

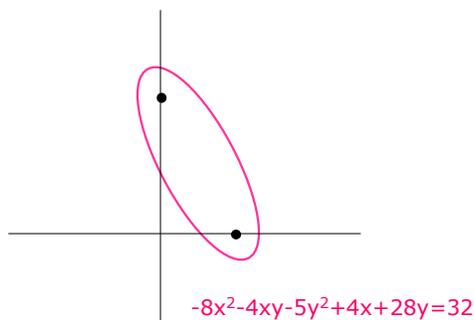
La ecuación general de segundo grado.

Ya sabemos que las cónicas cuyos ejes son paralelos a los ejes coordenados tienen ecuaciones de la forma $Ax^2+By^2+Cx+Dy=E$, y de estas ecuaciones podemos deducir su forma y posición. Pero cuando las cónicas tienen otros ejes sus ecuaciones son más complicadas.

Ejemplos.

- ¿Qué ecuación cumplen los puntos del plano cuyas distancias a $(1,0)$ y $(0,2)$ suman 3?

$$\begin{aligned} \sqrt{(x-1)^2+y^2} + \sqrt{x^2+(y-2)^2} &= 3 \\ \sqrt{(x-1)^2+y^2} &= 3 - \sqrt{x^2+(y-2)^2} \\ (x-1)^2+y^2 &= 9 - 6\sqrt{x^2+(y-2)^2} + x^2+(y-2)^2 \\ (x-1)^2+y^2 - 9 - x^2 - (y-2)^2 &= -6\sqrt{x^2+(y-2)^2} \\ -2x + 4y - 4 &= -6\sqrt{x^2+(y-2)^2} \\ x - 2y + 2 &= 3\sqrt{x^2+(y-2)^2} \\ (x-2y+2)^2 &= 9[x^2+(y-2)^2] \\ x^2 + 4y^2 + 4 - 4xy + 4x - 8y &= 9x^2 + 9y^2 - 36y + 36 \\ -8x^2 - 4xy - 5y^2 + 4x + 28y &= 32 \end{aligned}$$



- ¿Cuál es la ecuación de la parábola formada por los puntos cuya distancia a $(1,1)$ es igual a su distancia a la recta $x+y=0$?

La distancia de (x,y) a $(1,1)$ es $\sqrt{(x-1)^2+(y-1)^2}$

La distancia de (x,y) a la recta es $|x+y-0|/\sqrt{1^2+1^2} = |x+y|/\sqrt{2}$

La igualdad de las distancias se expresa como

$$\sqrt{(x-1)^2+(y-1)^2} = \frac{1}{\sqrt{2}}(x+y)$$

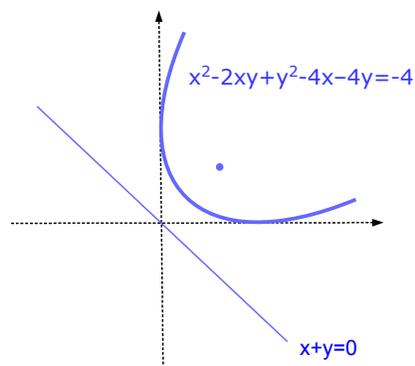
que elevada al cuadrado queda

$$(x-1)^2+(y-1)^2 = \frac{1}{2}(x+y)^2$$

y expandiendo y simplificándola queda

$$\frac{1}{2}x^2 - xy + \frac{1}{2}y^2 - 2x - 2y = -2$$

$$x^2 - 2xy + y^2 - 4x - 4y = -4$$



Procediendo como en los ejemplos anteriores, no es difícil probar que todas las cónicas en el plano tienen ecuaciones de segundo grado, pero estas ecuaciones pueden ser complicadas.

¿Será posible saber la forma de la curva a partir de la ecuación? ¿Y será cierto que todas las ecuaciones de segundo grado corresponden a cónicas o a cónicas degeneradas?

Para contestar estas preguntas es mejor proceder al revés: viendo como cambian las ecuaciones de las curvas al girarlas. Para esto necesitamos ver como cambian las coordenadas de sus puntos. Observar que las rotaciones con centro en el origen son transformaciones lineales (preservan la suma de vectores y el producto por escalares) así que para saber como cambian las coordenadas de los vectores al rotarlos basta saber como cambian los vectores básicos.

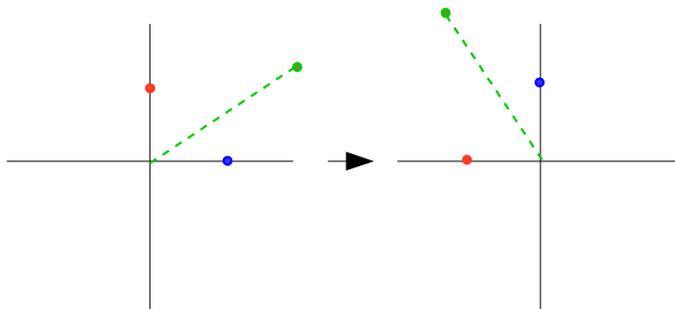
Ejemplos.

- ¿A donde va el punto (x,y) si lo giramos 90° alrededor del origen?

$$(1,0) \rightarrow (0,1)$$

$$(0,1) \rightarrow (-1,0)$$

$$(x,y) = x(1,0) + y(0,1) \rightarrow x(0,1) + y(-1,0) = (-y,x)$$

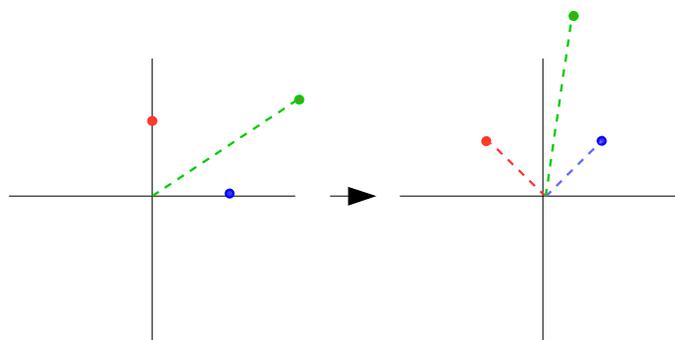


- ¿A donde va el punto (x,y) si lo giramos 45° alrededor del origen?

$$(1,0) \rightarrow (1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{2})$$

$$(0,1) \rightarrow (-1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{2})$$

$$(x,y) = x(1,0) + y(0,1) \rightarrow x(1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{2}) + y(-1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{2}) = (1/\sqrt{2}x - 1/\sqrt{2}y, 1/\sqrt{2}x + 1/\sqrt{2}y)$$

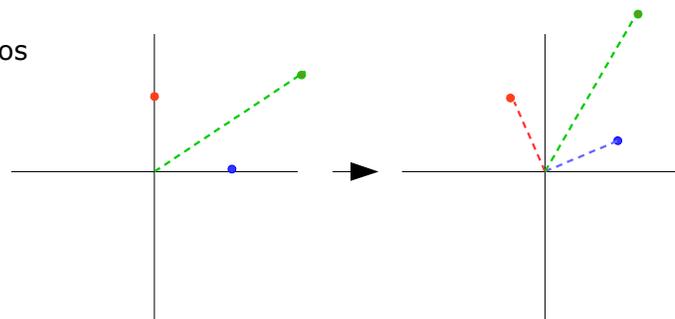


- ¿A donde va el punto (x,y) si lo giramos un ángulo θ alrededor del origen?

$$(1,0) \rightarrow (\cos\theta, \sin\theta)$$

$$(0,1) \rightarrow (-\sin\theta, \cos\theta)$$

$$(x,y) = x(1,0) + y(0,1) \rightarrow x(\cos\theta, \sin\theta) + y(-\sin\theta, \cos\theta) = (\cos\theta x - \sin\theta y, \sin\theta x + \cos\theta y)$$



- Si giramos 60° entonces $\cos 60^\circ = 1/2$ $\sin 60^\circ = \sqrt{3}/2$

$$(x,y) \rightarrow (1/2 x - \sqrt{3}/2 y, \sqrt{3}/2 x + 1/2 y)$$

Si al girar una curva las coordenadas (x,y) de sus puntos cambian a nuevas coordenadas (x',y') , entonces la ecuación original en x y y debe cambiar a una nueva ecuación en x' y y' . Para hallar la nueva ecuación basta reescribir la ecuación original en términos de las nuevas coordenadas.

Ejemplo. ¿Como cambia la ecuación de la parábola $y = x^2$ al rotarla 90° ?

La rotación de 90° está dada por $(x',y') = (-y,x)$

así que $x' = -y$, $y' = x$

por lo tanto $x = y'$, $y = -x'$

de modo que la ecuación $y = x^2$ se convierte en $-x' = y'^2$.

Ejemplo. ¿Como cambia la ecuación de la elipse $2x^2 + y^2 = 4$ al rotarla 45° ?

La rotación de 45° está dada por $(x',y') = (1/\sqrt{2}x - 1/\sqrt{2}y, 1/\sqrt{2}x + 1/\sqrt{2}y)$

Así que las nuevas coordenadas de los puntos son

$$x' = 1/\sqrt{2}x - 1/\sqrt{2}y$$

$$y' = 1/\sqrt{2}x + 1/\sqrt{2}y$$

Si despejamos x y y en términos de x' y y' queda

$$x = 1/\sqrt{2}x' + 1/\sqrt{2}y'$$

$$y = -1/\sqrt{2}x' + 1/\sqrt{2}y'$$

La ecuación $2x^2 + y^2 = 4$ cambia a

$$2(1/\sqrt{2}x' + 1/\sqrt{2}y')^2 + (-1/\sqrt{2}x' + 1/\sqrt{2}y')^2 = 4$$

$$2(1/2 x'^2 + x'y' + 1/2 y'^2) + (1/2 x'^2 - xy + 1/2 y'^2) = 4$$

$$3/2 x'^2 + x'y' + 3/2 y'^2 = 4$$

Ejemplo. ¿Como cambia la ecuación $2x^2 + y^2 = 4$ al hacer la rotación $(x',y') = (3/5x + 4/5y, 4/5x + 3/5y)$?

Las nuevas coordenadas son

$$x' = 3/5x + 4/5y \quad \Rightarrow \quad x = 3/5x' - 4/5y'$$

$$y' = -4/5x + 3/5y \quad \Rightarrow \quad y = 4/5x' + 3/5y'$$

La ecuación cambia a

$$2(3/5x' - 4/5y')^2 + (4/5x' + 3/5y')^2 = 4$$

$$2(9/25 x'^2 - 24/25 x'y' + 16/25 y'^2) + (16/25 x'^2 + 24/25 x'y' + 9/25 y'^2) = 4$$

$$34/25 x'^2 - 24/25 x'y' + 41/25 y'^2 = 4.$$

Veamos como cambia la ecuación general $Ax^2+Bxy+Cy^2+Dx+Ey=F$ al hacer una rotación:

Al rotar un ángulo θ las coordenadas de los puntos cambian así:

$$x' = x \cos\theta - y \sin\theta$$

$$y' = x \sin\theta + y \cos\theta$$

Para hacer las cuentas mas simples abreviaremos $c=\cos\theta$ y $s=\sin\theta$, entonces

$$x' = cx - sy \quad \Rightarrow \quad x = cx' + sy'$$

$$y' = sx + cy \quad \Rightarrow \quad y = -sx' + cy'$$

Si ahora sustituimos estos valores en la ecuación $Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey = F$ obtenemos

$$A(cx'+sy')^2 + B(cx'+sy')(-sx'+cy') + C(-sx'+cy')^2 + D(cx'+sy') + E(-sx'+cy') = F$$

expandiendo queda

$$A(c^2x'^2+2csx'y'+s^2y'^2) + B(-csx'^2+c^2x'y'-s^2x'y'+csy'^2) + C(s^2x'^2-2csx'y'+c^2y'^2) + D(cx'+sy') + E(-sx'+cy') = F$$

y reordenando los términos queda

$$(Ac^2-Bcs+Cs^2)x'^2 + (2Acs+Bc^2-Bs^2-2Ccs)x'y' + (As^2+Bcs+Cc^2)y'^2 + (Dc-Es)x' + (Ds+Ec)y' = F$$

que es una ecuación de la misma forma: $A'x'^2 + B'x'y' + C'y'^2 + D'x' + E'y' = F'$ donde los nuevos coeficientes son una combinación los coeficientes originales.

Teorema: Todas las ecuaciones de 2º grado: $Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey = F$ corresponden a cónicas (círculos, elipses, hipérbolas, o parábolas) o cónicas degeneradas (2 rectas, una recta, un punto o el vacío).

Demostración. Ya sabemos que todas las ecuaciones (sin término xy) $Ax^2 + Cy^2 + Dx + Ey = F$ corresponden a cónicas (o a cónicas degeneradas) con ejes de simetrías paralelos a los ejes de coordenadas.

Para ver que cada ecuación $Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey = F$ corresponde a una cónica, basta ver que hay alguna rotación que hace que la ecuación se convierta en $A'x'^2 + C'y'^2 + D'x' + E'y' = F'$ con $B' = 0$.

Al rotar la curva un ángulo θ los coeficientes de la ecuación cambian de modo que

$$B' = 2(A-C) \cos\theta \sin\theta - B(\cos^2\theta - \sin^2\theta)$$

$$= (A-C) \sin 2\theta - B \cos 2\theta \quad (\text{ya que } 2\cos\theta \sin\theta = \sin 2\theta \text{ y } \cos^2\theta - \sin^2\theta = \cos 2\theta)$$

Por lo tanto $B' = 0$ si $\cot 2\theta = \cos 2\theta / \sin 2\theta = (A-C)/B$.

Y hay un valor de θ para el que esto ocurre porque la cotangente toma todos los valores entre $-\infty$ y ∞ . •

De la prueba anterior se sigue que el número $(A-C)/B$ nos da la inclinación de la cónica.

Ejemplo. ¿Que cónica representa la ecuación $x^2 + 3xy + y^2 = 1$?

Aquí $A=1, B=3, C=1$ así que $(A-C)/B = (1-1)/3 = 0$

$\cot 2\theta = 0$ si $2\theta=90^\circ$ o sea $\theta=45^\circ$.

Si rotamos la curva 45° las coordenadas cambian

$$x' = \frac{1}{\sqrt{2}} x - \frac{1}{\sqrt{2}} y \quad \Rightarrow \quad x = \frac{1}{\sqrt{2}} x' + \frac{1}{\sqrt{2}} y'$$

$$y' = \frac{1}{\sqrt{2}} x + \frac{1}{\sqrt{2}} y \quad \Rightarrow \quad y = -\frac{1}{\sqrt{2}} x' + \frac{1}{\sqrt{2}} y'$$

la ecuación $x^2 + 3xy + y^2 = 1$ se convierte en

$$\left(\frac{1}{\sqrt{2}} x' + \frac{1}{\sqrt{2}} y'\right)^2 + 3\left(\frac{1}{\sqrt{2}} x' + \frac{1}{\sqrt{2}} y'\right)\left(-\frac{1}{\sqrt{2}} x' + \frac{1}{\sqrt{2}} y'\right) + \left(-\frac{1}{\sqrt{2}} x' + \frac{1}{\sqrt{2}} y'\right)^2 = 1$$

$$\left(\frac{1}{2} x'^2 + x'y' + \frac{1}{2} y'^2\right) + 3\left(-\frac{1}{2} x'^2 + \frac{1}{2} y'^2\right) + \left(\frac{1}{2} x'^2 - x'y' + \frac{1}{2} y'^2\right) = 1$$

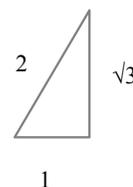
y simplificando queda

$$-\frac{1}{2} x'^2 + \frac{5}{2} y'^2 = 1 \quad \text{que es una hipérbola}$$

Ejemplo. ¿Que cónica representa la ecuación $3x^2 + \sqrt{12}xy + y^2 = 1$?

Aquí $A=3, B=\sqrt{12}, C=1$ así que $\cot 2\theta = (A-C)/B = (3-1)/\sqrt{12} = 1/\sqrt{3}$

así que $2\theta=60^\circ$ o sea 30° . Como $\cos 30^\circ = \sqrt{3}/2$ y $\sin 30^\circ = 1/2$



si rotamos la curva 30° las coordenadas quedan

$$x' = \frac{\sqrt{3}}{2} x - \frac{1}{2} y \quad \Rightarrow \quad x = \frac{\sqrt{3}}{2} x' + \frac{1}{2} y'$$

$$y' = \frac{1}{2} x + \frac{\sqrt{3}}{2} y \quad \Rightarrow \quad y = -\frac{1}{2} x' + \frac{\sqrt{3}}{2} y'$$

la ecuación $3x^2 + \sqrt{12}xy + y^2 = 1$ se convierte en

$$3\left(\frac{\sqrt{3}}{2} x' + \frac{1}{2} y'\right)^2 + \sqrt{12}\left(\frac{\sqrt{3}}{2} x' + \frac{1}{2} y'\right)\left(-\frac{1}{2} x' + \frac{\sqrt{3}}{2} y'\right) + \left(-\frac{1}{2} x' + \frac{\sqrt{3}}{2} y'\right)^2 = 1$$

$$3\left(\frac{3}{4} x'^2 + \frac{\sqrt{3}}{2} x'y' + \frac{1}{4} y'^2\right) + \sqrt{12}\left(-\frac{\sqrt{3}}{4} x'^2 - \frac{2}{4} x'y' + \frac{\sqrt{3}}{4} y'^2\right) + \left(\frac{3}{4} x'^2 - \frac{\sqrt{3}}{2} x'y' + \frac{3}{4} y'^2\right) = 1$$

$$\frac{6}{4} x'^2 + \frac{10}{4} y'^2 = 1 \quad \text{que es una elipse.}$$

Invariantes.

Al rotar un ángulo θ la ecuación:

$$Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey = F$$

se convierte en:

$$A'x'^2 + B'x'y' + C'y'^2 + D'x' + E'y' = F$$

donde

$$A' = A \cos^2 \theta - B \cos \theta \sin \theta + C \sin^2 \theta$$

$$B' = 2(A-C) \cos \theta \sin \theta - B (\cos^2 \theta - \sin^2 \theta)$$

$$C' = A \sin^2 \theta + B \sin \theta \cos \theta + C \cos^2 \theta$$

$$D' = D \cos \theta - E \sin \theta$$

$$E' = D \sin \theta + E \cos \theta$$

Aunque los coeficientes de la primera ecuación de mezcla de una manera complicada para dar los coeficientes de la segunda, la forma de la curva no cambia, así que debe haber algo en las ecuaciones que no cambie.

Afirmación:

- $A' + C' = A + C$
- $D'^2 + E'^2 = D^2 + E^2$
- $4A'C' - B'^2 = 4AC - B^2$

Demostración. Tarea (hay que hacer las cuentas). •

Estas cantidades invariantes contienen información sobre la forma de la curva, que es independiente de las coordenadas, y que permiten saber como quedara la ecuación después hacer de la rotación *sin tener hacer las cuentas*.

Ejemplo. ¿Qué forma tiene la curva determinada por la ecuación $x^2 + 2xy + 3y^2 = 4$?

Aquí $A=1$, $B=2$, $C=3$

Si la rotamos para que $B'=0$

$$A'+C' = A+C = 4 \quad 4A'C' = 4AC - B^2 = 8 \quad (\text{ya que } B' = 0)$$

así que

$$C' = 4-A' \quad 4A'(4-A') = 8$$

por lo tanto

$$4A'^2 - 16A' + 8 = 0 \quad A' = 2 \pm \sqrt{2} \quad C' = 2 \mp \sqrt{2}$$

y la ecuación queda

$$(2+\sqrt{2})x'^2 + (2-\sqrt{2})y'^2 = 4 \quad \text{es una elipse}$$

Ejemplo. ¿Qué forma tiene la curva determinada por la ecuación $x^2 + 3xy + 2y^2 = 4$?

Aquí $A=1$, $B=3$, $C=2$

Si la rotamos para que $B'=0$

$$A'+C' = A+C = 3 \quad 4A'C' = 4AC - B^2 = -1 \quad (\text{ya que } B' = 0)$$

así que

$$C' = 3-A' \quad 4A'(3-A') = -1$$

Por lo tanto

$$4A'^2 - 12A' - 1 = 0 \quad A' = 3 \pm \sqrt{10} \quad C' = 3 \mp \sqrt{10}$$

y la ecuación queda

$$(3+\sqrt{10})x'^2 + (3-\sqrt{10})y'^2 = 4 \quad \text{es una hipérbola}$$

El discriminante.

Al hacer una rotación la ecuación $Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey = F$ se convierte en

$$A'x'^2 + B'x'y' + C'y'^2 + D'x' + E'y' = F \quad \text{donde} \quad 4A'C' - B'^2 = 4AC - B^2$$

Este numero es el **discriminante** de la ecuación.

Cuando $B' = 0$ el discriminante es $4A'C'$ y la forma de la curva $A'x'^2 + C'y'^2 + D'x' + E'y' = F$ depende primordialmente de A' y C' (en las elipses A' y C' tienen el mismo signo, en las hipérbolas A' y C' tienen signo contrario y en las parábolas A' o C' son 0). Para reconocer entre elipses, hipérbolas o parábolas basta entonces saber el *signo* de $A'C'$, que es el signo del discriminante de la ecuación.

Ejemplos.

¿Qué forma tiene la curva determinada por la ecuación $x^2 + 2xy + 3y^2 = 4$?

$$4AC - B^2 = 4 \cdot 1 \cdot 3 - 2^2 = 8 > 0 \quad \text{así que debe ser una elipse, un punto o el vacío}$$

En este caso es una elipse.

$$(x^2 + 2xy + 3y^2 = 0 \text{ es un punto})$$

$$(x^2 + 2xy + 3y^2 = -1 \text{ es el vacío})$$

¿Qué forma tiene la curva determinada por la ecuación $x^2 + 3xy + 2y^2 = 4$?

$$4AC - B^2 = 4 \cdot 1 \cdot 2 - 3^2 = -1 < 0 \quad \text{así que debe ser una hipérbola o 2 rectas que se intersectan.}$$

En este caso es una hipérbola.

$$(x^2 + 3xy + 2y^2 = 0 \text{ es un par de rectas: } (x+y)(x+2y) = 0)$$

¿Qué forma tiene la curva determinada por la ecuación $x^2 + 2xy + y^2 = 4$?

$$4AC - B^2 = 4 \cdot 1 \cdot 1 - 2^2 = 0 \quad \text{debe ser una parábola, o una recta, o 2 rectas paralelas.}$$

Se puede escribir como $(x+y)^2 = 4$, así que es un par de rectas: $x+y = 2$, $x+y = -2$.

$$(x^2 + 2xy + y^2 = 0 \text{ es una recta: } (x+y)^2 = 0)$$

Problemas

1. ¿Que ecuaciones cuadráticas cumplen

- La elipse formada por los puntos cuyas sus distancias a $(-1,-1)$ y a $(1,1)$ suman 3?
- La hipérbola formada por los puntos cuyas distancias a $(-1,-1)$ y a $(1,1)$ difieren por 2?

2. Si se hace la rotación $(x',y') = (\frac{3}{5}x+\frac{4}{5}y, -\frac{4}{5}x+\frac{3}{5}y)$

- ¿Cual es la imagen de la recta $p(t)=(1+3t,3-2t)$?
- ¿Y la imagen de la recta $2x+3y=11$?
- ¿Cual es la imagen del círculo $p(t)=(2\cos t,2\sin t)$?
- ¿Y la imagen del círculo $x^2+y^2=4$?

3. ¿Como queda la ecuación de la hipérbola $9x^2-4y^2=1$...

- si se traslada 3 unidades a la derecha y 1 unidad hacia arriba?
- si se aumenta su tamaño al doble?
- si se rota 90 grados?
- si se rota 45 grados?

4. ¿Que inclinación tienen los ejes de estas cónicas? Rótalas para que no estén inclinadas.

- $x^2+xy+y^2 = 3$
- $xy+y^2 = 2$
- $2x^2+3xy-2y^2 = 1$

5. Demuestra que si las ecuaciones $Ax^2 + Bxy + Cy^2 = F$ y $A'x'^2 + B'x'y' + C'y'^2 = F$ corresponden a una misma cónica rotada entonces

- $A + B = A' + B'$
- $4AC-B^2 = 4A'C' - B'^2$

6. Usa los invariantes $A+C$ y $4AC-B^2$ para hallar la forma exacta de las siguientes cónicas.

- $3x^2+2xy+3y^2= 2$
- $x^2+2xy = 3$
- $3x^2+2xy+y^2 = 4$
- $2x^2+4xy+y^2 = 9$
- $4x^2+4xy+y^2 = 1$

7. ¿Que cónicas son las siguientes? (basta decir: elipse, hipérbola, parábola, 2 rectas, una recta, un punto, el vacío..)

- $x^2-xy+y^2+2x-y = 5$
- $x^2+3xy+5y^2+4x+17y = 0$
- $x^2+4xy+4y^2+3x = 2$
- $x^2-xy-2y^2+2x-y = -1$