Un **lugar geométrico** es un conjunto de puntos del plano (o del espacio) con alguna propiedad particular.

Ejemplos:

- Los puntos del plano que están a la misma distancia de un punto fijo forman un círculo.
- Los puntos del plano que equidistan de dos puntos fijos forman una recta.

Al usar coordenadas muchas propiedades geométricas pueden traducirse a propiedades algebraicas, de modo que un lugar geométrico corresponde al conjunto de soluciones de una ecuación (en 2 o 3 variables). Recíprocamente, el conjunto de soluciones de una ecuación en 2 o 3 variables puede representarse como un lugar geométrico en el plano o en el espacio.

Ejemplo. Los puntos del plano que están alineados con (1,2) y (4,3) son las soluciones de la ecuación $3y-x=5$.

Ejemplo. Las parejas de números reales tales que el cuadrado del primero mas el cuadrado del segundo suman 4 forman un círculo de radio 2.

Los conjuntos de puntos aislados son lugares geométricos de dimensión 0, las curvas son ejemplos de lugares geométricos de dimensión 1, y las regiones bordeadas por curvas son lugares geométricos de dimensión 2.

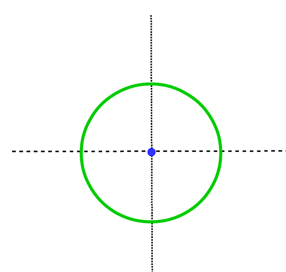
Los conjuntos de soluciones de ecuaciones en el plano son usualmente curvas, pero pueden ser cosas mas raras, o puntos aislados, o el vacío.

Ejemplo.

El conjunto de soluciones de la ecuación $x^2+y^2=1$ es un círculo.

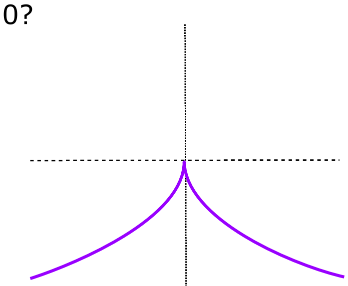
El conjunto de soluciones de la ecuación $x^2+y^2=0$ es un punto.

El conjunto de soluciones de la ecuación $x^2+y^2=1$ es el vacío.



Ejemplo ¿Como se verá el conjunto de soluciones de la ecuación $x^2+y^3=0$?

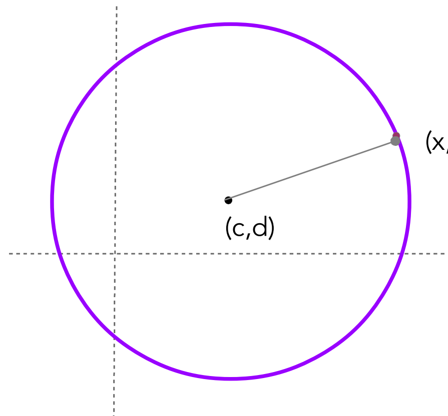
El punto (0,0) es una solución y hay muchas otras soluciones:
para cada valor de x hay dos valores de y que la satisfacen:
$y=\pm\sqrt[3]{x^2}$ pero todas las soluciones tienen coordenada $y\leq 0$.
Si graficamos las soluciones se ven mas o menos así:



A los lugares geométricos mas simples, que son las líneas rectas, les corresponden las ecuaciones mas simples, que son las de la forma $Ax+By=C$. Vamos a ver las ecuaciones de lugares geométricos un poco mas complicados.

## Círculos

Los círculos son las curvas formadas por los puntos del plano que están a la misma distancia de un punto fijo (el centro del círculo).




La distancia del punto $(x,y)$ al punto $(c,d)$ es $\sqrt{(x-c)^2+(y-d)^2}$

Así que el círculo de radio r y centro en $(c,d)$

tiene ecuación

$$\boxed{(x-c)^2+(y-d)^2 = r^2}$$

Ejemplo. El círculo de radio 5 con centro en el punto $(2,-1)$ tiene ecuación $(x-2)^2+(y+1)^2 = 5^2$ que también puede escribirse $x^2-4x+4+y^2+2y+1= 25$ y se simplifica a $x^2+y^2-4x+2y = 20$

Ejercicio. ¿Que ecuación tiene el círculo con centro en el punto $(1,3)$ y que pasa por $(2,-1)$?

El radio es $r=\sqrt{(1-2)^2+(3+1)^2} = \sqrt{17}$ así que la ecuación es

$(x-1)^2+(y-3)^2 = 17$

$x^2+y^2-2x-6y = 7$

Lema. Las ecuaciones de la forma $x^2+y^2+Ax+By = C$ corresponden a círculos, puntos o el vacío.

*Demostración.* Podemos reescribir la ecuación en la forma de la ecuación de un círculo reacomodando los términos y completando los cuadrados

$x^2+Ax+ \qquad +y^2+By+ \qquad = C$

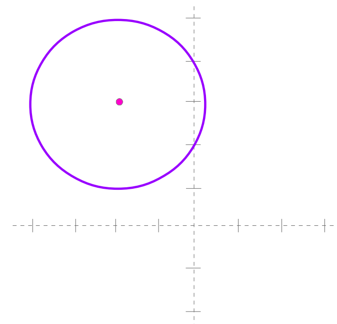
$x^2+Ax+(A/2)^2+y^2+By+(b/2)^2 = C+A^2/4+b^2/4$

$(x+A/2)^2+(y+B/2)^2 = C+A^2/4+B^2/4$

que es un círculo con centro en $(-A/2,-B/2)$ si $C+A^2/4+B^2/4>0$, es un punto si $C+A^2/4+B^2/4=0$ y es el vacío si $C+A^2/4+B^2/4<0$. •

Ejercicio. ¿La ecuación $x^2+y^2+4x-6y = -8$ corresponde a un círculo, o a un punto o al vacío?

Hay que reescribir la ecuación para que se vea de la forma $(x-c)^2+(y-d)^2 = r^2$



$x^2+4x+ \quad +y^2-6y+ \quad = -8$

$x^2+4x+4 \ +y^2-6y+9 = -8+4+9$

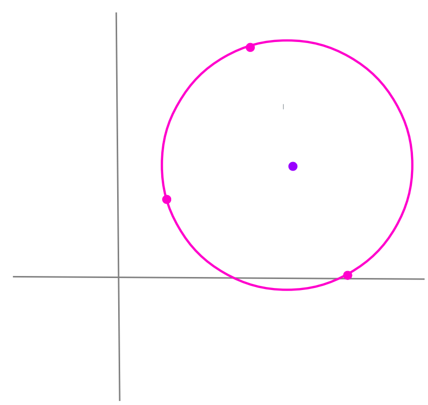
$(x+2)^2 + (y-3)^2 = 5$

así que es un círculo con centro en $(-2,3)$ y radio $\sqrt{5}$.

Ejemplo. ¿Cual es la ecuación del círculo que pasa por los puntos (1,2), (3,6) y (5,0)?

Podemos hacerlo de varias maneras:

1. Podemos empezar hallando el centro $(c,d)$



que debe estar a la misma distancia de los 3 puntos

$(c-1)^2+(d-2)^2 = (c-3)^2+(d-6)^2 = (c-5)^2+(d-0)^2$

$c^2-2c+1+d^2-4d+4 = c^2-6c+9+d^2-12d+36 = c^2-10c+25+d^2$

$-2c+1-4d+4 = -6c+9-12d+36 =-10c+25$

$4c+8d = 40 \qquad 4c-12d = -20$

$20d = 60 \qquad d = 3$

$4c+24 = 40 \qquad c = 4$ así que el centro está en $(4,3)$

el radio es $\sqrt{(4-1)^2+(3-2)^2} = \sqrt{10}$

la ecuación es $(x-4)^2+(y-3)^2 = 10$

2. También podemos hallar directamente los coeficientes de la ecuación $x^2+y^2+Ax+By = C$, sabiendo que los 3 puntos deben satisfacerla:

$1^2+2^2+A1+B2=C \rightarrow A+2B+5=C \rightarrow A+2B+5=5A+25 \rightarrow -4A+2B=20 \rightarrow 10A=-80 \qquad A=-8$

$3^2+6^2+A3+B6=C \rightarrow 3A+6B+45=C \rightarrow 3A+6B+45=5A+25 \rightarrow -2A+6B=-20 \rightarrow -10B=60 \qquad B=-6$

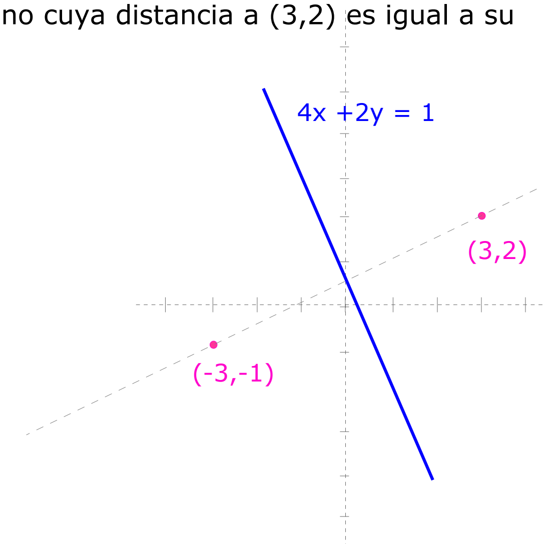
$5^2+0^2+A5+B0=C \qquad 5A+25=C \qquad\qquad C=-15$

así que la ecuación es $x^2+y^2-8x-6y = -15$ (que es equivalente a $(x-4)^2+(y-3)^2 = 10$)

Un problema común en geometría consiste en averiguar como se ve el conjunto de puntos del plano que cumplen una condición dada, esto a veces puede hacerse usando ecuaciones.

Pregunta: ¿Cual será el lugar geométrico de los puntos del plano que están a la misma distancia de un punto P y de otro punto Q? ¿Y cual será el lugar geométrico de los puntos del plano cuya distancia a un punto P es el doble de su distancia a otro punto Q?

Ejemplo. ¿Cual es el lugar geométrico de los puntos del plano cuya distancia a (3,2) es igual a su distancia a (-3,-1)?




$$\sqrt{(x-3)^2+(y-2)^2} = \sqrt{(x+3)^2+(y+1)^2}$$

$$(x-3)^2+(y-2)^2 = (x+3)^2+(y+1)^2$$

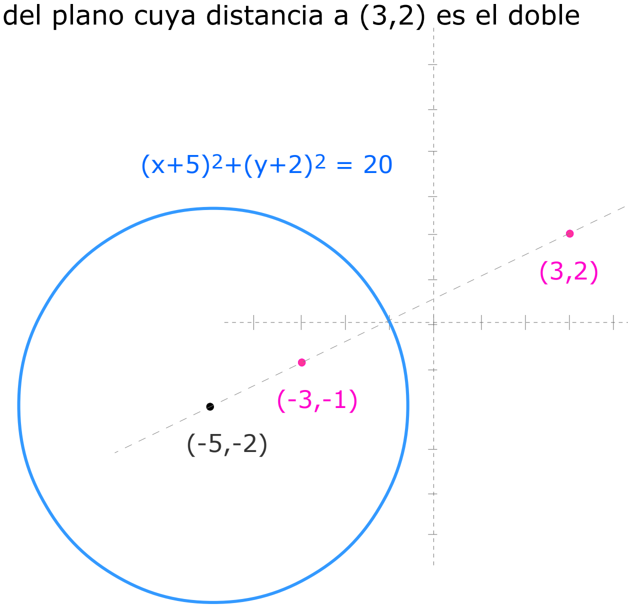
$$x^2-6x+9+y^2-4y+4 = x^2+6x+9+y^2+2y+1$$

$$-6x-4y+13 = 6x+2y+10$$

$-12x-6y = -3$ o sea $4x +2y = 1$

y las soluciones de esta ecuación forman una recta.

Ejemplo. ¿Cual es el lugar geométrico de los puntos del plano cuya distancia a (3,2) es el doble de su distancia a (-3,-1)?




$$\sqrt{(x-3)^2+(y-2)^2} = 2\sqrt{(x+3)^2+(y+1)^2}$$

$$(x-3)^2+(y-2)^2 = 4(x+3)^2+4(y+1)^2$$

$$x^2-6x+9+y^2-4y+4 = 4x^2+24x+36+4y^2-8y+4$$

$$-3x^2-3y^2-30x-12y = 27$$

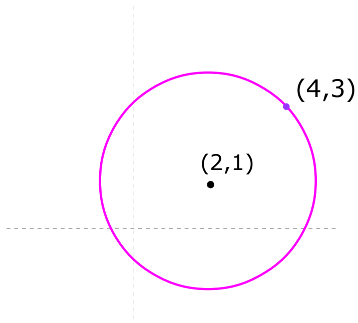
$x^2+y^2+10x+4y = -9$ que se puede reescribir

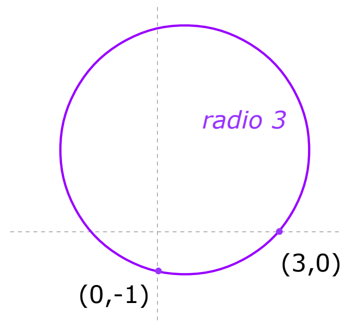
$(x+5)^2+(y+2)^2 = 20$

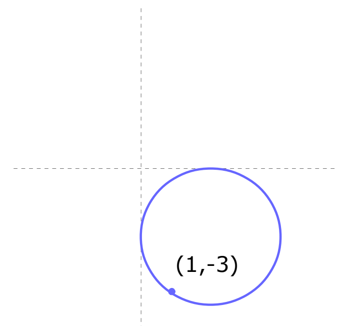
es un círculo con centro en (-5,-2) y radio $\sqrt{20}$

## Problemas.

1. Da las ecuaciones de estos círculos:




2. ¿A que corresponden la siguientes ecuaciones? Dibújalas.

   a. $x^2 + y^2 - 2x = 0$  b. $2x^2 + 2y^2 + 4x + 8y = -10$  c. $x^2 + y^2 = x + y$

3. Una escalera está recargada en una pared y enmedio de la escalera está sentado un gato. Si la escalera se empieza a resbalar ¿que trayectoria seguirá el gato hasta llegar al suelo?

4. Encuentra las ecuaciones de 3 círculos que pasen por los puntos (1,2) y (4,3)

5. Encuentra el centro y el radio del círculo que pasa por los puntos (1,3) , (2,0) y (-1,-1)

6. Que tienen en común todas las ecuaciones de círculos $x^2 + y^2 + Ax + By = C$

   a. con centro en (1,2) ?

   b. que pasan por el punto (3,4) ?

   c. que tienen radio 6 ?

   (en cada caso da la relación que hay entre los coeficientes A, B y C)

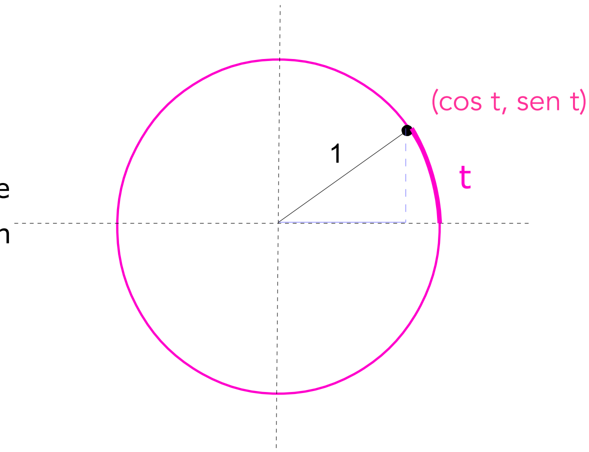
7. ¿Cual es el lugar geométrico de los puntos del plano cuya distancia al punto (0,0) es un tercio de su distancia al punto (4,0)? Encuentra la ecuación y di exactamente a que curva corresponde.

## Parametrizaciones de curvas

Si pensamos en las curvas como las trayectorias de puntos en movimiento, entonces podemos describir a una curva dando las coordenadas del punto en cada tiempo t. Esta es una **parametrización** de la curva.

La misma curva tiene muchas parametrizaciones distintas, ya que estas no solo dependen de la trayectoria sino del momento en que pasa por cada punto.

Podemos parametrizar a los círculos usando las funciones trigonométricas, que en principio están definidas solo para ángulos entre 0 y $\pi/2$ radianes, pero que pueden extenderse fácilmente a todos los valores de t: definiendo $\cos(t)$ y $\text{sen}(t)$ como las coordenadas de un punto en el circulo unitario donde t es la longitud del arco de circulo desde el eje x hasta el punto.

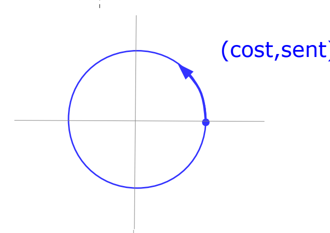



Así que para todo valor de t, $\cos^2(t)+\text{sen}^2(t) = 1$

Ejemplos.

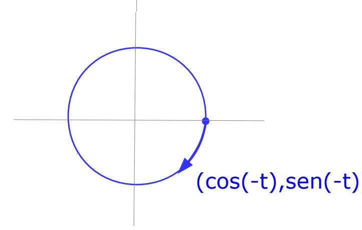
$a(t)= (\cos t, \text{sen } t)$ satisfacen la ecuación: $x^2+y^2 = 1$

a(t) recorre un circulo de radio 1 en dirección contraria a las manecillas del reloj, con rapidez constante 1 y empezando en (1,0).



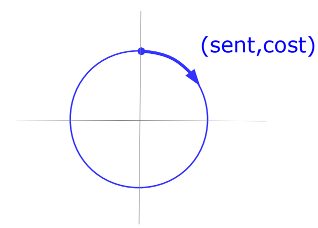

$b(t)=(\cos(-t), \text{sen}(-t))$ también satisfacen la ecuación: $x^2+y^2 = 1$

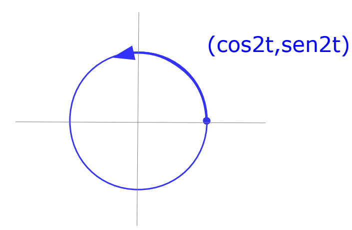
b(t) se obtiene de a(t) cambiando el signo de t (que equivale a hacer el mismo recorrido que a(t) pero en sentido opuesto).




$c(t)=(\text{sen } t, \cos t)$ también satisfacen la ecuación: $x^2+y^2 = 1$

c(t) se obtiene de a(t)=(cos t,sen t) intercambiando los papeles de x y y, (lo que equivale a reflejar en la linea x=y). Así que b(t) recorre el circulo unitario en el sentido de las manecillas del reloj, con rapidez constante 1 y empezando desde (0,1).

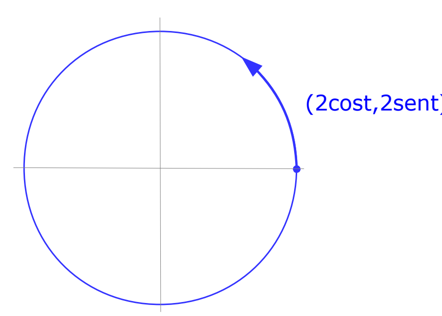



$e(t)=(\cos 2t, \text{sen } 2t)$

$x=\cos 2t \quad y=\text{sen } 2t \qquad x^2+y^2 = \cos t^2(2t)+\text{sen}t^2(2t)= 1$

e(t) se obtiene de a(t) duplicando t, así que e(t) recorre el circulo unitario con rapidez 2.




$f(t)=(2\cos t, 2\text{sen } t)$

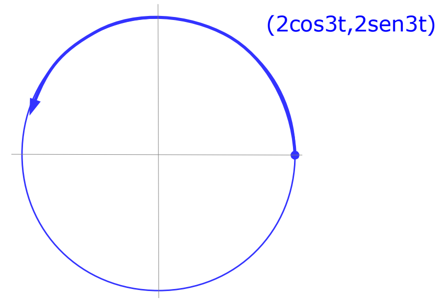
$x=2\cos t \qquad y=2\text{sen } t \qquad x^2+y^2 = 4\cos t^2 t+4\text{sen}t^2 t = 4$

f(t) se obtiene duplicando el tamaño de a(t), así que f(t) recorre el circulo de radio 2 con rapidez constante 2.

g(t)=(2cos(3t)), 2sen(3t))

x=2cos(3t)      y=2sen(3t)      $x^2+y^2$ = 4cost$^{2(}$3t)+4sent$^2$(3t) = 4

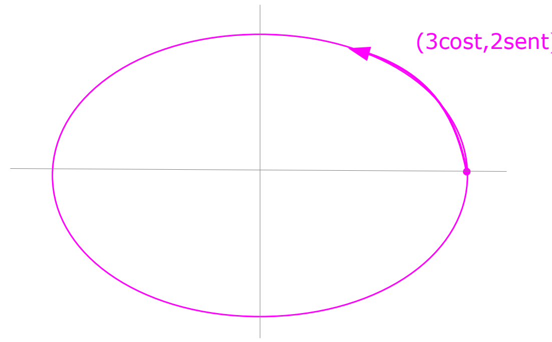
g(t) se obtiene de a(t) triplicando t y luego duplicando el tamaño, así que f(t) recorre el circulo de radio 2 con rapidez 6.




h(t)=(3 cos t, 2 sen t)

satisface la ecuación $(x/3)^2+(y/2)^2 = 1$,

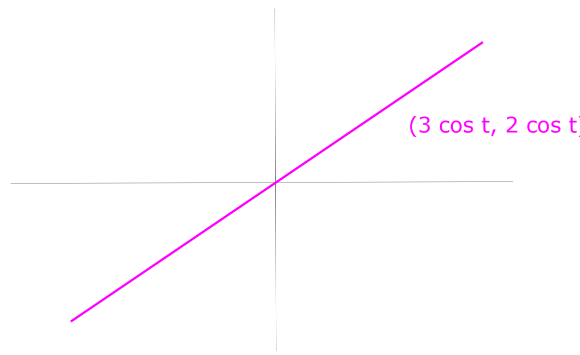
se obtiene estirando a(t)=(cost,sent) horizontalmente al triple y verticalmente al doble, así que h(t) describe un circulo estirado.




h(t)=(3cos t, 2cos t)

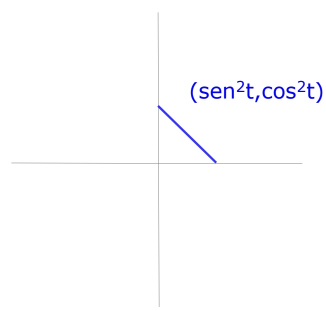
satisface la ecuación 2x =3y

así que se encuentra en una linea recta, pero como sent solo toma valores entre -1 y 1, la trayectoria solo cubre un intervalo de la recta.



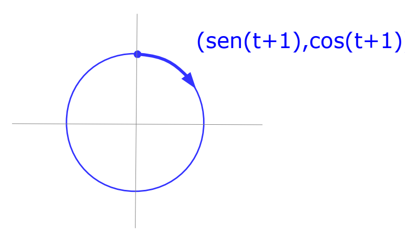

z(t)=(sen$^2$t,cos$^2$t)      satisface la ecuación x+y=1

así que la trayectoria está en una recta (pero no es toda la recta, porque sen(t) solo varia entre 0 y 1)



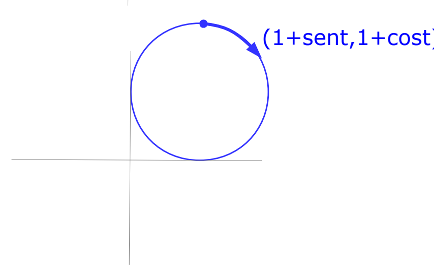

d(t)=(sen(1+t),1+cos(1+t))    satisface la ecuación:    $x^2+y^2 = 1$

se obtiene de a(t)=(sen(t),1+cos(t))  incrementando t por 1, lo que equivale a adelantarse el recorrido

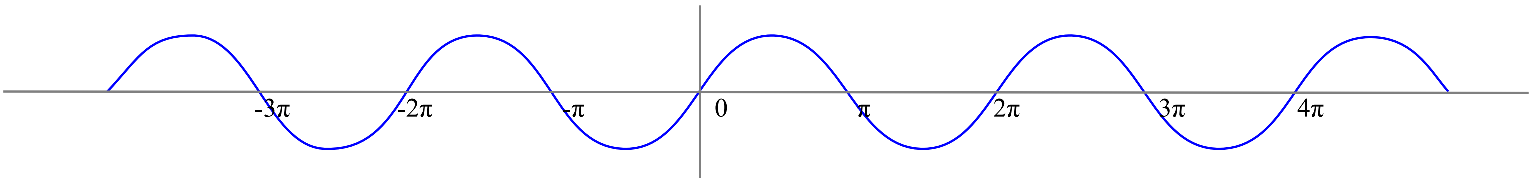



*e(t)*=(1+sent,1+cost)  satisface la ecuación $(x-1)^2+(y-1)^2 = 1$

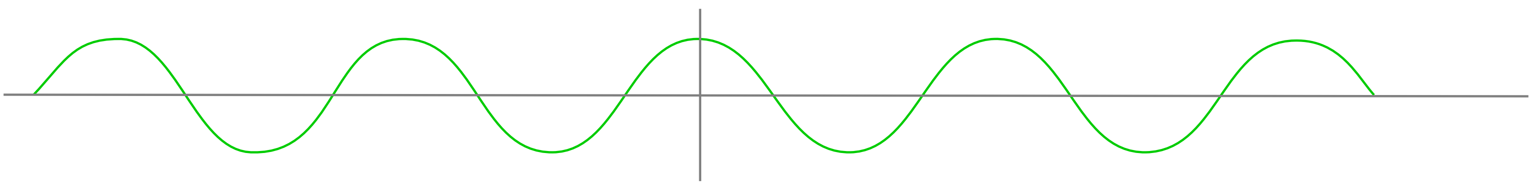
se obtiene de c(t) sumándole el vector(1,1), así que e(t) recorre el circulo de radio 1 centrado en (1,1) con rapidez constante 1



La curva s(t) = (t,sent) describe un movimiento ondulatorio: la altura de un punto que gira alrededor del circulo unitario con rapidez constante 1:

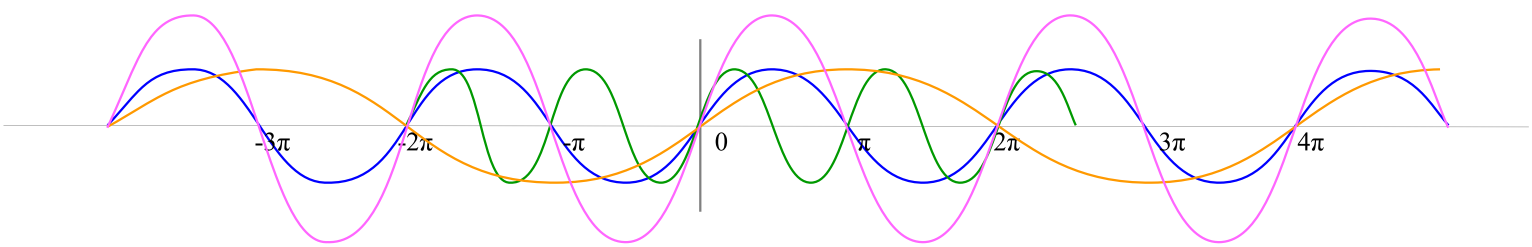



La curva c(t) = (t,cost) se ve igual, pero desplazada, ya que cos(t)=sen(t+$\pi/2$):



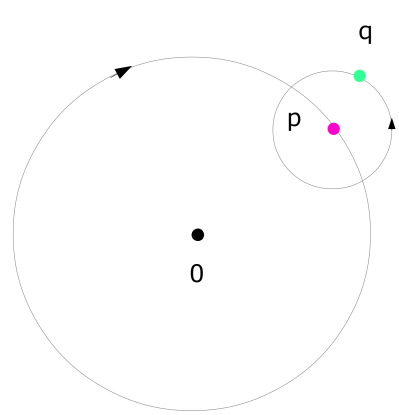
Ejemplo. La gráfica muestra la diferencias entre las siguientes trayectorias

p(t) = (t, 2sen t)    q(t) = (t, sen 2t)    r(t) = (2t, sen t)    s(t) = (2t, sen 2t)



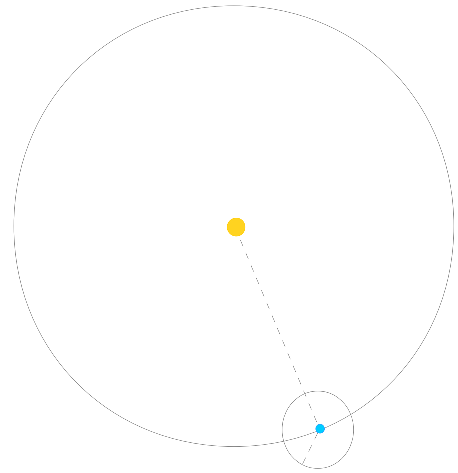

Combinando vectorialmente movimientos simples pueden obtenerse movimientos complicados:

Ejemplo. Un punto p gira alrededor del circulo de radio 3 con centro en el origen en la dirección de las manecillas del reloj con rapidez constante 3 mientras que el punto q gira alrededor de p en un circulo de radio 1 en dirección contraria a las manecillas del reloj con rapidez constante 2. ¿Cual es la posición del punto q respecto al origen en el instante t?




La posición de p respecto al origen esta dada por p(t)=(3sent, 3cost).
Y la posición de q respecto a p esta dada por r(t)=(cos2t,sen2t),
así que la posición de q respecto al origen esta dada por
q(t) = p(t)+r(t) = (3sent+cos2t, 3cost+sen2t).

## Ejemplo



La trayectoria de la Luna alrededor del Sol se obtiene sumando la trayectoria de la Luna alrededor de la Tierra con la trayectoria de la Tierra alrededor del Sol.

La trayectoria de Marte vista desde la tierra se obtiene restandole a la trayectoria de Marte alrededor del Sol la trayectoria de la Tierra alrededor del Sol.

## Problemas.

8. ¿Como se verán las siguientes trayectorias en el plano? ¿Que ecuaciones satisfacen?

a. $p(t) = (\text{sen}t, t)$ b. $q(t) = (2+\text{sen } t, 3-\cos t)$ c. $r(t) = (4+\text{sen } t, 5-\text{sen } t)$

d. $r(t) = (3\cos t, 2\text{sen } t)$ e. $s(t) = (3\cos t, 2\cos t)$

9. Muestra que estas 3 trayectorias cumplen la misma ecuación cartesiana:

$p(t) = (1-t, -2t)$ $q(t) = (t^2, 2t^2-2)$ $r(t) = (1+\text{sen}t, 2\text{sen}t)$

¿Que dice esto sobre las trayectorias?

10. Parametriza la trayectoria de un punto que gira en un círculo de radio 3 y centro en (1,2), partiendo del punto mas bajo y moviéndose en la dirección contraria a las manecillas del reloj con rapidez constante 2.

11. Encuentra parametrizaciones aproximadas de las órbitas de la Tierra y de Marte alrededor del Sol y la Luna alrededor de la Tierra (usando las escalas y los periodos de las órbitas correctas!). Y usalas para graficar a escala, usando la computadora:

a. La trayectoria de la Luna vista desde el Sol.
b. La trayectoria de Marte vista desde la Tierra.
c. La trayectoria de la Tierra vista desde Marte.

12. Gráfica las siguientes trayectorias en la computadora para $0 \leq t \leq 2\pi$ a.

a. $p(t) = (\cos t, \text{sen } 2t)$ b. $q(t) = (\text{sen } t, \cos 2t)$

c. $r(t) = (\text{sen } 3t, \cos 4t)$ d. $s(t) = (\cos 3t, \cos 5t)$