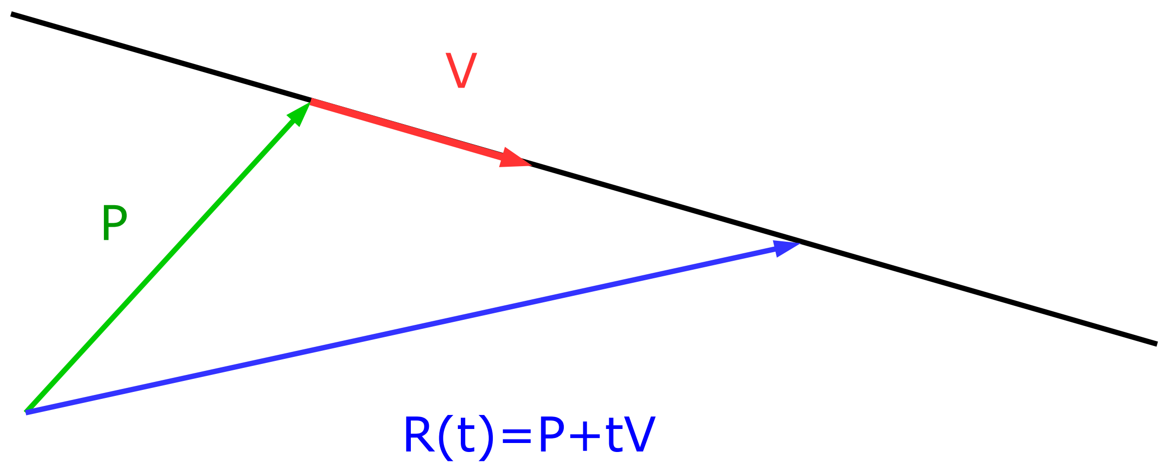
Rectas en el plano

Parametrizaciones.

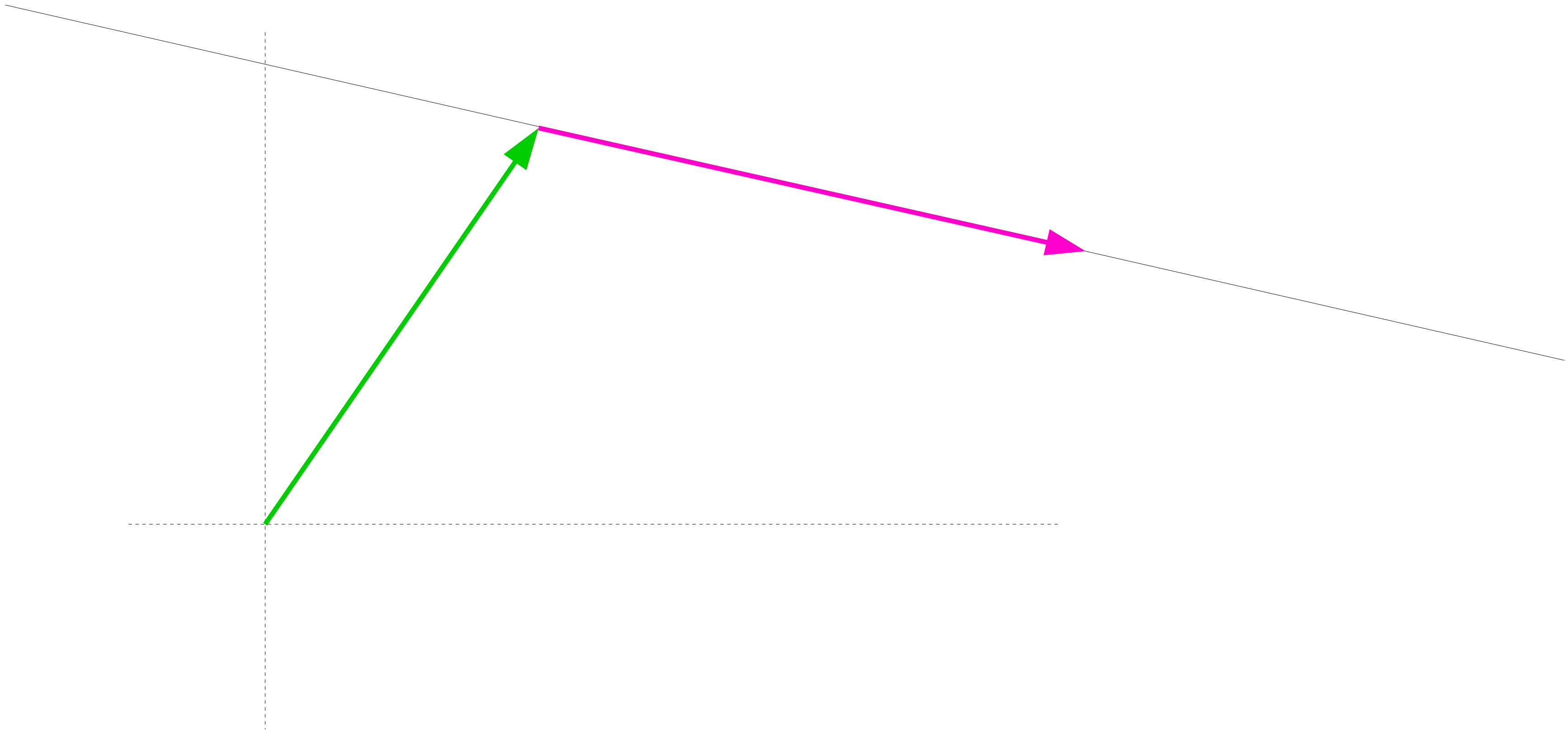
La recta que pasa por el punto P y tiene la dirección del vector V esta formada por los los puntos de la forma R(t)=P+tV donde t es un escalar. Esta es una *parametrización* de la recta (los puntos de la recta están dados en función de un parámetro t).



Ejemplo.

La recta que pasa por el punto (2,3) y tiene la dirección del vector (4,-1) esta formada por los puntos de la forma

$$R(t) = (2,3) + t\,(4,-1) = (4t+2,-t+3)$$

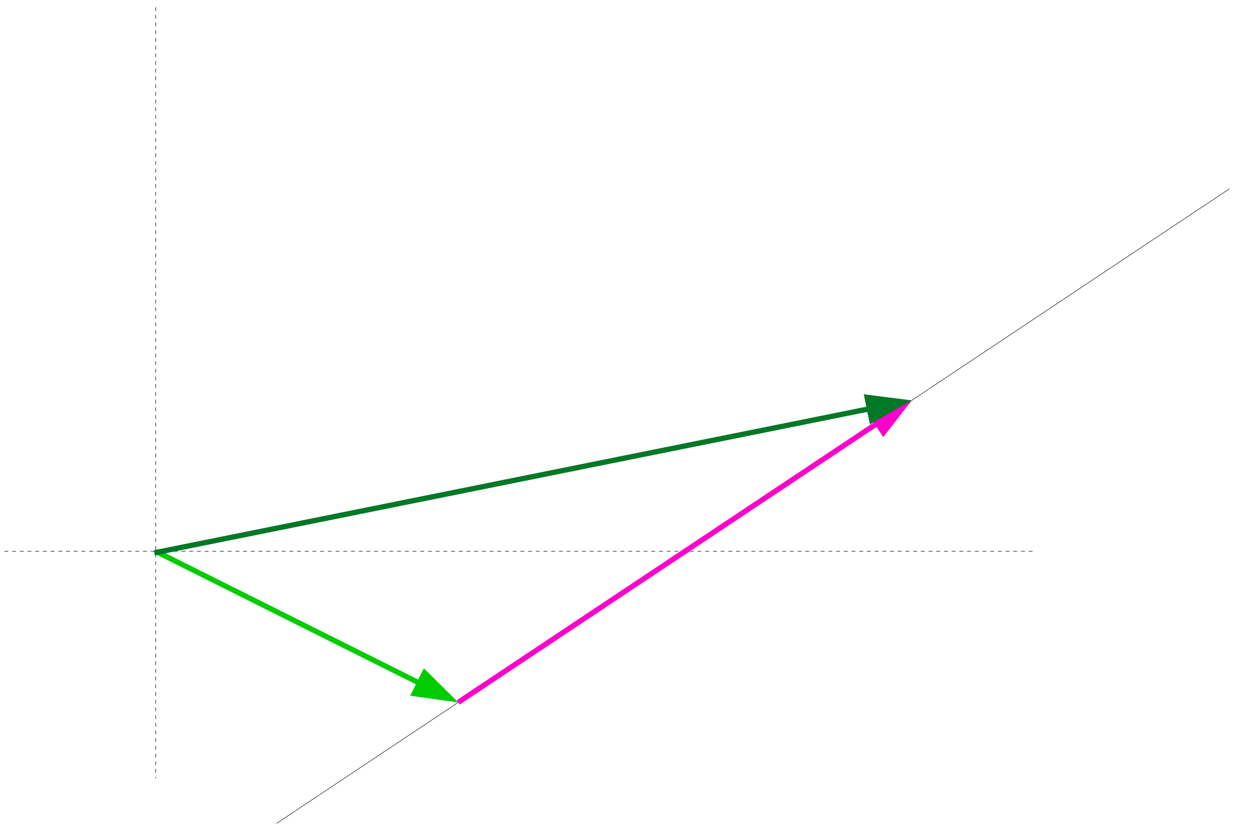


Ejemplo.

La recta que pasa por P=(2,-1) y Q=(5,1) tiene la dirección del vector

V = Q-P = (3,2)

así que está parametrizada por $R(t) = (2,-1) + t(3,2) = (3t+2,2t-1)$.



Una recta tienen muchas parametrizaciones distintas.

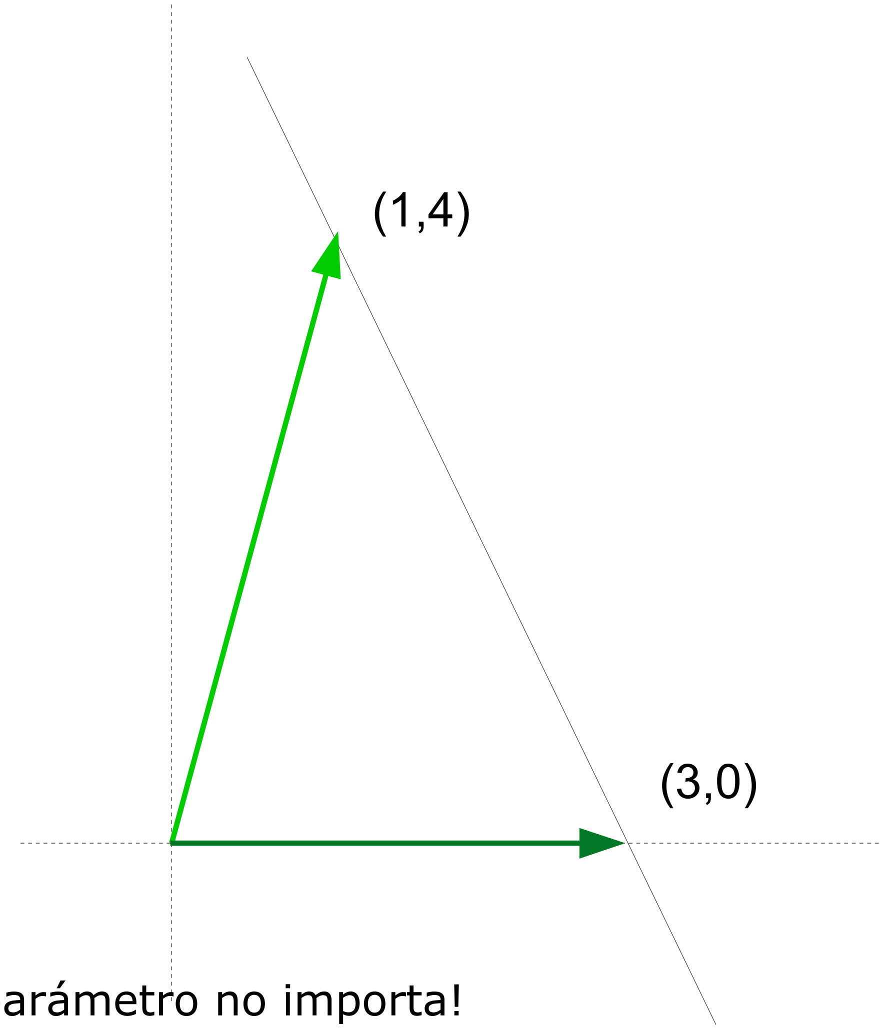
Si pensamos en el parámetro t como el tiempo, la parametrización $R(t)=P+ t(Q-P)$ recorre la recta que contiene a los puntos P y Q a velocidad constante, pasando por P en $t=0$ y por Q en $t=1$.

Pero podemos recorrer la recta al revés, usando la parametrización $S(t) = Q + t(P-Q)$ que pasa por Q en $t=0$ y pasa por P en $t=1$.

Podemos también recorrerla mas rápido o mas despacio, pasando por P y Q en los momentos que queramos.

Las diferentes parametrizaciones recorren la recta a todas las velocidades y empezando en todos sus puntos y en ambos sentidos.

Ejemplo. Varias parametrizaciones de la recta que pasa por (1,4) y (3,0):



$R(t) = (1,4) + t\,(2,-4)$

$S(t) = (1,4) + t\,(4,-8)$

$U(t) = (3,0) + t\,(-1,2)$

$V(t) = (0,8) + t\,(-3,6)$

$W(s) = (1,4) + s\,(2,-4)$ el nombre del parámetro no importa!

Las parametrizaciones dan las coordenadas de los puntos de una recta en términos del parámetro, pero también podemos describir a los puntos de la recta por medio de relaciones entre sus coordenadas que no dependen del parámetro.

Ejemplo.

Los puntos de la recta $R(t) = (3,2)+t(2,-1)$ tienen coordenadas $x=2t+3$ $y=2-t$ pero estas coordenadas x y y también están relacionadas de una manera que no depende de t: sumando x con el doble de y podemos eliminar a t y obtener $x+2y=7$.

Si tomamos otra parametrización de la misma recta, como $Z(r) = (5,1) + r(-4,2)$ las coordenadas de los puntos son $x=5-4r$ $y=1+2r$ y obtenemos de nuevo que $x+2y=7$.

Cada recta del plano puede parametrizarse como

$P(t)=(a,b)+t(c,d)$

donde (a,b) es un punto de la recta y (c,d) es un vector en la dirección de la recta.

Las coordenadas del punto $P(t)$ son $x=a+tc$, $y=b+td$.

Ejercicio.

Da una parametrización de la recta que pasa por los puntos (1,5) y (4,-2)

Cada recta del plano puede parametrizarse como

$P(t)=(a,b)+t(c,d)$

donde (a,b) es un punto de la recta y (c,d) es un vector en la dirección de la recta.

Las coordenadas del punto $P(t)$ son $x=a+tc$, $y=b+td$.

Cada recta del plano puede parametrizarse como

$P(t)=(a,b)+t(c,d)$

donde (a,b) es un punto de la recta y (c,d) es un vector en la dirección de la recta.

Las coordenadas del punto $P(t)$ son $x=a+tc$, $y=b+td$.

Si multiplicamos x por d, multiplicamos y por c y restamos se eliminan las t y queda

$dx - cy = ad - bc$

que es una **ecuación cartesiana** de la recta.

Las parametrizaciones dan los puntos una recta a partir de un parámetro t.

- *Los puntos estan dados de manera explicita:*
- *Cada valor de t da un punto, y cada punto viene de un valor de t.*

Las ecuaciones cartesianas describen a los puntos de la recta por medio de la relación que hay entre sus coordenadas.

- *Los puntos están dados de manera implicita:*
- *Para dar un punto hay que hallar una solución de la ecuación.*

Ejercicio.

Da una ecuación cartesiana de la recta que pasa por los puntos (1,5) y (4,-2) a partir de alguna parametrización.

Ejercicio.

Da una ecuación cartesiana de la recta que pasa por los puntos (1,5) y (4,-2) a partir de alguna parametrización.

Si partimos de la parametrización $P(t)=(1,5)+t(3,-7)$ queda

$x=3t+1$ $\quad\quad$ $7x=21t+7$

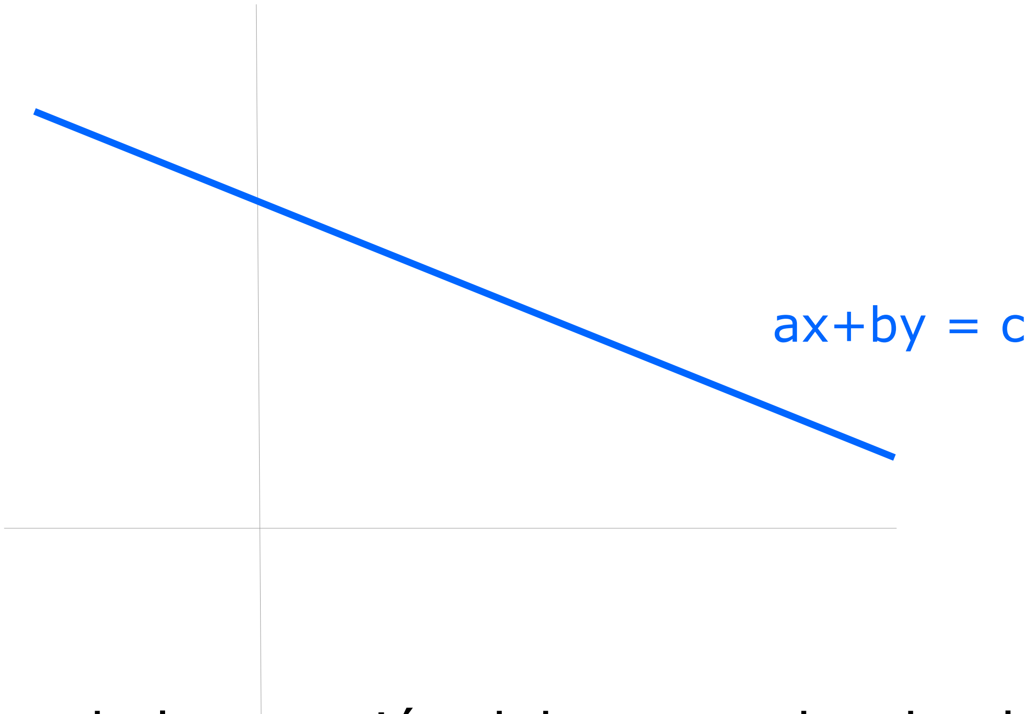
$7x+3y=22$

$y=-7t+5$ $\quad\quad$ $3y=-21t+15$

Ejercicio.

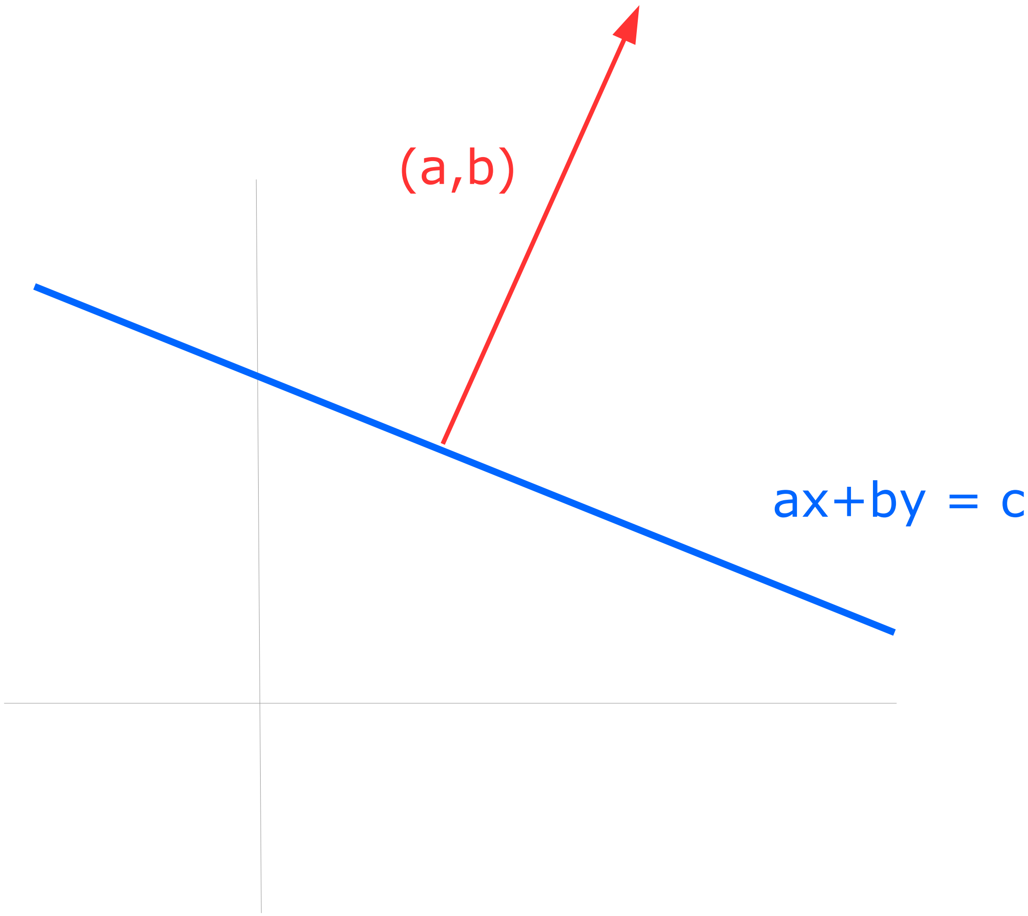
Da una ecuación cartesiana $ax+by=c$ de la recta que pasa por los puntos $(2,3)$ y $(5,7)$ *sin usar parametrizaciones, ni pendientes ni nada de geometría, únicamente álgebra.*

Todas las rectas tienen ecuaciones de la forma ax + by = c



Los coeficientes de la ecuación deben guardar de alguna manera la información geométrica de la recta.

Lema. Las soluciones de la ecuación ax + by = c forman una recta perpendicular al vector (a,b).



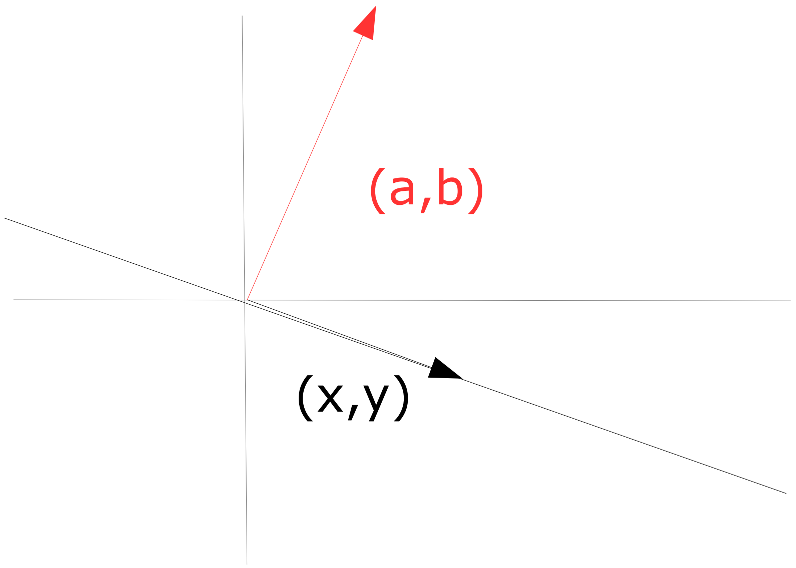
Lema. Las soluciones de la ecuación $ax + by = c$ forman una recta perpendicular al vector (a,b).

Demostración.

Si $c=0$, la ecuación $ax+by=0$ puede escribirse como

$$(a,b) \cdot (x,y) = 0$$

así que las soluciones de la ecuación son los vectores (x,y) ortogonales a (b,b).



Lema. Las soluciones de la ecuación $ax + by = c$ forman una recta perpendicular al vector (a,b).

Demostración.

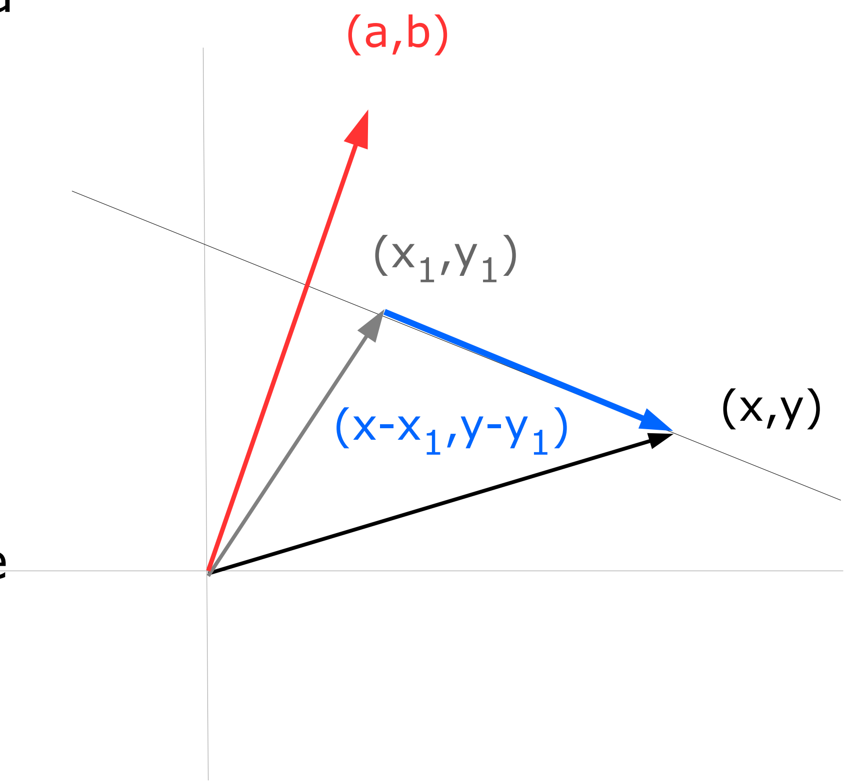
Si $c \neq 0$, y (x_1,y_1) es cualquier solución de la ecuación entonces $ax_1+by_1 = c$

restándola a la ecuación original queda

$a(x-x_1)+b(y-y_1) = 0$ es decir

$(a,b) \cdot (x-x_1,y-y_1) = 0$

Así que el vector $(x-x_1,y-y_1)$ que apunta de una solución a otra es ortogonal a (a,b).



Ejemplo. ¿Que ecuación cartesiana cumple la recta que pasa por (1,2) y tiene la dirección del vector (3,4)?

Ejemplo. ¿Que ecuación cartesiana cumple la recta que pasa por (1,2) y tiene la dirección del vector (3,4)?

La recta es perpendicular al vector (-4,3), así que tiene una ecuación

$-4x + 3y = C$ para algún C.

¿Como encontramos C?

Ejemplo. ¿Que ecuación cartesiana cumple la recta que pasa por (1,2) y tiene la dirección del vector (3,4)?

La recta es perpendicular al vector (-4,3), así que tiene una ecuación

$-4x + 3y = C$ para algún C.

¿Como encontramos C?

Como el punto (1,2) esta en la recta entonces $-4(1)+3(2) = C$

Así que C=2 y la ecuación es $-4x + 3y = 2$

Ejercicio.

¿Que ecuación cartesiana tiene la recta que pasa por $P=(4,3)$ y $Q=(1,5)$?

Ejercicio.

¿Que ecuación cartesiana tiene la recta que pasa por $P=(4,3)$ y $Q=(1,5)$?

La recta tiene dirección $P-Q=(3,-2)$ así que una ecuación es

$2x + 3y = C$

donde $2(4)+3(3) = C$ así que $C=17$

y la ecuación queda $2x + 3y = 17$

Ejercicio. Dar una parametrización de la recta **$5x - 4y = -3$**.

Ejercicio. Dar una parametrización de la recta **$5x - 4y = -3$**.

La recta es perpendicular al vector (5,-4)

así que tiene la dirección del vector (4,5)

Un punto en recta es P=(1,-2)

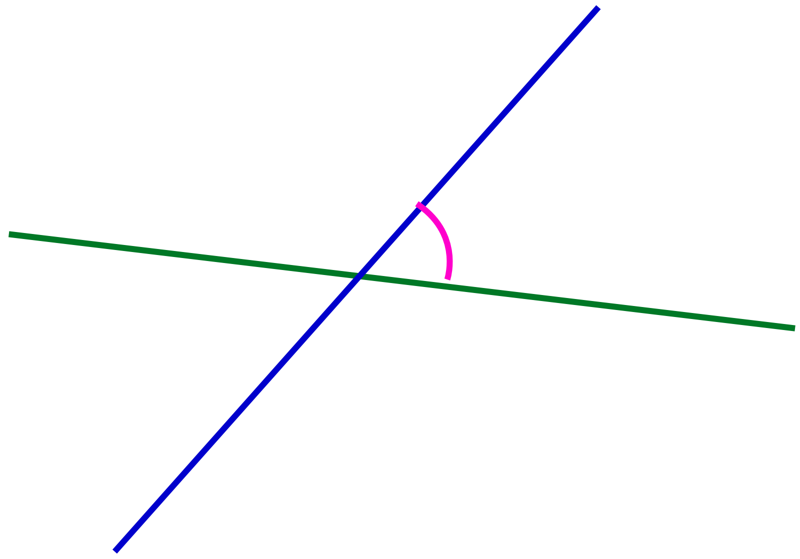
Así que una parametrización es

$$P(t) = (1,-2) + t(4,5)$$

Intersecciones de rectas

Dos rectas en el plano se intersectan siempre que tienen direcciones distintas.

Podemos hallar el punto de intersección a partir de las parametrizaciones o las ecuaciones cartesianas de las rectas, resolviendo un sistema de ecuaciones.



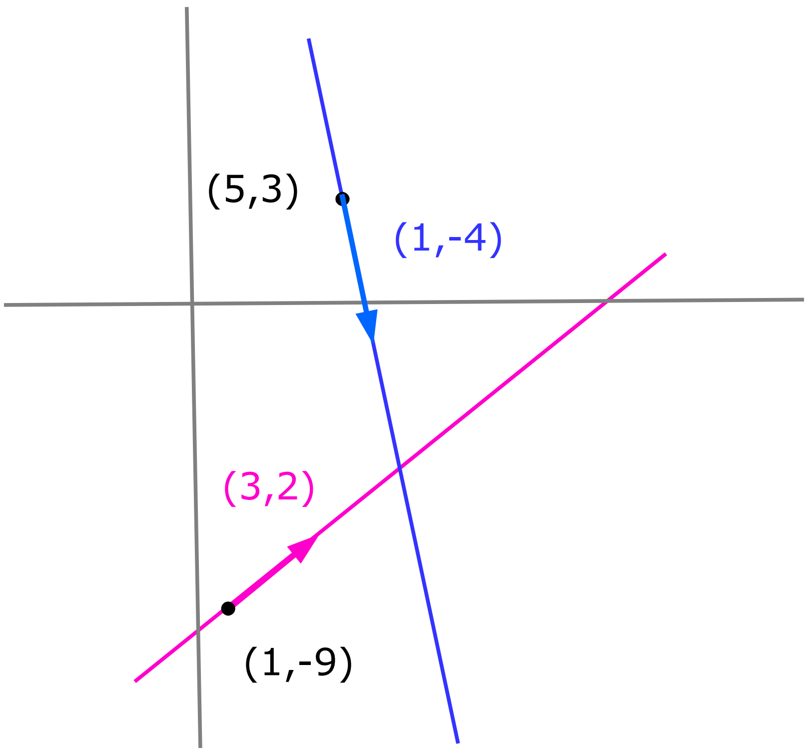
Y podemos hallar el ángulo de intersección de las rectas calculando el ángulo entre sus vectores de dirección.

Ejemplo.

¿Donde se intersectan las rectas $S(t)=(3t+4,2t-7)$ y $R(s)=(s+5,-4s+3)$?

Ejemplo.

¿Donde se intersectan las rectas $S(t)=(3t+4,2t-7)$ y $R(s)=(s+5,-4s+3)$?



Para hallar el punto de intersección hay que encontrar valores de t y s tales que $S(t) = R(s)$ es decir $(3t+4,2t-7) = (s+5,-4s+3)$.

Esto da un sistema de ecuaciones lineales:

$3t+4 = s+5$

$2t -7 = -4s+3$

Podemos despejar s en términos de t en la primera ecuación $s = 3t-1$ y sustituirlo en la segunda: $2t-7 = -4(3t-1)+3 = -12t+7$

así que $14t = 14$ de donde $t = 1$ y $s = 3t-1 = 3-1 = 2$

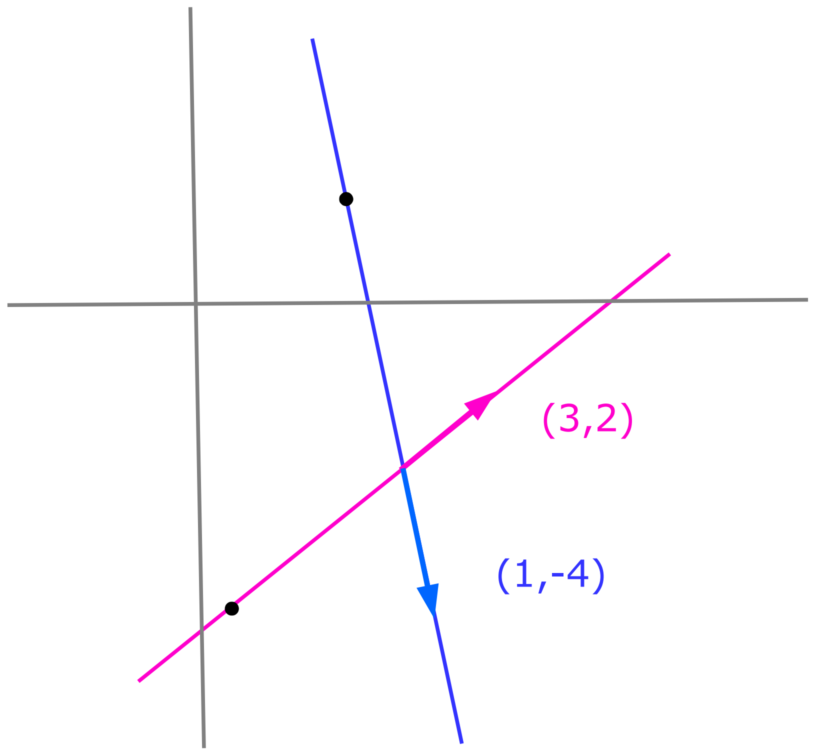
Así que el punto de intersección es $S(1) = (7,-5) = R(2)$.

Ejemplo.

¿Con que ángulo se intersectan $S(t)=(3t+4,2t-7)$ y $R(s)=(s+5,-4s+3)$?

Ejemplo.

¿Con que ángulo se intersectan S(t)=(3t+4,2t-7) y R(s)=(s+5,-4s+3) ?



El ángulo de intersección de las rectas es el ángulo entre sus vectores de dirección que son (3,2) y (1,-4).

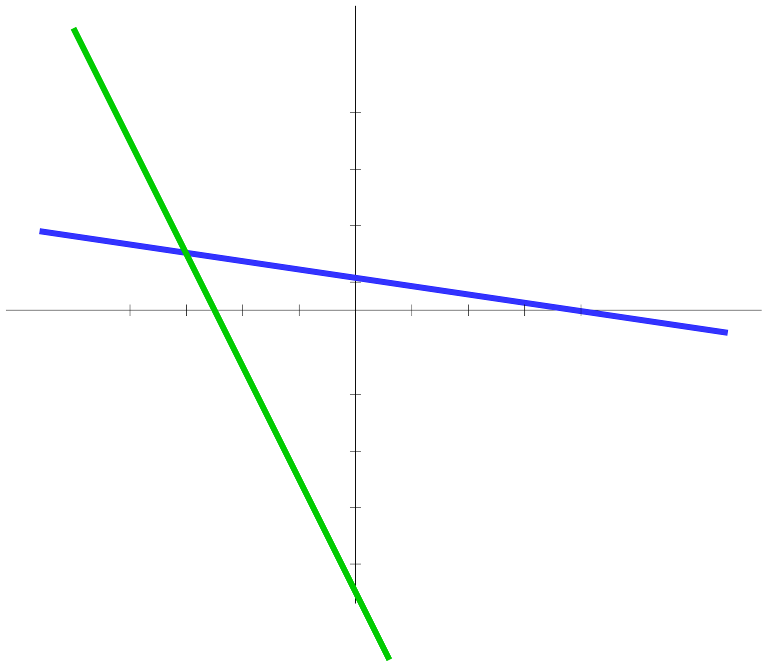
Podemos hallar el coseno del ángulo usando el producto interno

$$\cos\theta = \frac{(3,2)\cdot(1,-4)}{|(3,2)||(1,-4)|} = \frac{(3\cdot 1-2\cdot 4)}{(3^2+2^2)^{1/2}(1^2+4^2)^{1/2}} = \frac{-5}{\sqrt{13}\sqrt{17}} \approx 0.3363$$

$\theta \approx \arccos(0.3363) \approx 1.228$ radianes

Ejercicio. ¿En que punto y con que ángulo se intersectan las rectas $x+7y=4$ y $2x+y=-5$?

Ejercicio. ¿En que punto y con que ángulo se intersectan las rectas x+7y=4 y 2x+y=-5?



El punto de intersección es la solución

del sistema de ecuaciones lineales:

$x+7y = 4$

$2x+y =-5$

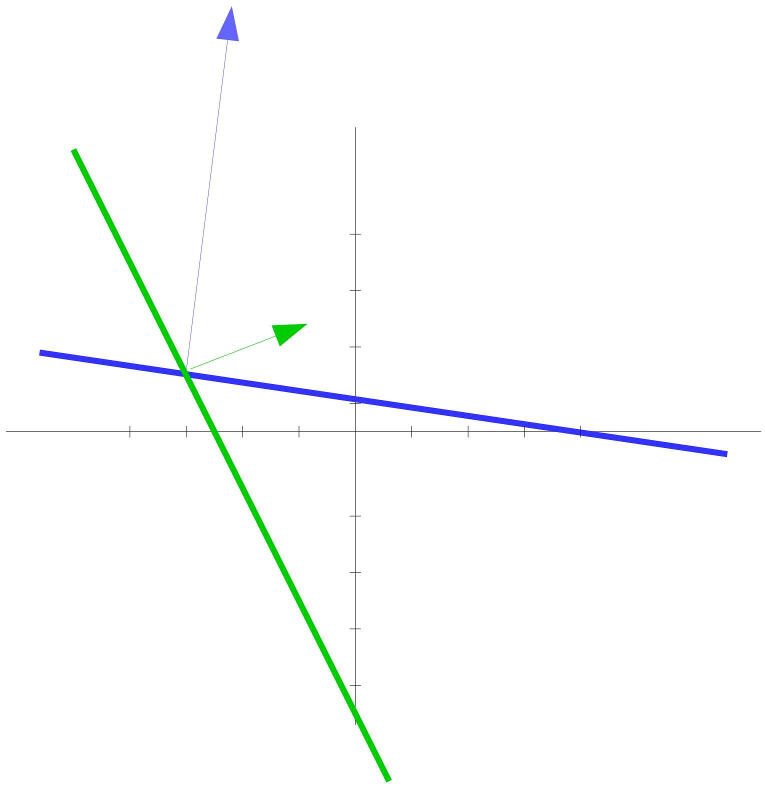
Si despejamos y en en la segunda ecuación obtenemos $y=-2x-5$.

Y sustituyendo en la primera obtenemos $x+7(-2x-5) = 4$ es decir

$-13x = 39$ o sea $x=-3$, $y=-2(-3)\ 5=1$

así que las rectas se intersectan en (-3,1).

Ejercicio. ¿En que punto y con que ángulo se intersectan las rectas $x+7y=4$ y $2x+y=-5$?



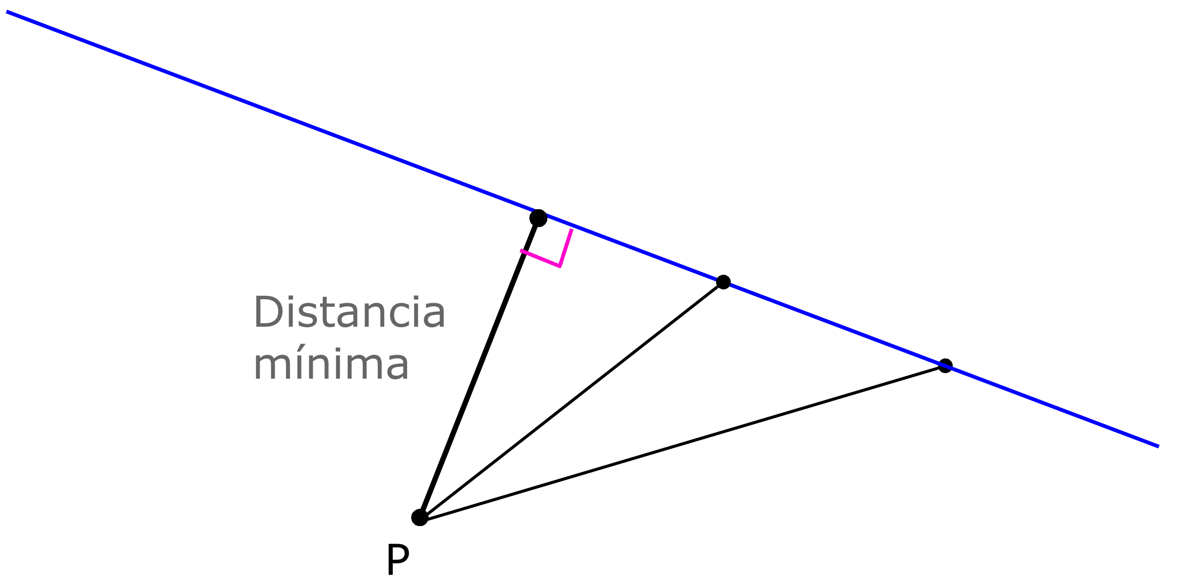
El ángulo que forman las rectas es igual al ángulo que forman sus vectores normales (1,7) y (2,1):

$$\cos\theta = \frac{(1,7)\cdot(2,1)}{|(1,7)||(2,1)|} = \frac{(1\cdot 2-7\cdot 1)}{(1^2+7^2)^{½}(2^2+1^2)^{½}} \approx \frac{9}{\sqrt{50}\sqrt{5}}$$

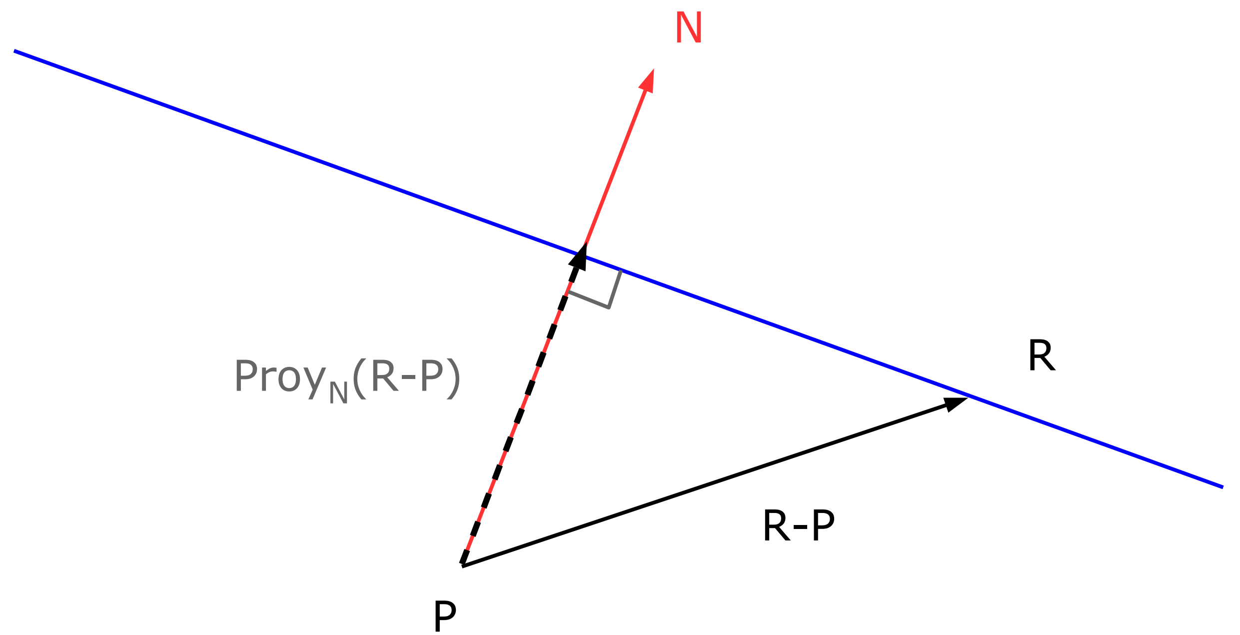
$\theta \approx$ arccos(0.56921) $\approx$ 0.965 radianes.

Distancia de una recta a un punto.

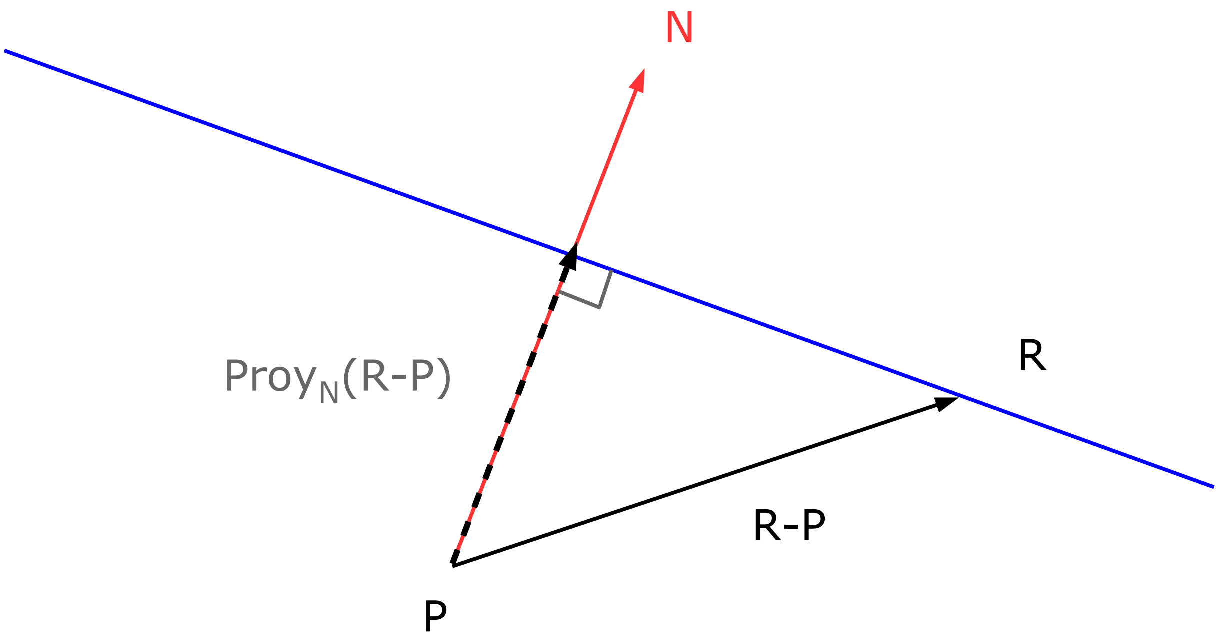
La distancia de una recta a un punto P es la mínima distancia entre un punto de la recta y P. Por el teorema de Pitágoras esta es la longitud del segmento perpendicular a la recta desde P.



El vector que va de P al punto mas cercano en la recta se obtiene proyectando cualquier vector que va de P a la recta hacia el vector normal a la recta.



El vector que va de P al punto mas cercano en la recta se obtiene proyectando cualquier vector que va de P a un punto de la recta en la dirección del vector N normal a la recta.

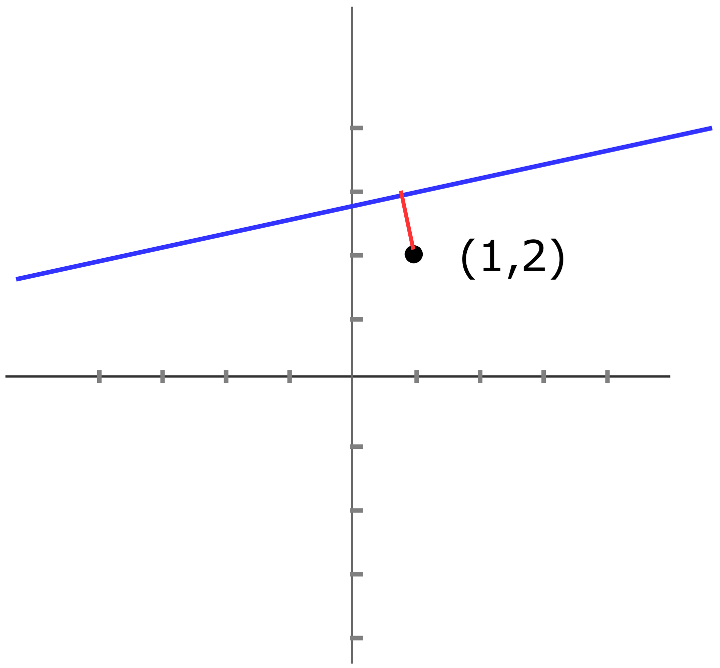


$$Proy_N(R\text{-}P) = \frac{(R\text{-}P)\cdot N}{N\cdot N}\ N$$

$$\textit{Distancia} = |Proy_N(R\text{-}P)| = \frac{|(R\text{-}P)\cdot N|}{|N|}$$

Ejemplo.

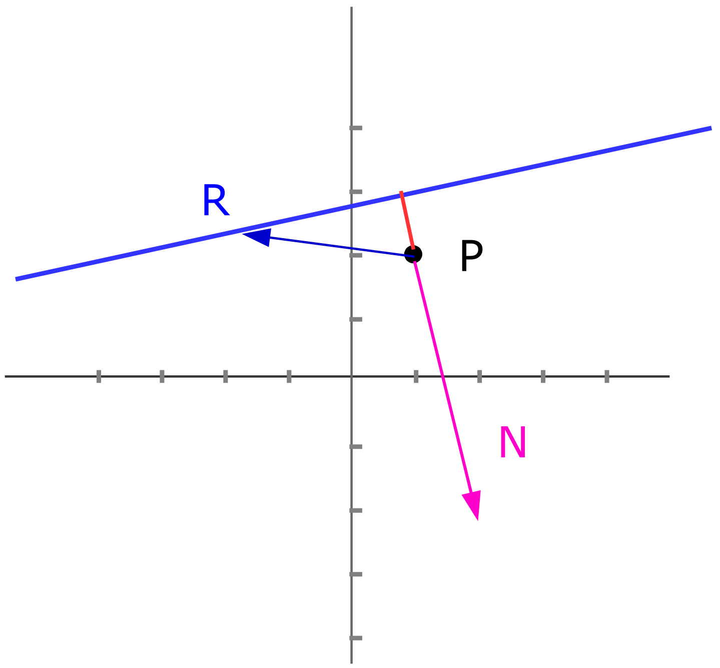
¿Cual es la distancia del punto (1,2) a la recta R(t)=(1+4t,3-t)?



Ejemplo.

¿Cual es la distancia del punto (1,2) a la recta R(t)=(1+4t,3-t)?

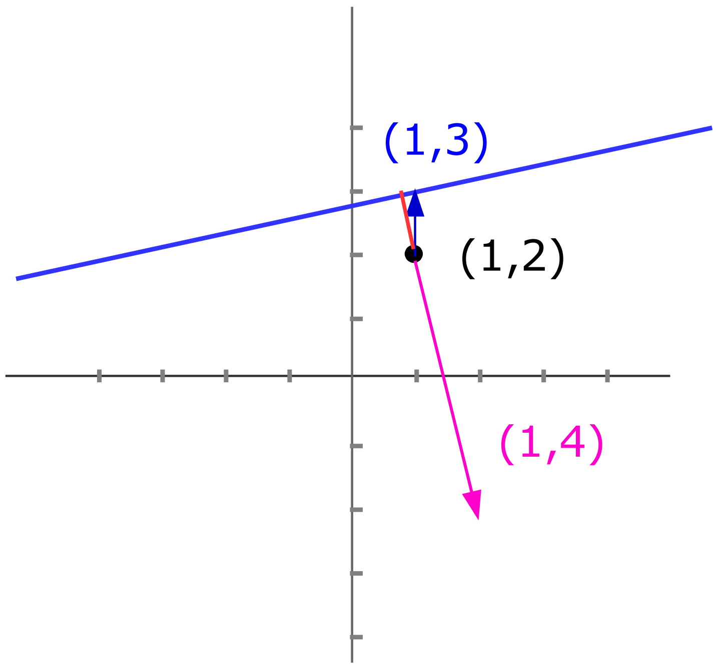
La distancia es $\quad |Proy_N(R-P)| = \dfrac{(R-P)\cdot N}{|N|}$



Ejemplo.

¿Cual es la distancia del punto (1,2) a la recta $R(t)=(1+4t,3-t)$?

La distancia es $|Proy_N(R-P)| = \dfrac{(R-P)\cdot N}{|N|}$

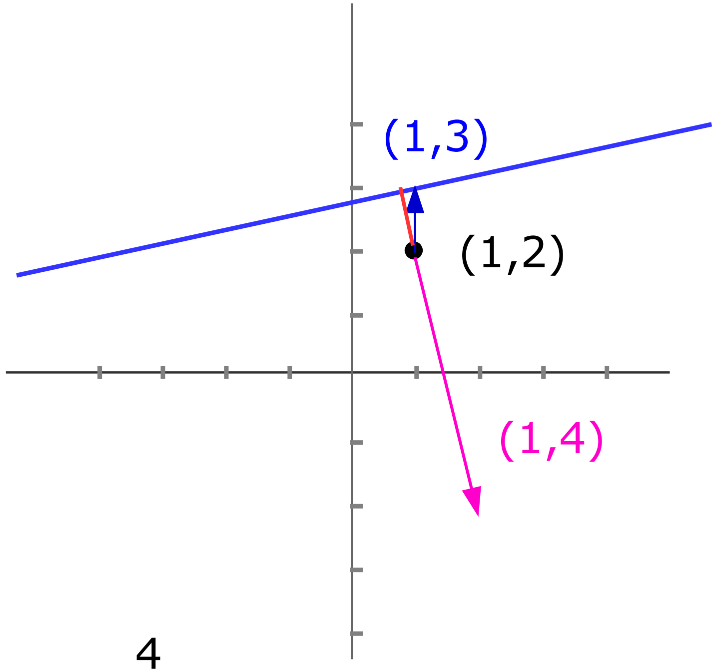


Donde $P = (1,2)$

y podemos tomar $R=(1,3)$ y $N= (1,4)$

Ejemplo.

¿Cual es la distancia del punto (1,2) a la recta R(t)=(1+4t,3-t)?



La distancia es $|Proy_N(R\text{-}P)| = \dfrac{(R\text{-}P)\cdot N}{|N|}$

Donde P = (1,2)

y podemos tomar R=(1,3) y N= (1,4)

$$\text{Dist} = |Proy_{(1,4)}(0,1)| = \frac{(0,1)\cdot(1,4)}{|(1,4)|} = \frac{0\cdot 1+1\cdot 4}{(1^2+4^2)^{½}} = \frac{4}{\sqrt{17}}$$

Ejemplo.

¿Cual es el punto de la recta $R(t)=(1+4t,3-t)$ mas cercano a $(1,2)$?

Ejemplo.

¿Cual es el punto de la recta $R(t)=(1+4t,3-t)$ mas cercano a $(1,2)$?

El punto mas cercano es $P + \text{Proy}_N(R-P) = P + \dfrac{(R-P)\cdot N}{N\cdot N}\, N$

Ejemplo.

¿Cual es el punto de la recta $R(t)=(1+4t,3-t)$ mas cercano a $(1,2)$?

El punto mas cercano es $P + \mathrm{Proy}_N(R-P) = P + \dfrac{(R-P)\cdot N}{N\cdot N}\, N$

donde $P = (1,2)$ y podemos tomar $\underbrace{N= (1,4)}_{\text{Vector normal a la recta}}$ y $\underbrace{R=(1,3)}_{\text{Punto de la recta}}$ así que $R-P = (0,1)$

Ejemplo.

¿Cual es el punto de la recta $R(t)=(1+4t,3-t)$ mas cercano a $(1,2)$?

El punto mas cercano es $P + \mathrm{Proy}_N(R-P) = P + \dfrac{(R-P)\cdot N}{N\cdot N}\, N$

donde $P = (1,2)$ y podemos tomar $N= (1,4)$ y $R=(1,3)$ así que $R-P = (0,1)$

$$\mathrm{Proy}_{(1,4)}(0,1) = \frac{(0,1)\cdot(1,4)}{(1,4)\cdot(1,4)}\,(1,4) = \frac{0\cdot 1+1\cdot 4}{1^2+4^2}\,(1,4) = \frac{4}{17}\,(1,4)$$

Ejemplo.

¿Cual es el punto de la recta $R(t)=(1+4t,3-t)$ mas cercano a $(1,2)$?

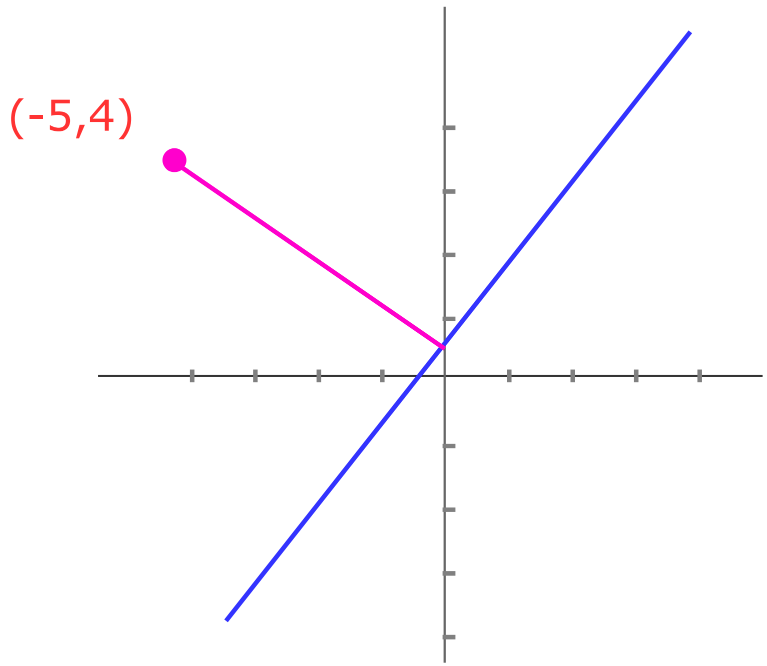
El punto mas cercano es $P + \mathrm{Proy}_N(R-P) = P + \dfrac{(R-P)\cdot N}{N\cdot N}\, N$

donde $P = (1,2)$ y podemos tomar $N= (1,4)$ y $R=(1,3)$ así que $R-P = (0,1)$

$$\mathrm{Proy}_{(1,4)}(0,1) = \frac{(0,1)\cdot(1,4)}{(1,4)\cdot(1,4)}\,(1,4) = \frac{0\cdot 1+1\cdot 4}{1^2+4^2}\,(1,4) = \frac{4}{17}\,(1,4)$$

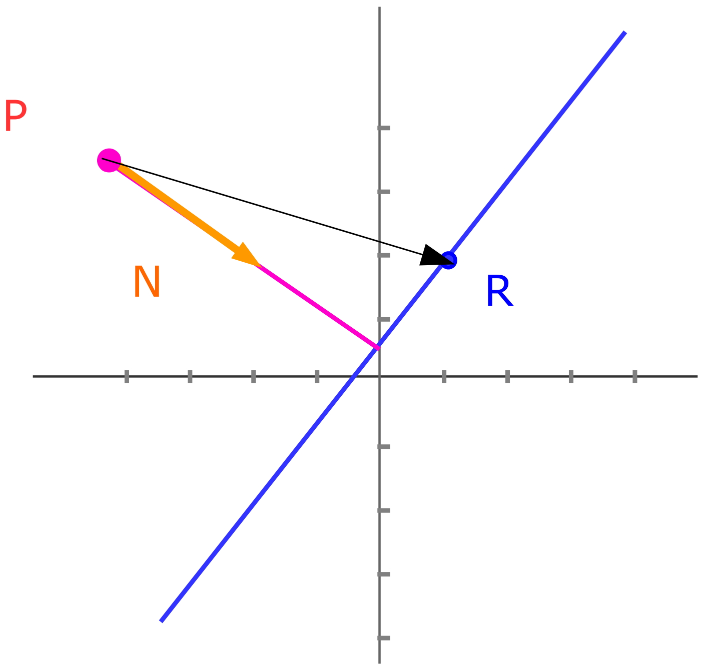
El punto mas cercano a $(1,2)$ es $(1,2) + \frac{4}{17}(1,4) = \left(\frac{21}{17}, \frac{50}{17}\right)$

Ejercicio. ¿Cual es la distancia del punto (-5,4) a la recta $\mathbf{3x - 2y = -1}$?



Ejercicio. ¿Cual es la distancia del punto (-5,4) a la recta **3x – 2y = -1**?

La distancia es $|\mathrm{Proy}_N(R-P)| = \dfrac{|(R-P)\cdot N|}{|N|}$

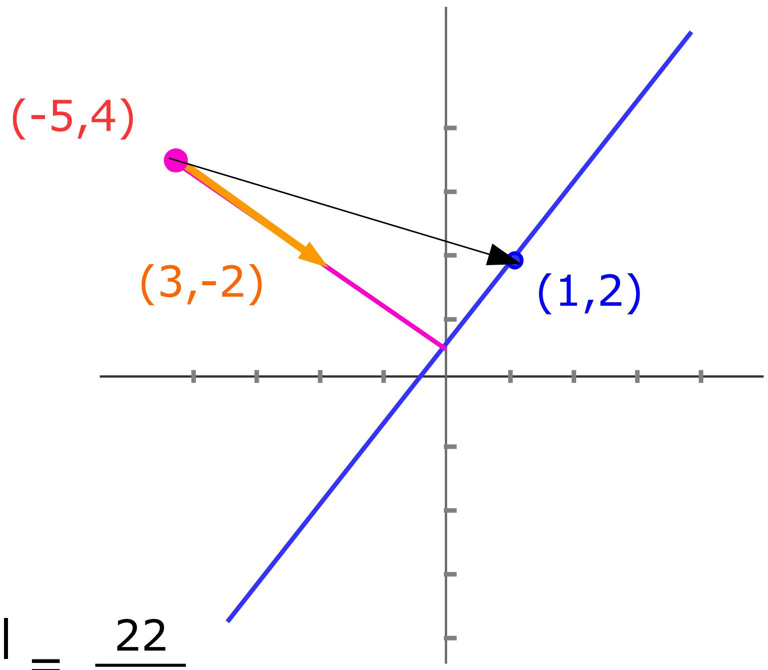


donde P=(-5,4) y podemos tomar

N=(1,4) y R=(1,2) así que R-P = (6,-2)

Ejercicio. ¿Cual es la distancia del punto (-5,4) a la recta **3x – 2y = -1**?

La distancia es $|Proy_N(R-P)| = \dfrac{|(R-P)\cdot N|}{|N|}$

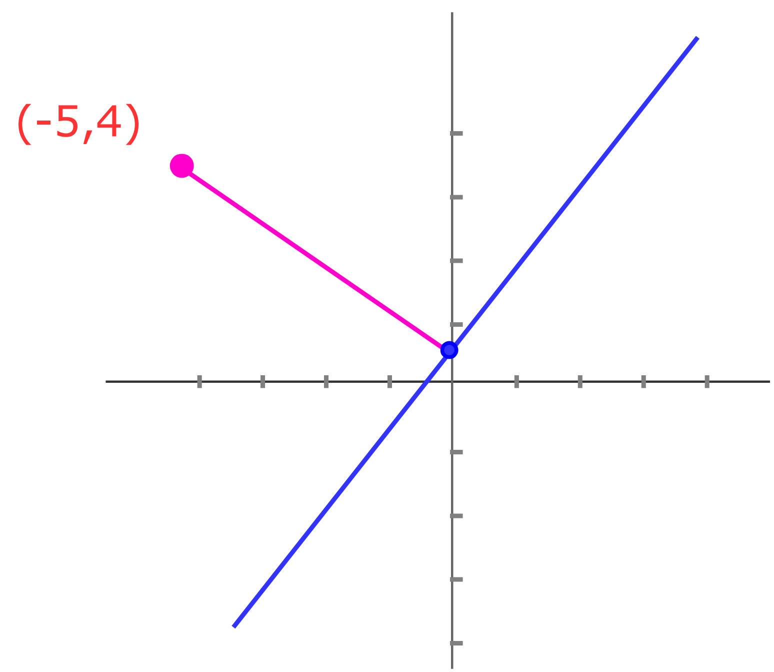


donde P=(-5,4) y podemos tomar

N=(1,4) y R=(1,2) así que R-P = (6,-2)

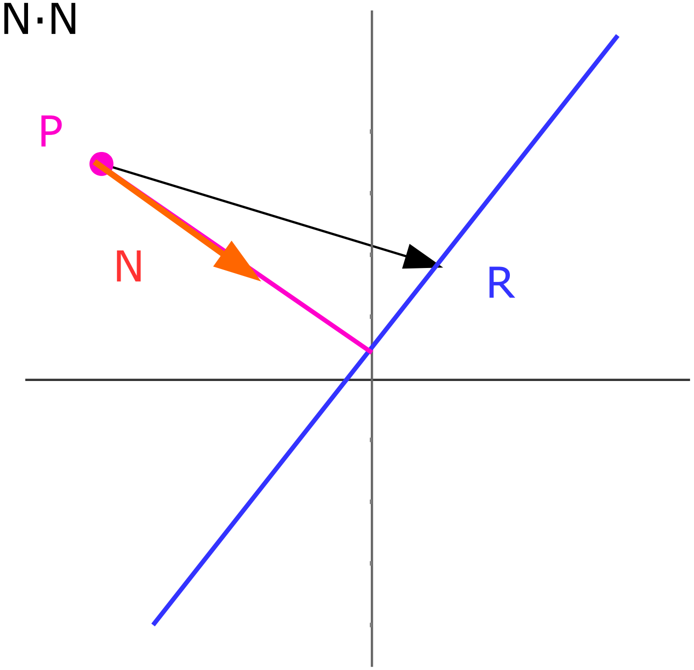
Distancia $= |Proy_{(3,-2)}(6,-2)| = \dfrac{|(6,-2)\cdot(3,-2)|}{|(3,-2)|} = \dfrac{22}{\sqrt{13}}$

Ejercicio. ¿Cual es el punto de la recta $\mathbf{3x - 2y = -1}$ mas cercano a (-5,4)?



Ejercicio. ¿Cual es el punto de la recta **3x – 2y = -1** mas cercano a (-5,4)?

El punto mas cercano es $P + Proy_N(R\text{-}P) = P + \dfrac{(R\text{-}P)\cdot N}{N\cdot N}\, N$



Ejercicio. ¿Cual es el punto de la recta **3x – 2y = -1** mas cercano a (-5,4)?

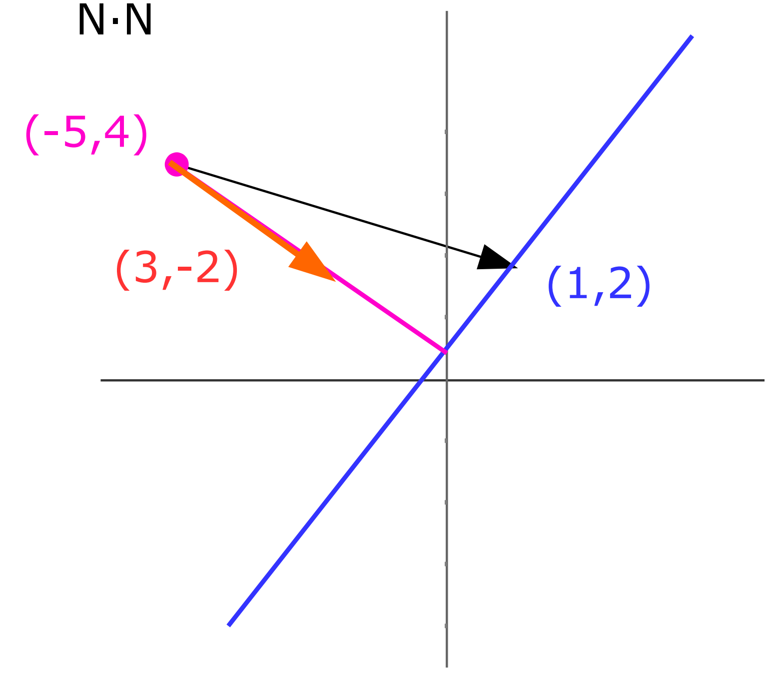
El punto mas cercano es $P + \mathrm{Proy}_N(R-P) = P + \dfrac{(R-P)\cdot N}{N\cdot N}N$

donde P=(-5,4) y podemos tomar

N=(3,-2) y R=(1,2) así que R-P = (6,-2)

Vector normal a la recta

Punto de la recta

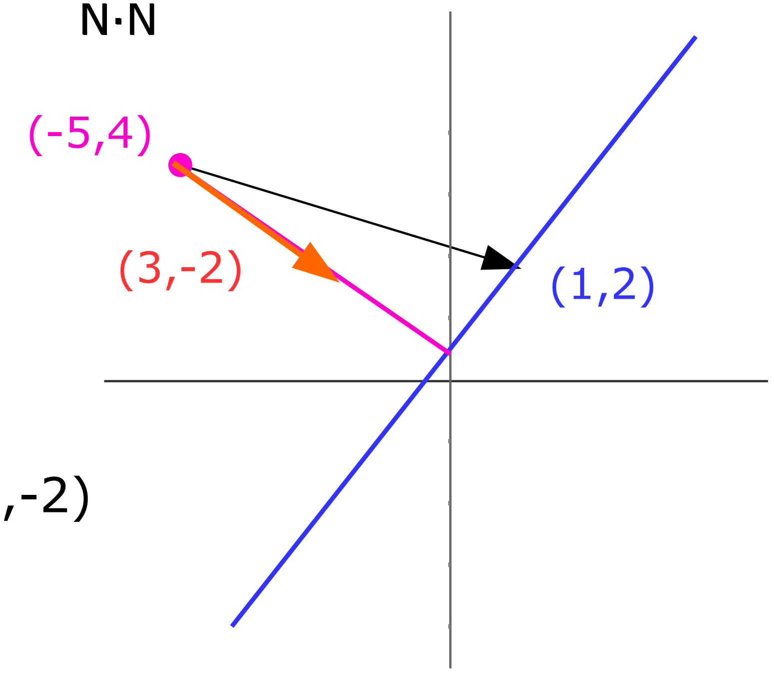


Ejercicio. ¿Cual es el punto de la recta **3x – 2y = -1** mas cercano a (-5,4)?

El punto mas cercano es $P + \mathrm{Proy}_N(R-P) = P + \dfrac{(R-P)\cdot N}{N\cdot N}N$

donde P=(-5,4) y podemos tomar

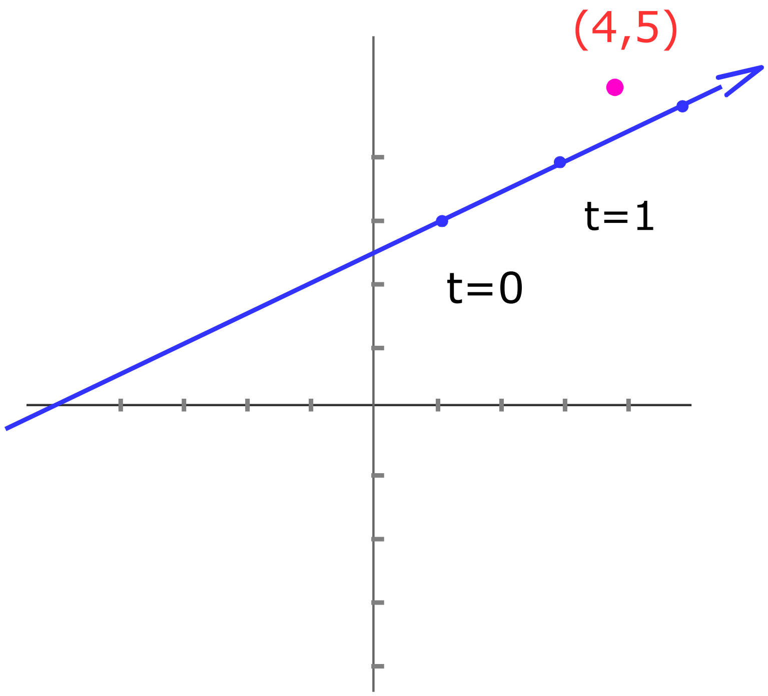
N=(3,-2) y R=(1,2) así que R-P = (6,-2)



$$\mathrm{Proy}_{(3,-2)}(6,-2) = \frac{(6,-2)\cdot(3,-2)}{(3,-2)\cdot(3,-2)}(3,-2) = \frac{22}{13}(3,-2)$$

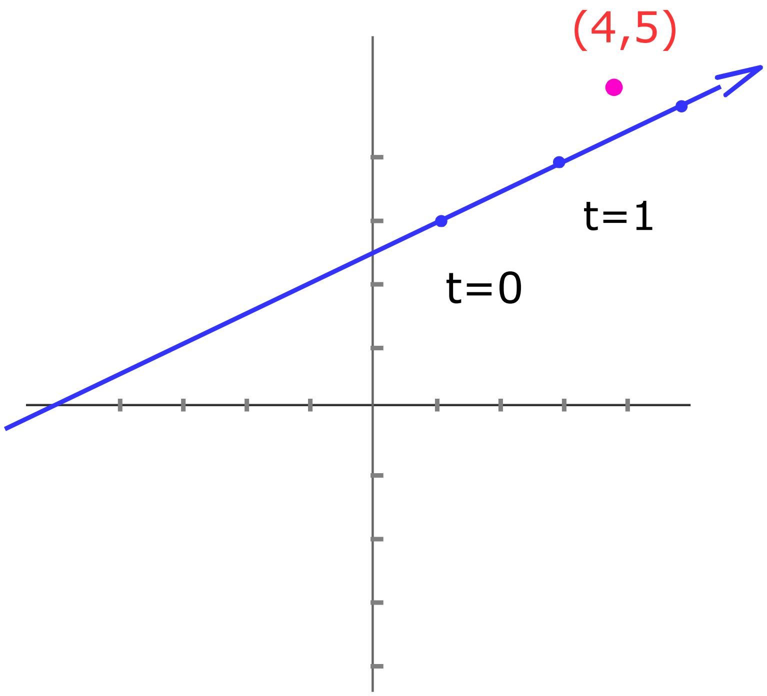
El punto mas cercano es $(-5,4) + {}^{22}/_{13}\,(3,-2) = ({}^{1}/_{13}, {}^{8}/_{13})$

Ejercicio. Un punto se mueve en el plano siguiendo las trayectoria $P(t)=(2t+1,t+3)$. ¿En que momento estará mas cerca del punto $(4,5)$?



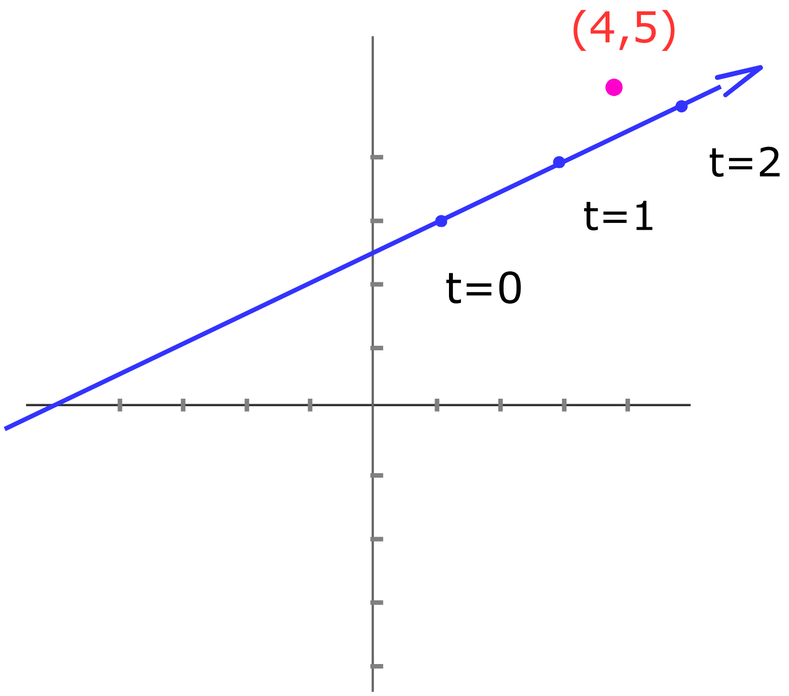
Ejercicio. Un punto se mueve en el plano siguiendo las trayectoria $P(t)=(2t+1,t+3)$. ¿En que momento estará mas cerca del punto $(4,5)$?

$P(t)=(2t+1,t+3)$ estará mas cerca de $(4,5)$ cuando el vector que apunta de $(4,5)$ a $P(t)$, que es $P(t)-(4,5)=(2t-3,t-2)$ sea perpendicular a la dirección de $P(t)$ que es $(2,1)$.



Ejercicio. Un punto se mueve en el plano siguiendo las trayectoria $P(t)=(2t+1,t+3)$. ¿En que momento estará mas cerca del punto $(4,5)$?

$P(t)=(2t+1,t+3)$ estará mas cerca de $(4,5)$ cuando el vector que apunta de $(4,5)$ a $P(t)$, que es $P(t)-(4,5)=(2t-3,t-2)$ sea perpendicular a la dirección de $P(t)$ que es $(2,1)$.

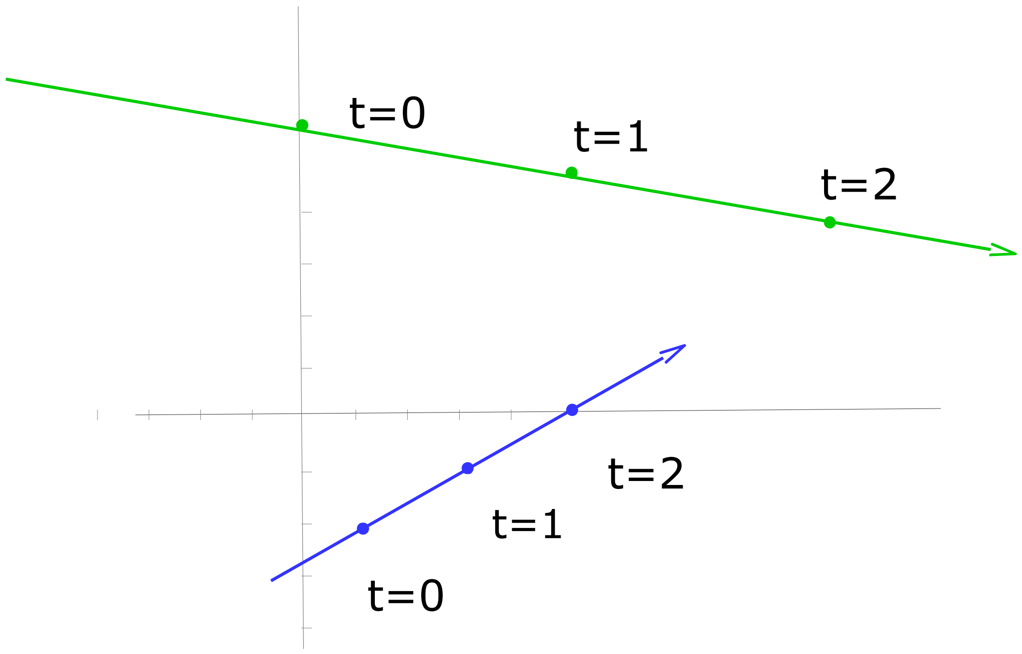


Esto ocurre cuando

$0= (2t-3,t-2) \cdot (2,1) = 4t-6+t-2 = 5t-8$ $\qquad t = {}^{8}/_{5}$

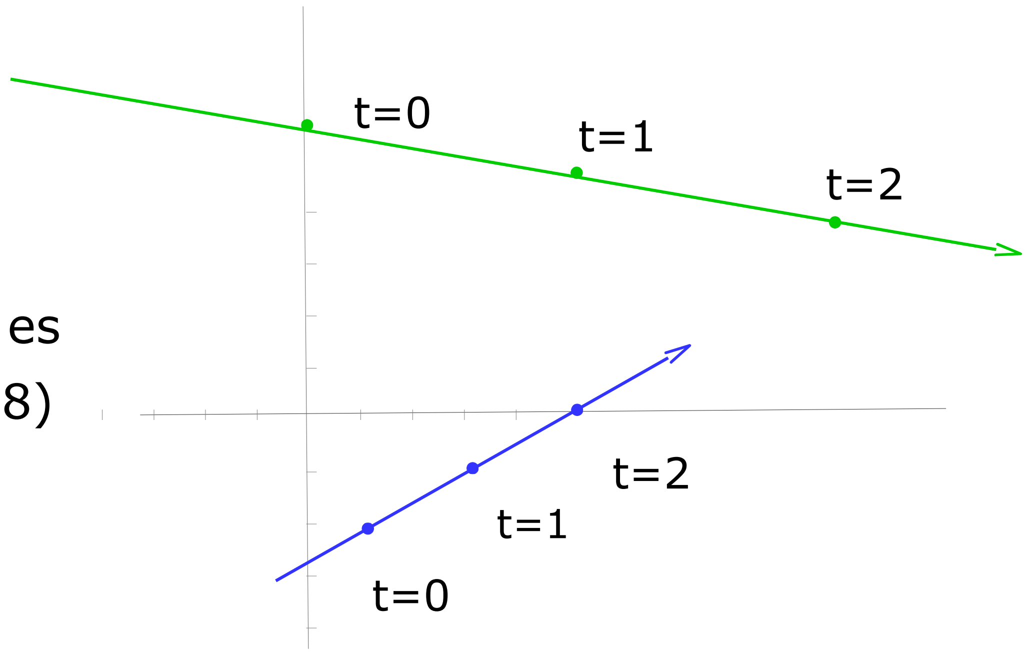
Ejercicio. 2 puntos P y Q se mueven en el plano siguiendo las trayectorias $P(t)=(2t+1,t-2)$ y $Q(t)=(5t,-t+6)$ respectivamente.

¿En que momento estarán mas cerca uno de otro?



Ejercicio. 2 puntos P y Q se mueven en el plano siguiendo las trayectorias $P(t)=(2t+1,t-2)$ y $Q(t)=(5t,-t+6)$ respectivamente.

¿En que momento estarán mas cerca uno de otro?

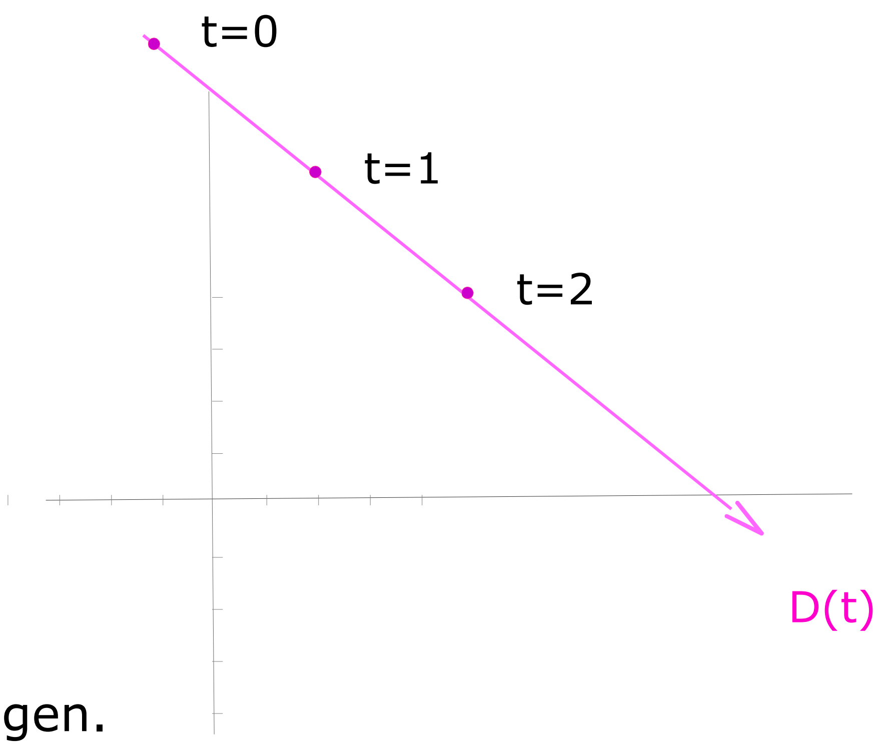


La posición de Q vista desde P es

$D(t) = Q(t) - P(t) = (3t-1,-2t+8)$

Ejercicio. 2 puntos P y Q se mueven en el plano siguiendo las trayectorias $P(t)=(2t+1,t-2)$ y $Q(t)=(5t,-t+6)$ respectivamente.

¿En que momento estarán mas cerca uno de otro?



La posición de Q vista desde P es

$D(t) = Q(t) - P(t) = (3t-1,-2t+8)$

Q(t) estará mas cerca de P(t)

cuando D(t) esté mas cerca del origen.

Esto ocurre cuando $D(t)= (3t-1,-2t+8)$

es perpendicular a su dirección, que es $(3,-2)$, es decir cuando

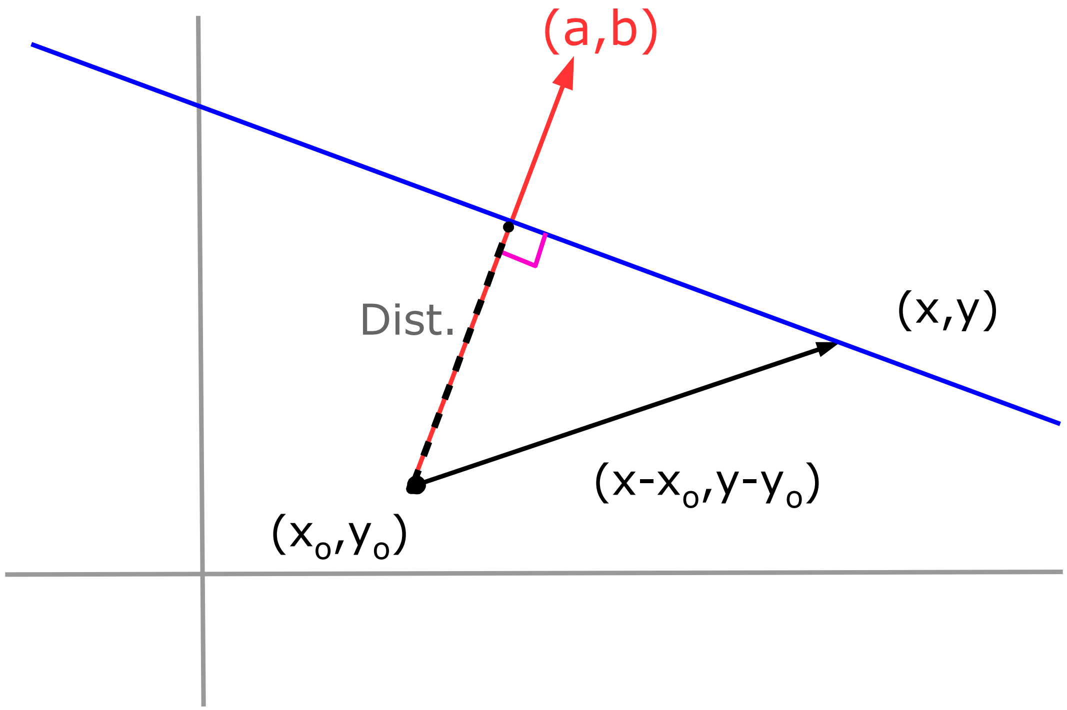
$0= (3t-1,-2t+8) \cdot (3,-2) = 9t-3+4t-16 = 13t-19$ $\qquad t = {}^{19}/_{13}$

Lema. La distancia D de la recta $ax + by + c = 0$

al punto (x_0,y_0) es $|ax_o + by_o + c| / |(a,b)|$

Lema. La distancia D de la recta $ax + by + c = 0$ al punto (x_0,y_0) es $|ax_o + by_o + c| / |(a,b)|$

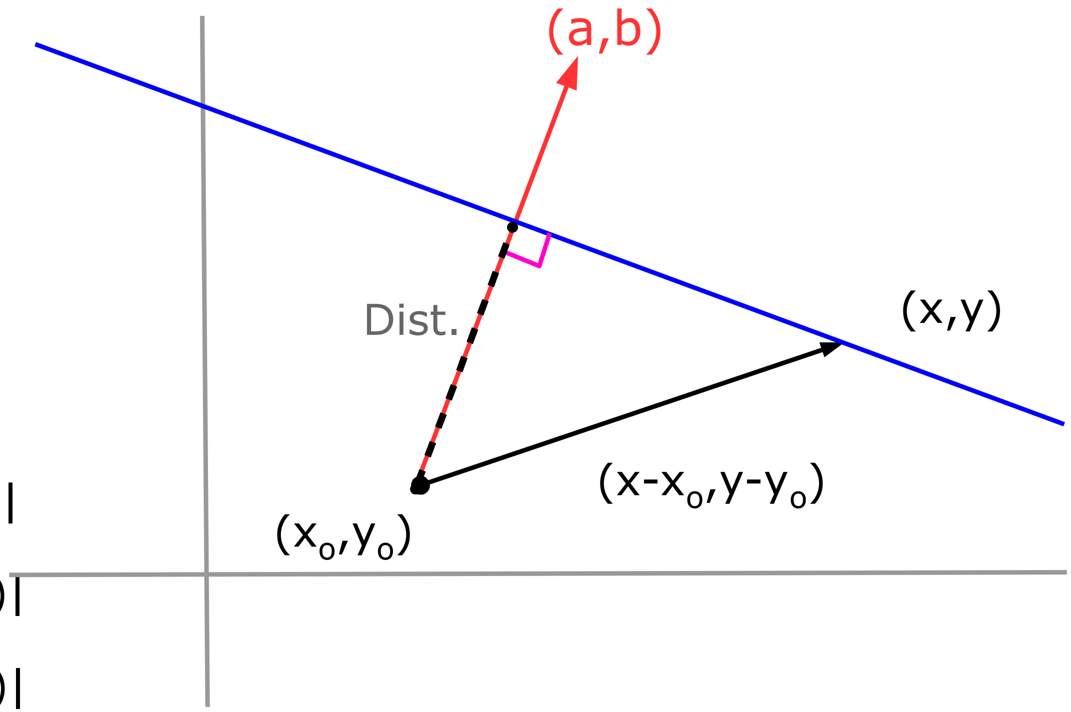
Demostración.



Lema. La distancia D de la recta $ax + by + c = 0$

al punto (x_0,y_0) es $|ax_o + by_o + c| / |(a,b)|$

Demostración.



Distancia $= |\text{Proy}_{(A,B)}(x-x_o,y-y_o)|$

$= |(a,b) \cdot (x-x_o,y-y_o)| / |(a,b)|$

$= |ax + by - ax_o - by_o| / |(a,b)|$

$= |-c - ax_o - by_o| / |(a,b)|$ (ya que $ax+by=-c$ para todos los puntos en la recta)

$= |ax_o + by_o + c| / |(a,b)|$

Ejemplos.

¿Cual es la distancia de la recta $2x-3y+4=0$ al punto $(5,7)$?

Ejemplos.

¿Cual es la distancia de la recta $2x-3y+4=0$ al punto $(5,7)$?

$$\text{Dist.} = |ax_o + by_o + c| \, /|(a,b)| = |2\cdot 5-3\cdot 7+4|/\sqrt{2^2+3^2} = 7/\sqrt{13}$$

La información geométrica de las rectas está codificada en sus ecuaciones cartesianas $ax + by = c$

- La dirección de la recta está en los coeficientes a y b:

El vector (a,b) es perpendicular a la recta así que la recta tiene la dirección del vector (-b,a).

- La distancia de la recta al origen es $|c|/\sqrt{a^2+b^2}$

La información geométrica de las rectas está codificada en sus ecuaciones cartesianas $ax + by = c$

- Dos ecuaciones $ax + by = c$ y $a'x + b'y = c'$ corresponden a la misma recta si y solo si los vectores (a,b,c) y (a',b',c') son paralelos.

- Dos ecuaciones $ax + by = c$ y $a'x + b'y = c'$ corresponden a rectas paralelas si y solo si los vectores (a,b) y (a',b') son paralelos pero (a,b,c) y (a',b',c') no son paralelos.

Las ecuaciones cartesianas de todas las rectas que pasan por un mismo punto también tienen algo en común.

¿Como son las ecuaciones de las rectas que pasan por el punto (1,0)?

La ecuación ax+by=c es de una recta que pasa por (1,0) si y solo si a·1+b·0=c, es decir, a=c, así que las ecuaciones de rectas por (0,1) son las de la forma

ax+by=a   por ejemplo   2x+5y=2 , -x+3y=-1

¿Como son las ecuaciones de las rectas que pasan por el punto (2,-3)?

La ecuación ax+by=c es de una recta que pasa por (2,-3) si a·2+b·(-3)=c, es decir, 2a-3b=c, así que las ecuaciones de rectas por (2,-3) son de la forma

ax+by=2a-3b   por ejemplo   2x+y=1 , x-3y=11 , 6x+4y=0

Los coeficientes de las ecuaciones de todas las rectas que pasan por un punto satisfacen una ecuación lineal, que depende del punto.

¿Que pasa si sumamos las ecuaciones de 2 rectas?

La suma de dos ecuaciones $ax+by=c$ y $dx+ey=f$ es otra ecuación $(a+d)x+(b+e)y=c+f$ que corresponde a otra recta

¿que tiene que ver esta recta con las originales?

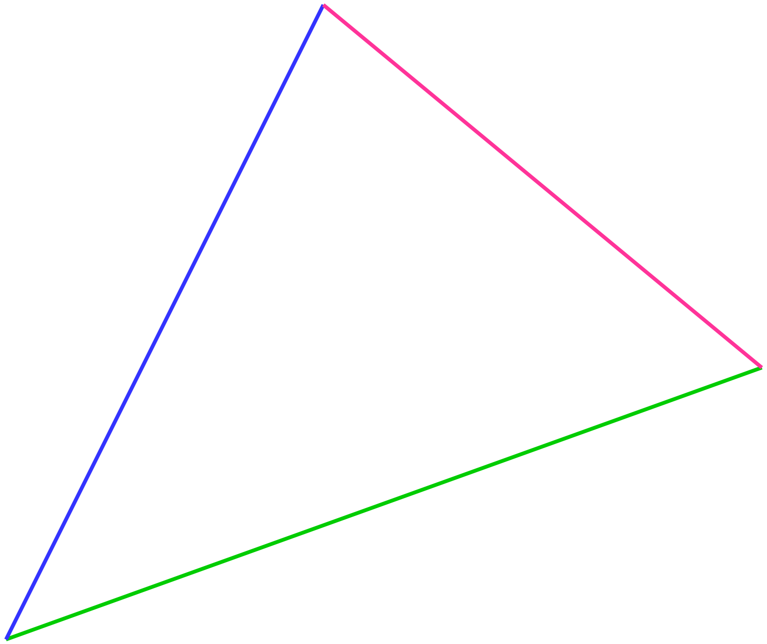
Por ejemplo, si sumamos $x+2y=3$ y $4x-3y=1$ queda $5x-y=4$.

Las ecuaciones $2x+4y=6$ y $-4x+3y=-1$ corresponden a esas mismas rectas, pero su suma es $-2x+7y=5$ que corresponde a otra recta distinta a $5x-y=4$.

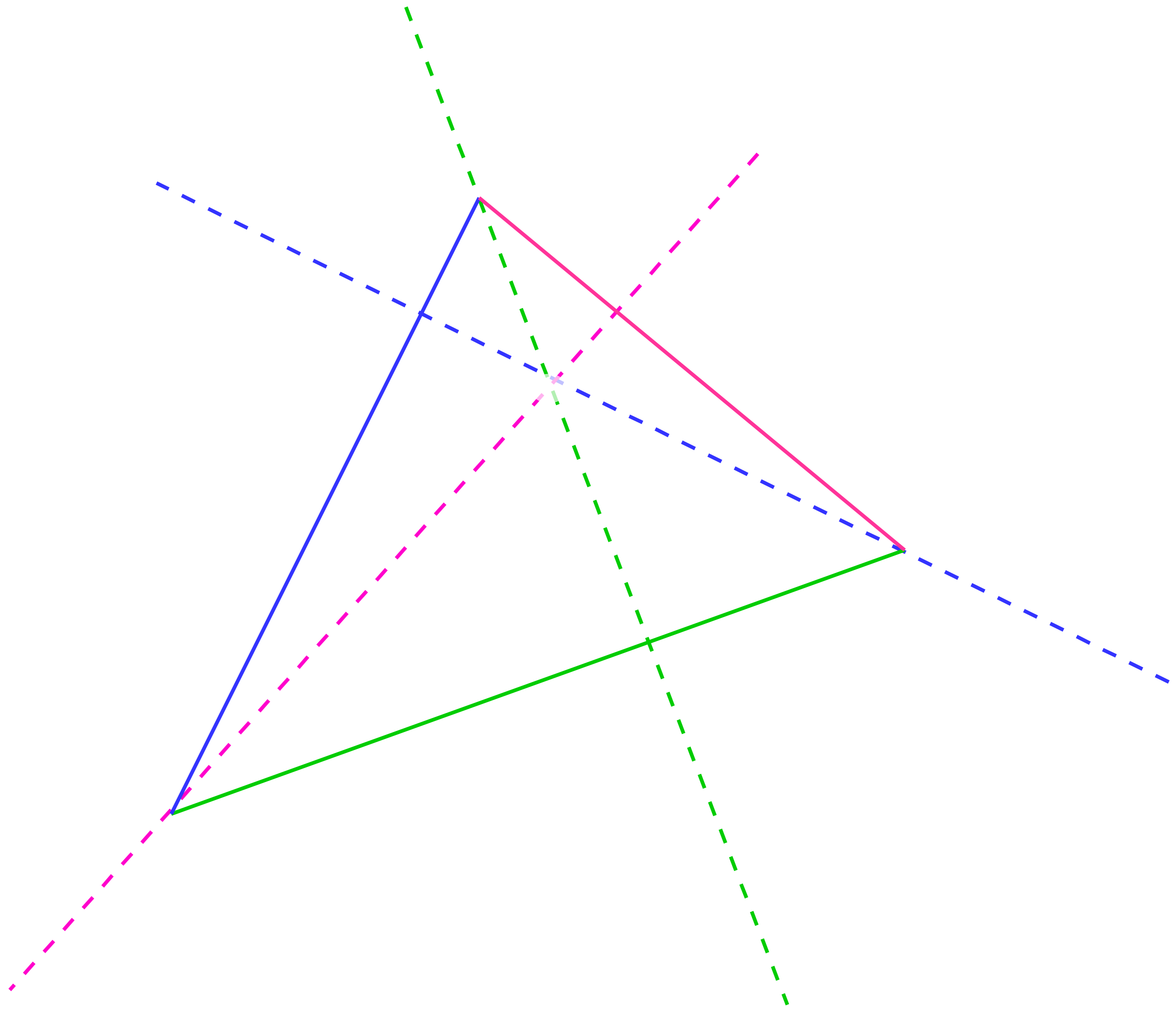
Así que al combinar las ecuaciones de dos rectas se pueden obtener distintos resultados. Pero todos estos tienen algo en común, ya que si un punto es solución de 2 ecuaciones, entonces también es solución de su suma, así que la recta resultante pasa por el punto de intersección de las dos rectas.

Al combinar las ecuaciones de dos rectas (multiplicándolas por constantes y sumándolas) se obtienen las ecuaciones de todas las rectas que pasan por su punto de intersección (y si son paralelas, de todas las rectas paralelas).

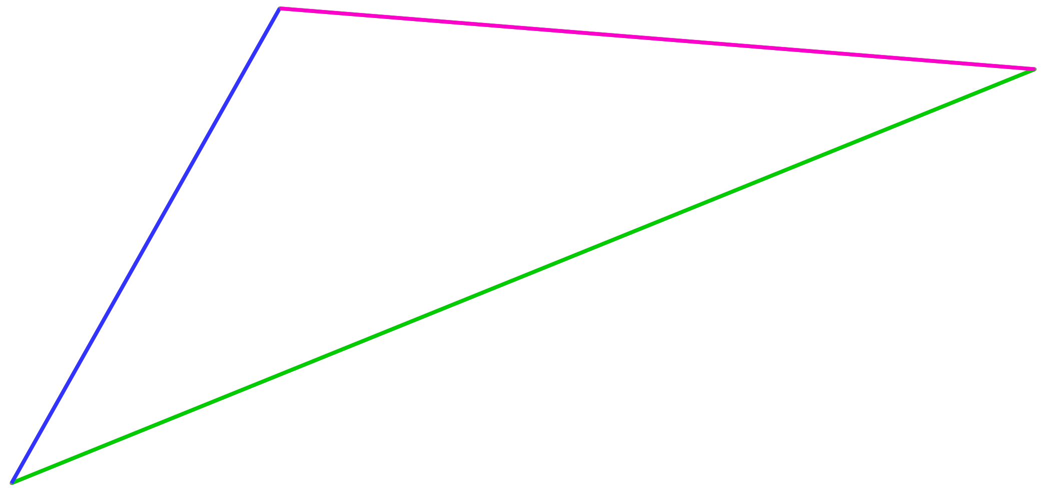
Recordar que las **alturas** de un triángulo son las líneas por los vértices que son perpendiculares a los lados opuestos.



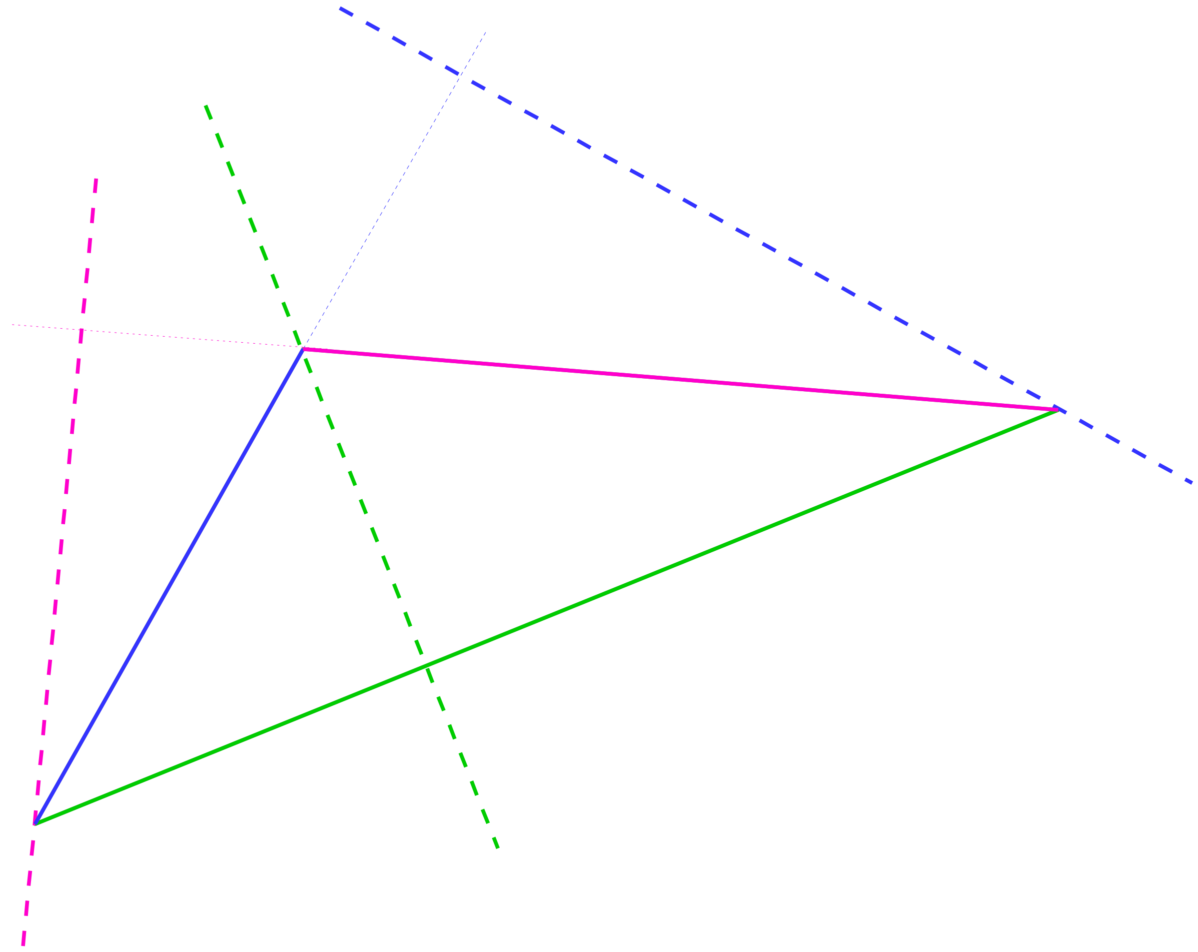
Recordar que las **alturas** de un triángulo son las líneas por los vértices que son perpendiculares a los lados opuestos.



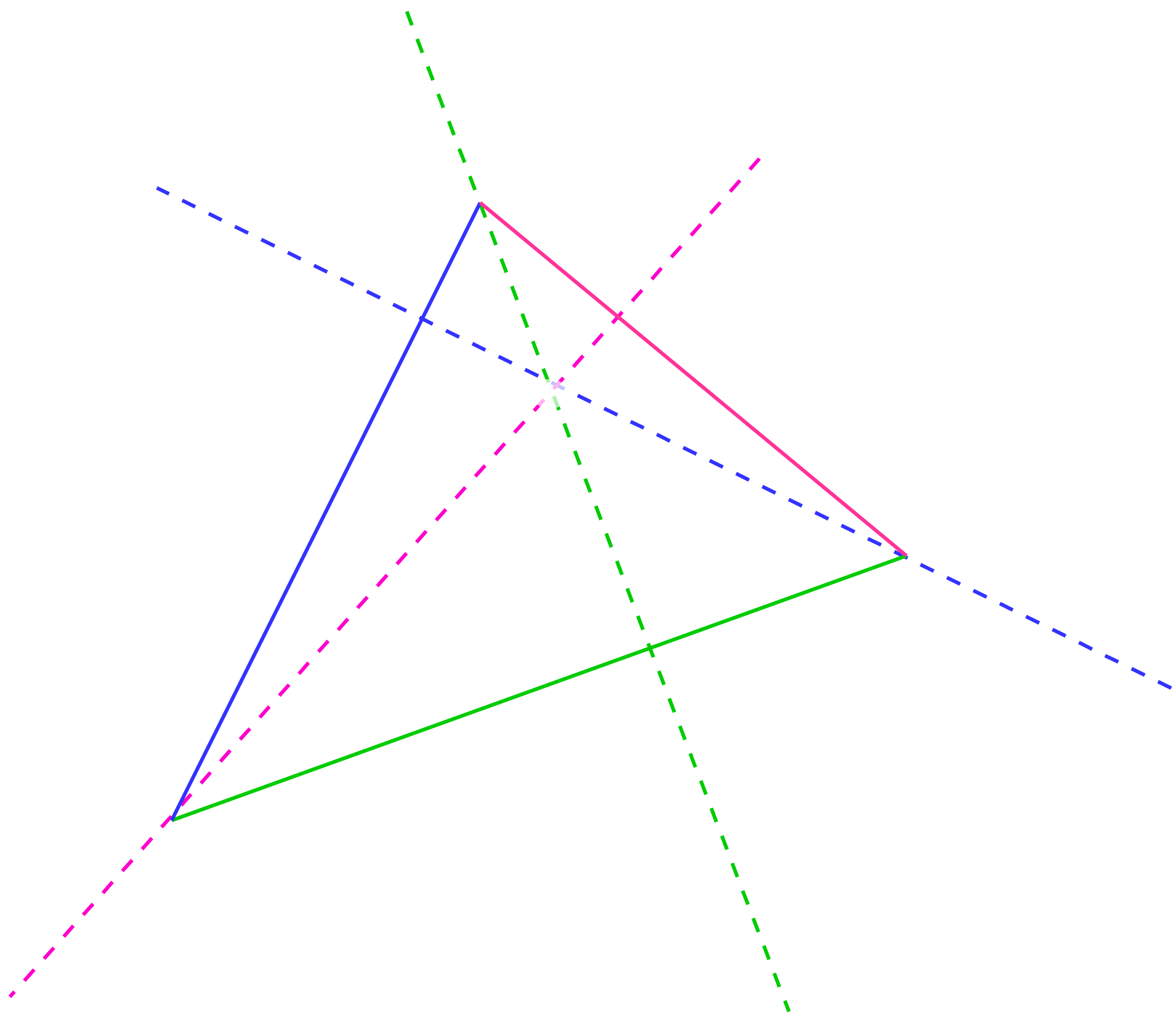
Recordar que las **alturas** de un triángulo son las líneas por los vértices que son perpendiculares a los lados opuestos.



Recordar que las **alturas** de un triángulo son las líneas por los vértices que son perpendiculares a los lados opuestos.

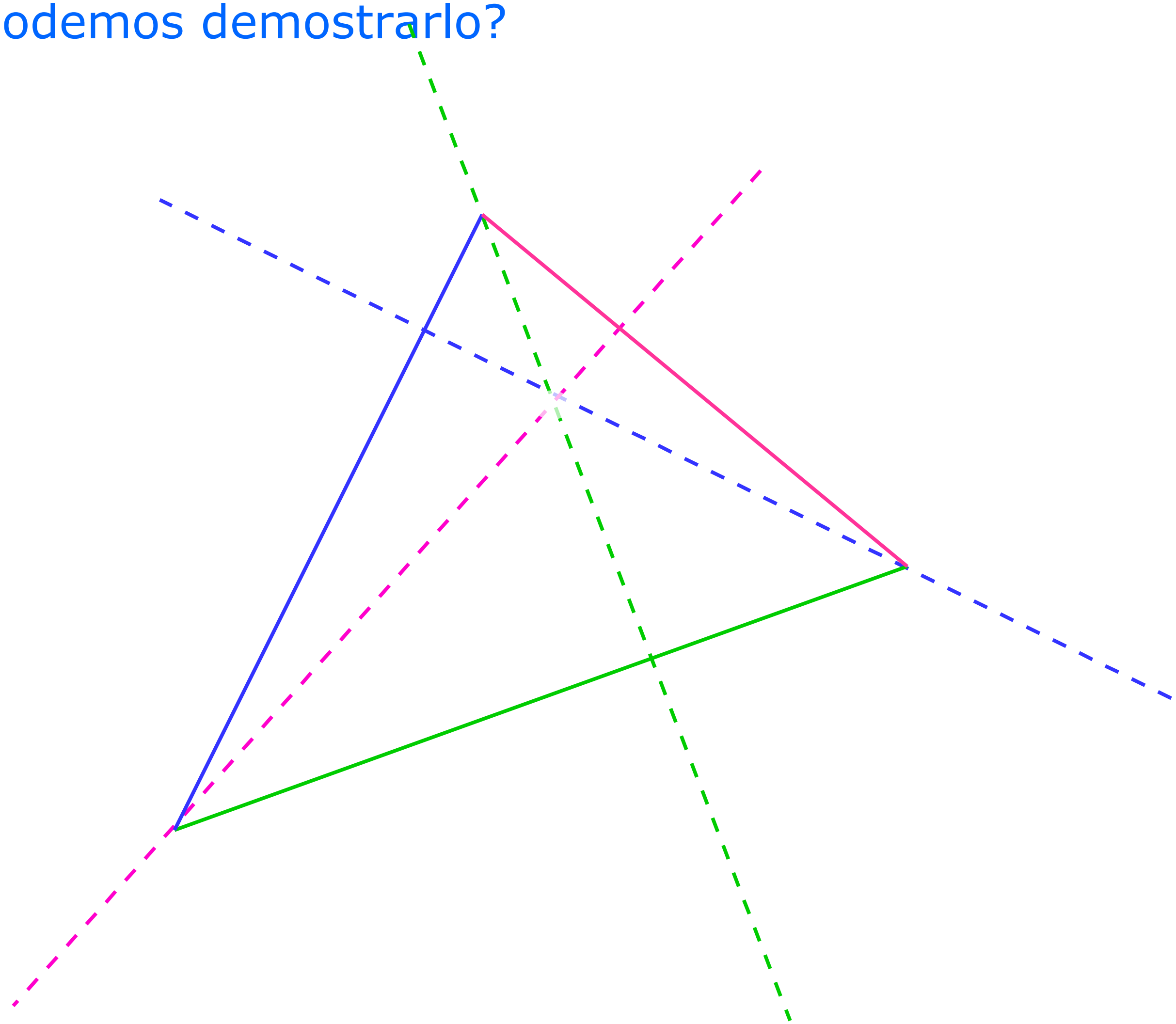


Teorema. *Las alturas de un triángulo son concurrentes.*



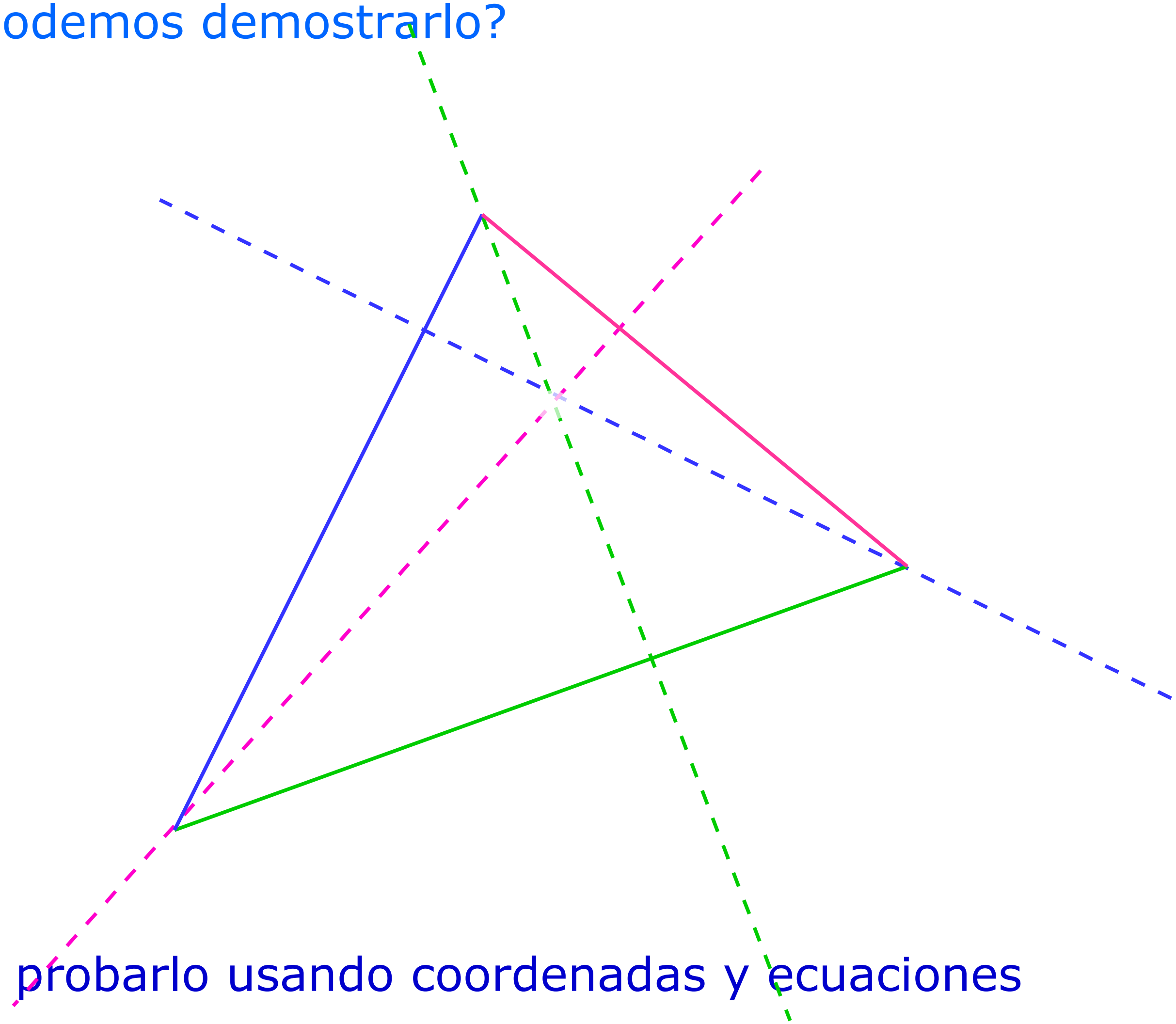
Teorema. *Las alturas de un triángulo son concurrentes.*

¿Como podemos demostrarlo?



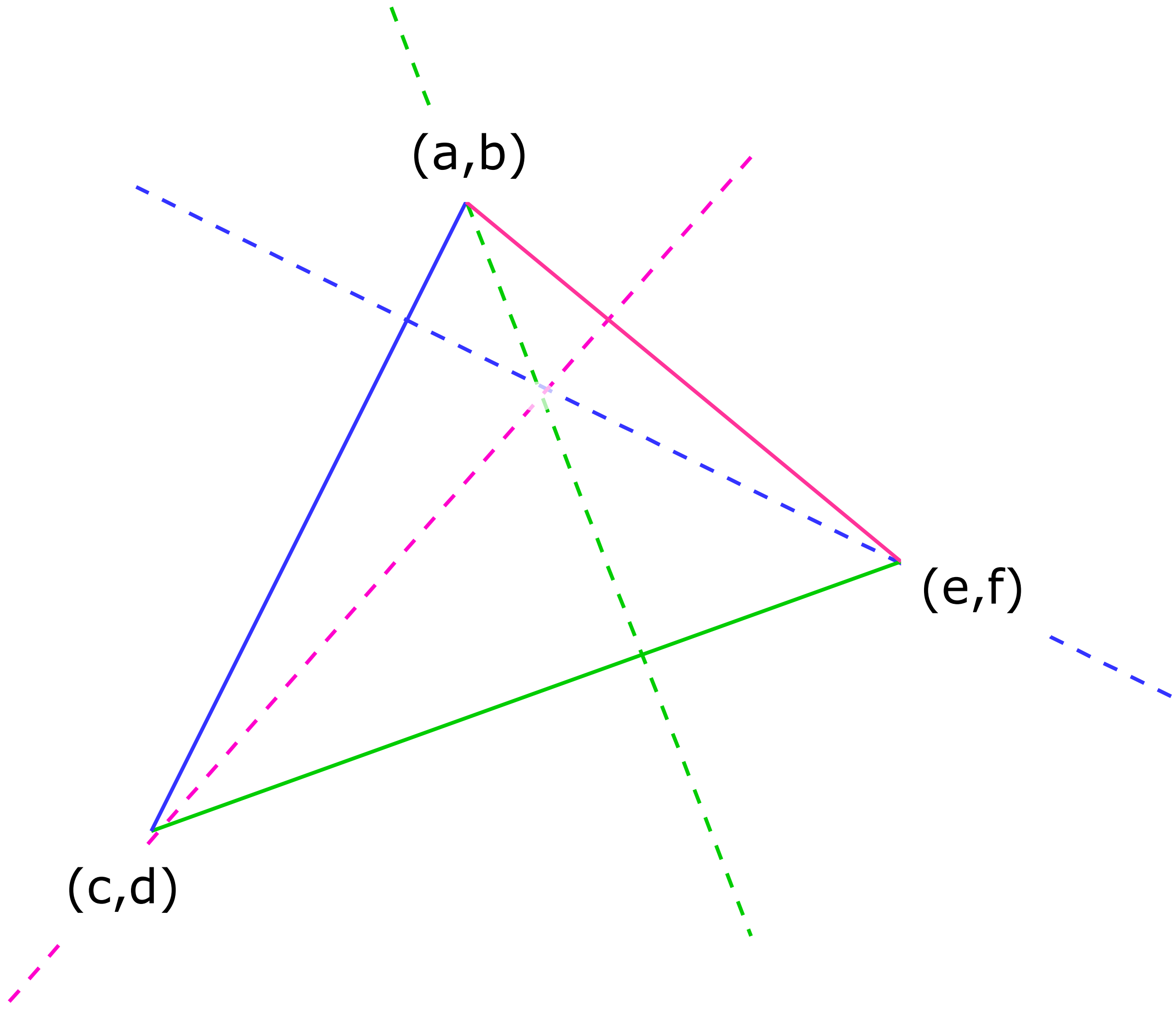
Teorema. *Las alturas de un triángulo son concurrentes.*

¿Como podemos demostrarlo?

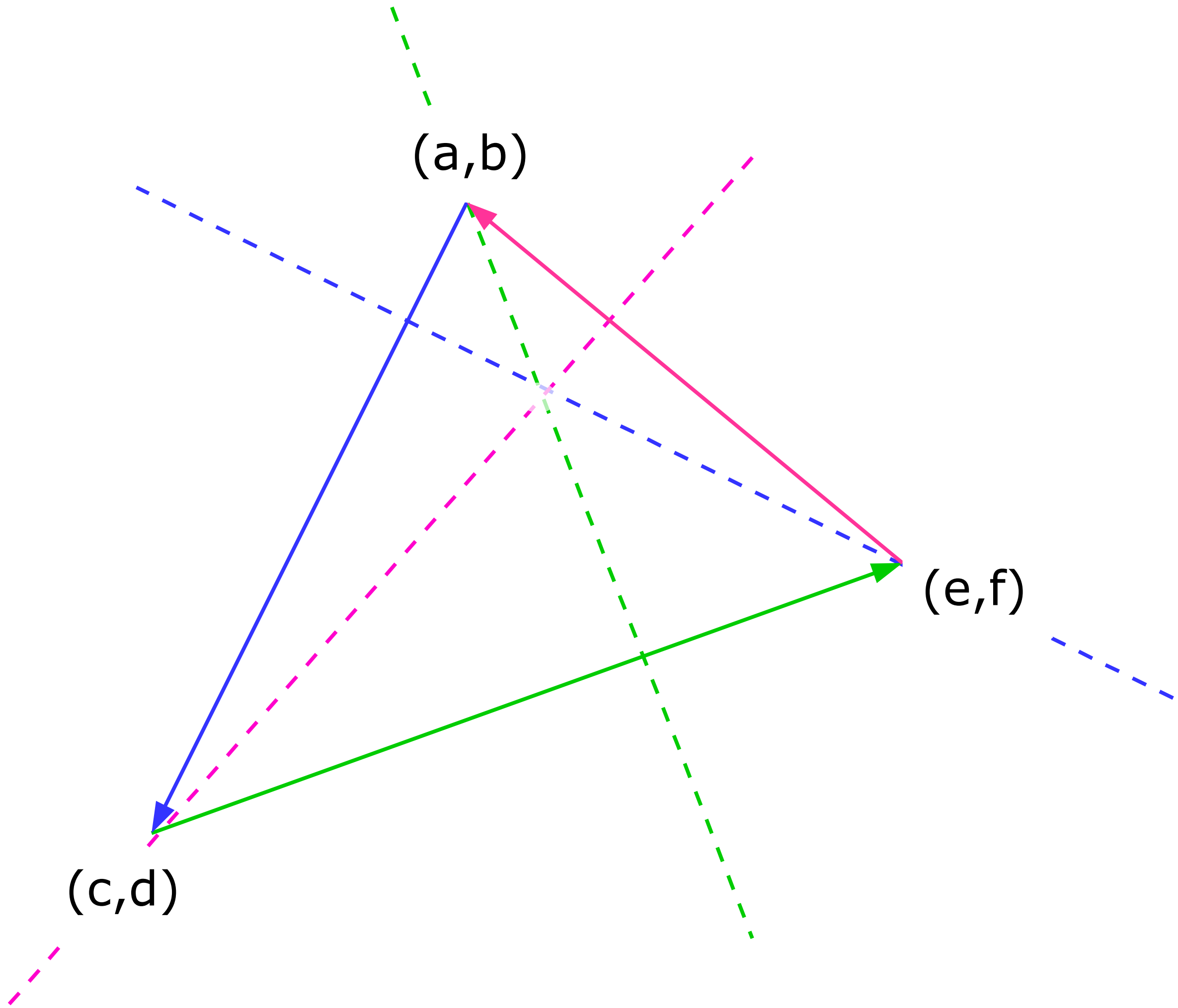


Vamos a probarlo usando coordenadas y ecuaciones

Demos coordenadas a los vértices

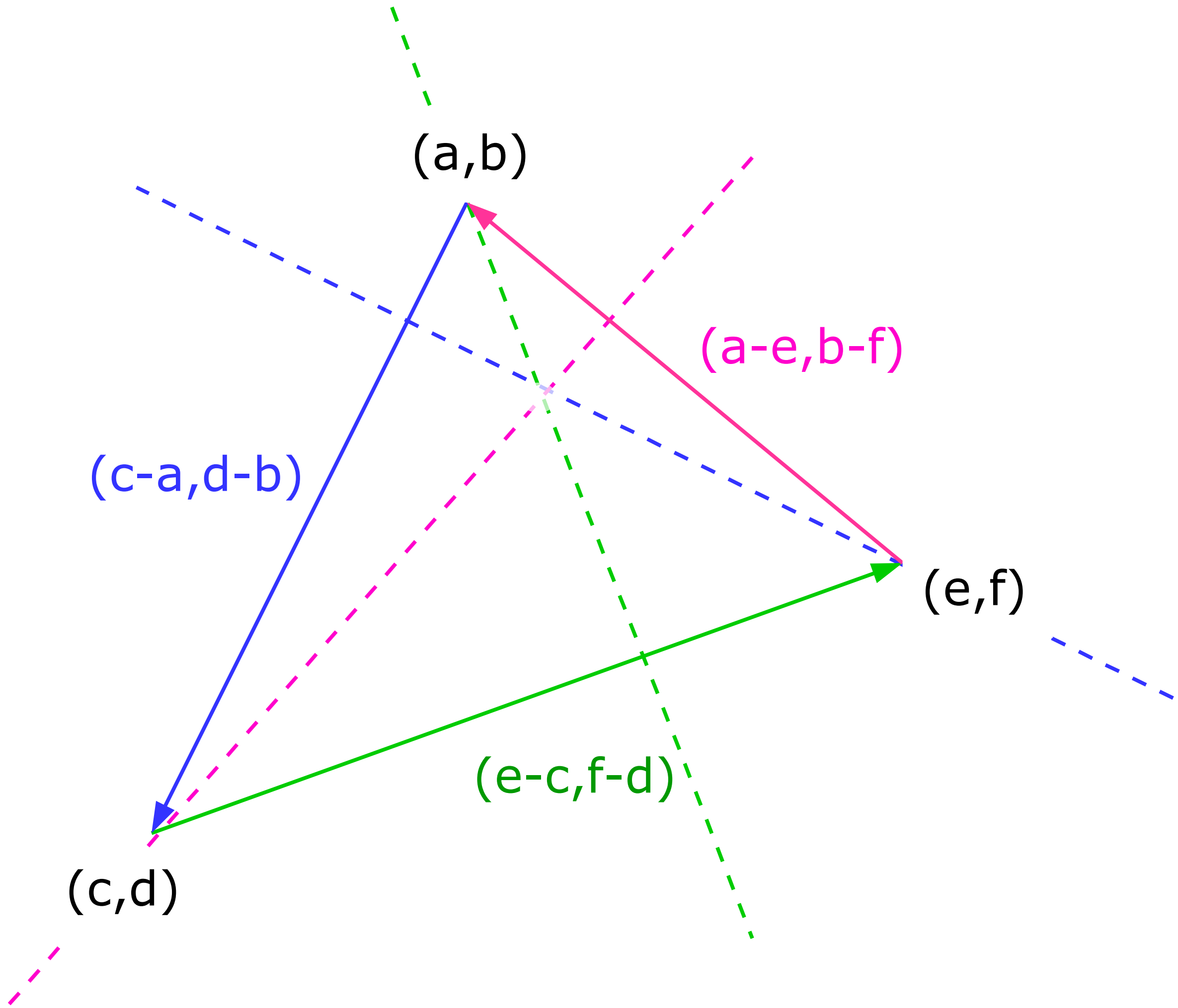


Demos coordenadas a los vértices

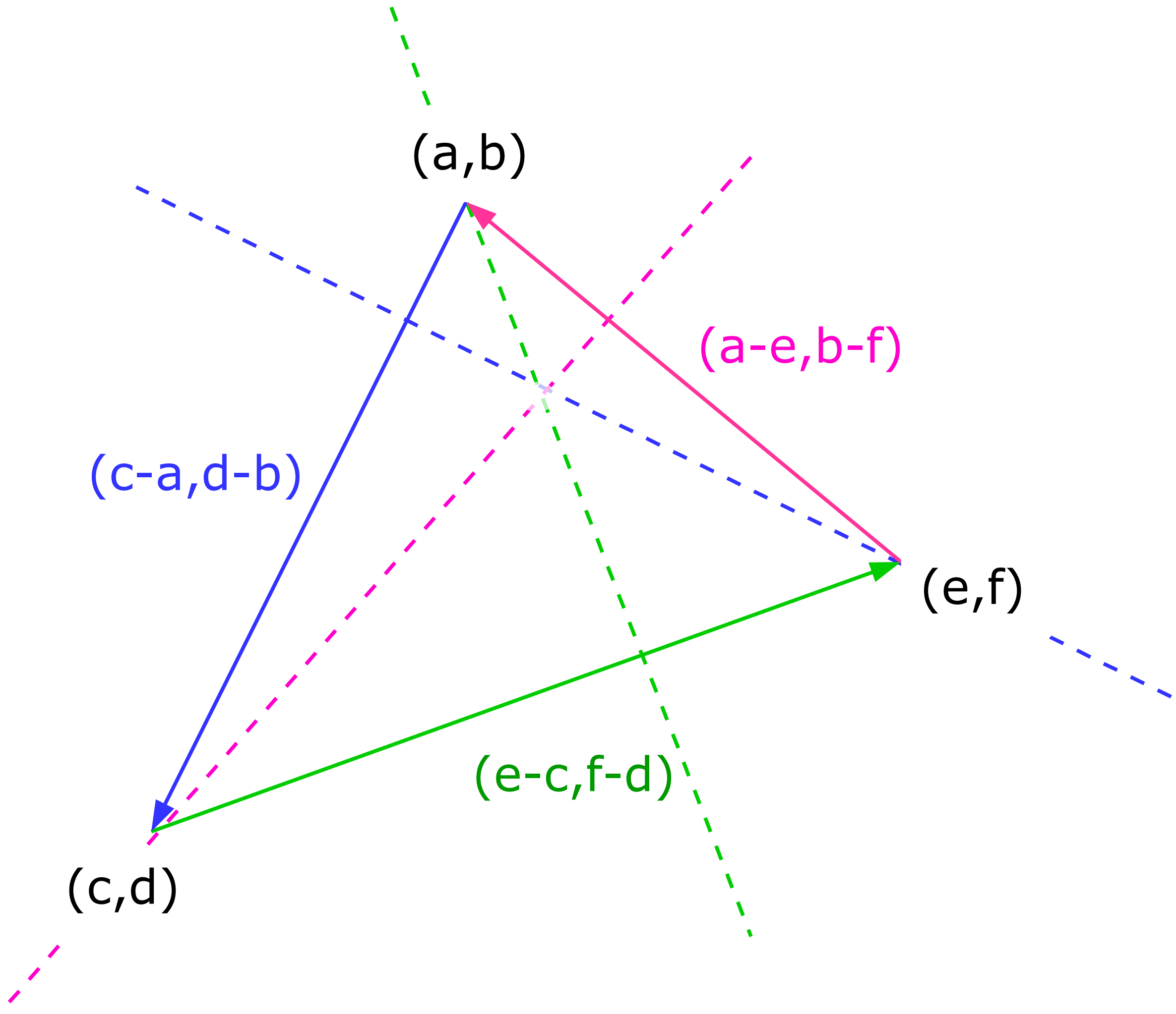


¿Que vectores dan los lados?

Demos coordenadas a los vértices

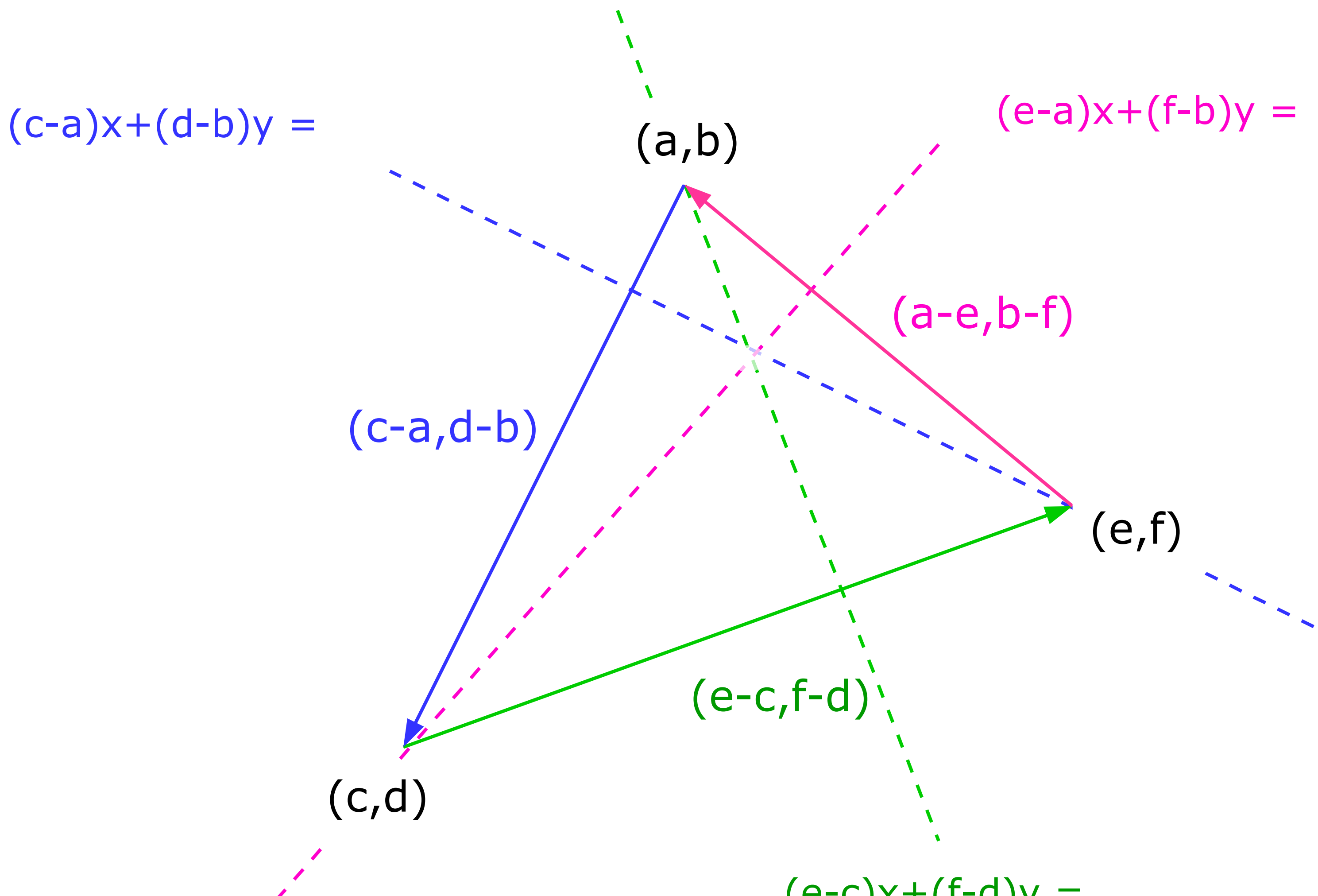


Demos coordenadas a los vértices

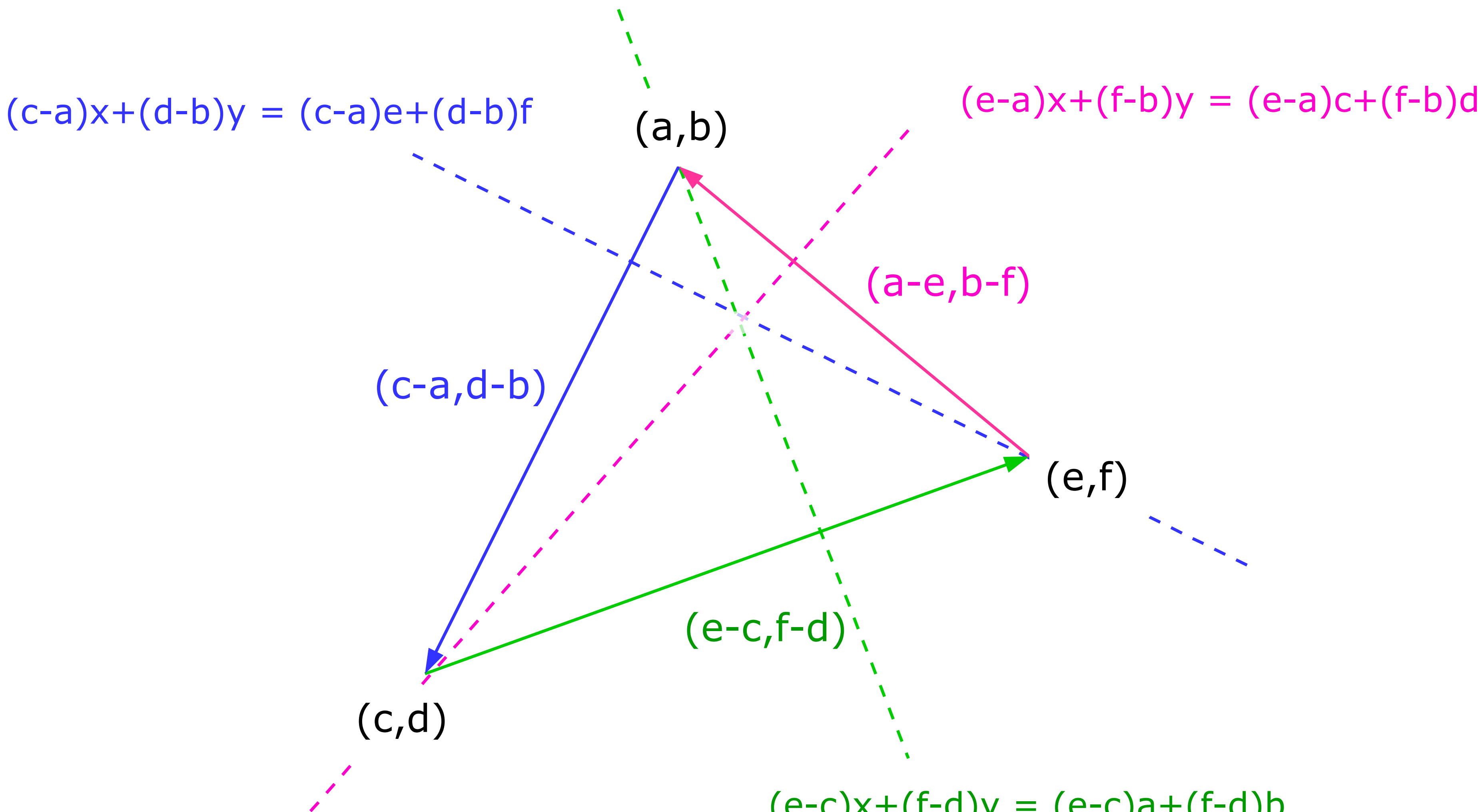


¿Que ecuaciones tienen las alturas?

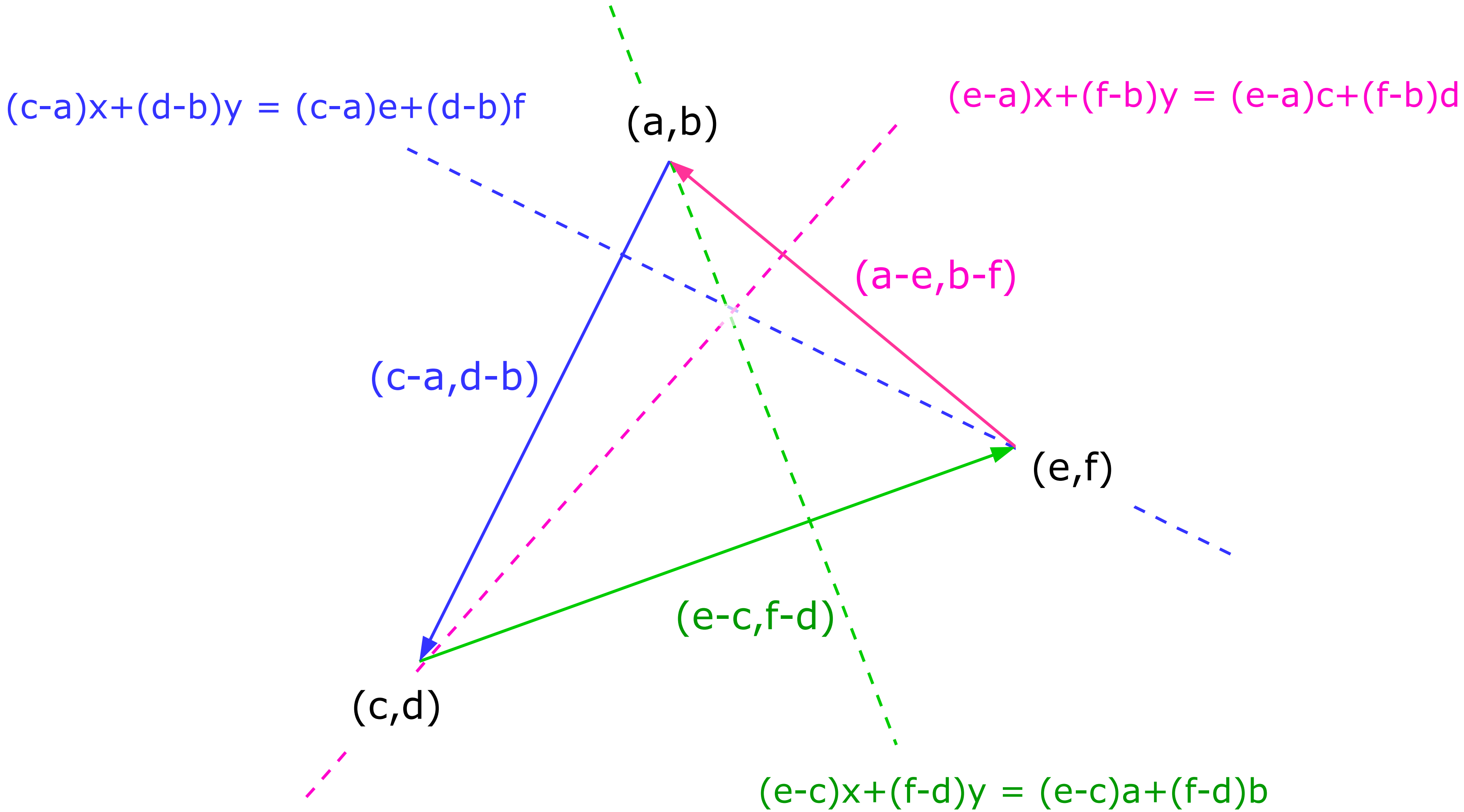
Demos coordenadas a los vértices



Demos coordenadas a los vértices

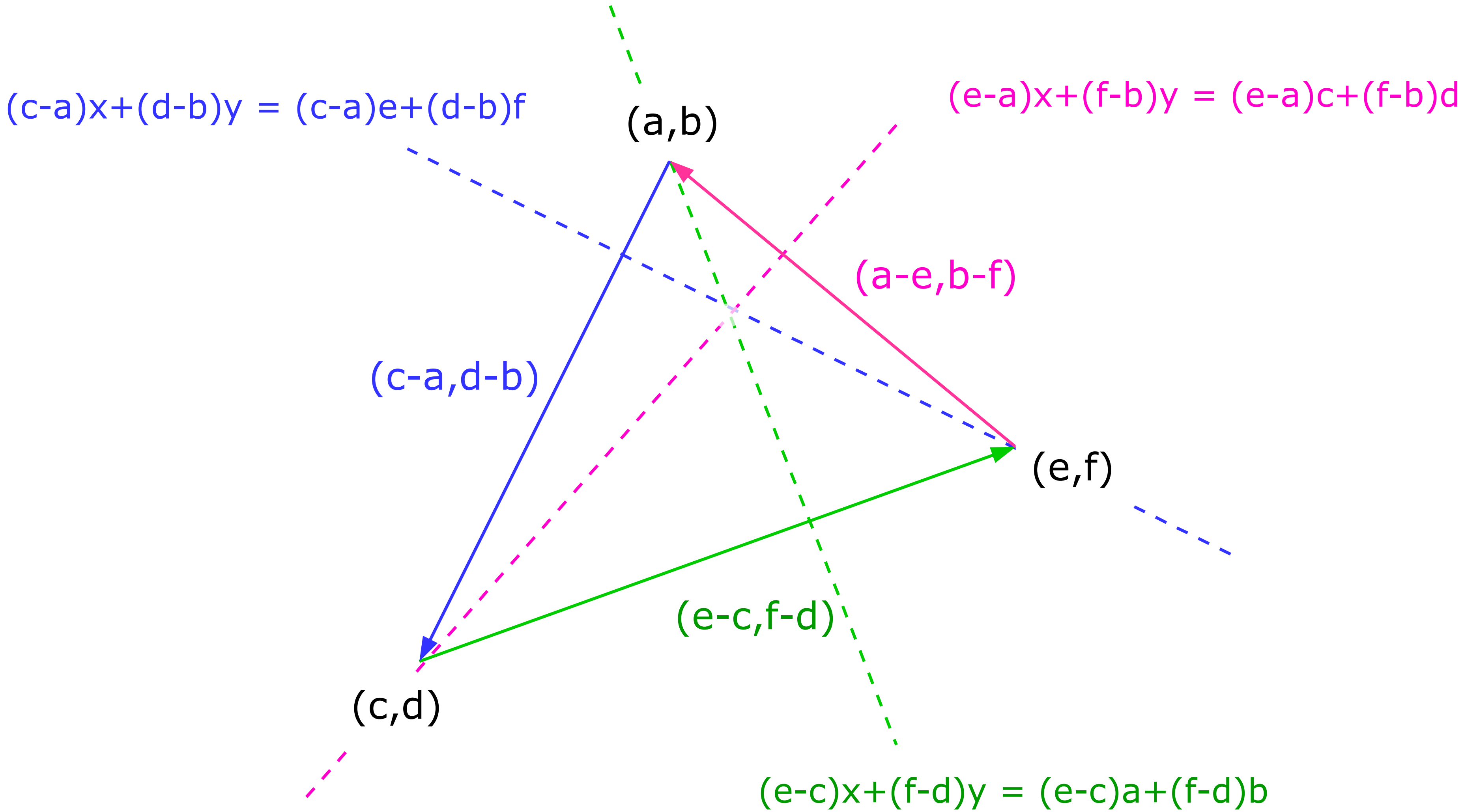


Demos coordenadas a los vértices



La suma de la ecuación azul y la ecuación verde da la ecuación rosa

Demos coordenadas a los vértices



Así que la intersección de la linea azul y la línea verde está en la linea rosa.