

# Geometría Euclidiana

En el siglo III AC, Euclides de Alejandría y sus discípulos escribieron *Los Elementos*, una colección de libros en los que se organizaban y expandían los conocimientos matemáticos de entonces alrededor de la geometría, dándoles una estructura lógica.

Su idea era partir de muy pocas suposiciones "obvias" y usar la lógica para deducir todo lo demás. No les bastaba que algo pareciera ser cierto, querían estar seguros y saber por que lo era. Esta es la base de todas las matemáticas modernas.



Los Elementos consisten de *definiciones* (lo que significan las cosas), *nociones comunes* (en lo que estamos de acuerdo) y *postulados* o *axiomas* (las cosas que se asumen como ciertas) seguidas por teoremas, construcciones y demostraciones.

## Algunas definiciones:

- Un *punto* es lo que no tiene partes.
- Una *línea* es una longitud sin anchura.
- Una *línea recta* es una línea que yace por igual respecto de los puntos que están en ella.
- Los extremos de una línea son puntos.
- El *ángulo* entre dos líneas que se cruzan es la inclinación que hay de una a otra.
- Si dos rectas se cortan de modo que los ángulos adyacentes son iguales, los ángulos se llaman *rectos* y las líneas se llaman *perpendiculares*.
- *Rectas paralelas* son aquellas que, estando en un mismo plano, nunca se cruzan.

Y hay muchas definiciones mas...

## Nociones comunes:

- Dos cosas que son iguales a una tercera son iguales entre sí.
- Si a cosas iguales se añaden cosas iguales, los resultados son iguales.
- Las cosas que coinciden entre sí son iguales entre sí.
- El total es mayor que una parte.

## Postulados o Axiomas:

1. Por dos puntos distintos pasa una y solo una línea recta
2. Las líneas rectas pueden extenderse indefinidamente.
3. Se puede dibujar un círculo con cualquier centro y de cualquier radio.
4. Todos los ángulos rectos son iguales.
5. Si una línea recta cruza a dos líneas rectas de modo que los ángulos internos de un mismo lado suman menos que dos ángulos rectos, entonces las dos rectas se cruzarán de ese lado.

Las definiciones de algunos objetos (como las líneas rectas) son muy vagas para ser útiles, lo que realmente importa son sus propiedades, que están dadas por los axiomas.

La idea de Euclides era usar únicamente estas propiedades para probar todos los teoremas, pero con el paso del tiempo se ha visto que faltan algunas otras propiedades, que no están en los axiomas. En particular, la siguiente:

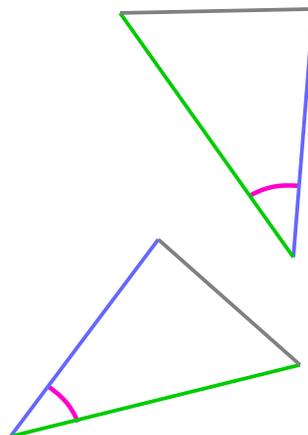
Las figuras planas se pueden desplazar (trasladar, girar y reflejar) sin cambiar su forma.

## Algunos teoremas de los elementos

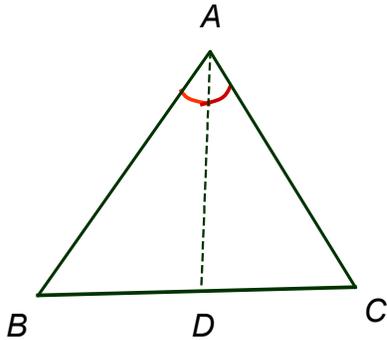
**Proposición 1.4.** (LAL) *Si dos triángulos tienen dos lados y el ángulo entre ellos iguales entonces los otros lados y los otros ángulos también son iguales.*

**Demostración.** Si  $ABC$  y  $DEF$  son dos triángulos con  $AB=DE$ ,  $AC=DF$  y los ángulos  $BAC$  y  $EDF$  iguales. Desplazar al triángulo  $DEF$  de modo que  $DE$  coincida con  $AB$ , y (reflejando de ser necesario) que el ángulo  $EDF$  coincida con el ángulo  $BAC$ .

Entonces la línea  $DF$  coincide con la línea  $AC$ , así que (como  $DF=AC$ )  $F$  coincide con  $C$ . Entonces por el **postulado 1** la línea  $BC$  debe coincidir con la línea  $EF$ , así que los dos triángulos coinciden y por lo tanto sus lados y ángulos son iguales. •



**Proposición 1.5.** (Pons Asinorum) *Si un triángulo tiene dos lados iguales entonces los ángulos opuestos a esos lados son iguales.*



**Demostración.** Supongamos que el triángulo ABC tiene lados AB y AC iguales. Dibujar la bisectriz del ángulo BAC, y sea D el punto donde la bisectriz corta al lado BC. Entonces los triángulos ABD y ACD tienen 2 lados iguales y los ángulos entre ellos iguales. Así que por la proposición 1.4 los ángulos ABD y ACD son iguales. •

**Proposición 1:8.** (LLL) *Si dos triángulos tienen lados iguales entonces tienen ángulos iguales.*

**Demostración.** Si ABC y A'B'C' son dos triángulos con lados respectivos iguales, podemos desplazarlos para que A' coincida con A, B' coincida con B y además C' y C queden del mismo lado del segmento AB.

Si C' coincide con C entonces por el postulado 1 los lados coinciden, así que los ángulos son iguales.

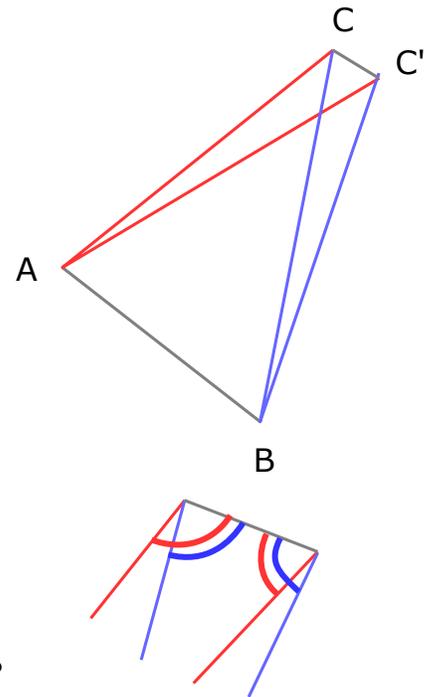
Supongamos ahora que C' no coincide con C.

Como  $AC = A'C'$  entonces por **1.5**  $\angle ACC' = \angle AC'C$

Y como  $BC = BC'$  entonces por **1.5**  $\angle BCC' = \angle BCC'$ .

Pero  $\angle AC'C > \angle BC'C$  y  $\angle BCC' > \angle AC'C$

Las desigualdades se contradicen, así que C' debe coincidir con C. •



**Proposición 1:17.** *En un triángulo, la suma de dos ángulos es menor que 2 rectos.*

**Demostración.** Por contradicción (Ejercicio)

**Proposición 1:18.** En un triángulo, el ángulo opuesto al lado mayor es mayor.  
 (Si  $AC > AB$  entonces  $\angle ABC > \angle ACB$ )

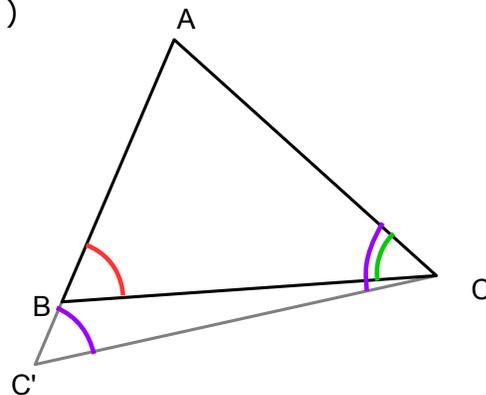
**Demostración.** Supongamos que  $AC > AB$ .

En la recta AB dibujar un punto C' tal que  $AC' = AC$ .

Como el triángulo CAC' es isósceles entonces  $\angle ACC' = \angle AC'C$ .

Pero  $\angle AC'C < \angle ABC$  y  $\angle ACC' > \angle ACB$ .

Así que  $\angle ABC > \angle ACB$  •



**Proposición 1:19.** En un triángulo, el lado opuesto al ángulo mayor es mayor.  
 (Si  $\angle ABC > \angle ACB$  entonces  $AC > AB$ )

**Demostración.** (por contrapositiva) Supongamos que la conclusión no se cumple,  $AC \leq AB$ .

Si  $AC = AB$  entonces por **1.5**  $\angle ABC = \angle ACB$ .

Y si  $AC < AB$  entonces por **1.18**  $\angle ABC < \angle ACB$

En ambos casos  $\angle ABC \leq \angle ACB$ , por lo que la hipótesis no se cumple. •

**Proposición 1:20.** En un triángulo, la suma de dos lados es mayor que el tercer lado.

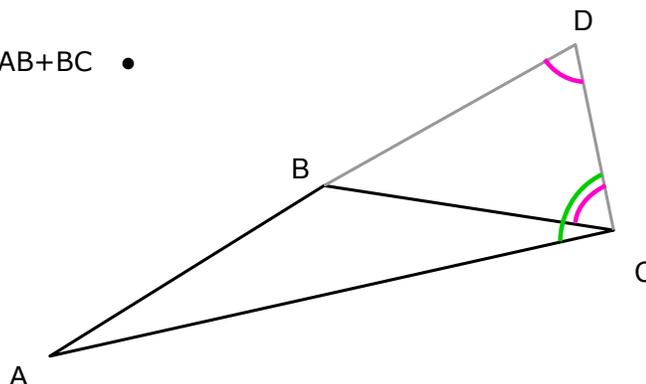
**Demostración.** Veremos que si ABC es un triángulo entonces  $AB+BC > AC$

En la línea AB dibujar un punto D tal que  $BD=BC$ .

Como  $BD=BC$  entonces  $\angle BDC = \angle DCB$

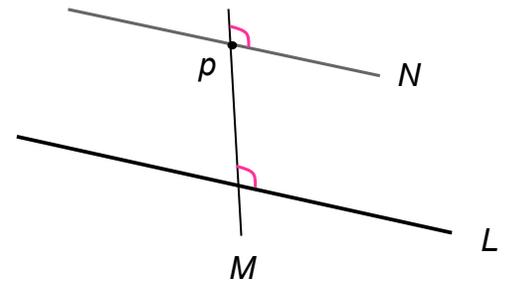
$$\begin{array}{cc} \parallel & \wedge \\ \angle ADC & \angle DCA \end{array}$$

Así que por **1.19** se tiene que  $AC < AD = AB+BC$  •



**Proposición 1:31.** Si  $p$  es un punto fuera de una recta  $L$ , entonces existe una recta paralela a  $L$  que pasa por  $p$ .

**Demostración.** Trazar una recta  $M$  que pase por  $p$  y cruce a  $L$ , y trazar una recta  $N$  que pase por  $p$  y cruce a  $M$  formando el mismo ángulo que  $L$  forma con  $M$ . Vamos a demostrar por contradicción que  $N$  es paralela a  $L$ .

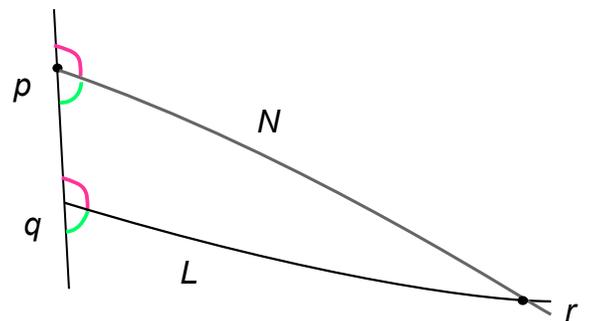


Supongamos que  $L$  y  $N$  no fueran paralelas y se cruzaran en un punto  $r$ , formarían un triángulo  $pqr$ .

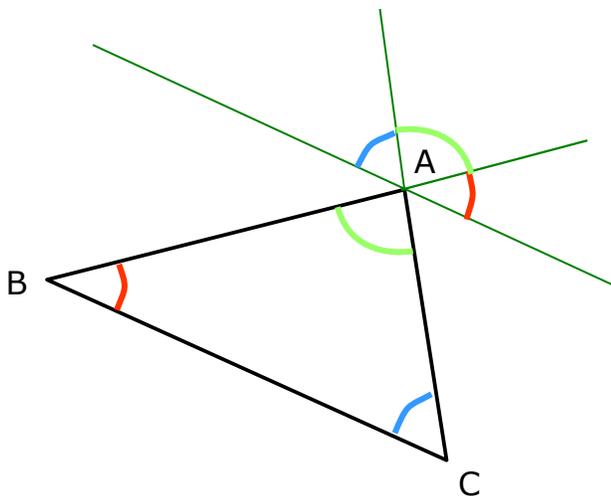
Por construcción  $\angle pqr + \angle qpr = 2$  rectos.

Pero por **1.17** se tiene que  $\angle pqr + \angle qpr < 2$  rectos,

y esto es una contradicción. •



**Proposición 1:32.** En cualquier triángulo, la suma de los tres ángulos interiores es igual a dos ángulos rectos.



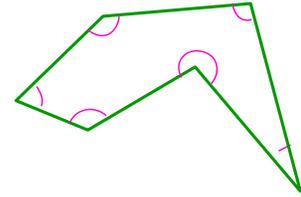
**Demostración.** Dado el triángulo  $ABC$ , por **1.31** podemos construir una paralela al lado  $BC$  que pase por el punto  $A$ .

Como los ángulos que forma una recta con dos rectas paralelas son iguales y como los ángulos opuestos por el vértice son iguales, los ángulos Internos del triángulo suman lo mismo que los ángulos de un lado de una recta. •

## Problemas

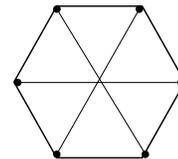
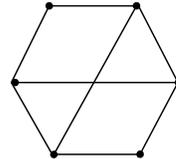
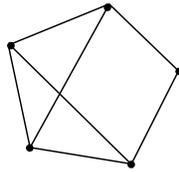
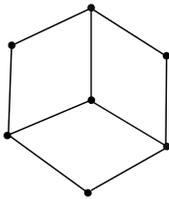
1. Demuestra que dos líneas rectas se intersectan en a lo mas un punto.

2. ¿Cuánto suman los ángulos internos de un polígono de  $n$  lados?



3. Demuestra la proposición 1:17 *En un triángulo la suma de dos ángulos internos es menor que 2 ángulos rectos.*

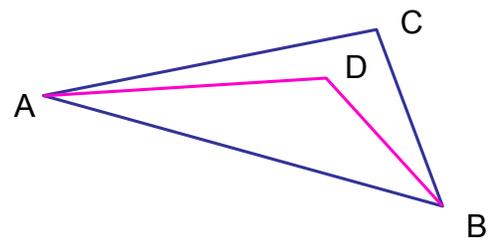
4. Por la proposición 1.8 (LLL) los triángulos son estructuras rígidas. ¿Cuales de estas estructuras (hechas de varillas con articulaciones en los puntos gordos) son rígidas?



5. Sea  $ABC$  un triángulo y  $D$  es un punto en su interior.

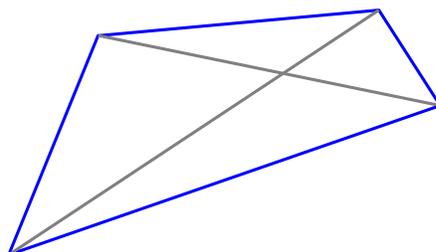
a. Demuestra que  $AD+DB < AC+CB$ .

b. Demuestra que  $\angle ACB < \angle ADB$ .



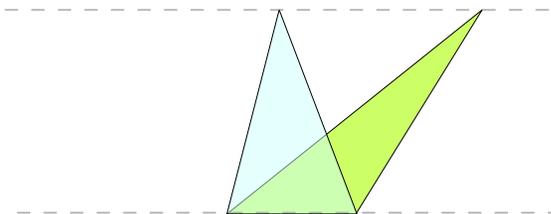
*Tengan cuidado, las afirmaciones no son obvias*

6. Demuestra que la suma de las diagonales de un cuadrilátero es menor que la suma de sus cuatro lados.



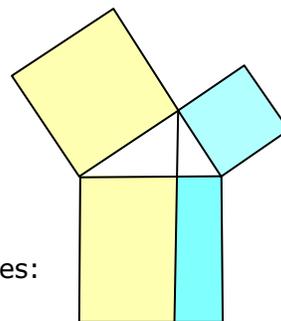
**Proposición 1:38** *Dos triángulos con bases iguales y alturas iguales tienen áreas iguales.*

**Demostración.** Ejercicio (mostrar primero que dos paralelogramos con la misma base y la misma altura tienen la misma área, viendo que es posible recortar uno y usar los pedazos para armar el otro) •

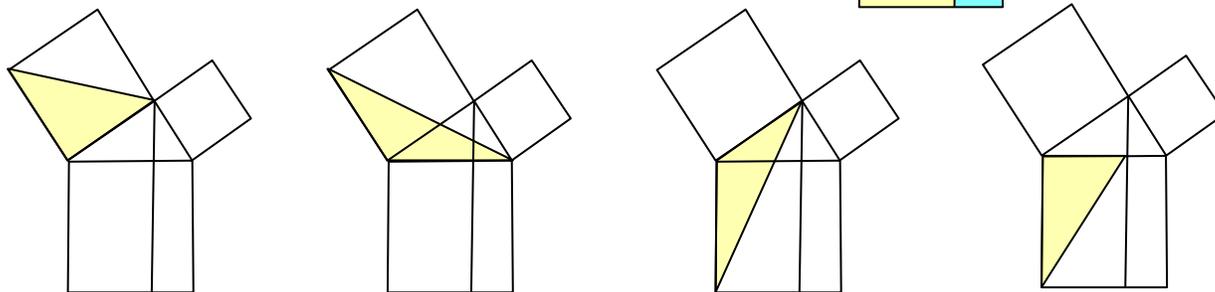


**Proposición 1:47 (Teorema de Pitágoras).** *En los triángulos rectángulos el cuadrado del lado opuesto al ángulo recto es igual a la suma de los cuadrados de los lados que comprenden el ángulo recto.*

**Demostración.** Basta ver que las áreas de los cuadrados son iguales a las áreas de los rectángulos:



Para esto basta mostrar que los cuatro triángulos tienen áreas iguales:

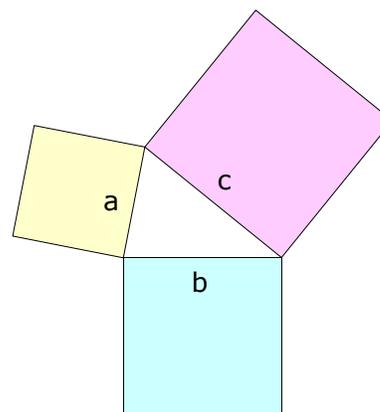


(Misma base y altura) (Congruentes por LAL) (misma base y altura) •

## Problemas

7. Demuestra el recíproco del Teorema de Pitágoras: Si los lados de un triángulo satisfacen  $a^2 + b^2 = c^2$  entonces el triángulo es rectángulo. (usando LLL, puede hacerse en 2 renglones)

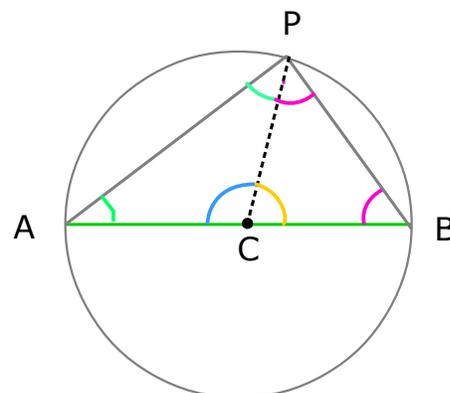
8. ¿Que pasa con la igualdad del Teorema de Pitágoras si el ángulo opuesto al lado C es menor que  $90^\circ$ ? ¿Y si es mayor a  $90^\circ$ ?



9. \* ¿Puedes demostrar que si dos triángulos tienen la misma área, entonces es posible recortar uno y usar los pedazos para armar el otro?

**Proposición.** Si  $AB$  es el diámetro de un círculo y  $P$  es otro punto del círculo, entonces el ángulo  $APB$  es recto.

**Demostración.** Si  $C$  es el centro de el círculo entonces los triángulos  $ACP$  y  $PCB$  son isósceles, por los tanto los ángulos verdes son iguales y los ángulos rosas son iguales.



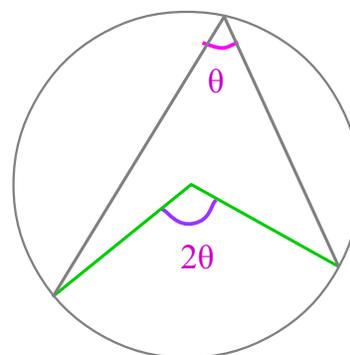
$$2 \angle \text{verde} + \angle \text{rojo} = 180 \quad \text{y} \quad 2 \angle \text{rojo} + \angle \text{verde} = 180$$

asi que  $2 \angle \text{verde} + 2 \angle \text{rojo} + \angle \text{verde} + \angle \text{rojo} = 180 + 180$

y como  $\angle \text{verde} + \angle \text{rojo} = 180$  entonces  $2 \angle \text{verde} + 2 \angle \text{rojo} = 180$

**Proposición 3:20** Los ángulos inscritos en un círculo son iguales a la mitad de los ángulos centrales.

**Demostración.** Si  $C$  es el centro del círculo, entonces los triángulos  $ACP$  y  $BCP$  son isósceles.



Hay dos casos: Que  $A$  y  $B$  estén en distintos lados del diámetro por  $P$ , o que estén del mismo lado.

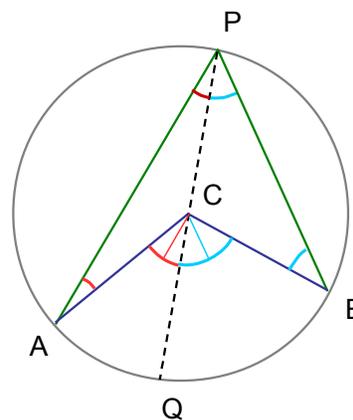
Caso 1. Como  $ACP$  es isósceles entonces  $\angle CAP = \angle APC$ . Como la suma de los ángulos internos es  $180^\circ$  entonces  $\angle ACP = 180^\circ - 2\angle APC$  y como  $\angle ACP + \angle ACQ = 180^\circ$  entonces  $\angle ACQ = 2\angle APC$ .

De manera análoga  $\angle BCQ = 2\angle BPC$ .

Como  $A$  y  $B$  están en distintos lados de  $PQ$  entonces

$$\angle APB = \angle APC + \angle BPC \quad \text{y}$$

$$\angle ACB = \angle ACQ + \angle BCQ = 2\angle APC + 2\angle BPC = 2\angle APB.$$

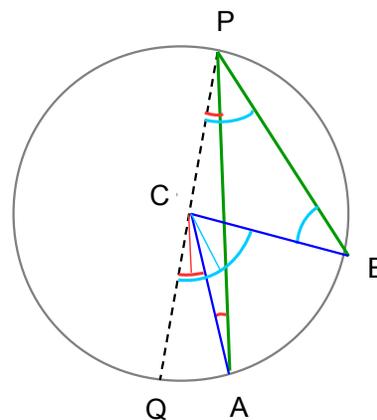


Caso 2. Igual que antes  $\angle ACQ = 2\angle APC$  y  $\angle BCQ = 2\angle BPC$ .

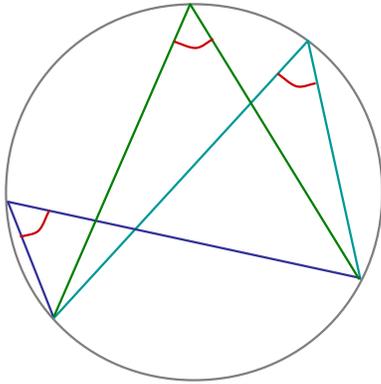
Como  $A$  y  $B$  están en el mismo lado de  $PQ$  entonces

$$\angle APB = \angle BPC - \angle APC \quad \text{y}$$

$$\angle ACB = \angle BCQ - \angle ACQ = 2\angle BPC - 2\angle APC = 2\angle APB. \quad \bullet$$



**Proposición 3:21** En un círculo, los ángulos inscritos que ven el mismo arco son iguales.



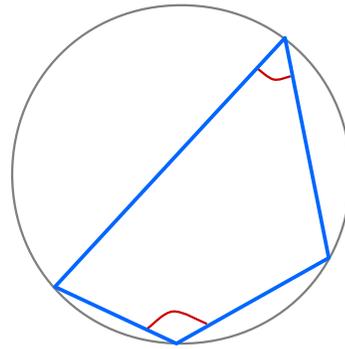
*Demostración.*

Los ángulos inscritos que ven el mismo arco son iguales a la mitad del mismo ángulo central. •

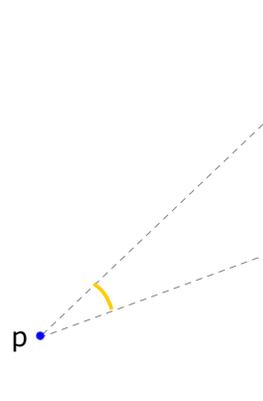
## Problemas

10. a. Demuestra que si un cuadrilátero se puede inscribir en un círculo entonces sus ángulos opuestos suman 2 ángulos rectos.

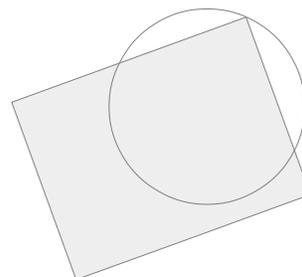
b. ¿Será cierto el recíproco? Es decir ¿Si los ángulos opuestos de un cuadrilátero suman dos rectos entonces el cuadrilátero se puede inscribir en un círculo?



11. ¿Donde están todos los puntos de una cancha de futbol desde donde ángulo de disparo a la portería es el mismo?



12. Muestra como hallar el centro de un círculo usando una hoja de papel (sin medir)



## Problemas de repaso.

13. Demuestra que por cada punto fuera de una recta pasa solamente una paralela a la recta.
14. Demuestra que si dos rectas L y M se cruzan, entonces cualquier otra recta del plano cruza a L o cruza a M.
15. ¿El triángulo con lados 10, 15 y 18 es un triángulo rectángulo?
17. Demuestra que si se dibujan 3 triángulos equiláteros en los lados de un triángulo rectángulo, la suma de las áreas de 2 triángulos es el área del tercer triángulo.
- 18.\* Demuestra que si 2 rectángulos tienen la misma área, entonces es posible cortar a uno en triangulitos y usarlos para armar el otro.
19. Esta es una "demostración" muy convincente de que todos los triángulos son equiláteros.  
<https://www.youtube.com/watch?v=Yajonhixy4g> (en ingles)  
¿Puedes hallar el error?