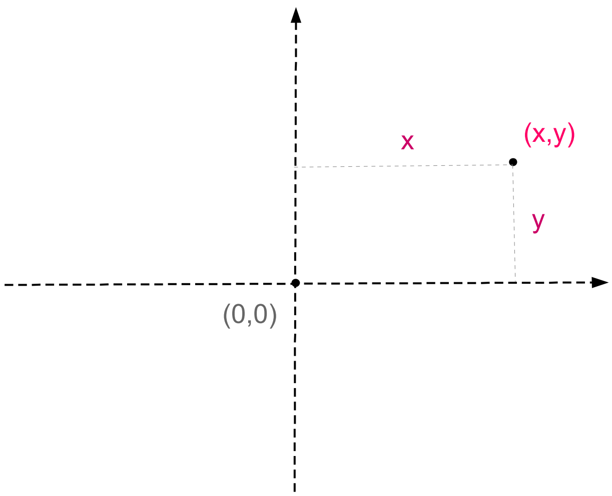
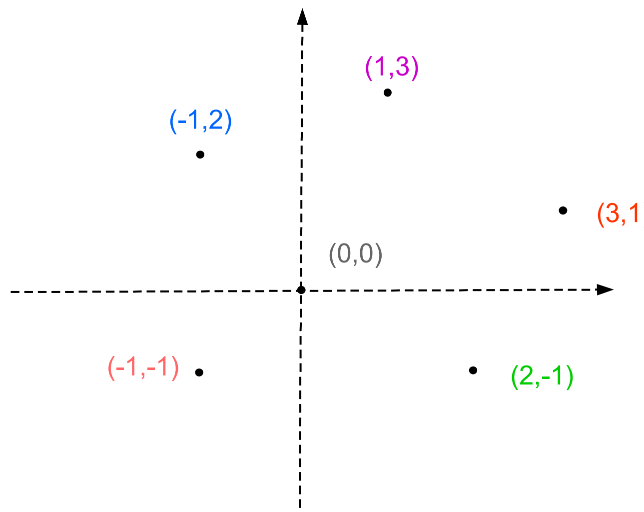
Coordenadas

A mediados del siglo XVII, Rene Descartes y Pierre de Fermat comenzaron a estudiar geometría usando coordenadas.

La idea es asociarle a cada punto del plano una pareja de números reales, que indican la distancia del punto a dos rectas perpendiculares, llamadas *ejes de coordenadas*, que se consideran negativas hacia un lado de cada eje. Al punto con coordenadas (0,0) se le llama *origen*.

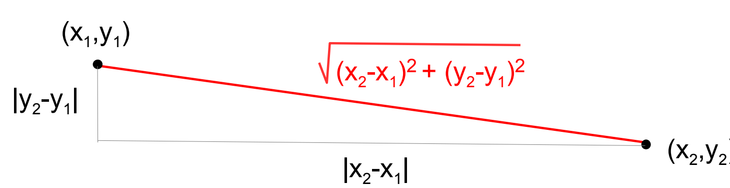




Esto da una biyección entre los puntos del plano euclidiano y las parejas de números reales (x,y) y podemos identificar a cada punto con sus coordenadas.

Las coordenadas no solo sirven para localizar puntos, sino que nos permiten medir distancias, ángulos y áreas algebraicamente, sin hacer dibujos.

La distancia entre dos puntos puede calcularse a partir de sus coordenadas usando el teorema de Pitágoras:

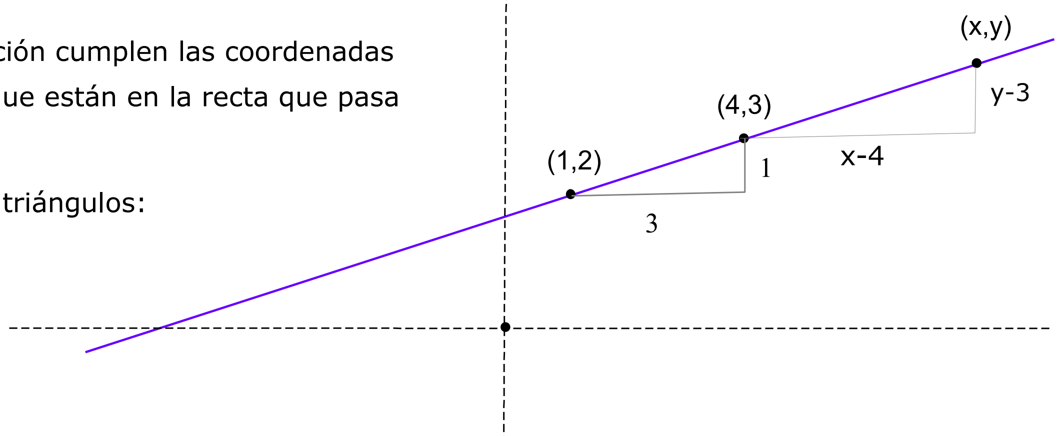


Las coordenadas también pueden usarse para describir a las rectas, círculos y otras curvas por medio de las relaciones numéricas que hay entre las coordenadas de sus puntos.

Estas relaciones se pueden escribir como ecuaciones en las coordenadas (x,y).

Las coordenadas (x,y) de los puntos en cada recta están relacionadas por una ecuación de primer grado $Ax+By=C$.

Ejemplo: ¿Que ecuación cumplen las coordenadas (x,y) de los puntos que están en la recta que pasa por (1,2) y (4,3)?



Por la semejanza de triángulos:

$y-3 / x-4 = 1/3$

$3(y-3) = 1(x-4)$

$-x + 3y = 5$

Así que los puntos (x,y) de la recta que pasa por (1,2) y (4,3) satisfacen la ecuación $-x + 3y = 5$ y todos los puntos que satisfacen la ecuación están en la recta. Para saber, por ejemplo, si el punto (87,31) está o no está en la recta, basta checar si cumple o no con la ecuación:
$-87 + 3(31) = 6 \neq 5$ así que el punto no esta en la recta.

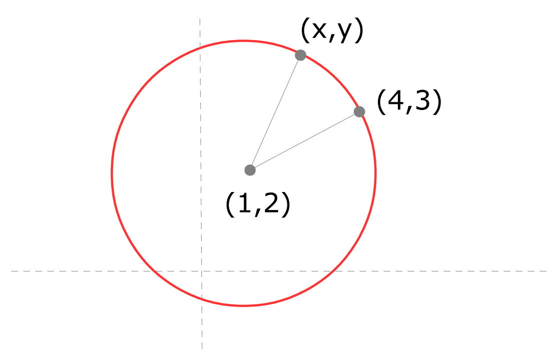
Las coordenadas de los puntos en un círculo están relacionadas por la fórmula de la distancia, por lo que satisfacen una ecuación de la forma $(x-a)^2+(y-b)^2 = r^2$ donde (a,b) es el centro del círculo y r es su radio.

Ejemplo: Los puntos (x,y) del plano que están en el círculo con centro en el punto (1,2) y que pasa por el punto (4,3) satisfacen la ecuación

$(x-1)^2 + (y-2)^2 = (4-1)^2 + (3-2)^2$

que puede expandirse y simplificarse a

$x^2 + y^2 - 2x - 4y = 5$



Para saber, por ejemplo, si el punto (3,-1) esta dentro o afuera del circulo, basta checar que le pasa con la ecuación: $(3)^2 + (-1)^2 - 2(3) - 4(-1) = 8 > 5$ lo que dice que el punto (3,-1) esta afuera del círculo.

Problemas. (simplifica lo mas posible)

1. Encuentra las ecuaciones de 4 rectas distintas que pasen por el punto (3,-2). (ojo: que las ecuaciones sean distintas no implica que las rectas sean distintas)

2. ¿Que ecuación cumplen las coordenadas de los puntos alineados con (-3,4) y (5,7)?

3. Da la ecuación de dos círculos distintos que pasen por los puntos (1,2), (5,-4).

Un Modelo algebraico para el plano euclidiano.

En lugar de ponerle coordenadas a los puntos del plano euclidiano, podemos proceder al revés: empezar con en el conjunto $\mathbf{R}^2 = \{(x,y) \ / \ x,y \ T \ \mathbf{R}\}$ y usarlo como un *modelo* del plano euclidiano, definiendo los puntos como parejas (x,y), definiendo a las rectas de manera algebraica como los conjuntos de soluciones de ecuaciones de primer grado Ax+By=C y definiendo la distancia entre dos puntos (x_1,y_1) y x_2,y_2 como $\sqrt{(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2}$

Al conjunto $\mathbf{R}^2 = \{(x,y) \ / \ x,y \ T \ \mathbf{R}\}$ con estas rectas y con esta manera de medir distancias se le llama el **plano cartesiano**. Para ver que el plano cartesiano es un plano euclidiano hay que probar se cumplen los axiomas, por ejemplo:

Lema. Por 2 puntos distintos del plano cartesiano pasa al menos una recta.

Demostración. Tenemos que probar que para cada par (d,e) y (f,g) en $\mathbf{R}^2$, existe una ecuación Ax + By = C de la que (d,e) y (f,g) son soluciones. Necesitamos encontrar los coeficientes adecuados A, B y C.

(d,e) y (f,g) son soluciones de Ax + By = C si y solo si Ad + Be = C y Afd + Bgd = Cd
De aquí podemos despejar a A y B en términos de C:

A = C (e-g/ef-dg)

B = C (f-d/ef-dg) (suponiendo que $ef-gd\neq 0$)

Si tomamos por ejemplo C= ef-gd queda A=e-g y B=f-d y podemos comprobar que (d,e) y (f,g) son soluciones de la ecuación (e-g)x + (f-d)y = ef-dg ya que

$(e-g)d+(f-d)e = e\cancel{d}-gd + fe-\cancel{d}e = ef-dg$

$(e-g)f+(f-d)g = ef-\cancel{gf} + \cancel{fg}-dg = ef-dg$ y esto funciona aunque ef-gd=0 •

Para ver que por dos puntos del plano cartesiano pasa una sola recta, hay que mostrar que si dos puntos (c,d) y (e,f) satisfacen dos ecuaciones lineales de la forma Ax+By=C entonces una ecuación es múltiplo de la otra y por lo tanto las ecuaciones tienen las mismas soluciones.

(Para probar los axiomas 2 y 5 nos falta ver como medir ángulos)

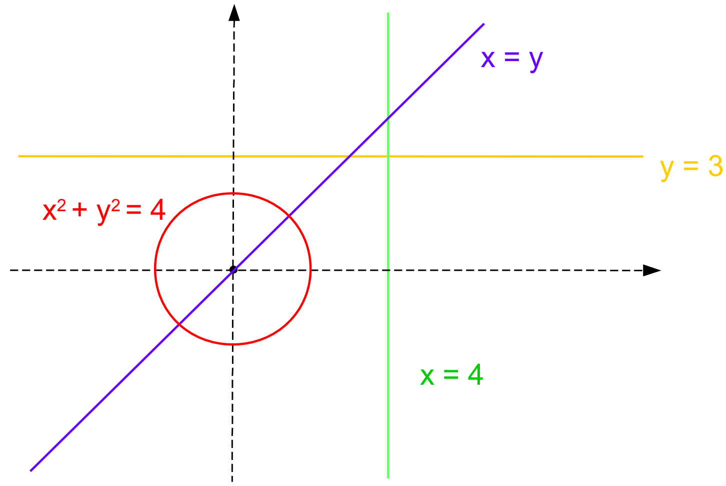
Problemas

4. Demuestra que en el plano cartesiano dos rectas distintas se intersectan a lo mas en un punto.

5. Demuestra que por cada punto del plano cartesiano afuera de una recta L pasa una recta paralela a L.

Curvas y ecuaciones

En el plano cartesiano podemos describir lineas y curvas por medio de **ecuaciones**, que son las relaciones numéricas entre las coordenadas de sus puntos:



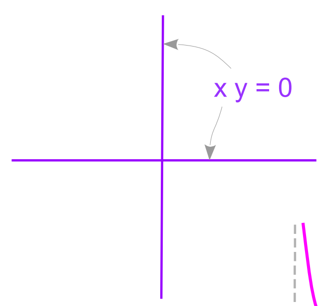
Descartes y Fermat observaron que al usar coordenadas muchos problemas geométricos podían transformarse en problemas algebraicos y viceversa. Al estudio de la geometría usando coordenadas y álgebra se le conoce como geometría *analítica.*

Mientras que Descartes buscó ecuaciones para las curvas conocidas, Fermat procedió al revés, al partir de ecuaciones algebraicas y tratar de hallar que forma geométrica tenían sus soluciones. El conjunto de soluciones de una ecuación es usualmente una curva, pero puede ser un punto, o el vacío, o cosas mas raras. Saber la forma de una curva a partir de la ecuación puede ser muy difícil, a menos que la ecuación sea sencilla y podamos manipularla para llevarla a una ecuación ya conocida, o a una ecuación donde podamos "ver" la propiedad geométrica que encierra.

Ejemplos.

- ¿Como son las soluciones de la ecuación $xy = 0$?

  $xy = 0$ equivale a que $x = 0$ o $y = 0$, que son dos rectas

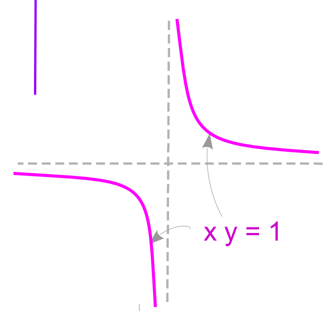


- ¿Y las soluciones de la ecuación $xy = 1$?

  si $xy>0$ entonces x y y son ambos positivos o ambos negativos

  Las soluciones de $xy =1$ deberían estar cerca de las

  soluciones de $xy=0$, pero sin tocarlas.

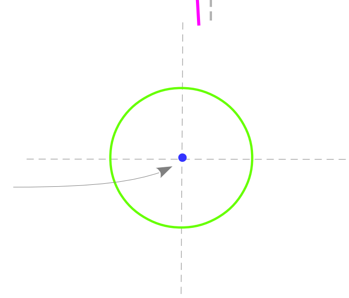


- ¿Como son las soluciones de las ecuaciones $x^2 + y^2 = C$?

  Si $C> 0$, $x^2 + y^2 = C$ es un circulo de radio $\sqrt{C}$.

  $x^2 + y^2 = 0$ equivale a que $x = 0$ y $y = 0$, que es un punto

  Si $C<0$, $x^2 + y^2 = C$ no tiene solución (es el vacío)



Ejercicio: ¿Que forma tendrán estas curvas?

$x^3 + y^3 = 0$ $x^3 + y^3 = 1$ $x^4 + y^4 = 1$

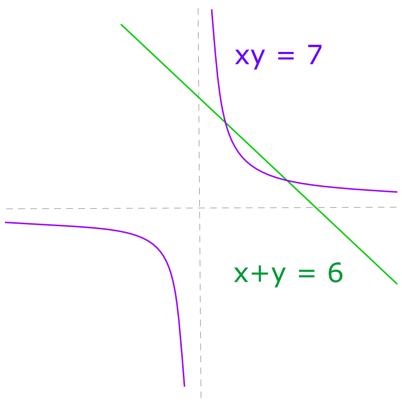
Aun si saber su forma, podemos decir que el conjunto de soluciones de $x^4 + y^4 = 1$ es simétrico respecto al eje y, ya que al cambiar x por $-x$ la ecuación queda igual, y también que es simétrico respecto al eje x, ya que al cambiar y por $-y$ la ecuación queda igual.

No sucede lo mismo con $x^3 + y^3 = 1$, ya que al cambiar x por $-x$ se convierte en $-x^3 + y^3 = 1$ y al cambiar y por $-y$ se convierte en $x^3 - y^3 = 1$.

La geometría analítica forma un puente entre el álgebra y la geometría que permite traducir problemas geométricos en problemas algebraicos y viceversa, dándoles una perspectiva distinta.

Ejemplos.

- ¿Existen dos números reales tales que su suma sea 6 y su producto sea 7?



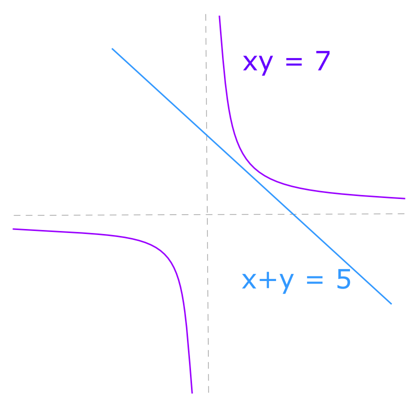
Si los números son x y y, la primera condición dice que $x+y = 6$ y la segunda que $xy = 7$.

Las soluciones del problema están dadas por los puntos de intersección de las dos curvas $x+y = 5$ y $xy = 7$

En el dibujo se puede ver que hay dos soluciones

- ¿Existen dos números reales cuya suma sea 5 y su producto sea 7?

No, ya que $x+y = 5$ y $xy = 7$ no se intersectan.



La geometría analítica es la base sobre la que en el siglo XVIII se desarrolló el cálculo y en el siglo XIX nació la geometría algebraica.

Problemas

6. ¿Que ecuación *sencilla* cumplen los puntos del plano que están a la misma distancia de (1,2) que de (4,3)? (usar *únicamente* la formula de la distancia y simplificar todo lo posible)

7. Dibuja las soluciones de estas ecuaciones

$y^2 = 1$ $\qquad$ $xy = x$ $\qquad$ $x = y^3$

8. ¿Como se ven las soluciones de estas ecuaciones?

$x+y=1$ $\qquad$ $x^2 + y^2 = 1$ $\qquad$ $x^3 + y^3 = 1$ $\qquad$ $x^4 + y^4 = 1$

(traten de imaginárse las ultimas y luego compruébenlo usando la computadora)

Aquí pueden jugar https://www.desmos.com/calculator/pi5ofejgt0?lang=es

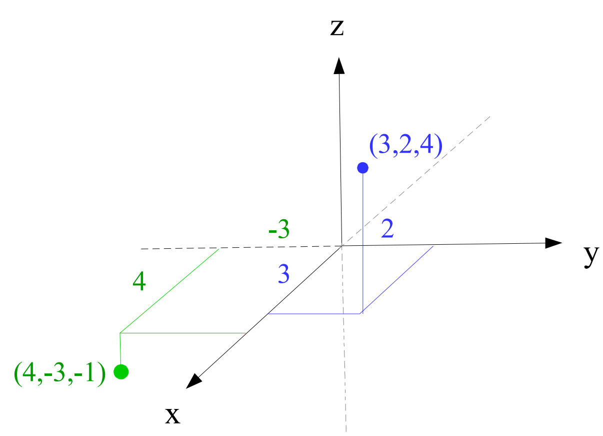
9. ¿Puedes encontrar una ecuación en x y y que tenga como *únicas* soluciones a (0,0) y (1,1)?

10. ¿Existen dos números reales tales que sus cuadrados sumen 6 y sus cubos sumen 4? (se vale graficar)

Coordenadas en el espacio euclidiano

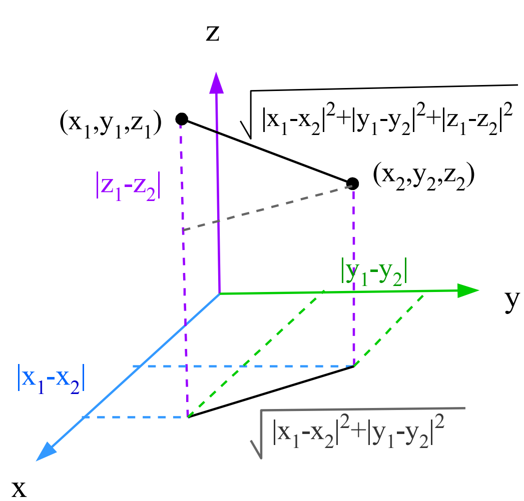
Así como podemos modelar al plano euclidiano con el conjunto $\mathbf{R}^2 = \{ (x,y) \ / \ x, y \in \mathbf{R}\}$ podemos modelar al espacio euclidiano con el conjunto $\mathbf{R}^3 = \{ (x,y,z) \ / \ x, y, z \in \mathbf{R}\}$

En este caso las coordenadas de un punto dan la distancia a 3 planos perpendiculares, cuyas intersecciones son los 3 ejes de coordenadas.



¿Como se medirá a distancia entre 2 puntos (x_1,y_1,z_1) y (x_2,y_2,z_2) en $\mathbf{R}^3$?

Podemos usar el teorema de Pitágoras 2 veces para hallar la distancia a partir de las diferencias de sus coordenadas.



Ejemplo. La distancia de (3,2,4) a (4,-3,-2) es $\sqrt{(3-4)^2+(2+3)^2+(4+2)^2} = \sqrt{1+25+36} = \sqrt{62}$

Igual que en el plano cartesiano, en el espacio cartesiano podemos usar ecuaciones para representar rectas, círculos, planos, esferas, etc.

Así como las ecuaciones en dos variables x,y corresponden usualmente curvas en el plano (aunque también pueden corresponder a puntos o al vacío), las ecuaciones en 3 variables x,y,z corresponden usualmente a *superficies* (aunque también pueden corresponder a curvas, puntos o al vacío).

Observar que si en una ecuación no aparece alguna variable, esa variable es libre de tomar cualquier valor.

Ejemplos.

- $y = 2$ es un plano paralelo al plano xz (x y z pueden tomar todos los valores reales)
- $xyz = 0$ son los 3 planos $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$.
- La ecuación $x^2+y^2+z^2 = 9$ corresponde a una esfera de radio 3 centrada en el origen.
- $x^2+y^2 = 0$ es una recta (el eje z) ya que x y y deben valer 0, pero z puede tomar todos los valores.

Problemas

11. ¿Cuanto miden los lados del triángulo en R^3 con vértices en (2,-1,3), (3,1,8) y (4,-4,7)?

12. ¿Los puntos (1,3,4), (-3,1,-2) y (5,6,12) están alineados?

13. Da la ecuación de la esfera que pasa por el origen y tiene centro en (1,2,3)

14. ¿Que representarán las siguientes ecuaciones en el espacio?

    a. $x+y = 1$ b. $x+y+z = 0$ c. $x^2+y^2 = 1$ d. $x^2+y^2+z^2 = 0$