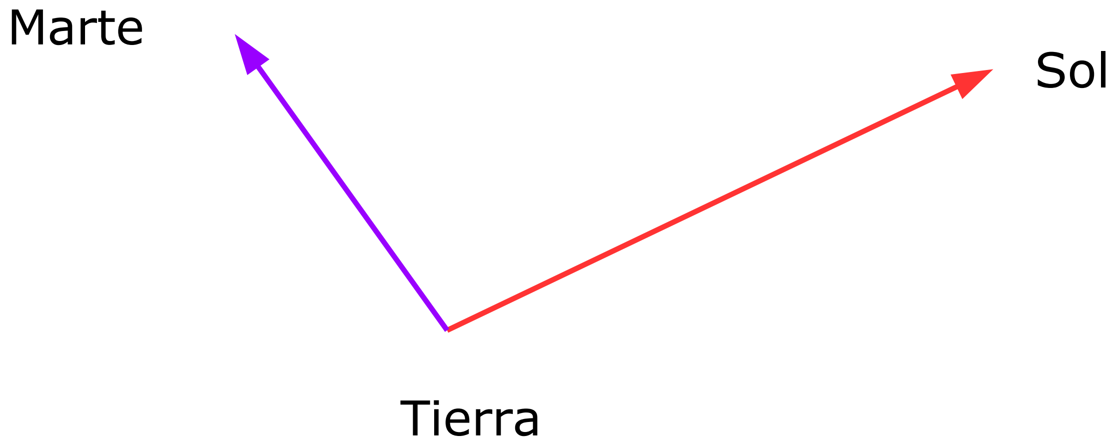
- $U + V = V + U$ *conmutatividad*
- $(U + V) + W = U + (V + W)$ *asociatividad*
- $a(U+V) = aU + aV$
- $(a+b)U = aU + bU$

distributividad

Estas propiedades se obtienen de la ley del paralelogramo y de la semejanza de triángulos.

Aplicaciones

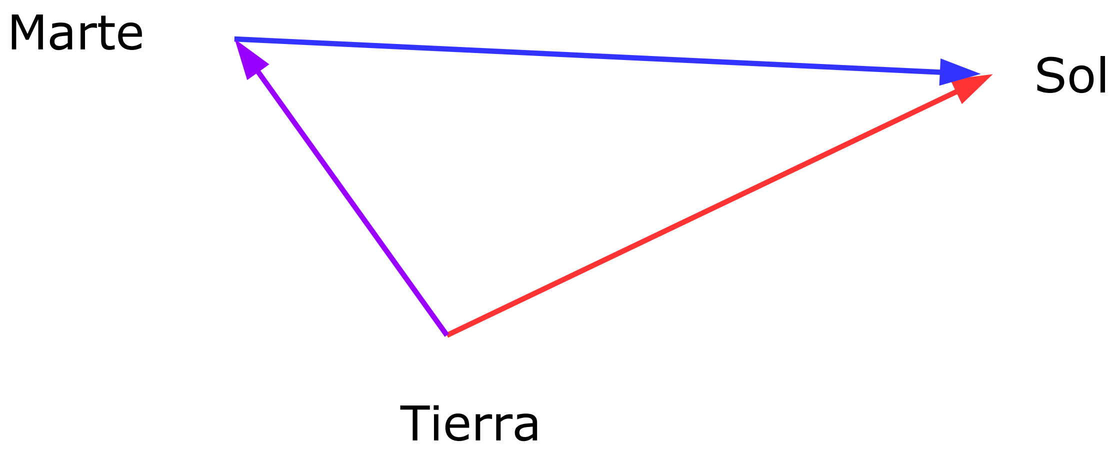
Las posiciones relativas se suman como vectores:



Supongamos que conocemos las posiciones del Sol y de Marte vistos desde la tierra. ¿cual será la posición del sol visto desde Marte?

Aplicaciones

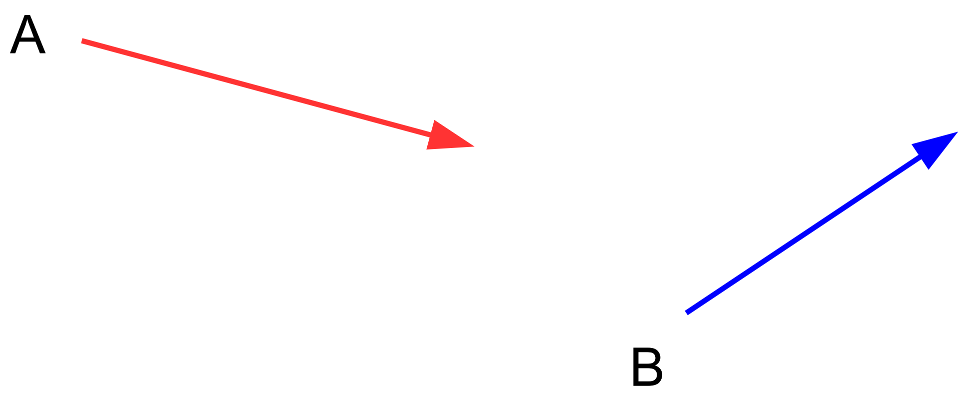
Las posiciones relativas se suman como vectores:



El vector que da la posición del Sol desde Marte es la suma del vector que da la posición del Sol desde la Tierra mas el vector que da la posición de la tierra desde Marte (que es menos el vector que da la posición de Marte desde la Tierra).

Aplicaciones

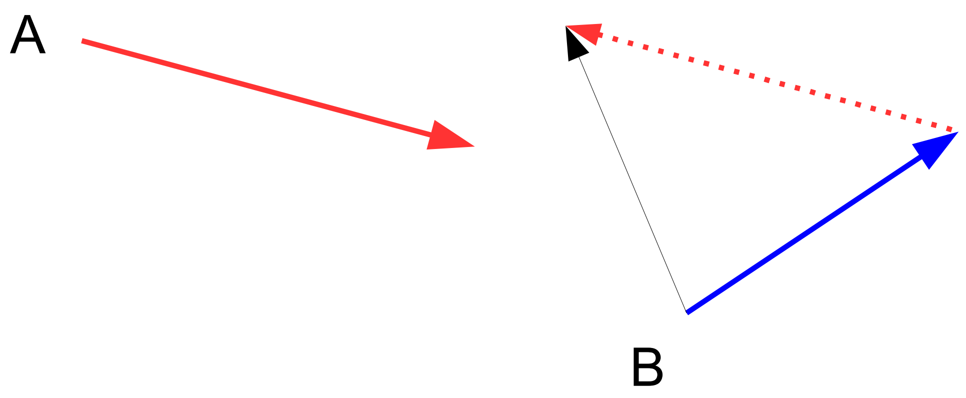
Las velocidades relativas se suman como vectores:



Supongan que observamos la velocidad de dos objetos A y B y queremos saber la velocidad de B respecto a A.

Aplicaciones

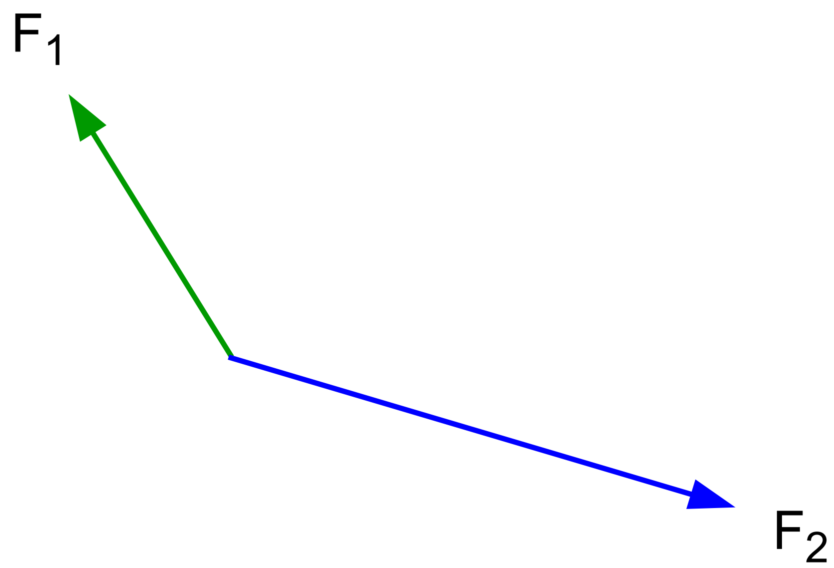
Las velocidades relativas se suman como vectores:



La velocidad de un objeto B respecto a otro objeto A es la suma de la velocidad de B respecto a un observador mas la velocidad del observador respecto a A (que es la velocidad de B respecto al observador menos la velocidad de A respecto al observador)

Aplicaciones

Las fuerzas se suman como vectores:

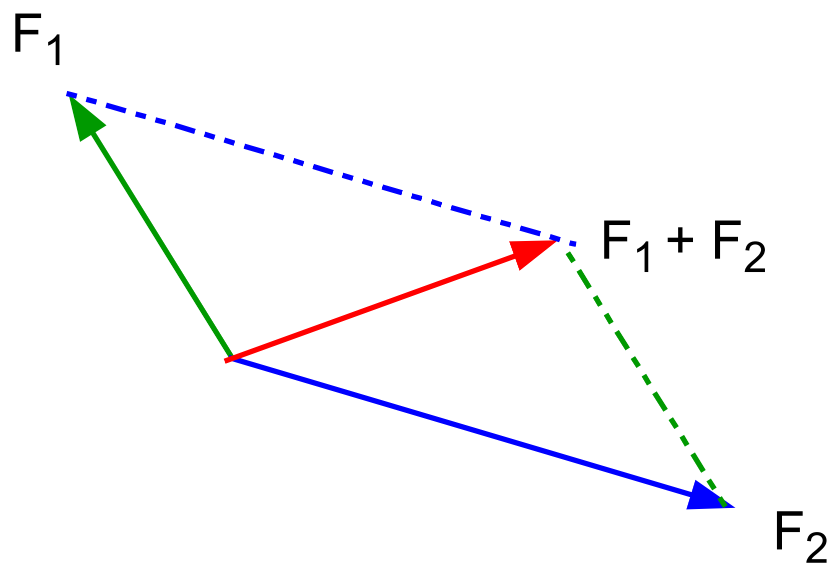


Supongamos que aplicamos 2 fuerzas sobre el mismo punto

¿cual será la fuerza resultante?

Aplicaciones

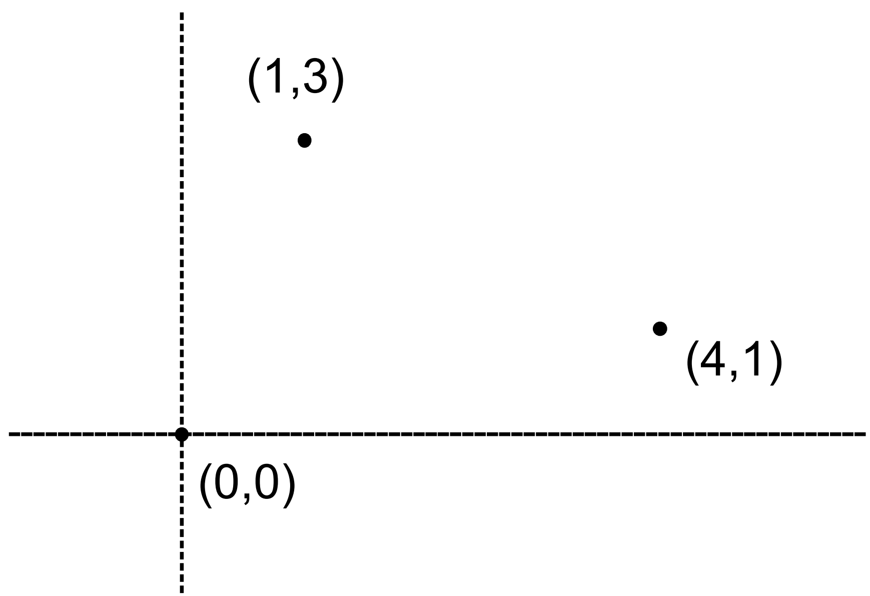
Las fuerzas se suman como vectores:



Si se aplican simultáneamente dos fuerzas sobre un punto, la fuerza resultante es su suma vectorial.

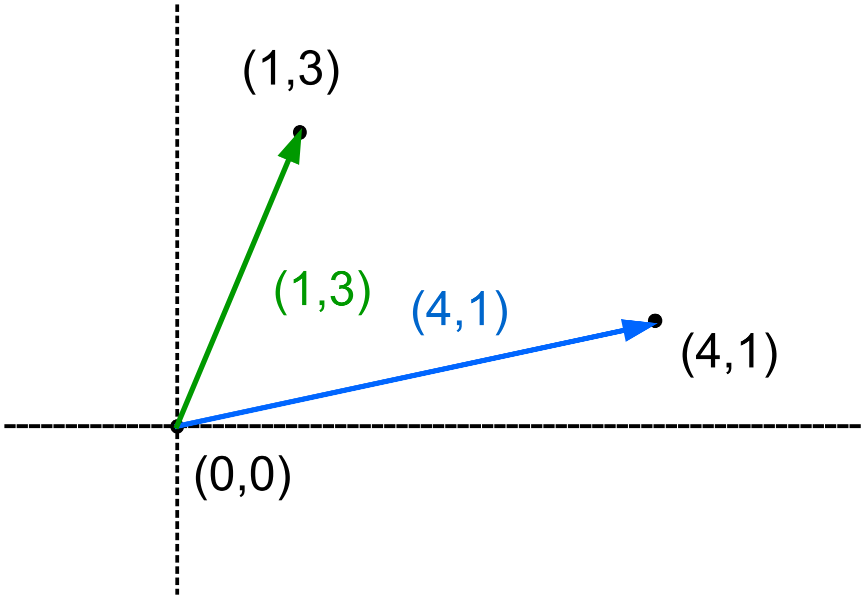
Vectores y coordenadas

Cada punto del plano (x,y) determina un vector que va del origen al punto, y que se denota también por (x,y).



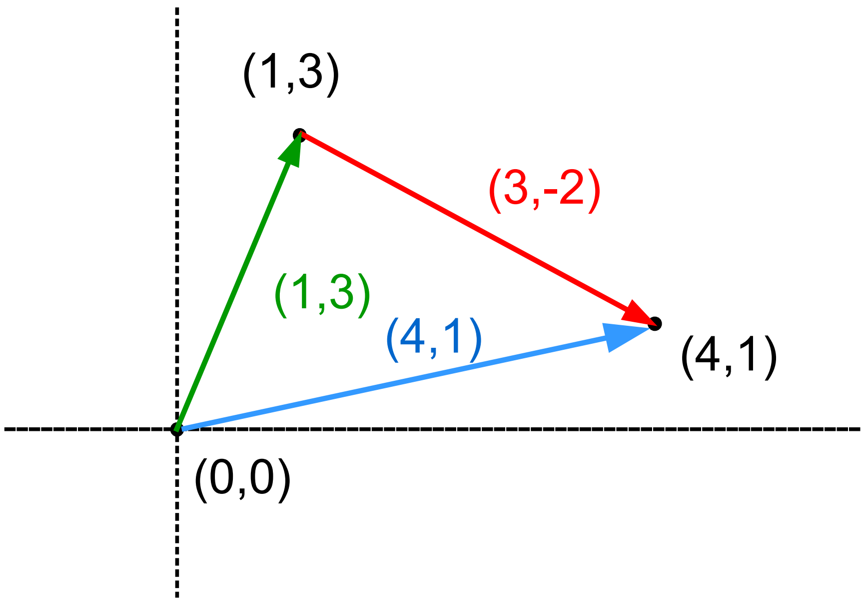
Vectores y coordenadas

Cada punto del plano (x,y) determina un vector que va del origen al punto, y que se denota también por (x,y).



Vectores y coordenadas

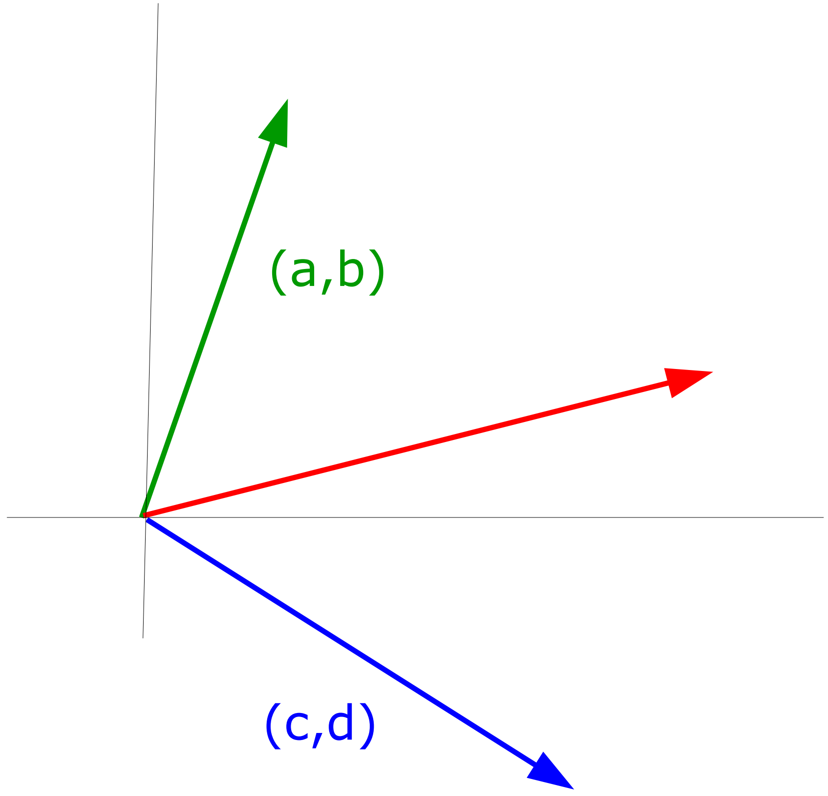
Cada punto del plano (x,y) determina un vector que va del origen al punto, y que se denota también por (x,y).

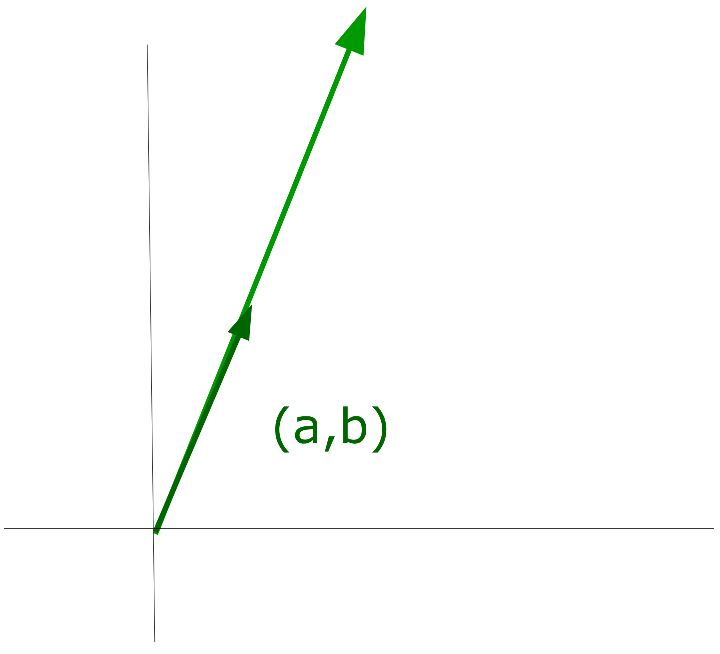


El vector que va del punto (x,y) al punto (x',y') es (x'-x,y'-y).

Vectores y coordenadas

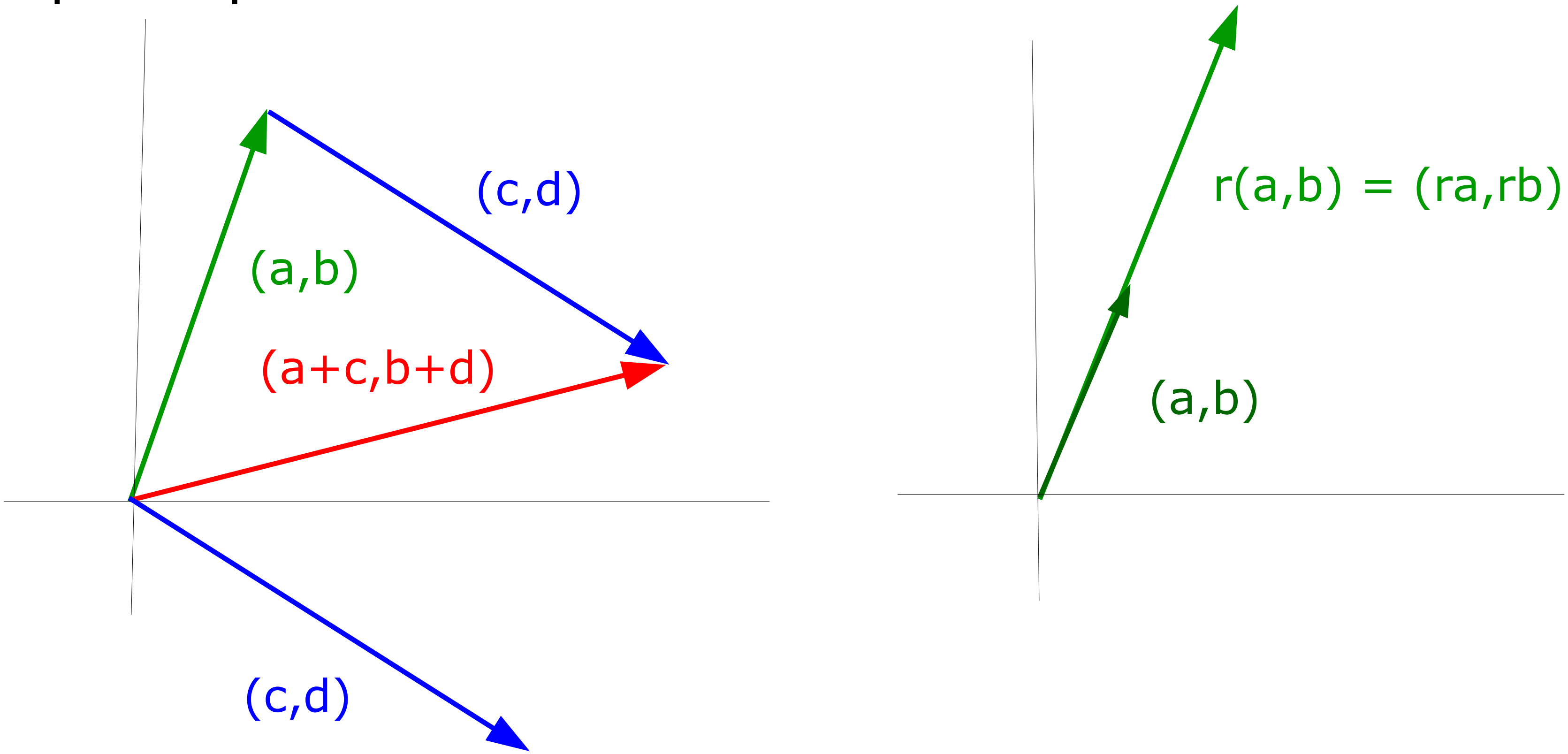
La suma de vectores esta dada por la suma coordenada a coordenada, y el producto por escalares también esta dado por el producto en cada coordenada:





Vectores y coordenadas

La suma de vectores esta dada por la suma coordenada a coordenada, y el producto por escalares también esta dado por el producto en cada coordenada:



Vectores y coordenadas

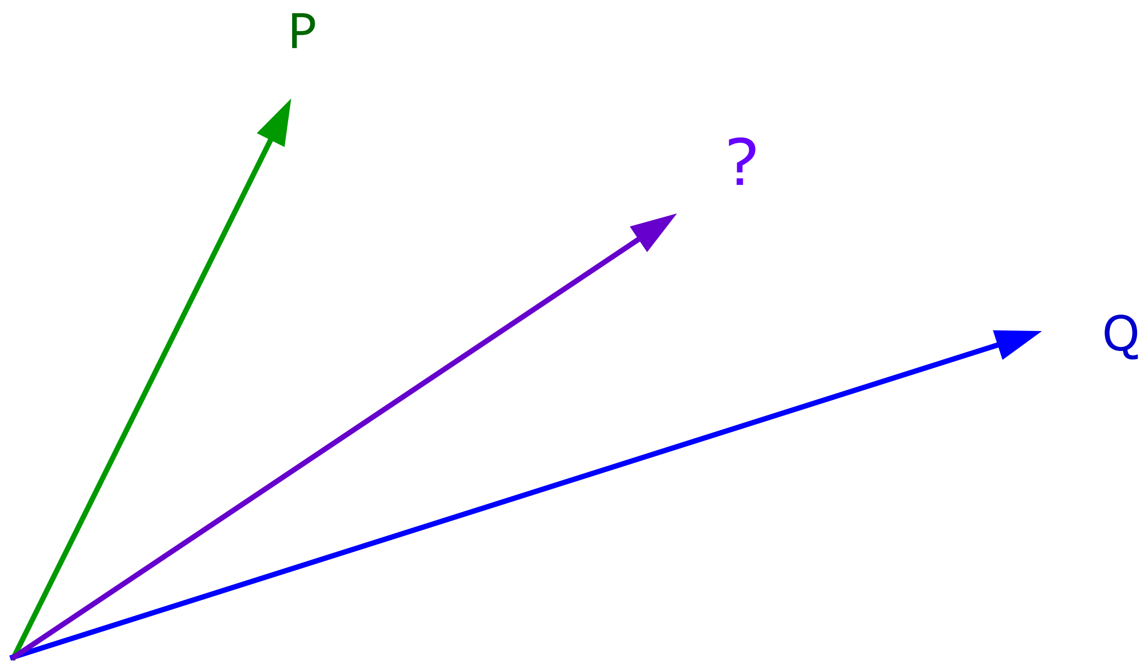
Las propiedades conmutativa, asociativa y distributiva de la suma de vectores y el producto por escalares son consecuencia de las propiedades de la suma y el producto de números reales:

Si U=(a,b) , V=(c,d) , W=(e,f) entonces

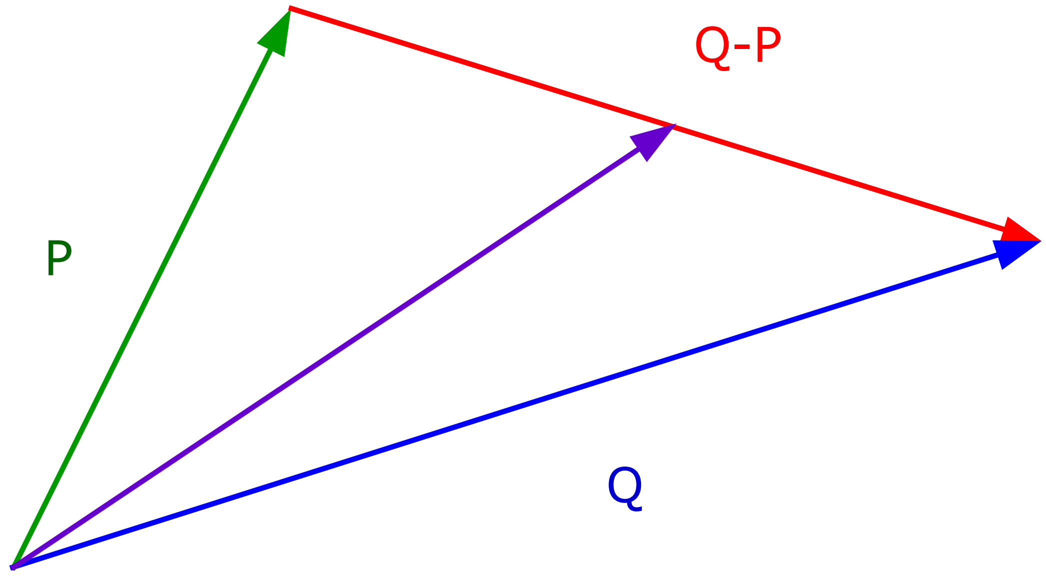
$$U+V \stackrel{?}{=} V+U$$

$$(U+V)+W \stackrel{?}{=} U+(V+W)$$

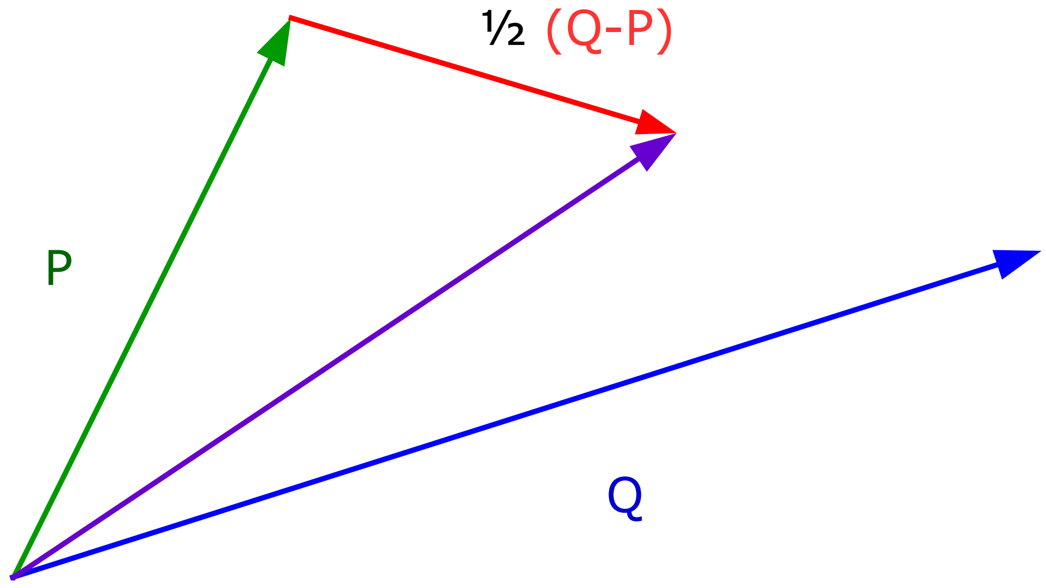
Si P y Q son dos puntos en el plano, el punto medio entre P y Q es...



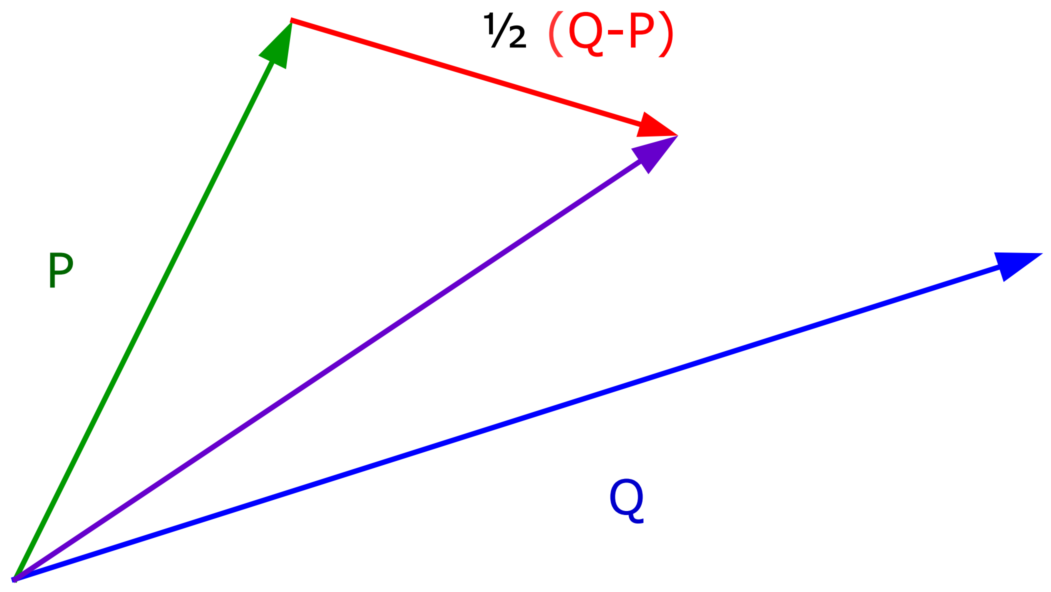
Si P y Q son dos puntos en el plano, el punto medio entre P y Q es



Si P y Q son dos puntos en el plano, el punto medio entre P y Q es

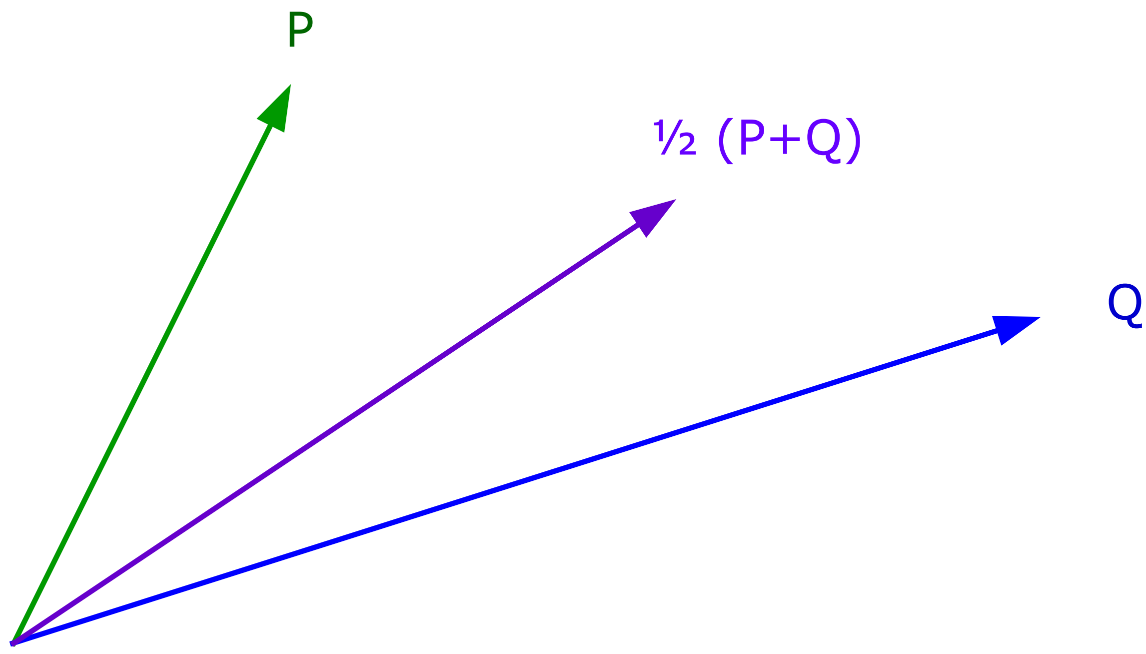


Si P y Q son dos puntos en el plano, el punto medio entre P y Q es



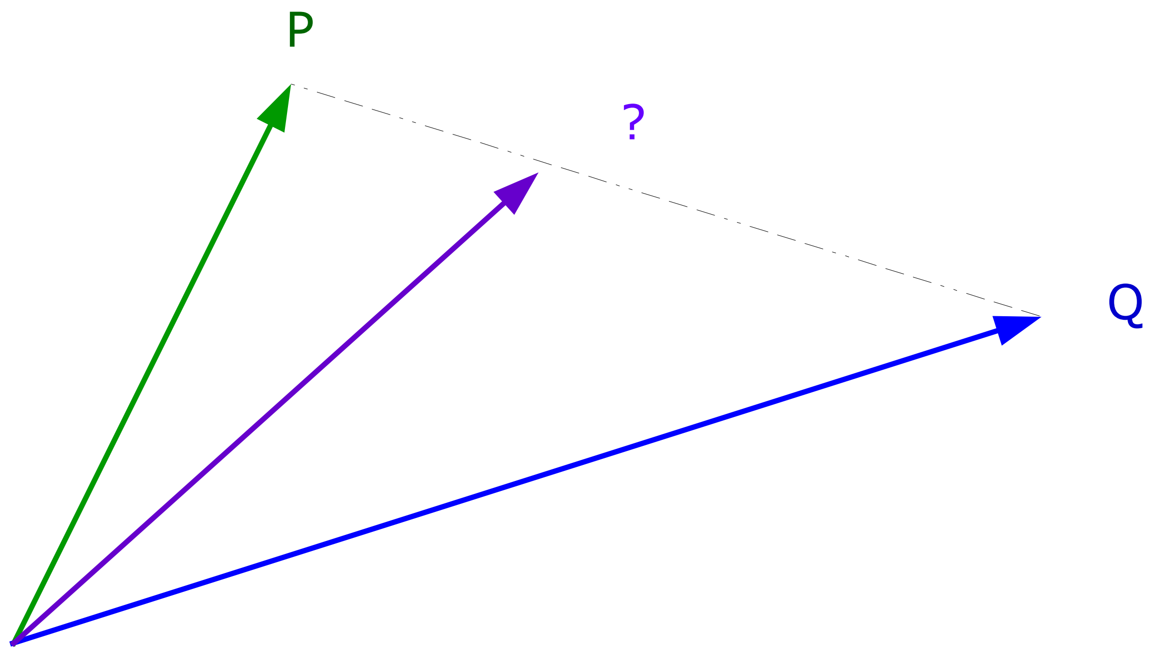
El vector morado es P + ½ (Q-P) = ½ (P+Q)

Si P y Q son dos puntos en el plano, el punto medio entre P y Q es ½(P+Q).

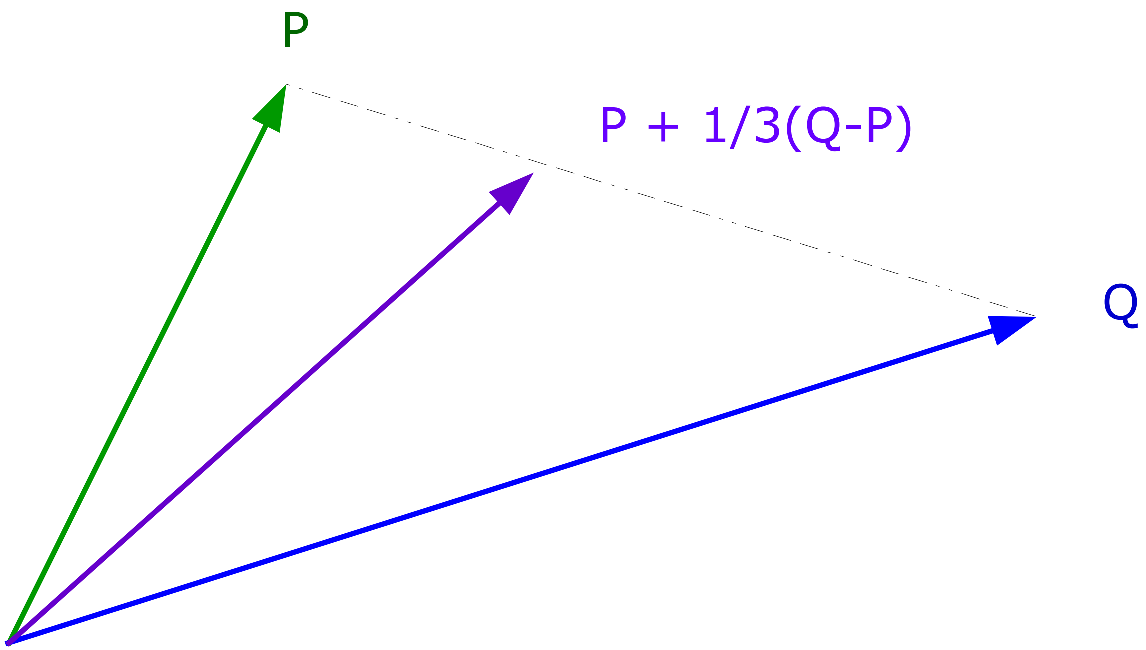


Ejemplo: El punto medio entre (2,4) y (6,1) es ½(2+6,4+1) = (4,2.5)

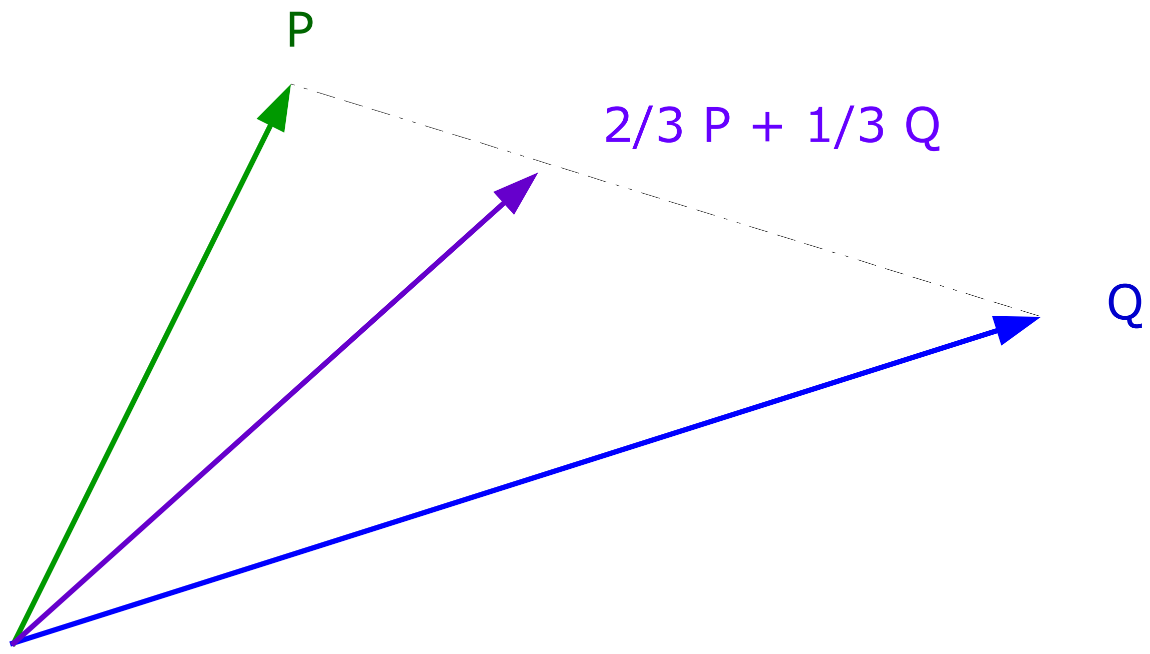
Ejercicio. El punto que está a un tercio del camino entre P y Q es...



Ejercicio. El punto que está a un tercio del camino entre P y Q es...

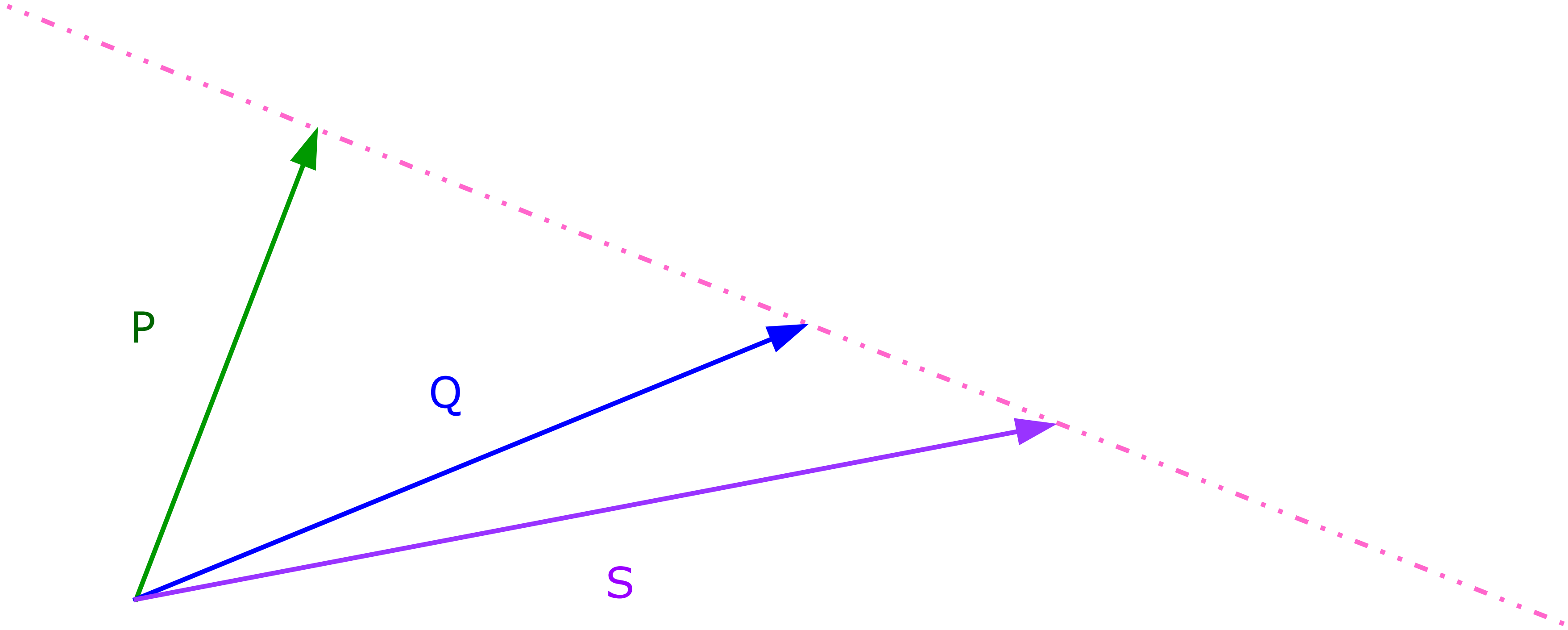


Ejercicio. El punto que está a un tercio del camino entre P y Q es...

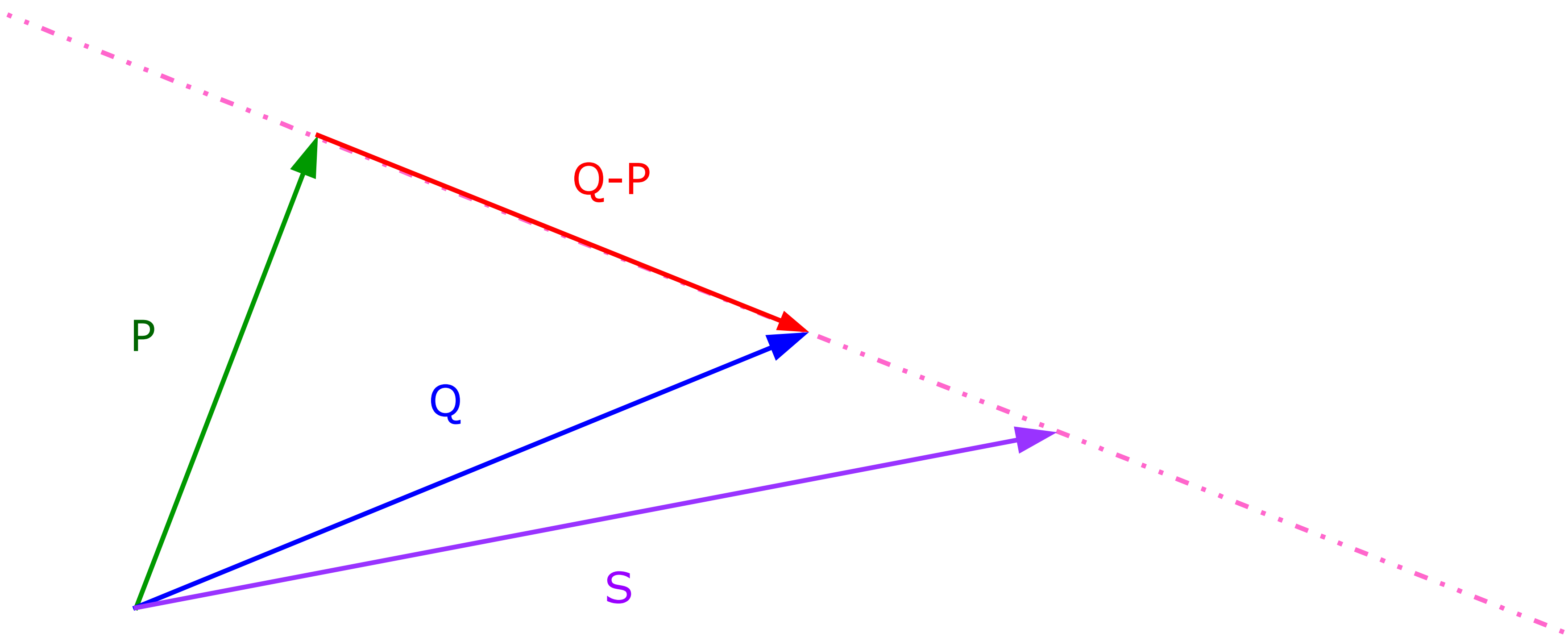


Los puntos alineados con P y Q pueden obtenerse sumándole a P un múltiplo de Q-P:

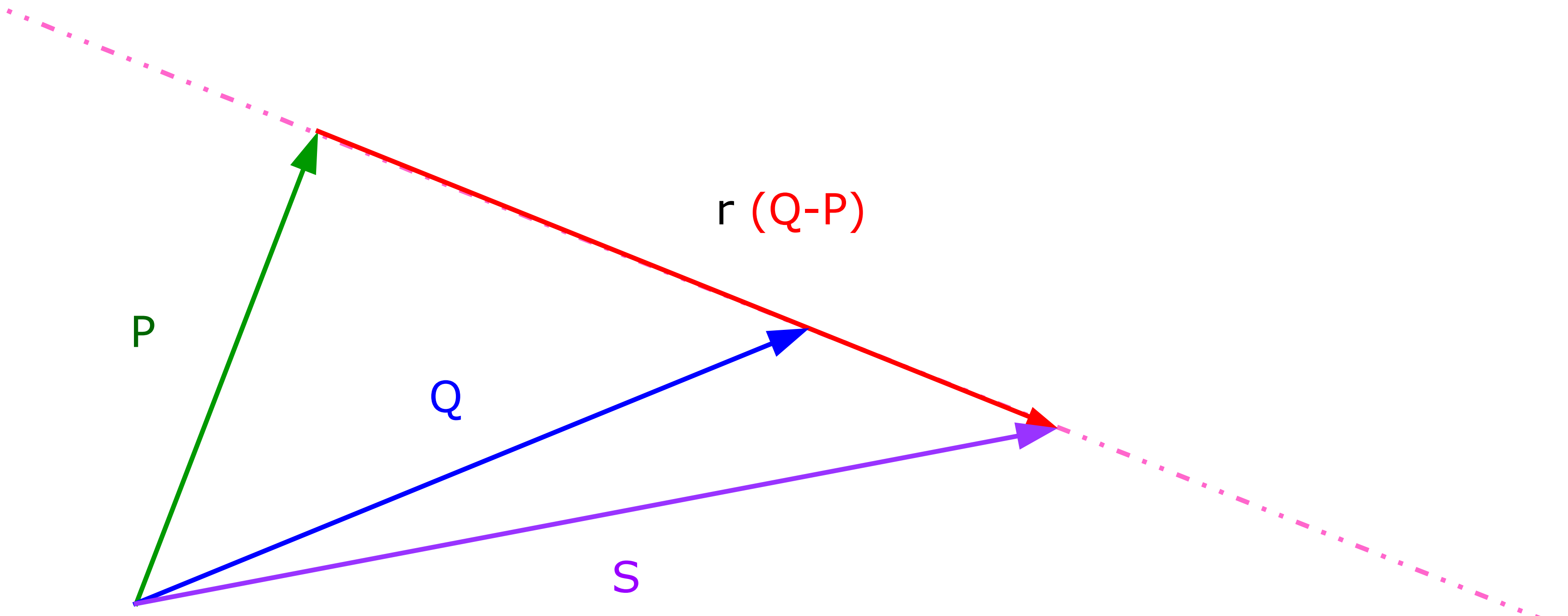
Los puntos alineados con P y Q pueden obtenerse sumándole a P un múltiplo de Q-P:



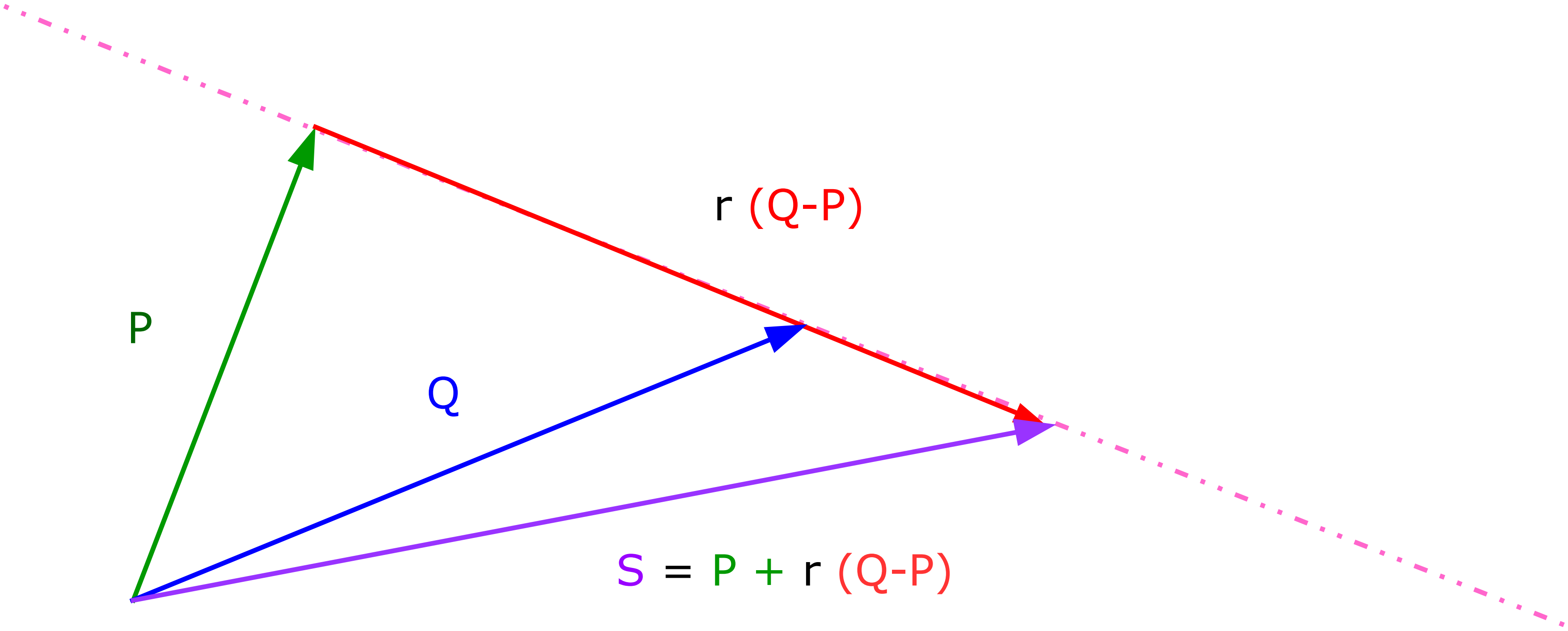
Los puntos alineados con P y Q pueden obtenerse sumándole a P un múltiplo de Q-P:



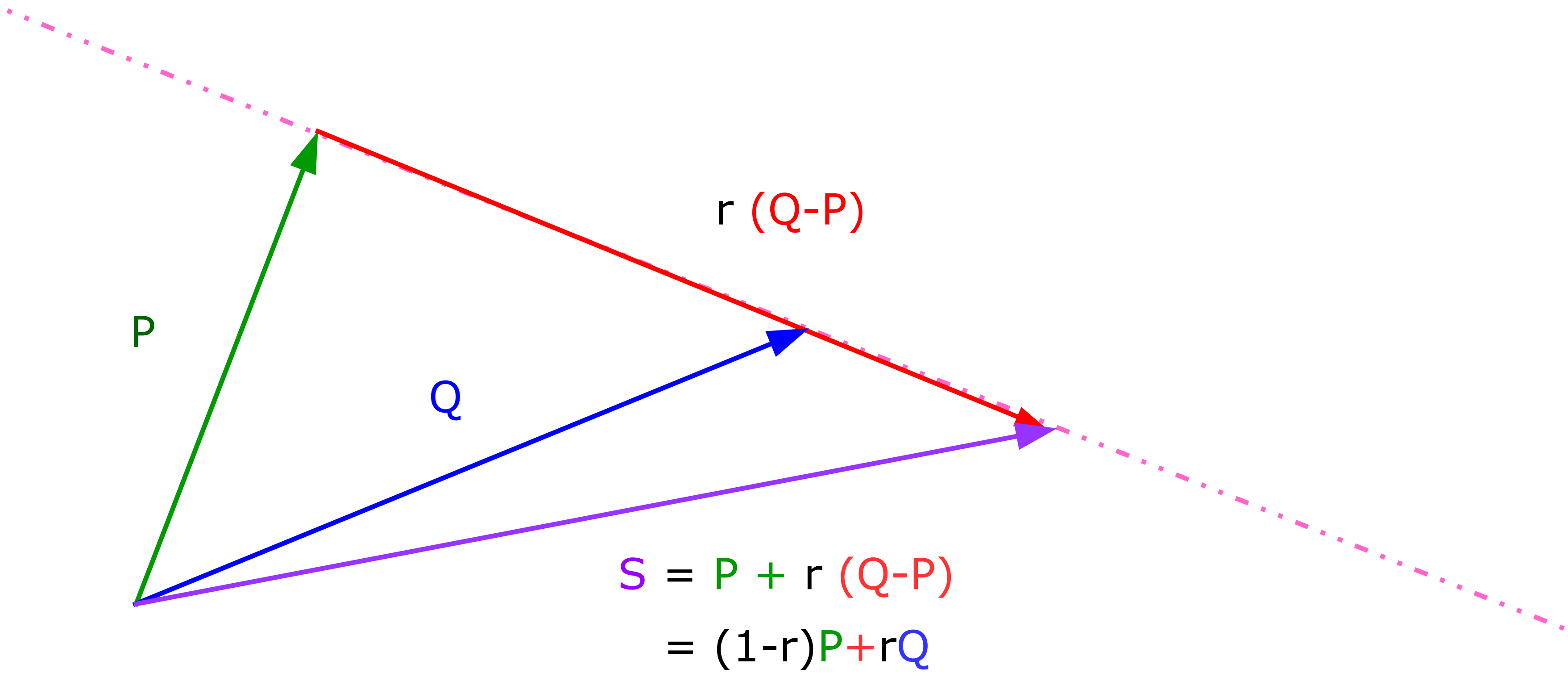
Los puntos alineados con P y Q pueden obtenerse sumándole a P un múltiplo de Q-P:



Los puntos alineados con P y Q pueden obtenerse sumándole a P un múltiplo de Q-P:



Los puntos alineados con P y Q pueden obtenerse sumándole a P un múltiplo de Q-P:



Los puntos alineados con P y Q son todos los puntos de la forma sP + rQ donde r+s=1

Ejemplo. Los puntos del plano alineados con (3,8) y (7,2) son los puntos de la forma...

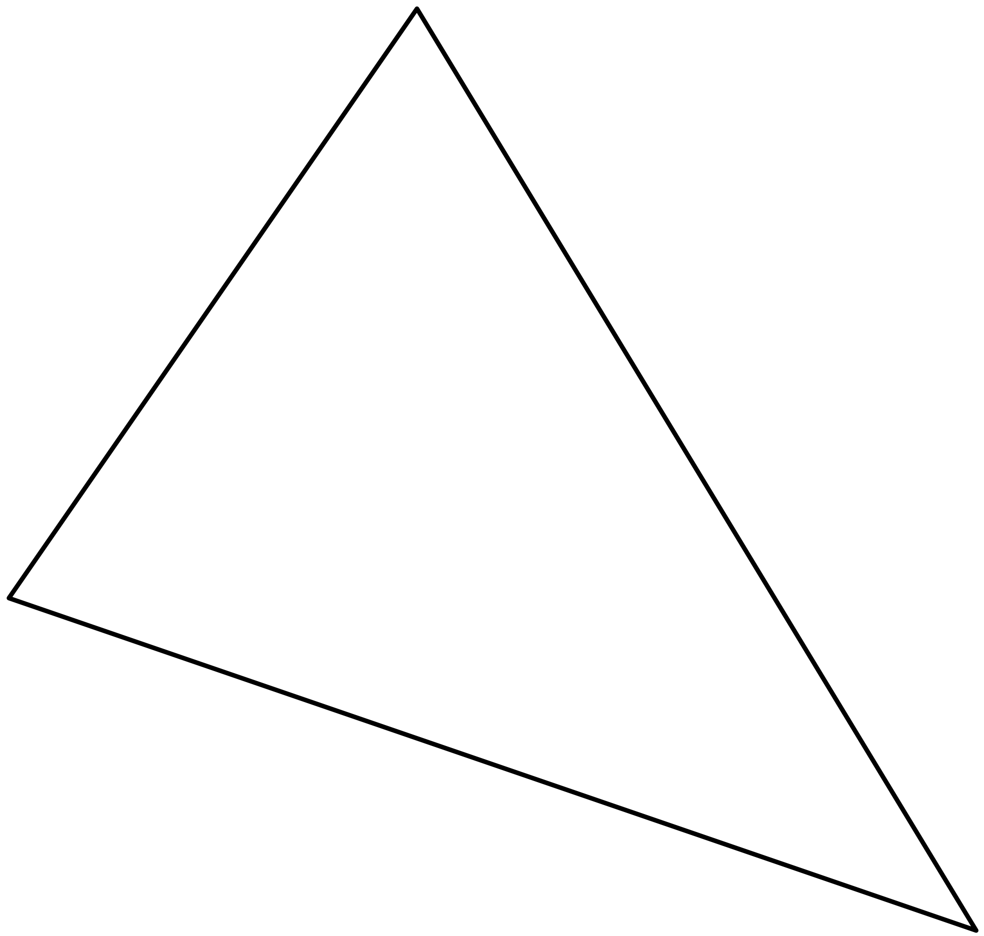
Ejemplo. Los puntos del plano alineados con $(3,8)$ y $(7,2)$ son los puntos de la forma $(3,8)+r(4,-6) = (3+4r,8-6r)$

Ejemplo. Los puntos del plano alineados con $(3,8)$ y $(7,2)$ son los puntos de la forma $(3,8)+r(4,-6) = (3+4r,8-6r)$

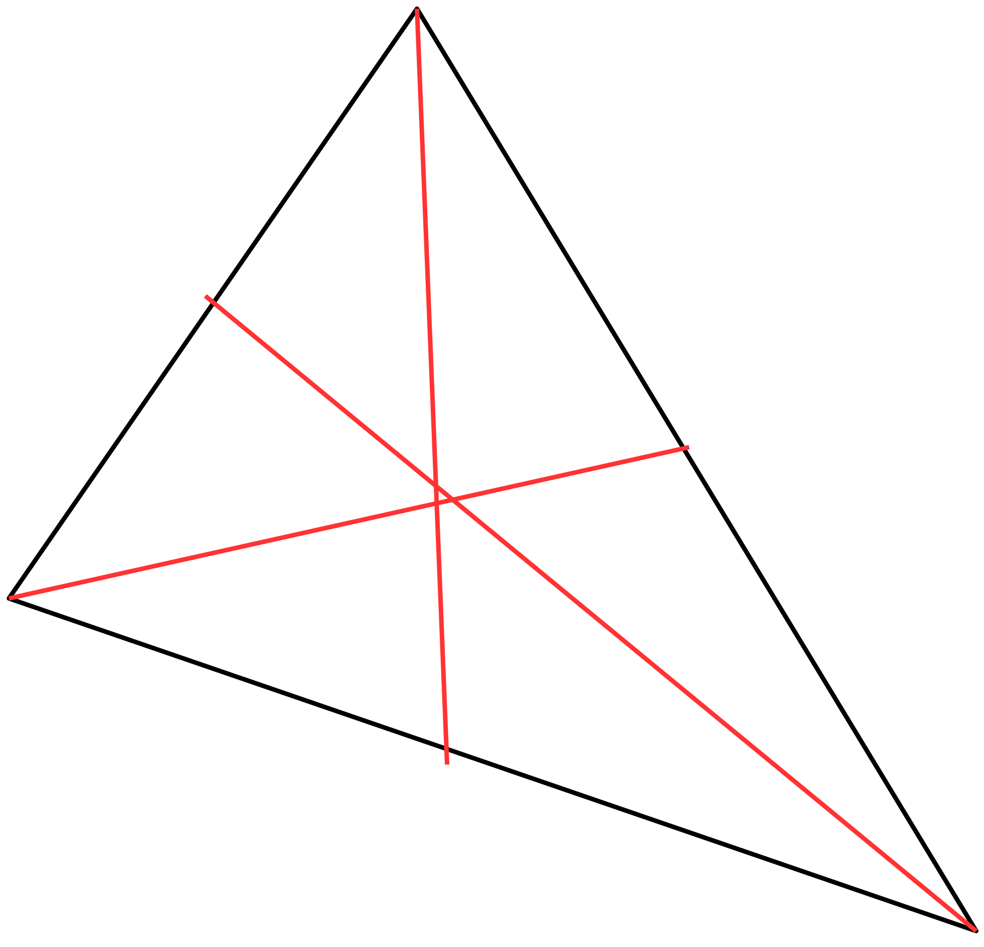
¿El punto $(-29,40)$ está alineado con $(3,8)$ y $(7,2)$?

¿El punto $(27,-30)$ está alineado con $(3,8)$ y $(7,2)$?

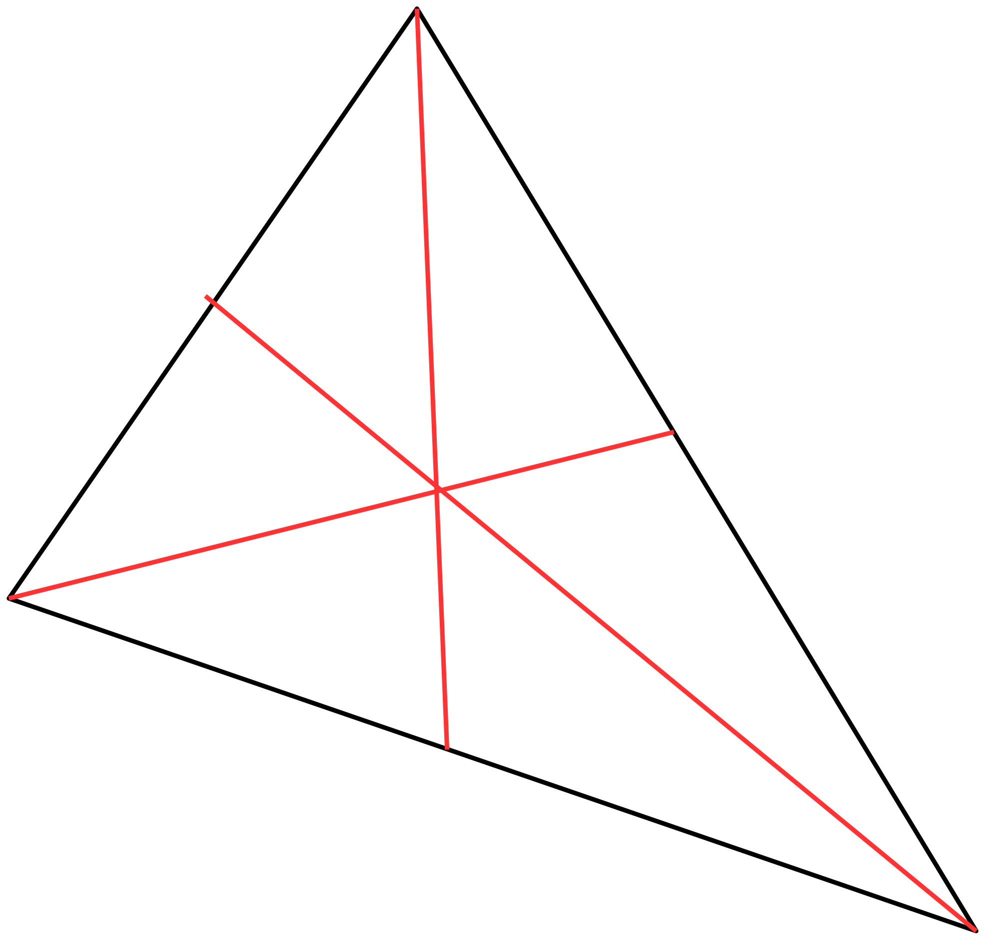
Las medianas de un triángulo son las líneas que van de los vértices a los puntos medios de los lados opuestos



Las medianas de un triángulo son las líneas que van de los vértices a los puntos medios de los lados opuestos

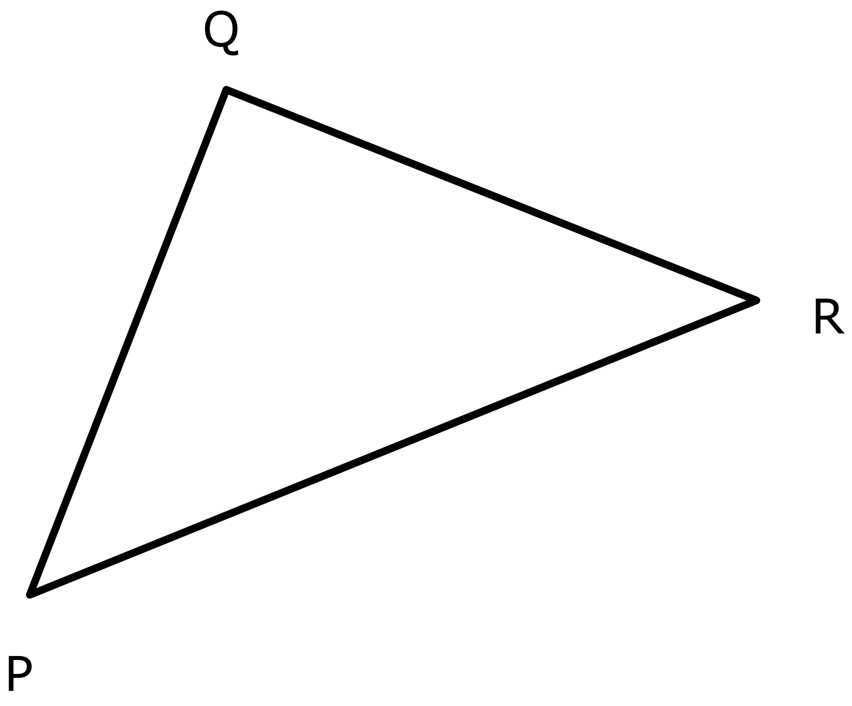


Teorema. Las medianas de un triángulo se intersectan en un punto que las divide en la razón 2:1



Teorema. Las medianas de un triángulo se intersectan en un punto que las divide en la razón 2:1

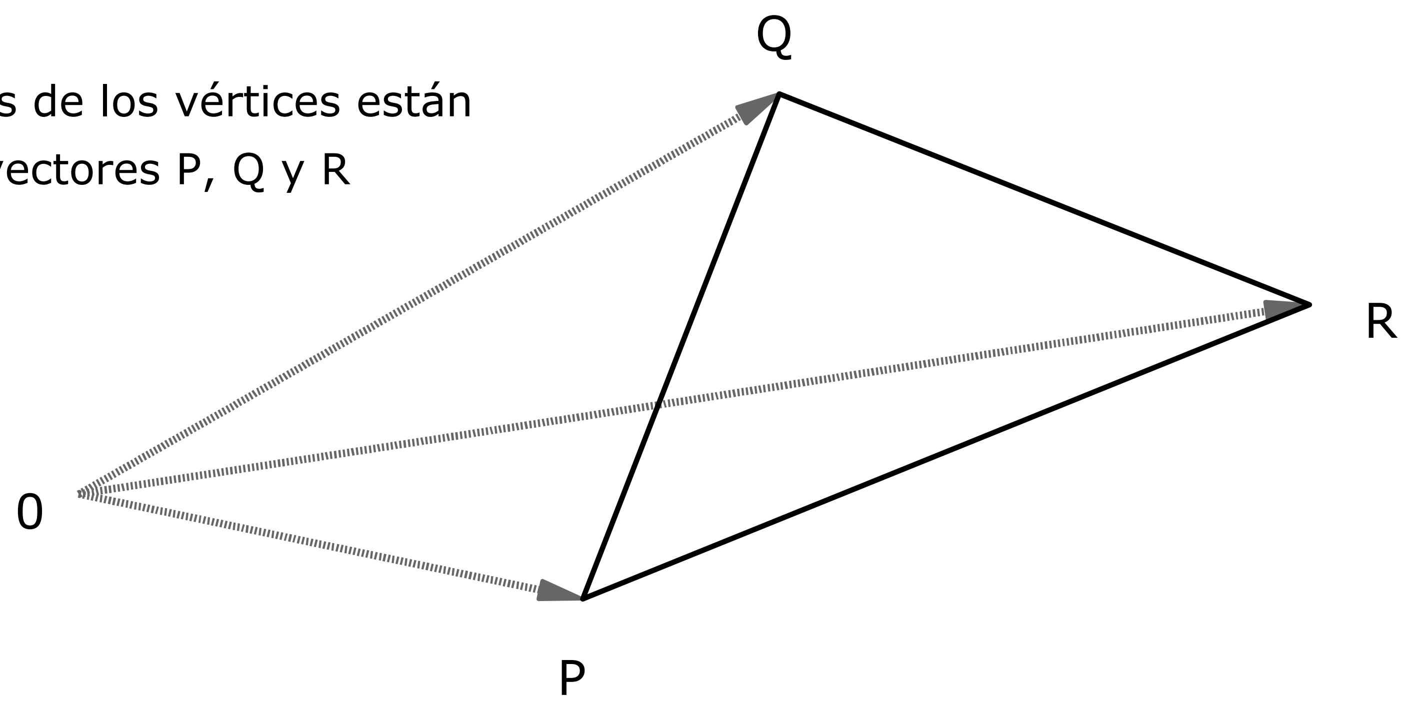
Demostración. Las medianas son las lineas que van de los vértices a los puntos medios de los lados opuestos. Para ver que las medianas concurren hay que ver que el punto que esta a 2/3 del recorrido de cada mediana es el mismo para las 3 medianas.



Teorema. Las medianas de un triángulo se intersectan en un punto que las divide en la razón 2:1

Demostración. Las medianas son las lineas que van de los vértices a los puntos medios de los lados opuestos. Para ver que las medianas concurren hay que ver que el punto que esta a 2/3 del recorrido de cada mediana es el mismo para las 3 medianas.

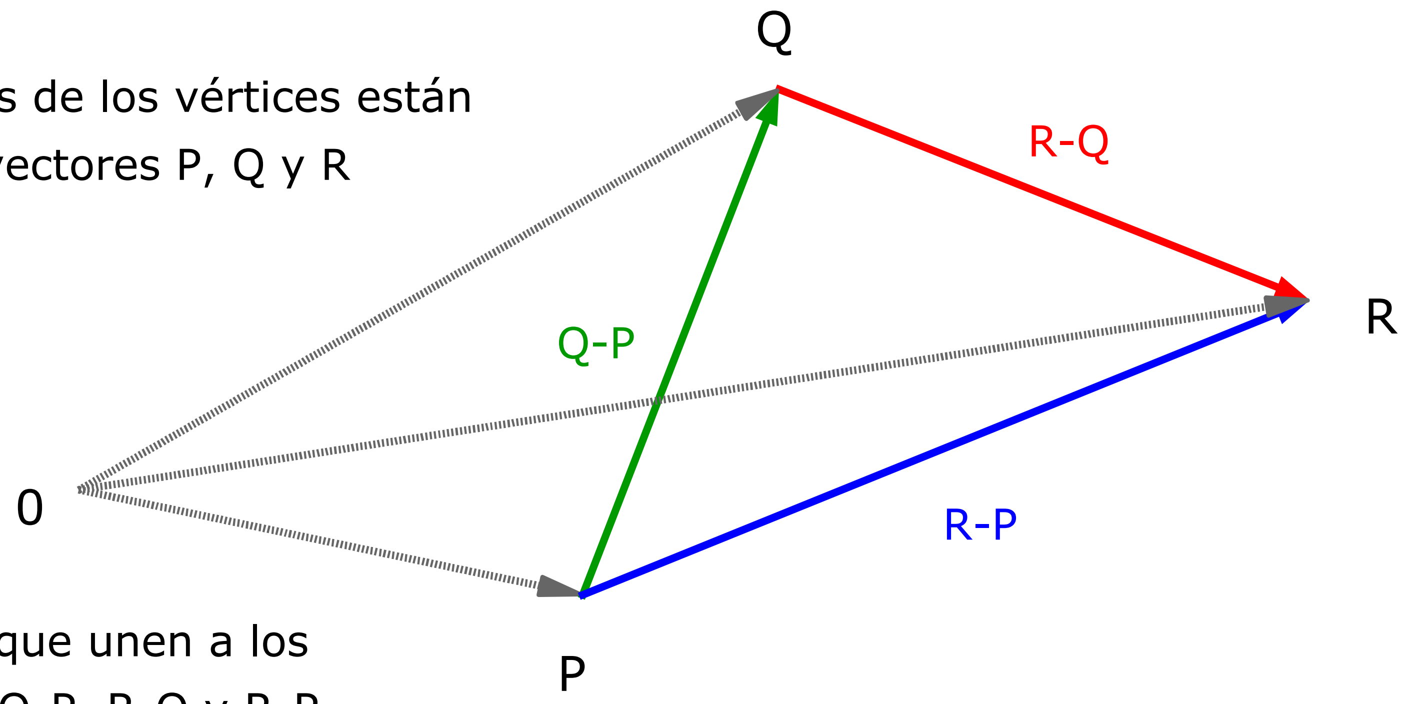
Las posiciones de los vértices están dadas por 3 vectores P, Q y R



Teorema. Las medianas de un triángulo se intersectan en un punto que las divide en la razón 2:1

Demostración. Las medianas son las lineas que van de los vértices a los puntos medios de los lados opuestos. Para ver que las medianas concurren hay que ver que el punto que esta a 2/3 del recorrido de cada mediana es el mismo para las 3 medianas.

Las posiciones de los vértices están dadas por 3 vectores P, Q y R

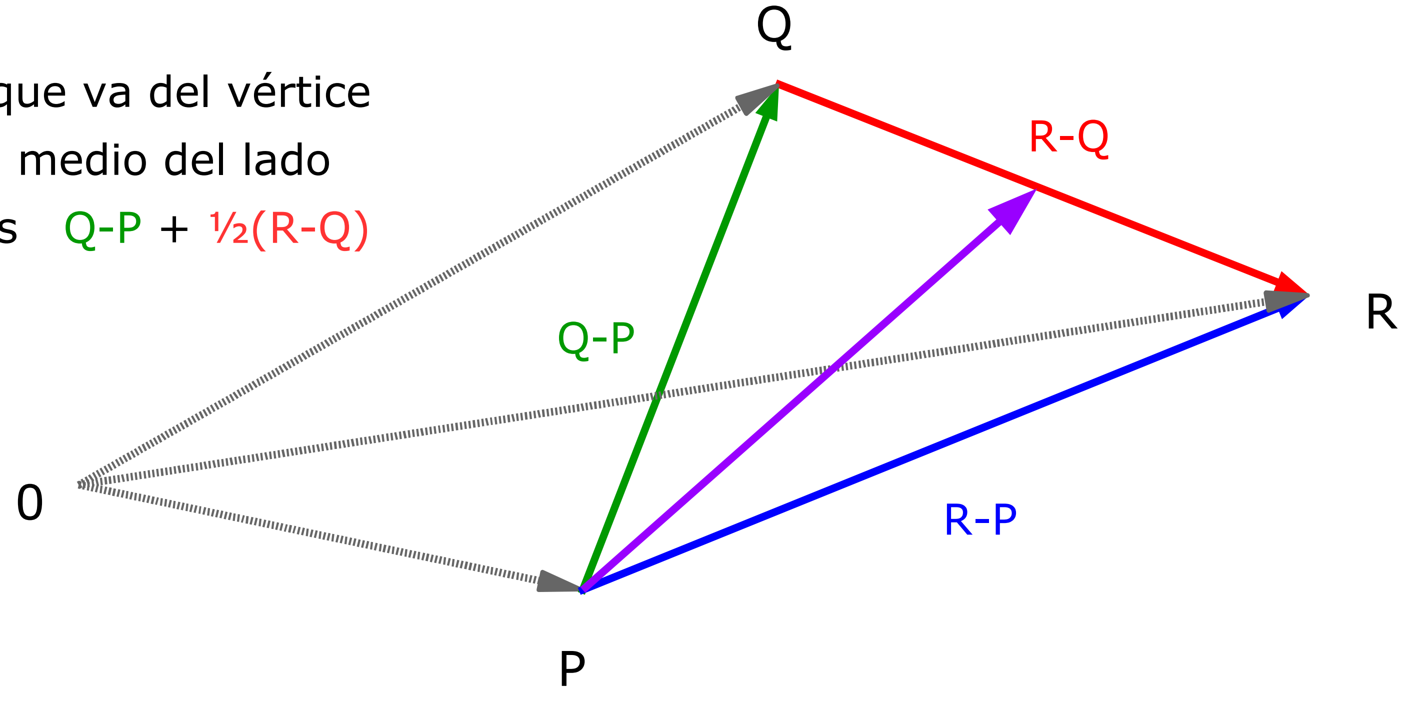


Los vectores que unen a los vértices son Q-P, R-Q y R-P

Teorema. Las medianas de un triángulo se intersectan en un punto que las divide en la razón 2:1

Demostración. Las medianas son las lineas que van de los vértices a los puntos medios de los lados opuestos. Para ver que las medianas concurren hay que ver que el punto que esta a 2/3 del recorrido de cada mediana es el mismo para las 3 medianas.

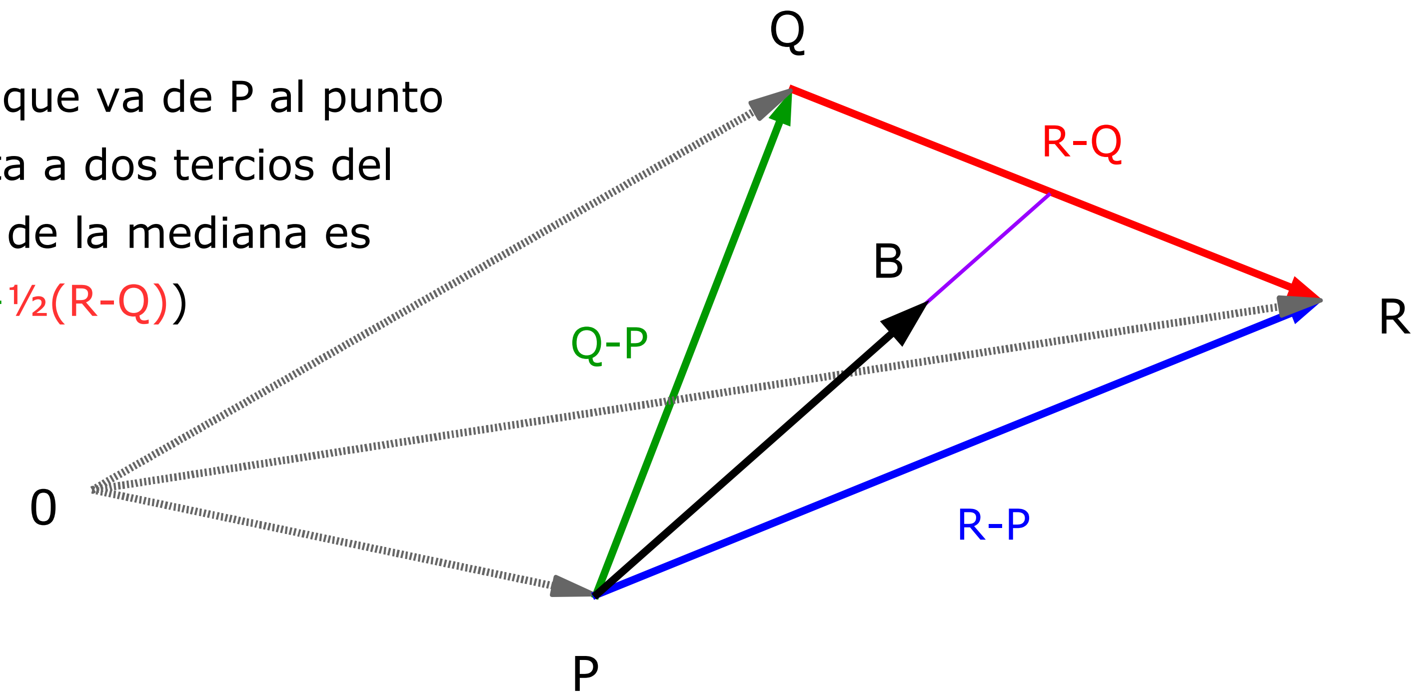
El vector que va del vértice P al punto medio del lado opuesto es Q-P + ½(R-Q)



Teorema. Las medianas de un triángulo se intersectan en un punto que las divide en la razón 2:1

Demostración. Las medianas son las lineas que van de los vértices a los puntos medios de los lados opuestos. Para ver que las medianas concurren hay que ver que el punto que esta a 2/3 del recorrido de cada mediana es el mismo para las 3 medianas.

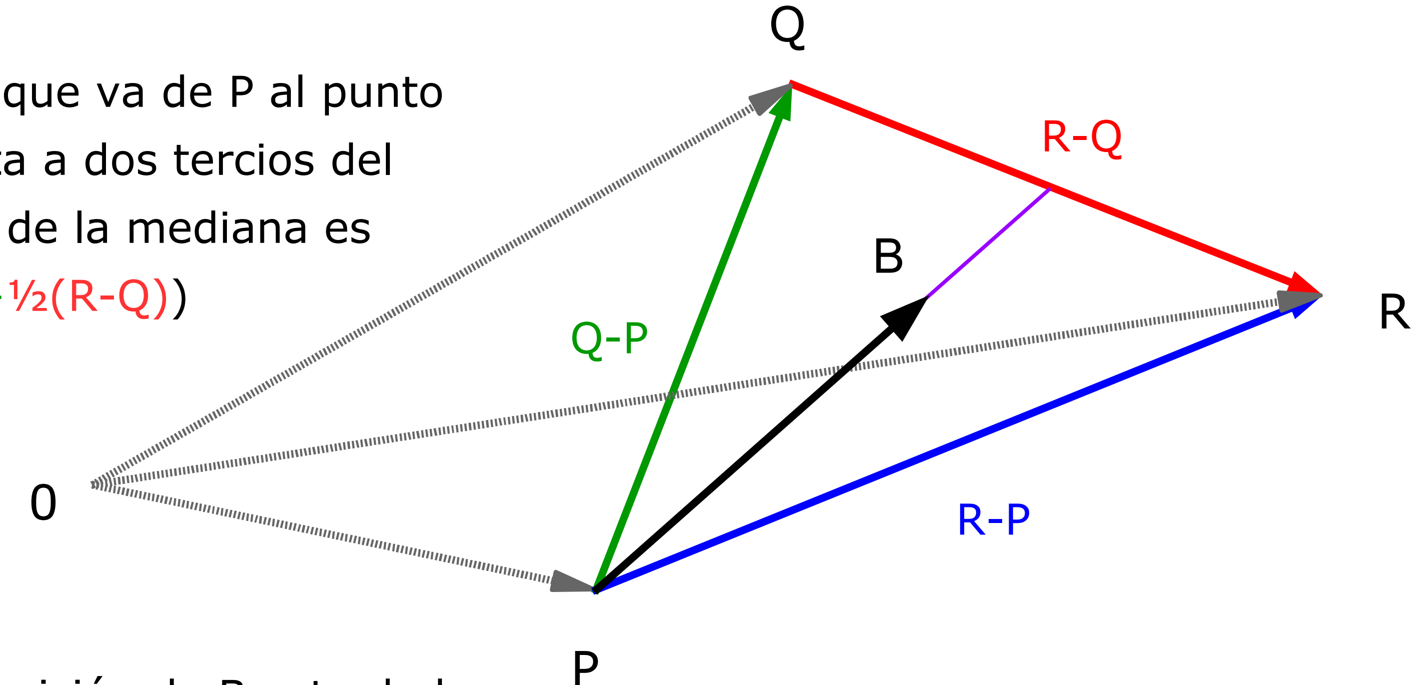
El vector que va de P al punto B que esta a dos tercios del recorrido de la mediana es 2/3(Q-P+½(R-Q))



Teorema. Las medianas de un triángulo se intersectan en un punto que las divide en la razón 2:1

Demostración. Las medianas son las lineas que van de los vértices a los puntos medios de los lados opuestos. Para ver que las medianas concurren hay que ver que el punto que esta a 2/3 del recorrido de cada mediana es el mismo para las 3 medianas.

El vector que va de P al punto B que esta a dos tercios del recorrido de la mediana es 2/3(Q-P+½(R-Q))

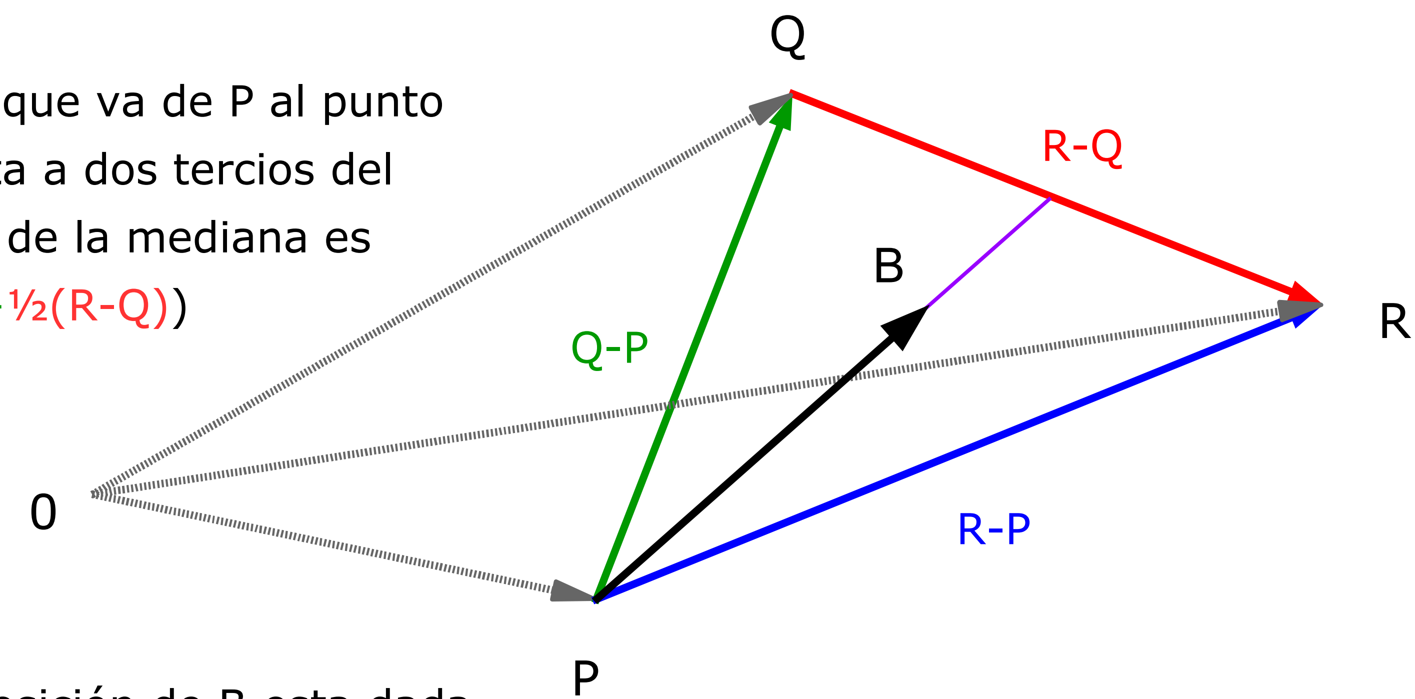


Así que la posición de B esta dada por el vector B = P+2/3(Q-P+½(R-Q))

Teorema. Las medianas de un triángulo se intersectan en un punto que las divide en la razón 2:1

Demostración. Las medianas son las lineas que van de los vértices a los puntos medios de los lados opuestos. Para ver que las medianas concurren hay que ver que el punto que esta a 2/3 del recorrido de cada mediana es el mismo para las 3 medianas.

El vector que va de P al punto B que esta a dos tercios del recorrido de la mediana es 2/3(Q-P+½(R-Q))

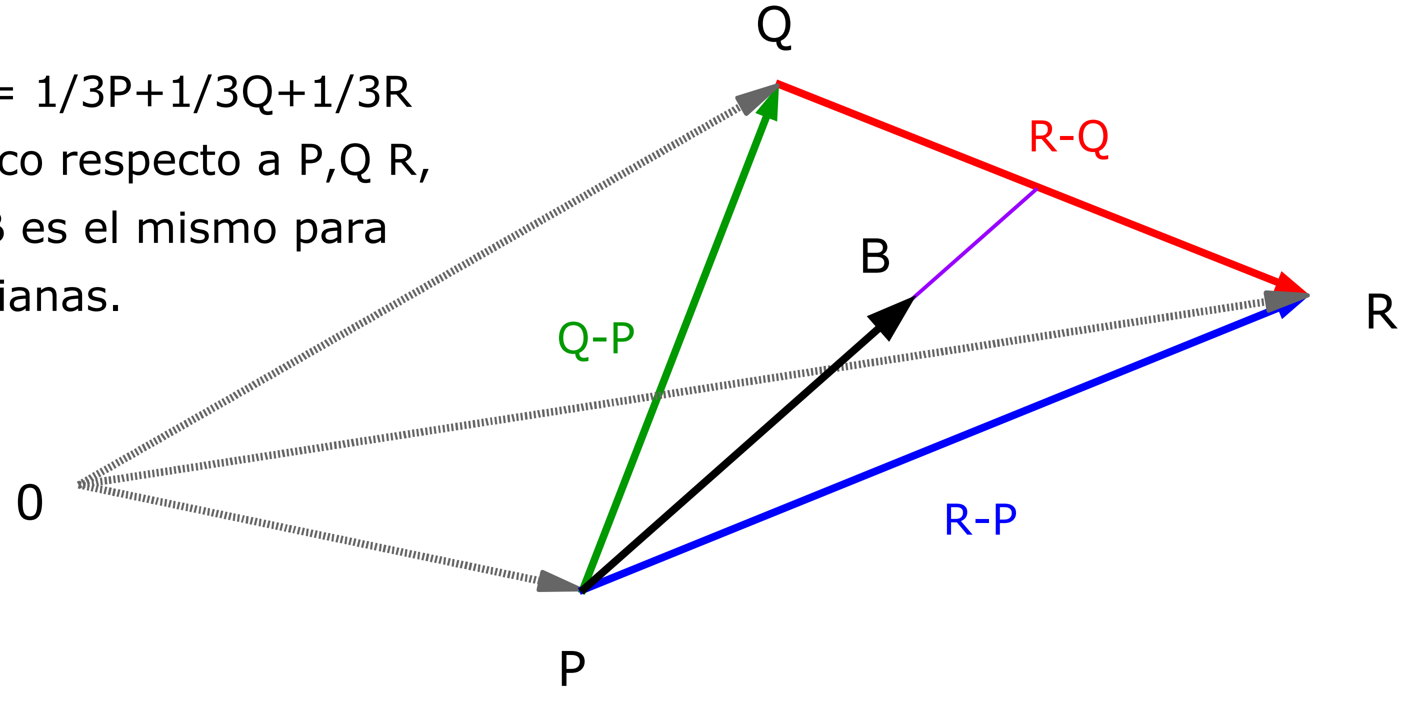


Así que la posición de B esta dada por el vector B = P+2/3(Q-P+½(R-Q)) = P+2/3 Q-2/3 P+1/3R-1/3Q = 1/3P+1/3Q+1/3R

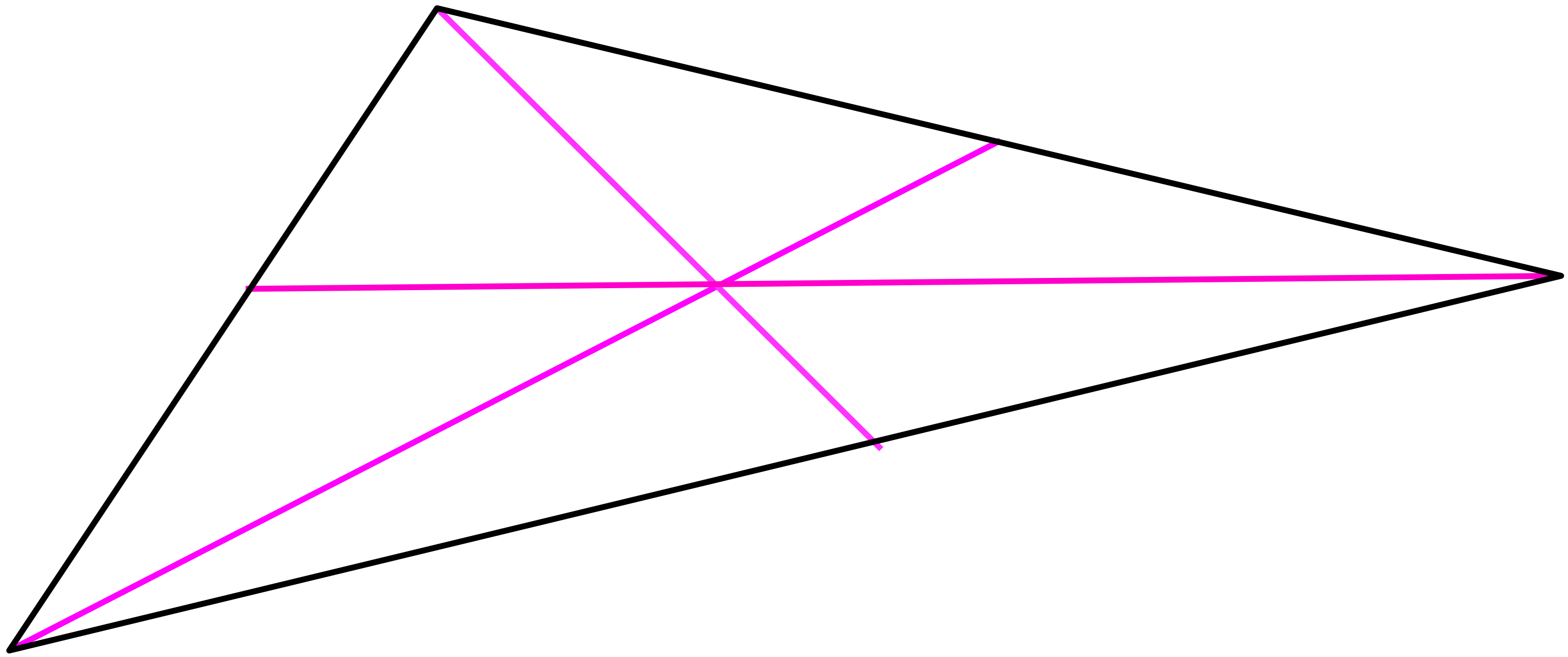
Teorema. Las medianas de un triángulo se intersectan en un punto que las divide en la razón 2:1

Demostración. Las medianas son las lineas que van de los vértices a los puntos medios de los lados opuestos. Para ver que las medianas concurren hay que ver que el punto que esta a 2/3 del recorrido de cada mediana es el mismo para las 3 medianas.

Como $B = 1/3P+1/3Q+1/3R$ es simétrico respecto a P,Q R, el punto B es el mismo para las 3 medianas.



El punto B = ${}^{1}/_{3}P+{}^{1}/_{3}Q+{}^{1}/_{3}R$ donde se juntan las medianas del triángulo PQR es el baricentro del triángulo (su centro de gravedad)



Norma o magnitud

Al tamaño de un vector V se le conoce como la ***magnitud*** o la ***norma*** de V y se le denota por |V|.

Los vectores de norma 1 se llaman ***unitarios***.

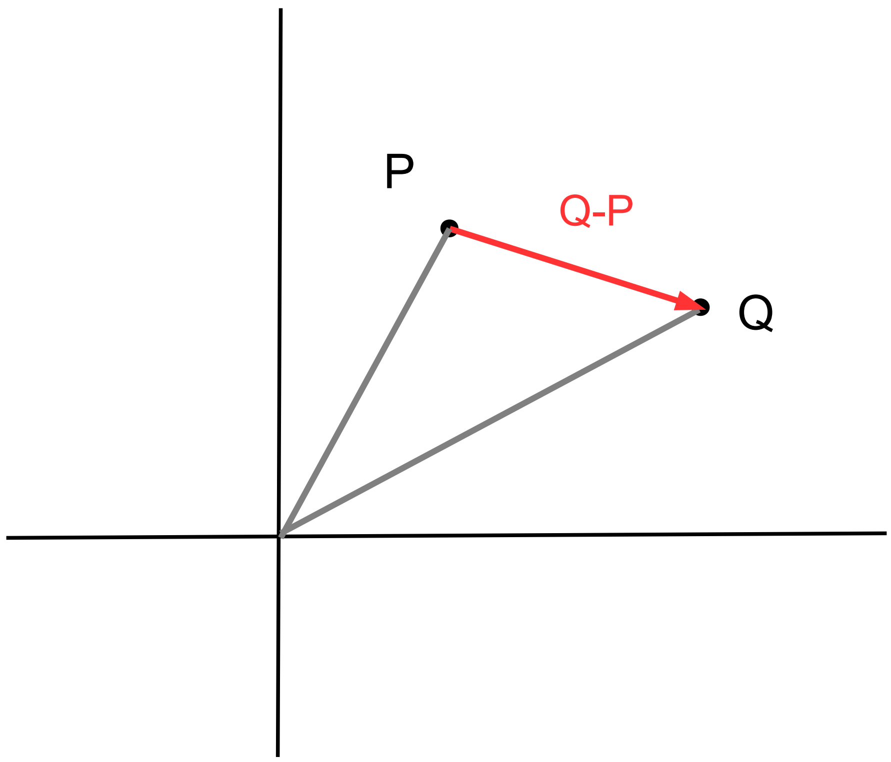
Por el Teorema de Pitágoras la norma del vector V=(x,y) es

$|V| = \sqrt{x^2+y^2}$

Ejemplo:

$|(4,-3)| = \sqrt{4^2+(-3)^2} = \sqrt{25} = 5$

La distancia entre dos puntos P y Q del plano es la norma del vector Q-P



Ejemplo: Si P=(4,1) y Q=(7,0) entonces

dist(P,Q) $=|(7-4,0-1)| = \sqrt{3^2+(-1)^2} = \sqrt{10}$

Al multiplicar un vector V por un numero r, se obtiene un vector paralelo a V cuya norma es |r| veces la norma de V, ya que si V=(x,y) , rV=(rx,ry)

$$|rV| = \sqrt{(rx)^2+(ry)^2} = \sqrt{r^2\,(x^2+y^2)} = |r|\sqrt{x^2+y^2} = |r|\;|V|$$

Al multiplicar un vector V por un numero r, se obtiene un vector paralelo a V cuya norma es |r| veces la norma de V, ya que si V=(x,y) , rV=(rx,ry)

$$|rV| = \sqrt{(rx)^2+(ry)^2} = \sqrt{r^2\ (x^2+y^2)} = |r| \sqrt{x^2+y^2} = |r|\ |V|$$

Ejercicio.

Encuentra un vector unitario paralelo a V=(4,-3)

Al multiplicar un vector V por un número r, se obtiene un vector paralelo a V cuya norma es |r| veces la norma de V, ya que si V=(x,y) , rV=(rx,ry)

$$|rV| = \sqrt{(rx)^2+(ry)^2} = \sqrt{r^2\,(x^2+y^2)} = |r|\sqrt{x^2+y^2} = |r|\,|V|$$

Ejercicio.

Encuentra un vector unitario paralelo a V=(4,-3)

El vector V tiene norma $|V| = \sqrt{4^2+3^2} = 5$

Así que el vector $^1/_{|V|}V = {}^1/_5(4,-3) = (4/5,-3/5)$

tiene norma 1 y tiene la misma dirección y sentido que (4,-3)

Ejercicio.

¿Cual vector tiene mayor magnitud, (12,5) o (13,0)?

Ejercicio.

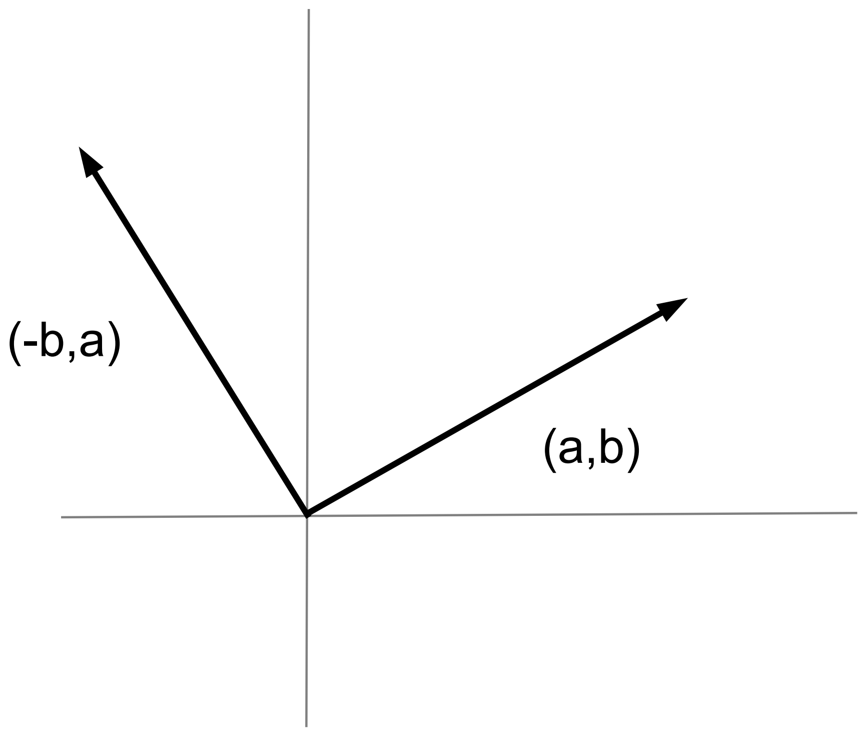
¿Cual vector tiene mayor magnitud, (12,5) o (13,0)?

$$|(12,5)| = \sqrt{12^2 + 5^2} = \sqrt{144 + 25} = \sqrt{169} = 13$$

$$|(13,0)| = \sqrt{13^2 + 0^2} = \sqrt{169 + 0} = \sqrt{169} = 13$$

Así que tienen la misma magnitud.

Lema. Los vectores (a,b) y (-b,a) tienen magnitudes iguales y son perpendiculares.

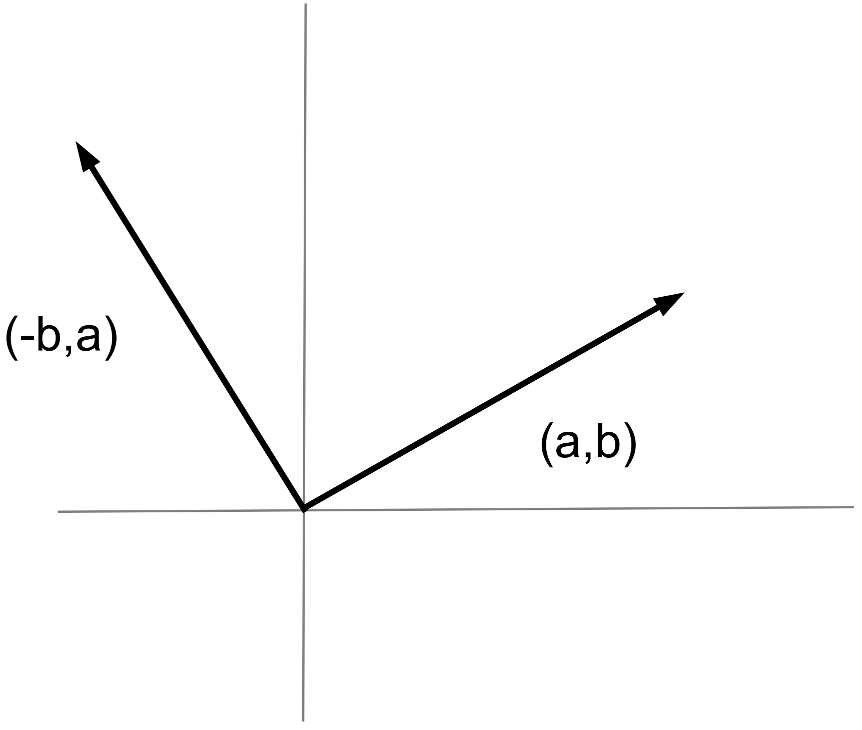


Lema. Los vectores (a,b) y (-b,a) tienen magnitudes iguales y son perpendiculares.

Demostración.

$|(a,b)|^2 = a^2+b^2 = (-b)^2+a^2 =|(-b,a)|^2$

así que (a,b) y (-b,a) tienen la misma norma.



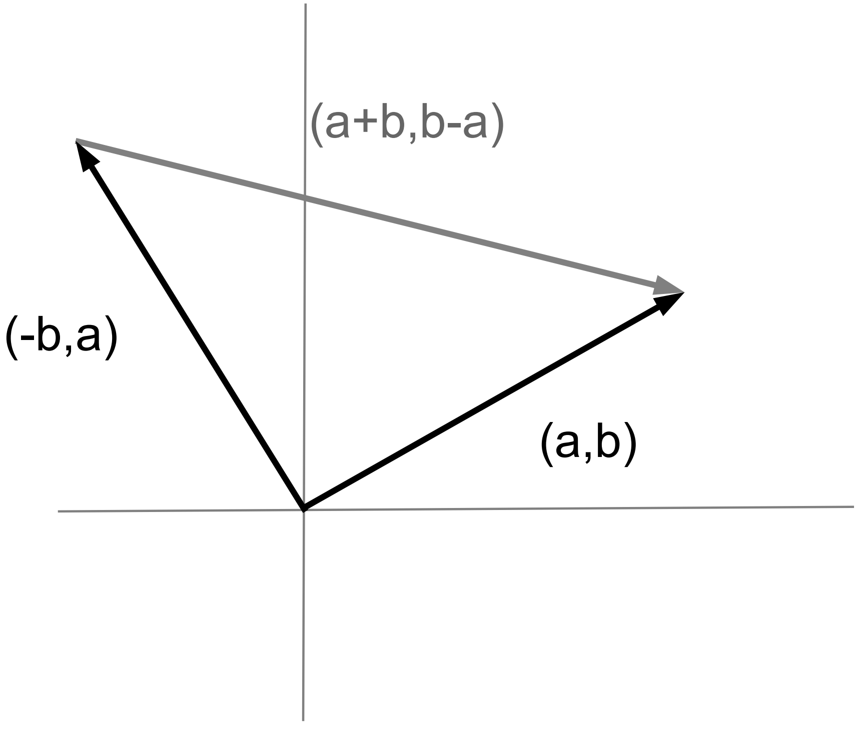
Lema. Los vectores (a,b) y (-b,a) tienen magnitudes iguales y son perpendiculares.

Demostración.

$|(a,b)|^2 = a^2+b^2 = (-b)^2+a^2 = |(-b,a)|^2$

así que (a,b) y (-b,a) tienen la misma norma.

Para ver que (a,b) y (-b,a) son perpendiculares, basta que ver que el triángulo formado por (a,b), (-b,a) y su diferencia (a+b,b-a) cumplen el T. de Pitagoras:



Lema. Los vectores (a,b) y (-b,a) tienen magnitudes iguales y son perpendiculares.

Demostración.

$|(a,b)|^2 = a^2+b^2 = (-b)^2+a^2 = |(-b,a)|^2$

así que (a,b) y (-b,a) tienen la misma norma.

Para ver que (a,b) y (-b,a) son perpendiculares, basta que ver que el triángulo formado por (a,b), (-b,a) y su diferencia (a+b,b-a) cumplen el T. de Pitagoras:

$|(a+b,b-a)|^2 = a^2+2ab+b^2+b^2-2ba+a^2$

$|(a,b)|^2+|(-b,a)|^2 = a^2+b^2+b^2+a^2$