El producto interno de vectores

La suma de vectores puede definirse algebraicamente

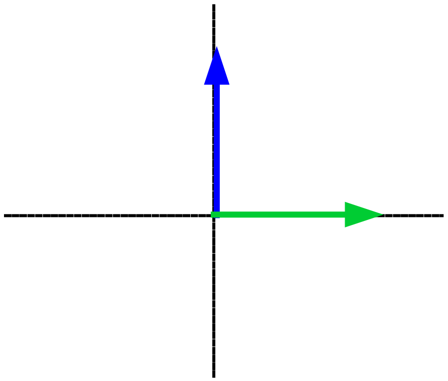
$(a,b) + (c,d) = (a+c,b+d)$

La suma coordenada a coordenada tiene un significado geométrico que es independiente de las coordenadas: Al girar los vectores su suma gira igual.

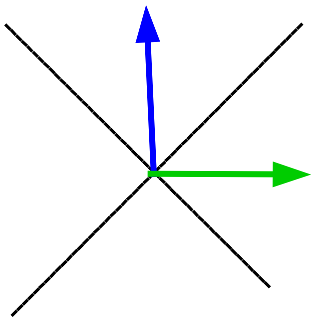
La suma de vectores puede definirse algebraicamente

$(a,b) + (c,d) = (a+c,b+d)$

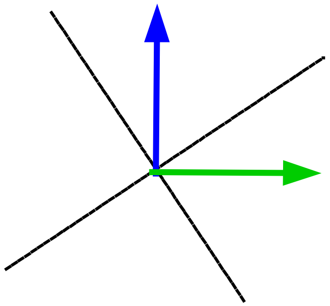
La suma coordenada a coordenada tiene un significado geométrico que es independiente de las coordenadas



$(1,0)+(0,1)$
$= (1,1)$



$(1/\sqrt{2},1/\sqrt{2})+(-1/\sqrt{2},1/\sqrt{2})$
$= (0,\sqrt{2})$



$(4/5,-3/5)+(3/5,4/5)$
$= (7/5,1/5)$

¿Se podrá definir un producto de vectores?

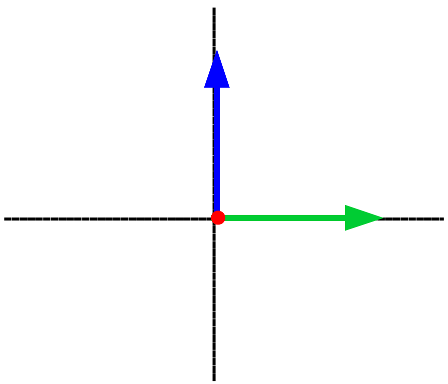
¿Se podrá definir un producto de vectores?

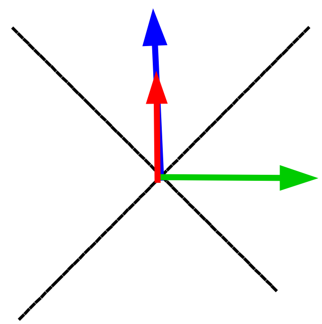
Parece natural definir el producto de vectores como

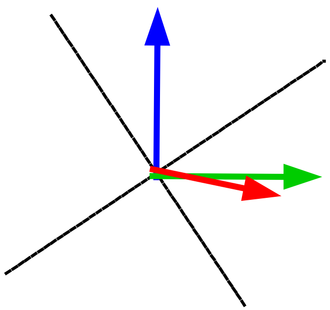
$(a,b) \times (c,d) = (ac,bd)$.

Pero este producto por coordenadas ***no*** tiene un significado geométrico independiente de coordenadas:

Ejemplo:







$(1,0)\times(0,1) = (0,0)$

$(1/\sqrt{2},1/\sqrt{2})\times(-1/\sqrt{2},1/\sqrt{2}) = (-1/2,1/2)$

$(4/5,-3/5)\times(3/5,4/5) = (12/25,-12/25)$

Pero aunque el producto por coordenadas de dos vectores (a,b) y (c,d) no tiene un significado geométrico, resulta que la suma de los productos, ac+bd, si lo tiene.

Pero aunque el producto por coordenadas de dos vectores (a,b) y (c,d) no tiene un significado geométrico, resulta que la suma de los productos, ac+bd, si lo tiene.

El *producto interno* o *producto punto* o *producto escalar* de dos vectores en el plano U=(a,b) y V=(c,d) es $U \cdot V = ac+bd$

Pero aunque el producto por coordenadas de dos vectores (a,b) y (c,d) no tiene un significado geométrico, resulta que la suma de los productos, ac+bd, si lo tiene.

El *producto interno* o *producto punto* o *producto escalar* de dos vectores en el plano U=(a,b) y V=(c,d) es $U \cdot V = ac+bd$

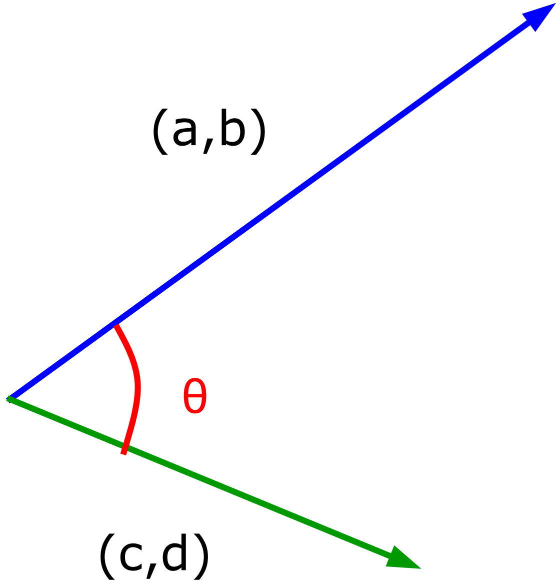
Ejemplo: Si U=(2,3) y V=(1,4) entonces

$U \cdot V = 2 \cdot 1+3 \cdot 4 = 2+12 = 14$

El producto punto es un número real, no es un vector!

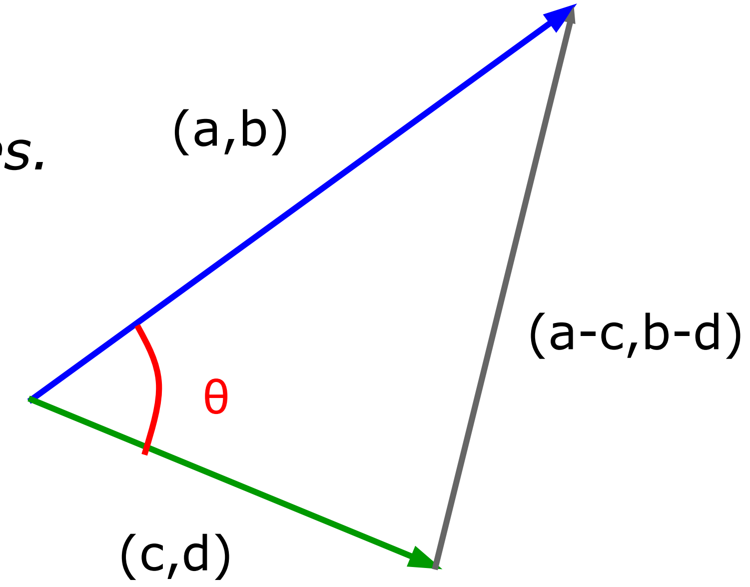
Teorema. $U \cdot V = |U|\ |V|\ cos\theta$

donde θ es el ángulo que forman los vectores.



Teorema. $U \cdot V = |U|\ |V|\ cos\theta$

donde θ es el ángulo que forman los vectores.



Demostración. La ley de los cosenos aplicada a las normas de los vectores da

$$|U-V|^2 = |U|^2 + |V|^2 - 2|U||V| \cos\theta$$

en coordenadas esto es

$$(a-c)^2 + (b-d)^2 = a^2+b^2+c^2+d^2 - 2\sqrt{a^2+b^2}\sqrt{c^2+d^2} \cos\theta$$

desarrollando y simplificando queda

$$-2ac - 2bd = -2\sqrt{a^2+b^2}\sqrt{c^2+d^2} \cos\theta$$

dividiendo entre -2 queda

$$ac + bd = \sqrt{a^2+b^2}\sqrt{c^2+d^2} \cos\theta = |U|\ |V| \cos\theta$$

El producto interno tiene las siguientes propiedades algebraicas:

1. $U \cdot U = |U|^2$

2. $U \cdot V = V \cdot U$ *es conmutativo*

3. $U \cdot (V+W) = U \cdot V + U \cdot W$ *se distribuye con la suma*

4. $r\, U \cdot V = U \cdot r\, V = r\,(U \cdot V)$ *saca escalares*

Como $U \cdot V = |U|\,|V| \cos\theta$, el producto interno tiene las siguientes propiedades geométricas:

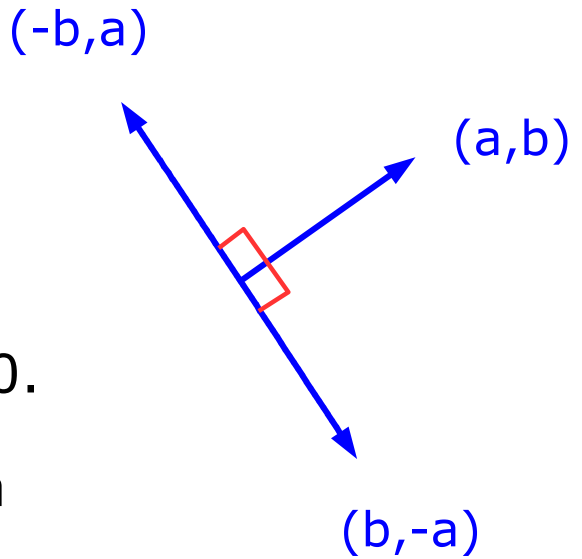
1. $U \cdot V \leq |U|\,|V|$ y la igualdad se da solo si U y V tienen la misma dirección y sentido.

2. $U \cdot V = 0$ si y solo si U y V son ortogonales (perpendiculares).

Ejemplos:

1. Los vectores (2,3) y (9,-6) son ortogonales ya que

$(2,3)\cdot(9,-6) = 2\cdot9-3\cdot6 = 0.$



2. Los vectores (b,-a) (-b,a) son ortogonales

al vector (a,b) ya que $(a,b) \cdot (b,-a) = ab-ba = 0.$

(-b,a) apunta a la izquierda y (b,-a) apunta a la

derecha de (a,b).

Corolario. $U \cdot V > 0$ si $\theta<90º$ y $U \cdot V < 0$ si $\theta>90º$

Demostración- $\cos \theta>0$ si $0<\theta<90º$ y $\cos \theta<0$ si $90º<\theta<180º$

Ejercicio:

¿Los vectores (6,7) y (-8,7) forman un ángulo mayor o menor a 90º?

Corolario. $U \cdot V > 0$ si $\theta<90º$ y $U \cdot V < 0$ si $\theta>90º$

Demostración- cos $\theta>0$ si $0<\theta<90º$ y cos $\theta<0$ si $90º<\theta<180º$

Ejercicio:

¿Los vectores (6,7) y (-8,7) forman un ángulo mayor o menor a 90º?

$(6,7)\cdot(-8,7) = 1>0$ así que (6,7) y (-8,7) forman un ángulo menor que 90º.

Corolario. El ángulo entre los vectores U y V está dado por

$$\cos \theta = U \cdot V / |U|\,|V|$$

Ejercicio: ¿Que ángulo forman los vectores (1,2) y (3,4)?

Corolario. El ángulo entre los vectores U y V está dado por

$$\cos\theta = U \cdot V \,/\, |U|\,|V|$$

Ejercicio: ¿Que ángulo forman los vectores (1,2) y (3,4)?

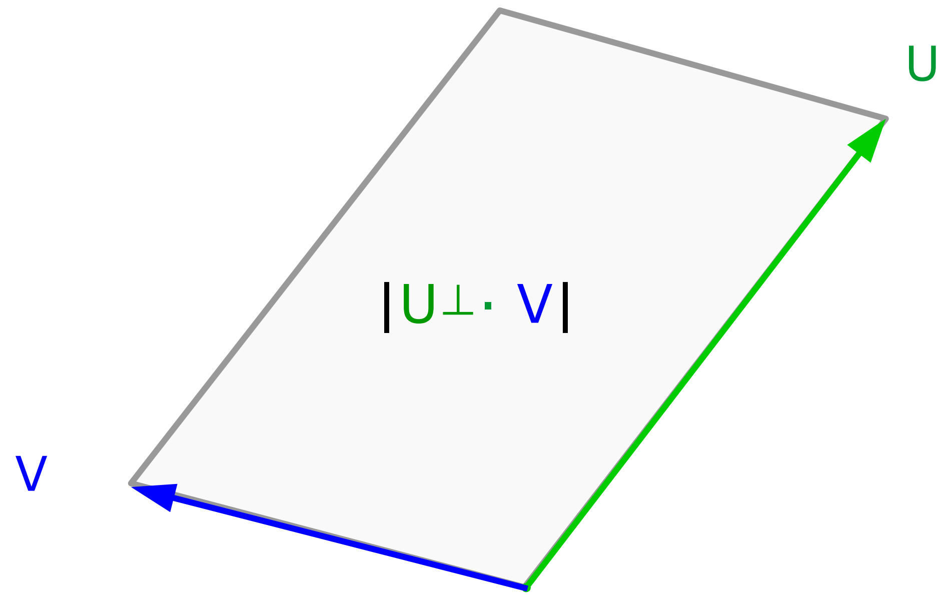
$$\cos\theta = (1,2)\cdot(3,4) \,/\, |(1,2)||(3,4)| =$$

$$= 1\cdot 3+2\cdot 4 \,/ \sqrt{1^2+2^2}\sqrt{3^2+4^2}$$

$$= 11/\sqrt{125} \approx 0.98387$$

Así que $\theta \approx \arccos(0.98387) \approx 10.3°$

Teorema. El área del paralelogramo determinado por dos vectores U y V del plano es $|U^{\perp} \cdot V|$ donde $U^{\perp}$ es un vector perpendicular a U con la misma norma que U.



Teorema. El área del paralelogramo determinado por dos vectores U y V del plano es $|U^{\perp} \cdot V|$ donde $U^{\perp}$ es un vector perpendicular a U con la misma norma que U.

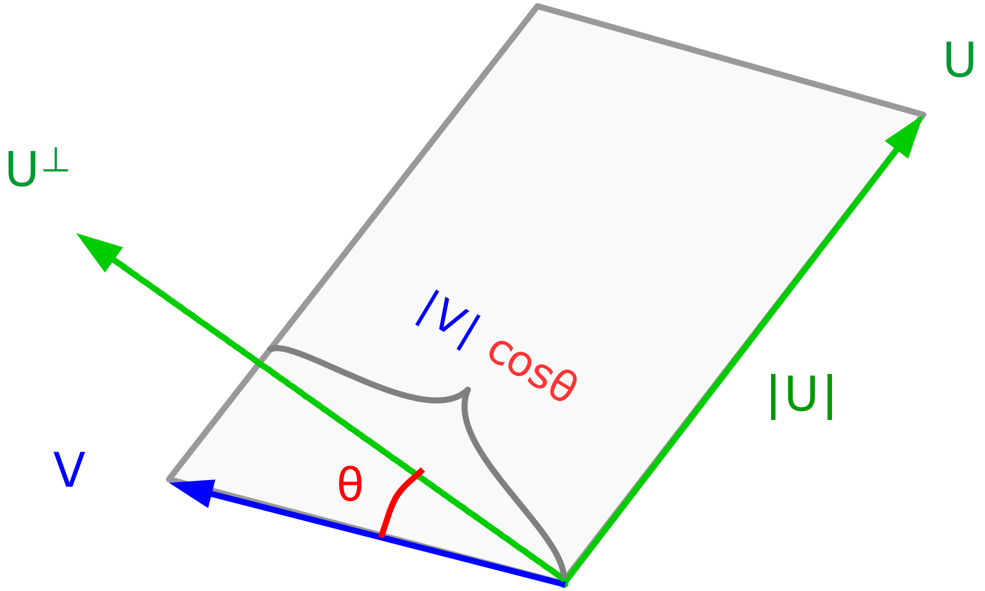
Demostración.

Area = base x altura =

$= \quad |U| \quad |V| \cos\theta \quad =$

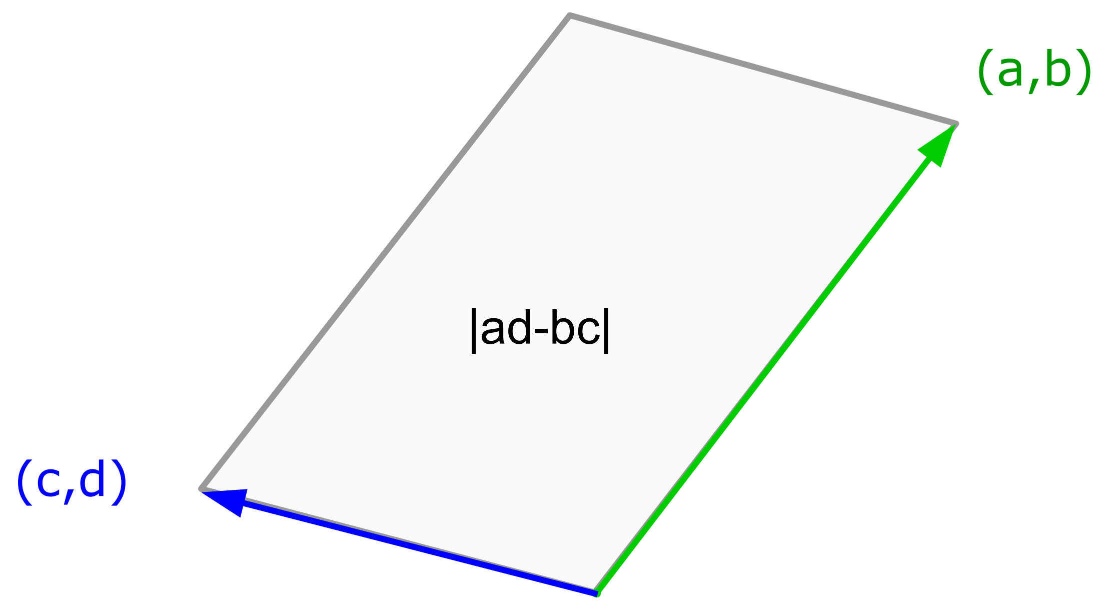
$= \quad |U^{\perp}| \quad |V| \cos\theta \quad =$

$= \quad U^{\perp} \cdot V$



Corolario. El área del paralelogramo determinado por los vectores (a,b) y (c,d) es el valor absoluto del determinante de la matriz formada por los vectores:

$$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}$$



Demostración.

$$\begin{aligned} \text{Area} &= |(a,b)^{\perp}\cdot(c,d)| \\ &= |(-b,a)\cdot(c,d)| \\ &= |-bc+ad\ | \end{aligned}$$

Ejercicios:

¿Cual es el área del paralelogramo determinado por (1,2) y (3,4)?

2. ¿Que área tiene el triángulo con vértices (1,2), (7,4) y (3,5)?

Ejercicios:

¿Cual es el área del paralelogramo determinado por (1,2) y (3,4)?

El área es $(1,2)\cdot(4,-3) = 1\cdot4-2\cdot3 = 10$

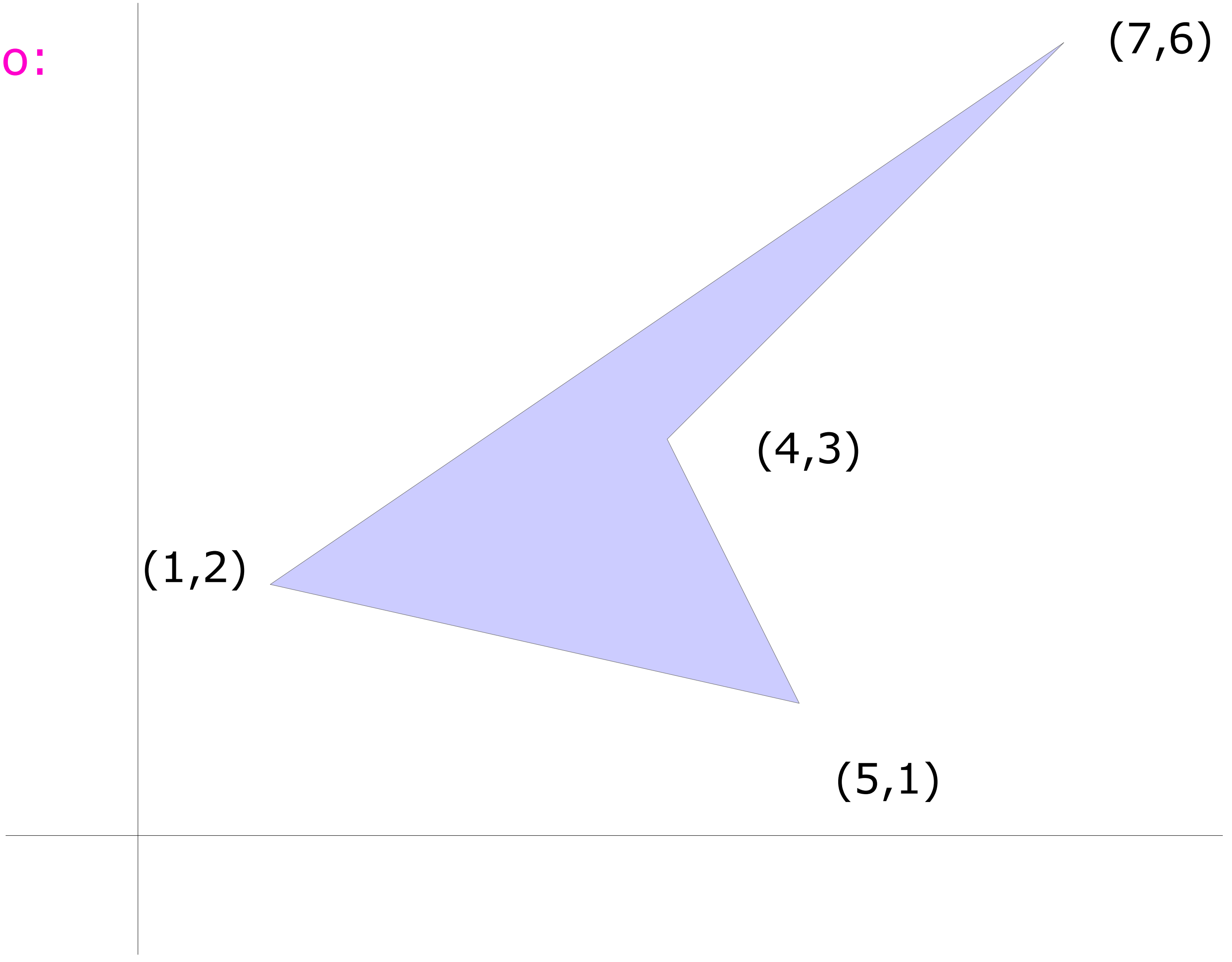
2. ¿Que área tiene el triángulo con vértices (1,2), (7,4) y (3,5)?

Los vectores $(7,4)-(1,2)=(6,2)$ y $(3,5)-(1,2)=(2,3)$
dan dos lados del triángulo.
El área del triángulo es la mitad del área del
paralelogramo generado por los dos vectores:

Area $= 1/2\ (6,2)\cdot(3,-2)=1/2\ (18-4)= 7$

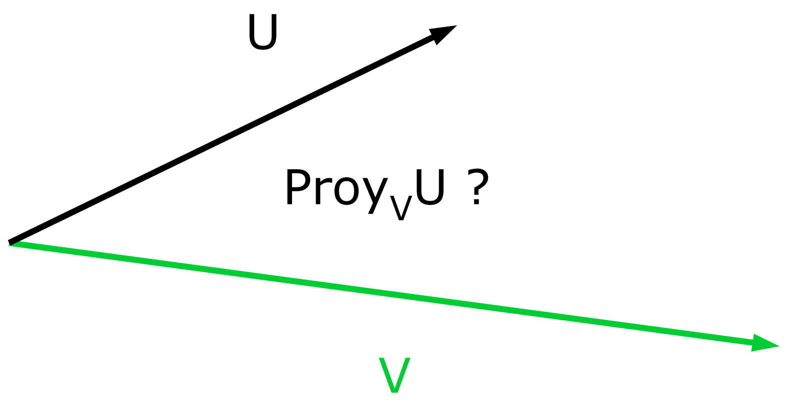
El área de cualquier polígono puede calcularse a partir de las coordenadas de sus vértices dividiendo al polígono en triángulos.

Ejercicio:

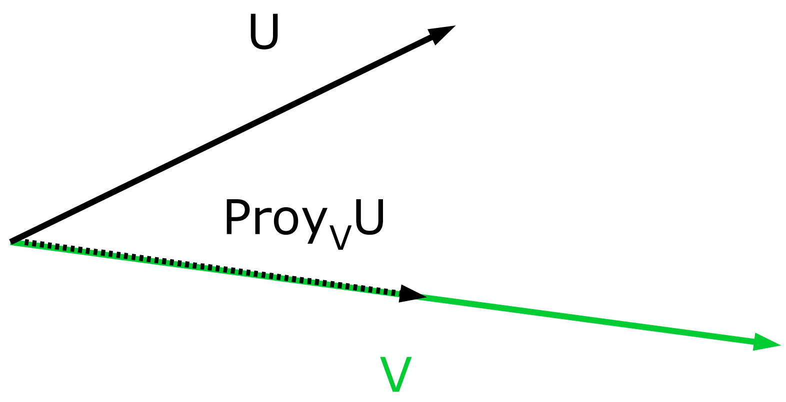


Proyecciones y descomposición de vectores

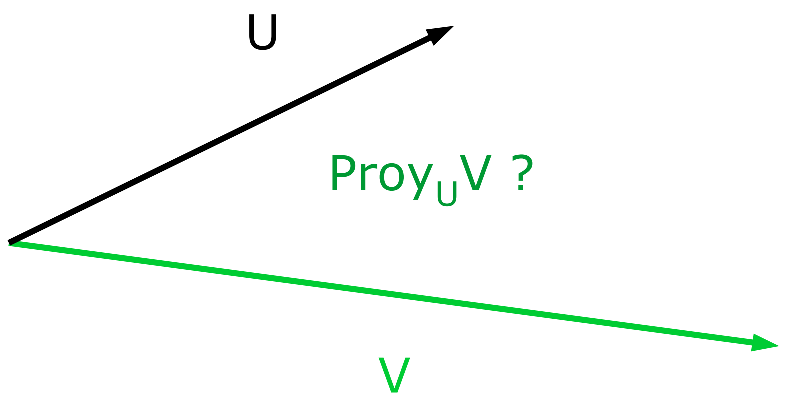
Si U y V son vectores en el plano, la proyección de U en la dirección de V es el vector formado por la “sombra” de U en la linea determinada por V, cuando se ilumina U perpendicularmente a V.



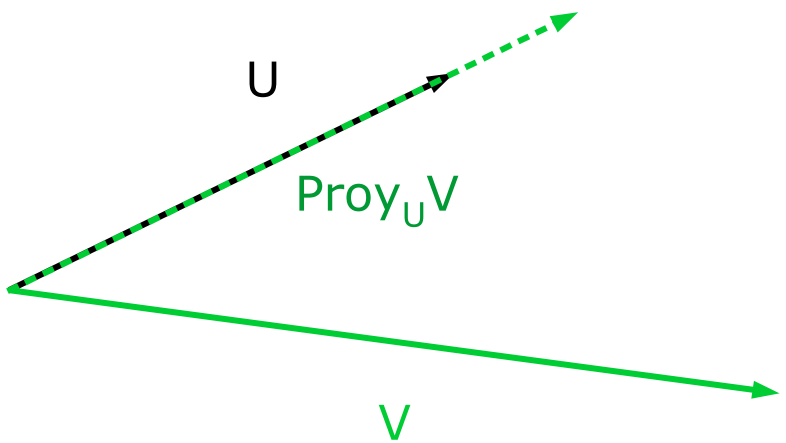
Si U y V son vectores en el plano, la proyección de U en la dirección de V es el vector formado por la "sombra" de U en la linea determinada por V, cuando se ilumina U perpendicularmente a V.



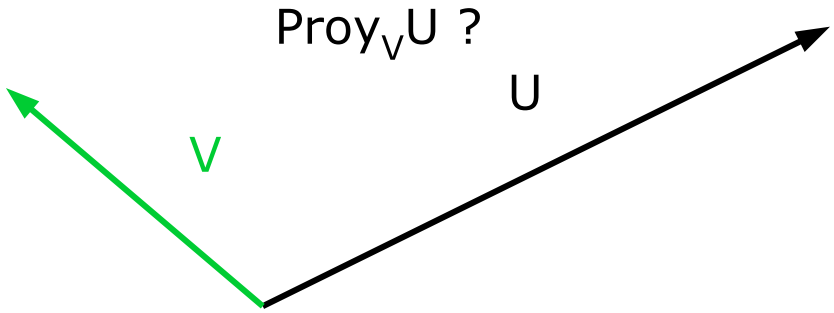
Si U y V son vectores en el plano, la proyección de U en la dirección de V es el vector formado por la "sombra" de U en la linea determinada por V, cuando se ilumina U perpendicularmente a V.



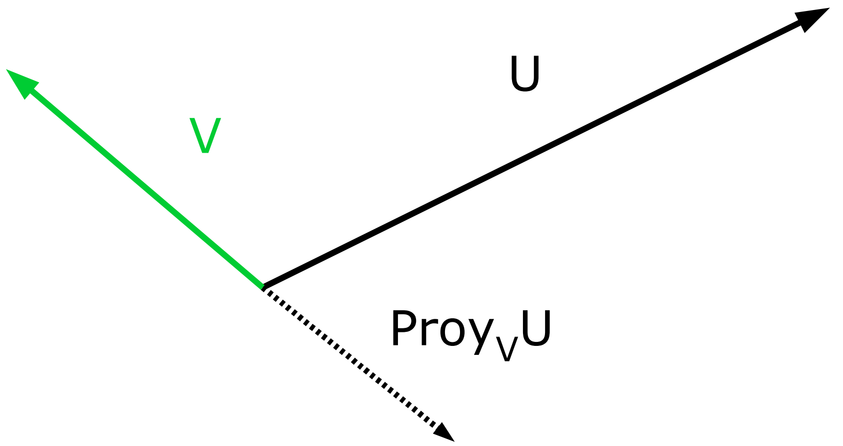
Si U y V son vectores en el plano, la proyección de U en la dirección de V es el vector formado por la "sombra" de U en la linea determinada por V, cuando se ilumina U perpendicularmente a V.



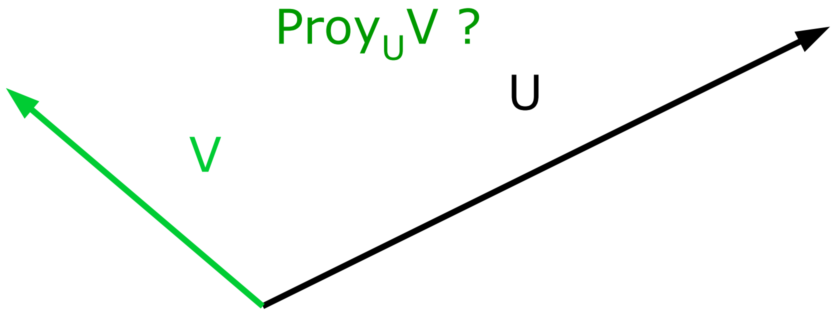
Si U y V son vectores en el plano, la proyección de U en la dirección de V es el vector formado por la "sombra" de U en la linea determinada por V, cuando se ilumina U perpendicularmente a V.



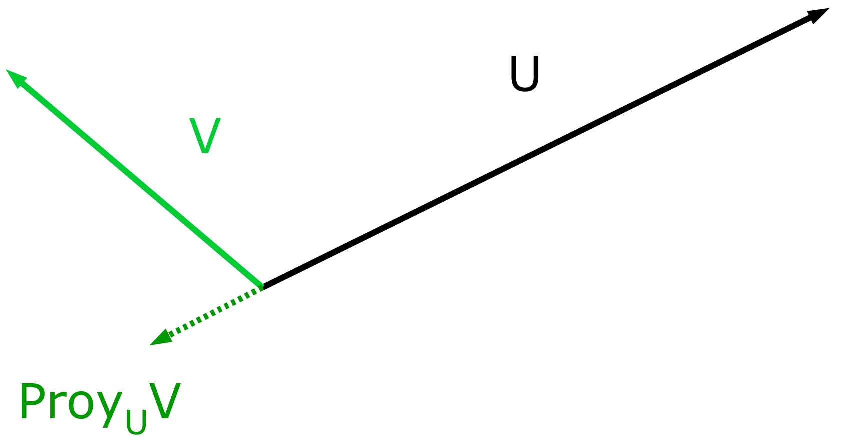
Si U y V son vectores en el plano, la proyección de U en la dirección de V es el vector formado por la “sombra” de U en la linea determinada por V, cuando se ilumina U perpendicularmente a V.



Si U y V son vectores en el plano, la proyección de U en la dirección de V es el vector formado por la "sombra" de U en la linea determinada por V, cuando se ilumina U perpendicularmente a V.



Si U y V son vectores en el plano, la proyección de U en la dirección de V es el vector formado por la "sombra" de U en la linea determinada por V, cuando se ilumina U perpendicularmente a V.



¿Como podemos hallar la proyección de un vector en la dirección de otro, que no sea dibujando?

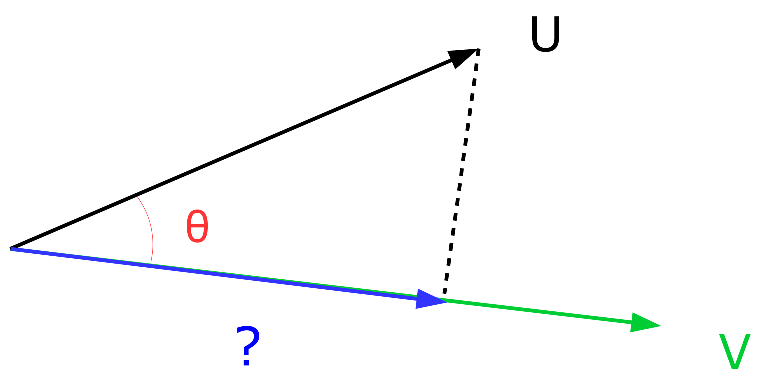
Lema. La proyección de U en la dirección de V esta dada por

$$\text{Proy}_V\, U = \frac{U \cdot V}{V \cdot V}\, V$$

Lema. La proyección de U en la dirección de V esta dada por

$$\text{Proy}_V\, U = \frac{U \cdot V}{V \cdot V}\, V$$

Demostración.



Lema. La proyección de U en la dirección de V esta dada por

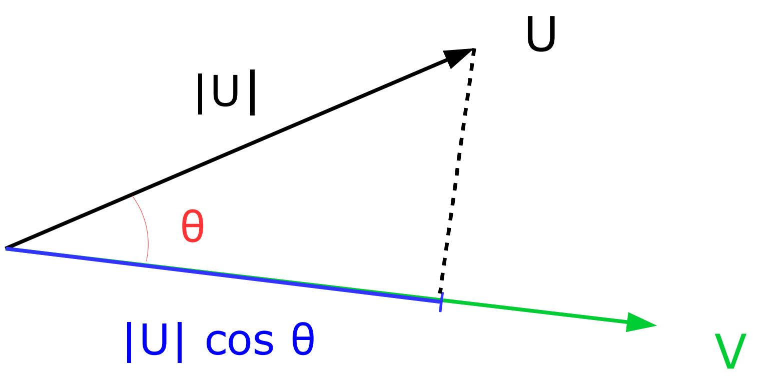
$$\text{Proy}_V\, U = \frac{U\cdot V}{V\cdot V}\, V$$

Demostración. La sombra de U en la linea de V mide $|U| \cos \theta$

Como $UV = |U||V| \cos \theta$

entonces

$$|U| \cos \theta = \frac{U\cdot V}{|V|}$$



Lema. La proyección de U en la dirección de V esta dada por

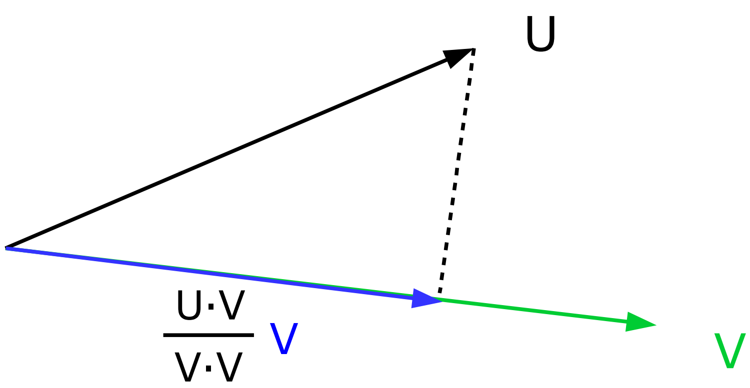
$$\text{Proy}_V\, U = \frac{U\cdot V}{V\cdot V}\, V$$

Demostración. La sombra de U en la linea de V mide $|U| \cos\theta$

Como $UV = |U||V| \cos\theta$

entonces

$$|U| \cos\theta = \frac{U\cdot V}{|V|}$$



Para obtener la proyección de U hacia V, basta multiplicar el tamaño de la sombra por el vector unitario en la dirección de V:

$$\text{Proy}_V U = \frac{U\cdot V}{|V|}\,\frac{1}{|V|}\, V = \frac{U\cdot V}{V\cdot V}\, V \qquad \bullet$$

Ejemplo. ¿Cual es la proyección de $U=(1,2)$ en la dirección de $V=(3,4)$?

Ejemplo. ¿Cual es la proyección de U=(1,2) en la dirección de V=(3,4) ?

$$\text{Proy}_V U = \frac{U\cdot V}{V\cdot V} V = \frac{(1,2)\cdot(3,4)}{(3,4)\cdot(3,4)} (3,4) = \frac{1\cdot 3+2\cdot 4}{3\cdot 3+4\cdot 4} (3,4) = \frac{11}{25} (3,4)$$

Ejemplo. ¿Cual es la proyección de U=(1,2) en la dirección de V=(3,4) ?

$$Proy_V U = \frac{U \cdot V}{V \cdot V} V = \frac{(1,2)\cdot(3,4)}{(3,4)\cdot(3,4)} (3,4) = \frac{1\cdot 3+2\cdot 4}{3\cdot 3+4\cdot 4} (3,4) = \frac{11}{25} (3,4)$$

¿Y cual es la proyección de V=(3,4) en la dirección de U=(1,2)?

Ejemplo. ¿Cual es la proyección de U=(1,2) en la dirección de V=(3,4) ?

$$\mathrm{Proy}_V U = \frac{U \cdot V}{V \cdot V} V = \frac{(1,2)\cdot(3,4)}{(3,4)\cdot(3,4)}\,(3,4) = \frac{1\cdot 3 + 2\cdot 4}{3\cdot 3 + 4\cdot 4}\,(3,4) = \frac{11}{25}\,(3,4)$$

¿Y cual es la proyección de V=(3,4) en la dirección de U=(1,2)?

$$\mathrm{Proy}_U V = \frac{U \cdot V}{U \cdot U} U = \frac{(1,2)\cdot(3,4)}{(1,2)\cdot(1,2)}\,(1,2) = \frac{1\cdot 3 + 2\cdot 4}{1\cdot 1 + 2\cdot 2}\,(1,2) = \frac{11}{5}\,(1,2)$$

Lema. La proyección de U en la dirección de V es el único vector paralelo a V que al restarlo a U da un vector ortogonal a V.

Lema. La proyección de U en la dirección de V es el único vector paralelo a V que al restarlo a U da un vector ortogonal a V.

Demostración.

Un vector paralelo a V es de la forma tV para algún numero real t.

U-tV es ortogonal a V si y solo si su producto punto es 0.

$(U-tV)\cdot V = 0$ equivale a $U\cdot V - tV\cdot V = 0$

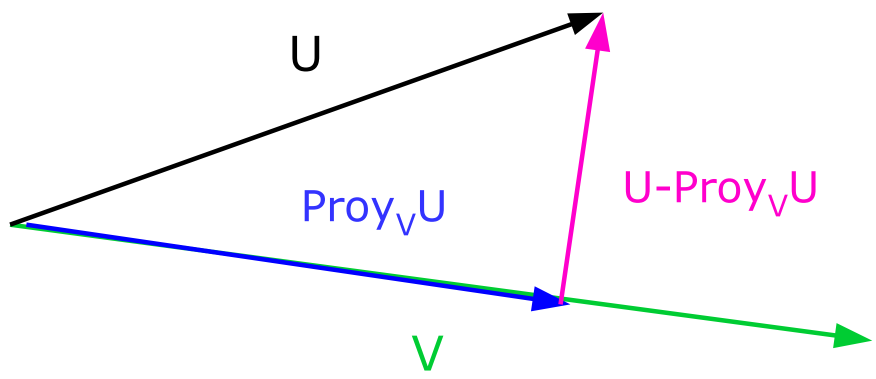
o sea $U\cdot V = t\, V\cdot V$

así que $t = U\cdot V/V\cdot V$ •

Corolario. Cada vector U puede descomponerse de manera única como la suma de un vector paralelo a V y otro ortogonal a V

Corolario. Cada vector U puede descomponerse de manera única como la suma de un vector paralelo a V y otro ortogonal a V:

$$U = \mathrm{Proy}_V U + (U - \mathrm{Proy}_V U)$$



Ejercicio. Descomponer al vector (3,2) como la suma de un vector paralelo y otro perpendicular a (5,4).

Ejercicio. Descomponer al vector (3,2) como la suma de un vector paralelo y otro perpendicular a (5,4).

$\text{Proy}_{(5,4)}(3,2) = {}^{(3,2)\cdot(5,4)}/_{(5,4)\cdot(5,4)}\,(5,4) = {}^{23}/_{41}(5,4) = ({}^{115}/_{41},{}^{92}/_{41})$

Este debe ser paralelo a (5,4)

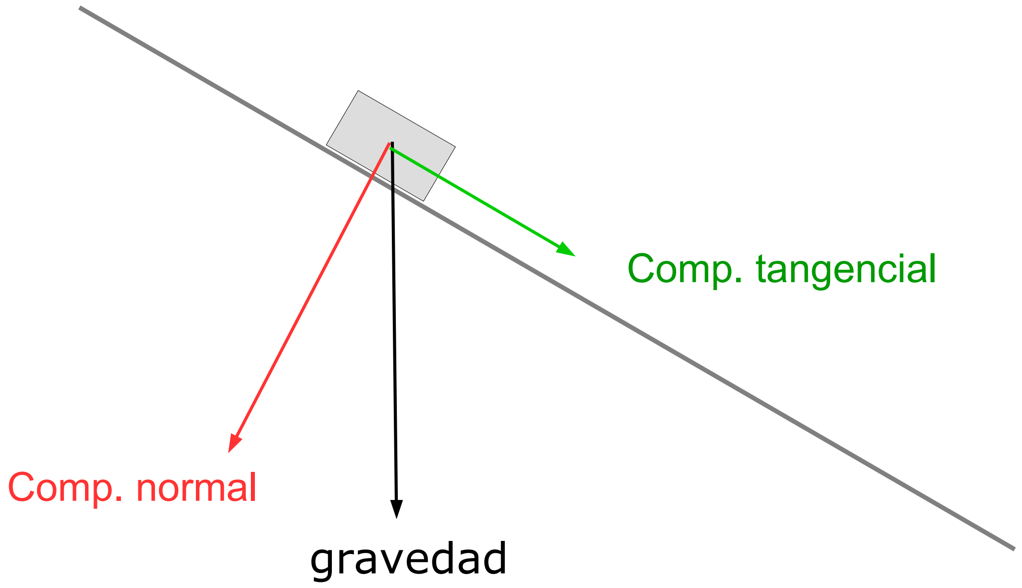
$(3,2) - \text{Proy}_{(5,4)}(3,2) = (3,2) - ({}^{115}/_{41},{}^{92}/_{41}) = ({}^{8}/_{41},{}^{-10}/_{41})$

Este debe ser ortogonal a (5,4)

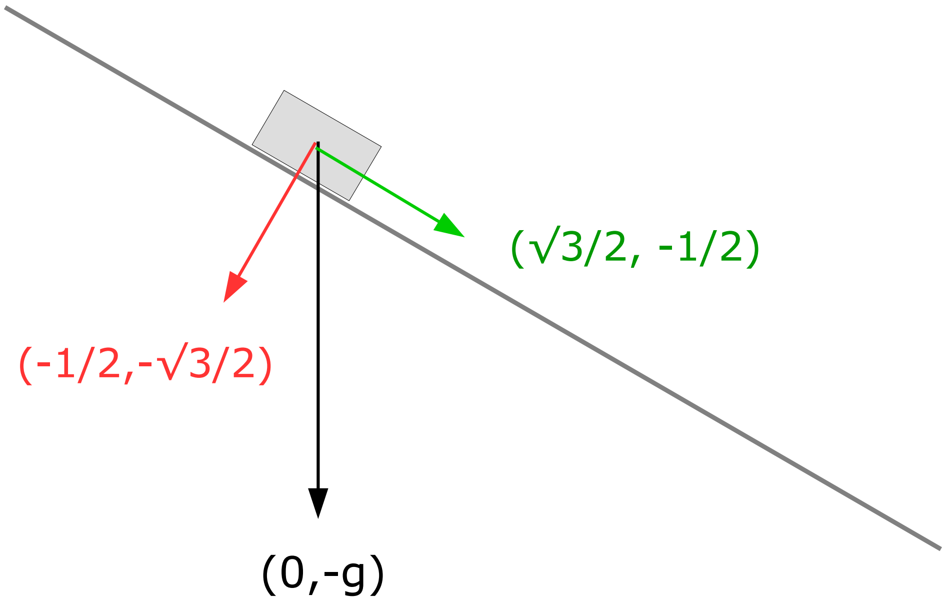
$(3,2) = ({}^{115}/_{41},{}^{92}/_{41}) + ({}^{8}/_{41}, {}^{-10}/_{41})$

¡Hay que comprobarlo!

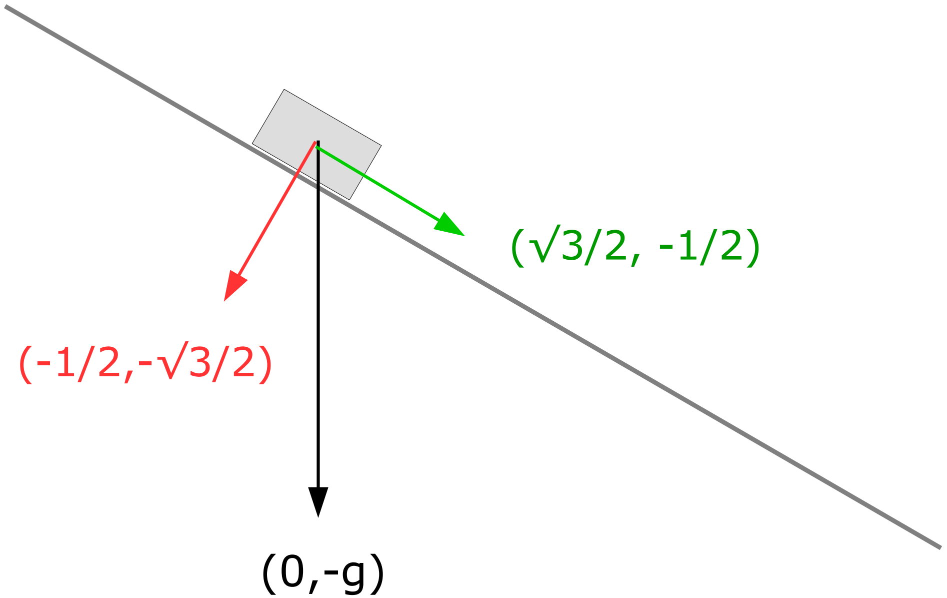
Ejemplo. Para un objeto en un plano inclinado, la fuerza de gravedad se descompone en una fuerza paralela al plano (que empuja al objeto cuesta abajo) y una fuerza normal al plano (que lo empuja hacia el plano, la fricción es proporcional a esta fuerza).



Si la fuerza de gravedad esta dada por el vector (0,-g) y el plano tiene una inclinación de 30°, un vector que apunta “cuesta abajo” es (cos 30°, -sen 30°) = (√3/2, -1/2).



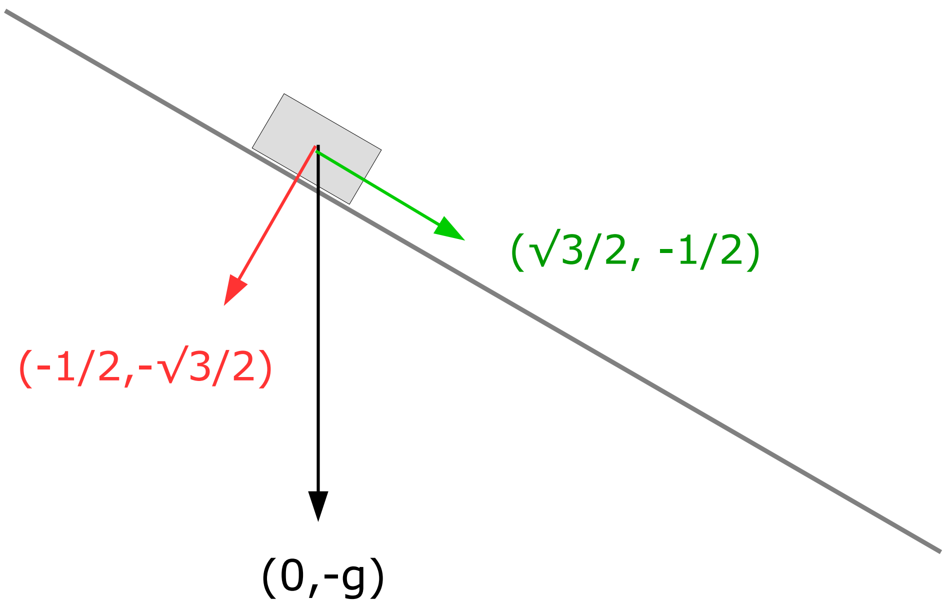
Si la fuerza de gravedad esta dada por el vector (0,-g) y el plano tiene una inclinación de 30°, un vector que apunta “cuesta abajo” es (cos 30°, -sen 30°) = ($\sqrt{3}/2$, -1/2).



Así que la componente tangencial al plano inclinado es

$$\mathrm{Proy}_{(\sqrt{3}/2,\,-1/2)}(0,-g) = {}^{(0,-g)\cdot(\sqrt{3}/2,\,-1/2)}/_{1}\,(\sqrt{3}/2, -1/2) = 1/2\ g\ (\sqrt{3}/2, -1/2)$$

Si la fuerza de gravedad esta dada por el vector (0,-g) y el plano tiene una inclinación de 30°, un vector que apunta "cuesta abajo" es (cos 30°, -sen 30°) = ($\sqrt{3}/2$, -1/2).



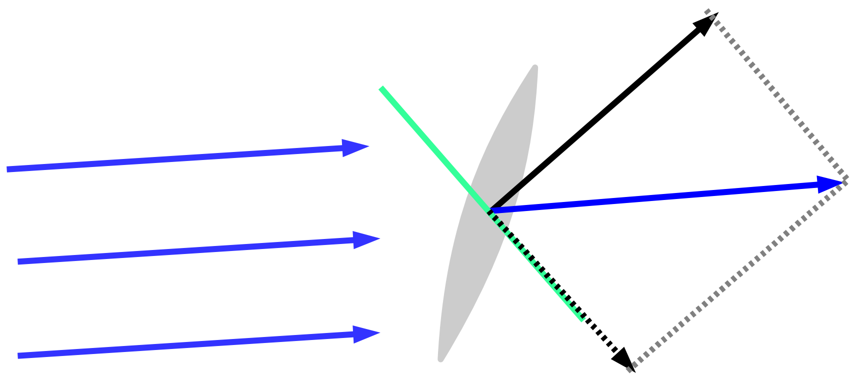
Así que la componente tangencial al plano inclinado es

$$\mathrm{Proy}_{(\sqrt{3}/2,\,-1/2)}(0,-g) = {}^{(0,-g)\cdot(\sqrt{3}/2,\,-1/2)}/_{1}\,(\sqrt{3}/2,\,-1/2) = 1/2\ g\,(\sqrt{3}/2,\,-1/2)$$

y la componente normal al plano inclinado es

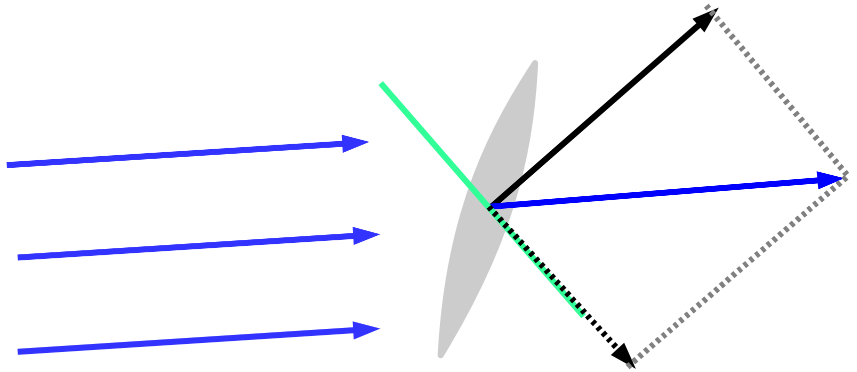
$$\mathrm{Proy}_{(-1/2,-\sqrt{3}/2)}(0,-g) = {}^{(0,-g)\cdot(-1/2,-\sqrt{3}/2)}/_{1}\,(-1/2,-\sqrt{3}/2) = \sqrt{3}/2\ g\,(-1/2,-\sqrt{3}/2)$$

Aplicación: Un modelo simplificado de un velero:

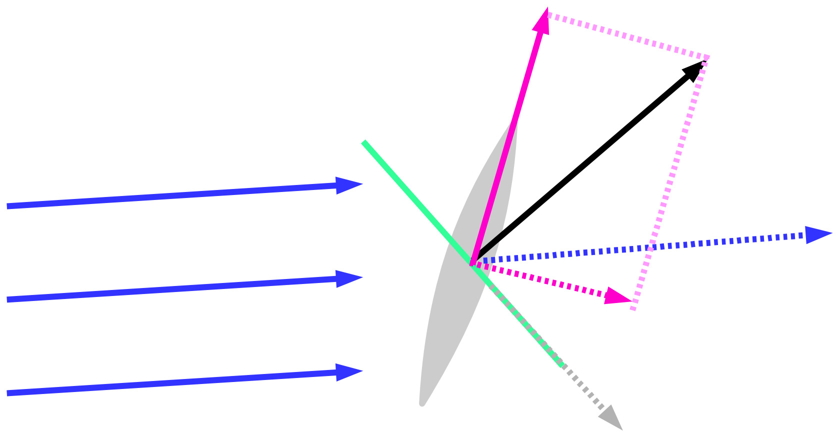


La fuerza del viento se descompone en una componente ortogonal a la vela, que empuja a la vela, y otra componente en la dirección de la vela, que se pierde.

Aplicación: Un modelo simplificado de un velero:

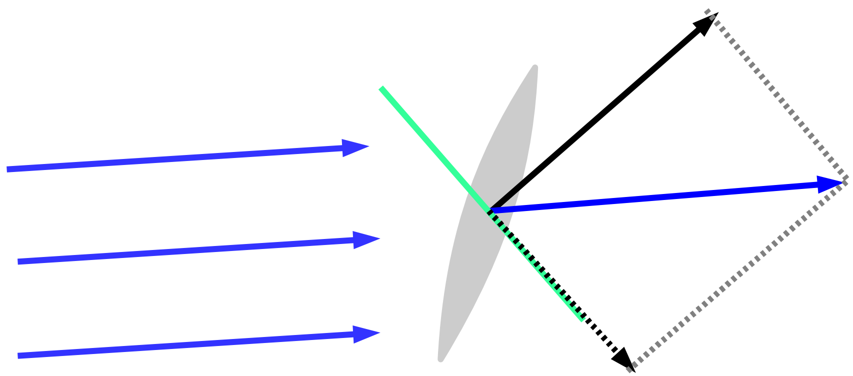


La fuerza del viento se descompone en una componente ortogonal a la vela, que empuja a la vela, y otra componente en la dirección de la vela, que se pierde.

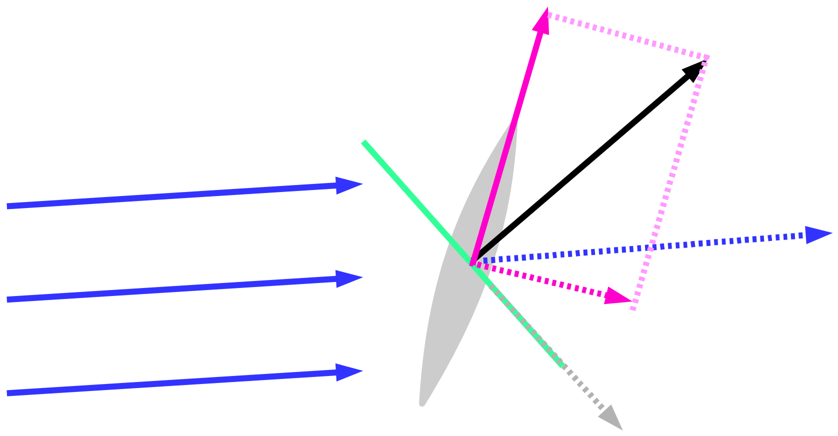


La fuerza que empuja a la vela se descompone a su vez en una componente en la dirección del barco, que impulsa al barco, y una componente ortogonal a la dirección del barco, que es absorbida por la quilla.

Aplicación: Un modelo simplificado de un velero:



La fuerza del viento se descompone en una componente ortogonal a la vela, que empuja a la vela, y otra componente en la dirección de la vela, que se pierde.

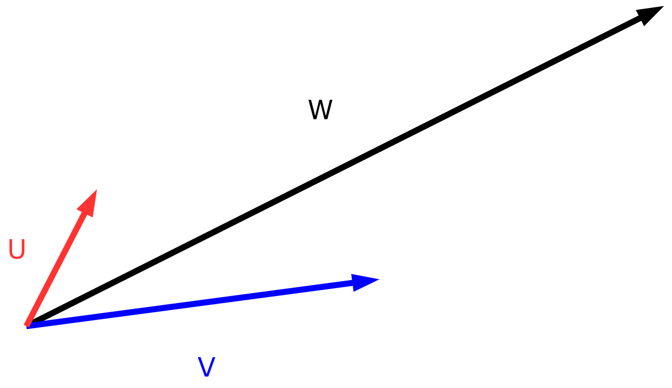


La fuerza que empuja a la vela se descompone a su vez en una componente en la dirección del barco, que impulsa al barco, y una componente ortogonal a la dirección del barco, que es absorbida por la quilla.

Con este modelo se puede mostrar que un velero puede avanzar casi en la dirección opuesta al viento, si se coloca la vela en una dirección apropiada.

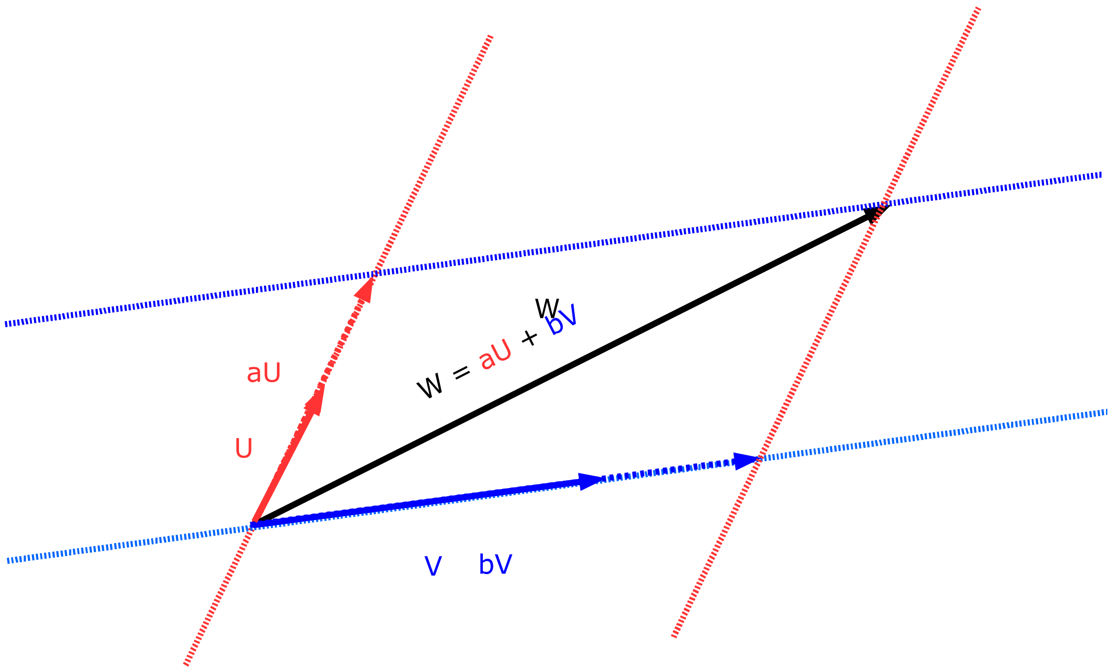
Combinaciones lineales de vectores

Si U y V son dos vectores del plano en distintas direcciones (perpendiculares o no) entonces cualquier vector W del plano puede descomponerse como suma de un múltiplo de U y un múltiplo de V.

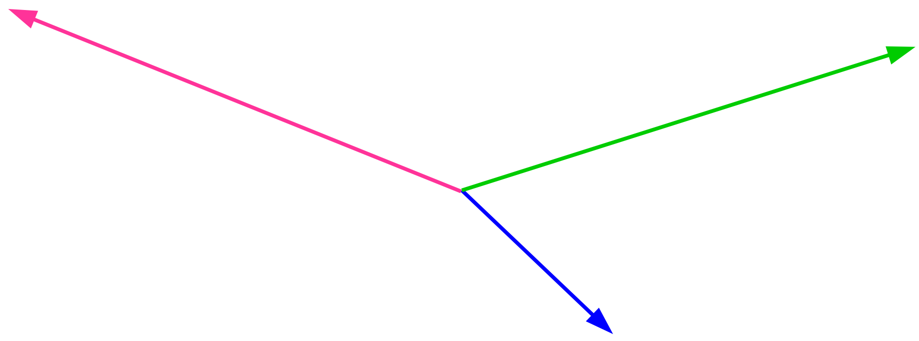


Si U y V son dos vectores del plano en distintas direcciones (perpendiculares o no) entonces cualquier vector W del plano puede descomponerse como suma de un múltiplo de U y un múltiplo de V.

Esto puede verse trazando lineas paralelas a los vectores U y V por el punto donde termina W:

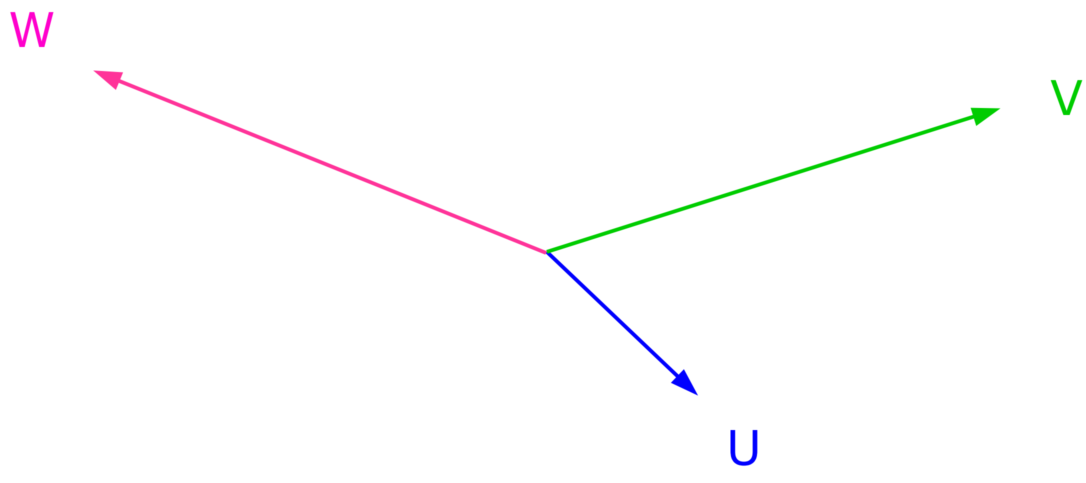


Cuando W se puede escribir como la suma de un múltiplo de U y un múltiplo de V decimos que W es una combinación lineal de U y V.

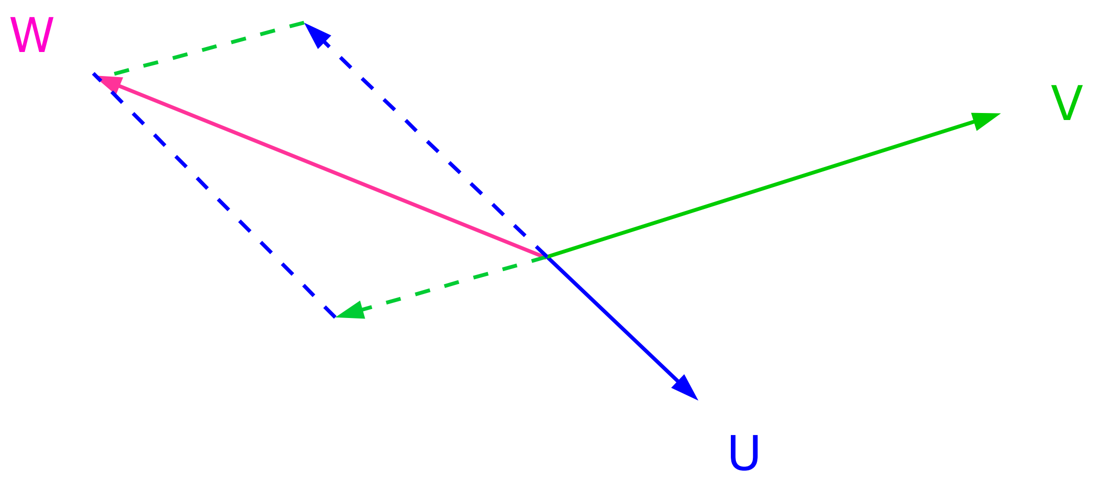


Cuando W se puede escribir como la suma de un múltiplo de U y un múltiplo de V decimos que W es una combinación lineal de U y V.

¿W es combinación lineal de U y V?

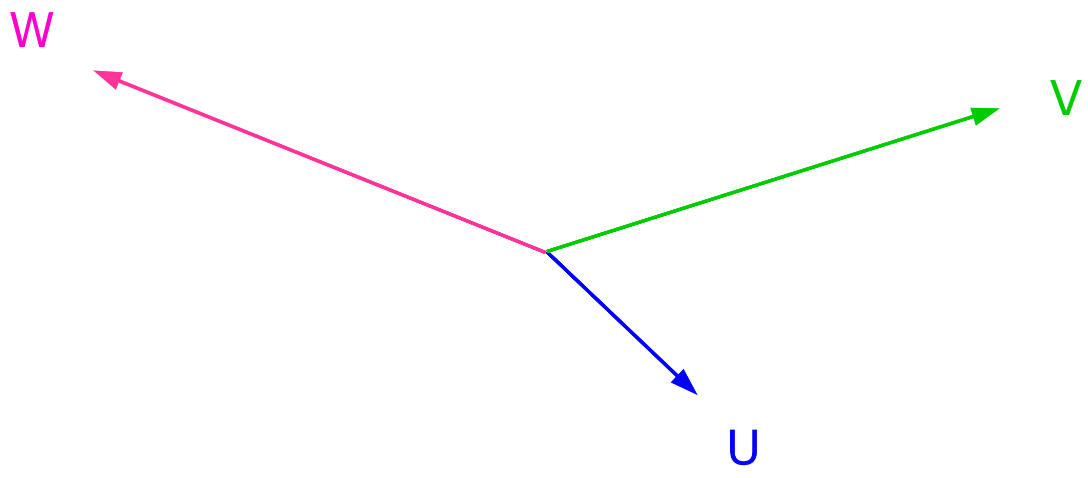


Cuando W se puede escribir como la suma de un múltiplo de U y un múltiplo de V decimos que W es una combinación lineal de U y V.



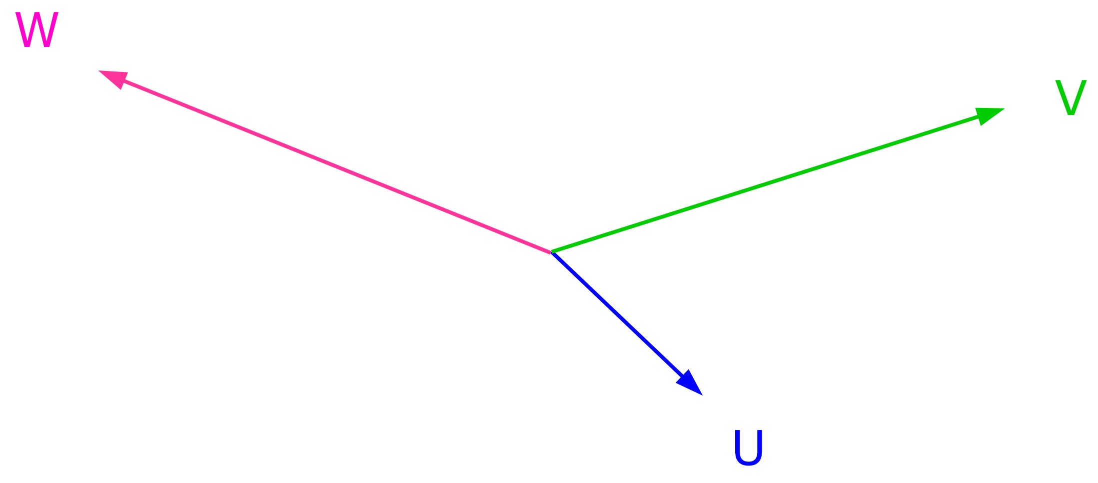
Podemos hallar la combinación usando paralelas

Cuando W se puede escribir como la suma de un múltiplo de U y un múltiplo de V decimos que W es una combinación lineal de U y V.



¿Podremos hallar la combinación usando proyecciones?

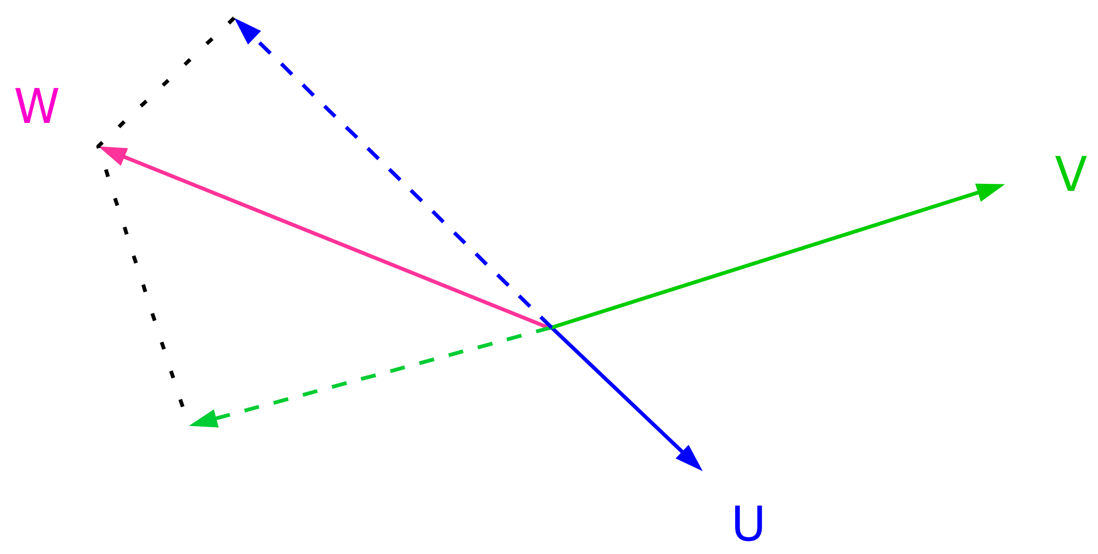
Cuando W se puede escribir como la suma de un múltiplo de U y un múltiplo de V decimos que W es una combinación lineal de U y V.



¿Podremos hallar la combinación usando proyecciones?

Si U y V son perpendiculares entonces W es la suma de sus proyecciones en las direcciones de U y V.

Cuando W se puede escribir como la suma de un múltiplo de U y un múltiplo de V decimos que W es una combinación lineal de U y V.



¿Podremos hallar la combinación usando proyecciones?

Si U y V son perpendiculares entonces W es la suma de sus proyecciones en las direcciones de U y V. Pero si U y V no son perpendiculares entonces no.

Ejercicio. Descomponer al vector (6,7) como combinación lineal de (1,2) y (3,4).

Ejercicio. Descomponer al vector (6,7) como combinación lineal de (1,2) y (3,4).

Buscamos dos números reales a y b tales que $(6,7) = a(1,2) + b\,(3,4)$.

$(a+3b, 2a+4b) = (6,7)$

Ejercicio. Descomponer al vector (6,7) como combinación lineal de (1,2) y (3,4).

Buscamos dos números reales a y b tales que $(6,7) = a(1,2) + b\,(3,4)$.

$(a+3b, 2a+4b) = (6,7)$

$$
\begin{array}{lclcl}
a+3b = 6 & \rightarrow & 2a+6b = 12 & & 4a+12b = 24 \\
2a+4b = 7 & \rightarrow & 2a+4b = 7 & & 6a+12b = 21 \\
 & & 2B = 5 & & 2a \quad = -3
\end{array}
$$

Así que $b = 5/2$ y $a = -3/2$

Ejercicio. Descomponer al vector (6,7) como combinación lineal de (1,2) y (3,4).

Buscamos dos números reales a y b tales que $(6,7) = a(1,2) + b\,(3,4)$.

$(a+3b, 2a+4b) = (6,7)$

$a+3b = 6$	$\rightarrow$	$2a+6b = 12$		$4a+12b = 24$
$2a+4b = 7$	$\rightarrow$	$2a+4b = 7$		$6a+12b = 21$
		$2B = 5$	$2a$	$= -3$

Así que $b = 5/2$ y $a = -3/2$

Podemos checar si el resultado es correcto calculando la suma:

$-3/2(1,2) + 5/2\,(3,4) = (-3/2,-3) + (15/2,10) = (6,7)$

Ejercicio. ¿Que combinaciones de fuerzas en las direcciones de (1,4) y (1,5) dan por resultado fuerzas en la dirección de (1,0)?

Ejercicio. ¿Que combinaciones de fuerzas en las direcciones de $(1,4)$ y $(1,5)$ dan por resultado fuerzas en la dirección de $(1,0)$?

Buscamos números reales tales que $a(1,4) + b(1,5) = c(1,0)$

Ejercicio. ¿Que combinaciones de fuerzas en las direcciones de (1,4) y (1,5) dan por resultado fuerzas en la dirección de (1,0)?

Buscamos números reales tales que $a(1,4) + b(1,5) = c(1,0)$

$$\begin{array}{llll} a + b = c & \rightarrow\ a - 4/5\, a = c & \rightarrow\ 1/5\, a = c & \rightarrow\ a = 5c \\ 4a+5b = 0 \rightarrow\ b = -4/5\, a & & & \rightarrow\ b = -4c \end{array}$$

Así que las combinaciones buscadas son de la forma

$5c\,(1,4) - 4c\,(1,5) = c(1,0)$

Ejercicio. ¿Que combinaciones de fuerzas en las direcciones de (1,4) y (1,5) dan por resultado fuerzas en la dirección de (1,0)?

Buscamos números reales tales que $a(1,4) + b(1,5) = c(1,0)$

$a + b = c \quad \rightarrow \quad a - 4/5\, a = c \quad \rightarrow \quad 1/5\, a = c \quad \rightarrow \quad a = 5c$

$4a+5b = 0 \quad \rightarrow \quad b = -4/5\, a \quad \rightarrow \quad b = -4c$

Así que las combinaciones buscadas son de la forma

$5c\,(1,4) - 4c\,(1,5) = c(1,0)$

Podemos comprobar el resultado sumando:

$5c\,(1,4) - 4c\,(1,5) = (5c-4c, 20c-20c) = (c,0)$

C