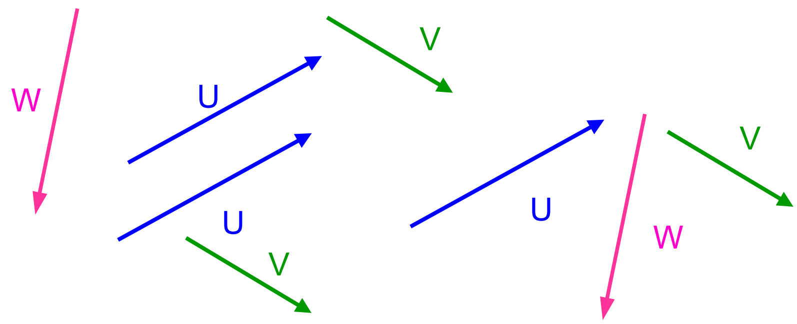
Vectores

Un **vector** es un segmento de recta dirigido (una flecha) en el plano o en el espacio euclidiano.

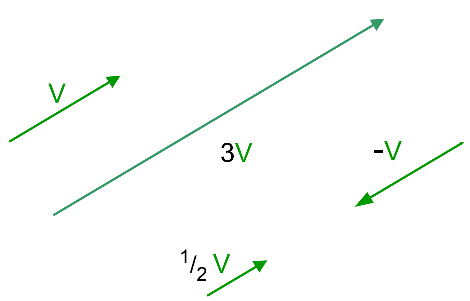


Diremos que dos vectores son **iguales** si tienen la misma dirección, magnitud (tamaño) y sentido, sin importar donde empiecen. Los vectores pueden representar muchas cosas, por ejemplo

desplazamientos *velocidades* *fuerzas* *etc.*

El vector 0 es un vector que empieza y termina en el mismo punto. Si V es cualquierl vector, -V (el negativo de V) el el vector con la misma magnitud y la dirección opuesta que V.

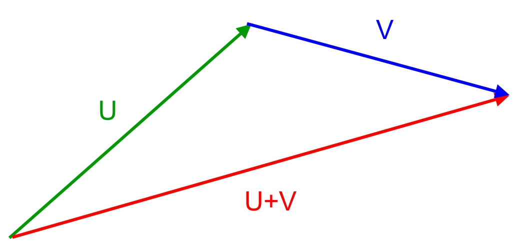
Los vectores pueden multiplicarse por números reales (llamados **escalares**):

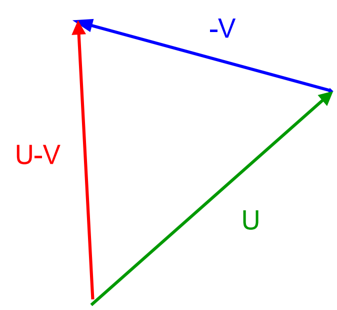


rV tiene la misma dirección que V.
rV tiene |r| veces la magnitud de V.
rV tiene el mismo sentido que V si r>0 y tiene el sentido opuesto si r<0.

Observar que -1V = -V y y 0V=0

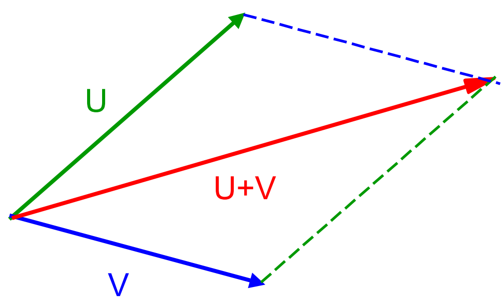
Los vectores pueden sumarse y restarse:

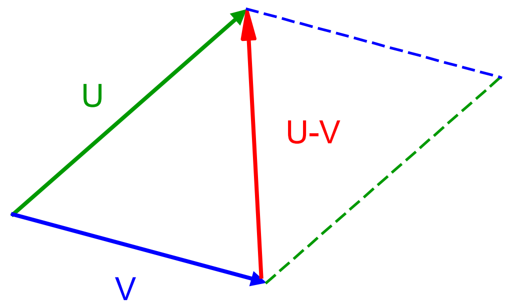




U - V = U+(-V) es el vector que sumado a V da U.

La regla del paralelogramo: La suma y resta de dos vectores basados en el mismo punto están dadas por las diagonales del paralelogramo definido por los dos vectores.





La suma de vectores y su multiplicación por escalares tienen propiedades similares a las de la suma y producto de números reales:

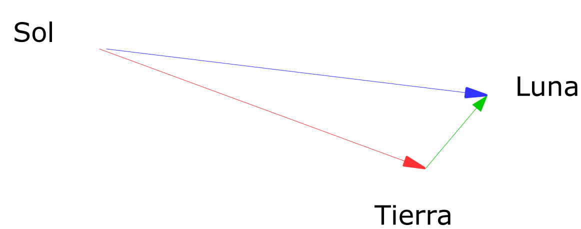
U + V = V + U	*conmutatividad*
(U + V) + W = U + (V+ W)	*asociatividad*
α(U+V) = αU + αV	*distributividad*
(α+β)U = αU + βU	

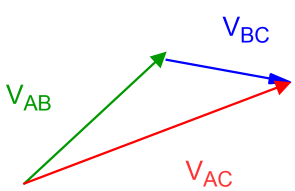
Estas propiedades se obtienen de la ley del paralelogramo y de la semejanza de triángulos

Aplicaciones:

Las posiciones relativas operan como vectores:

El vector SL que da la posición de la Luna respecto al Sol es la suma del vector ST que da la posición la Tierra respecto al Sol y el vector TL que da la posición de la Luna respecto a la Tierra: SL = ST + TL



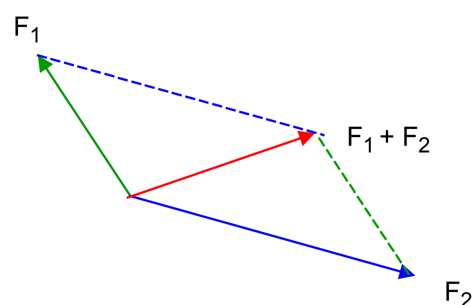


Las velocidades se comportan como vectores:

La velocidad de un objeto A respecto a un objeto C es la suma de la velocidad de A respecto a B mas la velocidad de B respecto a C.

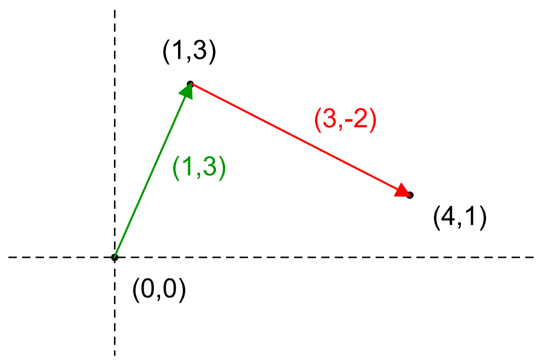
Las fuerzas se suman como vectores:

Las fuerzas pueden representarse como vectores.
Si se aplican simultáneamente dos fuerzas sobre un punto, la fuerza resultante es la suma vectorial de las fuerzas.

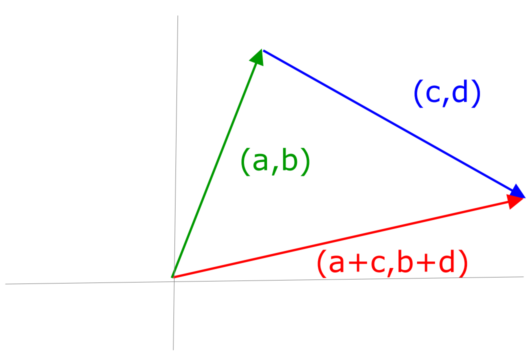


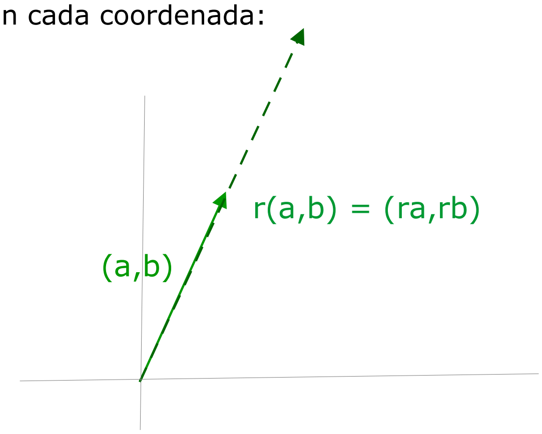
Vectores y coordenadas

Cada punto del plano (x,y) determina un vector que va del origen al punto, y que se denota también por (x,y). Entonces el vector que va del punto (x,y) al punto (x',y') es (x'-x,y'-y).



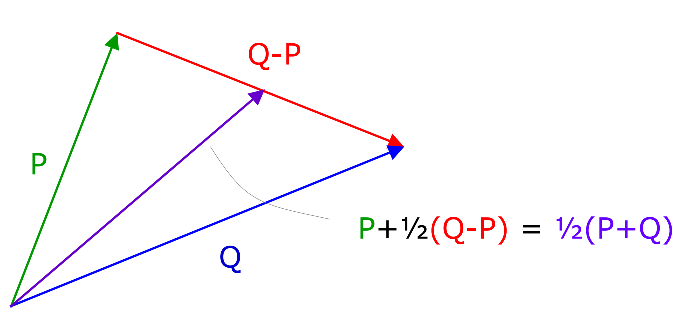
Observar que la suma de vectores esta dada por la suma coordenada a coordenada, y el producto por escalares también esta dado por el producto en cada coordenada:





Las propiedades conmutativa, asociativa y distributiva de la suma de vectores y el producto por escalares son consecuencia de las propiedades de la suma y el producto de números reales.

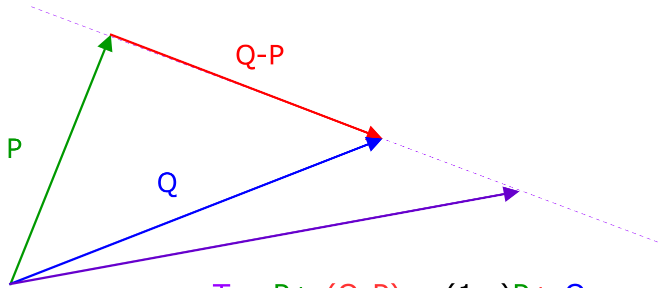
Ejemplo. Si P y Q son dos puntos en el plano, el punto medio entre P y Q es ½(P+Q).



Ejemplo: El punto medio entre (2,4) y (6,1) es ½(2+6,4+1) = (4,2.5)

Lema. Los puntos alineados con P y Q son los puntos de la forma (1-r)P+rQ.

Demostración. Si del punto P nos movemos en la dirección del vector Q-P obtenemos un punto T alineado con P y Q.



$T = P+r(Q-P) = (1-r)P+rQ$

Recíprocamente, si el punto T está alineado con P y Q entonces el vector T-P tiene la misma dirección que el vector Q-P.

Así que los puntos alineados con P y Q son de la forma

$T = P + r(Q-P) = (1-r)P + rQ$ •

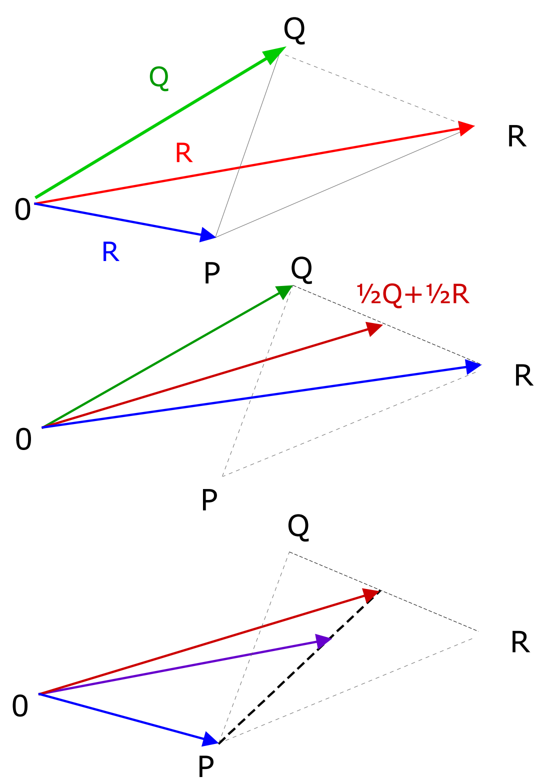
Ejemplo. El punto que esta a un tercio del camino entre (2,4) y (6,1) es

${}^{2}/_{3}(2,4)+{}^{1}/_{3}(6,1) = ({}^{4}/_{3}, {}^{8}/_{3})+({}^{6}/_{3}, {}^{1}/_{3}) = ({}^{10}/_{3}, 3)$

Ejemplo. Los punto que están en el segmento de recta entre (2,4) y (6,1) son los de la forma $(1-r)(2,4) + r(6,1) = (2+4r,4-3r)$ para $0 \leq r \leq 1$

Teorema. Las medianas de un triángulo se intersectan en un punto que las divide en la razón 2:1

Demostración. Las medianas de un triángulo son las lineas que van de los vértices a los puntos medios de los lados opuestos. Para ver que las medianas concurren hay que ver que el punto que esta a 2/3 del recorrido de cada mediana es el mismo para las 3 medianas.



Las posiciones de los vértices del triángulo están dadas por 3 vectores P, Q y R basados en un mismo punto O.

El vector que va de O al punto medio del lado QR es $\frac{1}{2}Q+\frac{1}{2}R$

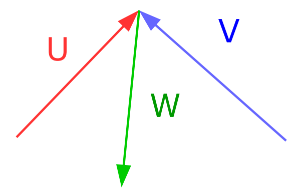
El vector que va de O al punto que esta a dos tercios del recorrido de la mediana es

${}^{1}/_{3}P + {}^{2}/_{3}(\frac{1}{2}Q+\frac{1}{2}R) = {}^{1}/_{3}P+{}^{1}/_{3}Q+{}^{1}/_{3}R$

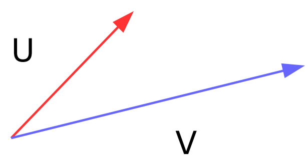
Como ${}^{1}/_{3}P + {}^{1}/_{3}Q + {}^{1}/_{3}R$ es simétrico respecto a P,Q y R, el punto es el mismo para las 3 medianas. •

Problemas

1. Para los vectores U, V y W dados, dibuja ahi mismo y con mucho cuidado los vectores U+V, V-U, U-W y -W-V.



2. a. Para los vectores U y V dados, dibuja cuidadosamente -U+2V, 2U-V y 3U-2V *basados en el mismo punto que* U y V. ¿Que observas?



b. Ahora dibuja V-2U, U-2V y 2U-3V, *basados en el mismo punto que* U y V. ¿Que observas?

3. Si U=(3,1), V=(-2,5) y W=(-2,-4) calcula y simplifica

a. U-V+W   b. W-V+U   c. $^1/_2$ V + $^2/_3$ U - $^3/_4$ W

4. a. ¿Cuales son las coordenadas del punto que esta a 3/4 del camino entre (4,1) y (7,-3) ?

b. ¿Cuales son las coordenadas de los dos puntos que están alineados con (4,1) y (7,-3) y están al doble de distancia de (4,1) que de (7,-3)?

5. Si la velocidad de B respecto a A es (3,7) y la velocidad de C respecto a A es (5,6), cual es la velocidad de B respecto a C? ¿Y la velocidad de C respecto a B? (cuidado con el orden!)

6. ¿Si se le aplican simultáneamente a un punto las fuerzas dadas por los vectores (3,7), (4,-5) y (6,2), cual será la fuerza resultante?

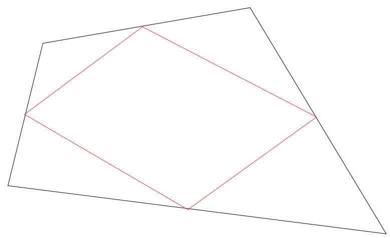
7. Los vértices de un triángulo tienen coordenadas (1,5), (4,9) y (2,-7)

a. ¿Cuales son las coordenadas de los puntos medios de los lados?

b. ¿Cuales son las coordenadas del centro de gravedad del triángulo?

8. ¿Si viajamos 300 km al norte y luego 200 km al este llegaremos al mismo lugar de la tierra que si viajamos 200 km al este y luego 300 km al norte?

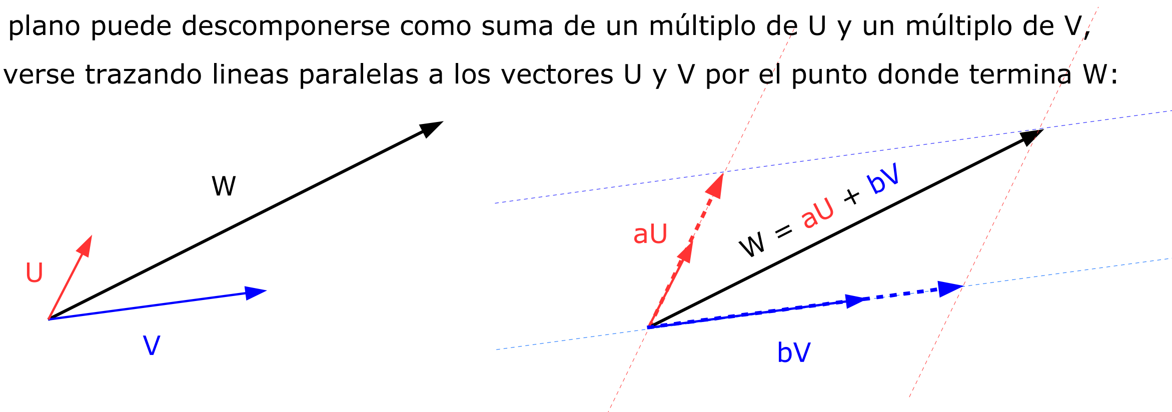
9. Demuestra usando vectores (y sin usar coordenadas) que los puntos medios de cualquier cuadrilátero son los vértices de un paralelogramo.



(Hint: si las posiciones de los vértices están dadas por los vectores P,Q,R,S basados en el origen ¿que vectores van de un punto medio a otro?)

Combinaciones lineales

Observar que si U y V son dos vectores del plano en distintas direcciones entonces cualquier vector W del plano puede descomponerse como suma de un múltiplo de U y un múltiplo de V, como puede verse trazando lineas paralelas a los vectores U y V por el punto donde termina W:



Cuando W se puede escribir como la suma de un múltiplo de U y un múltiplo de V, es decir cuando W= aU+BV con a,b reales, decimos que W es una **combinación lineal** de U y V.

Ejemplo. Descomponer al vector (6,7) como combinación lineal de (1,2) y (3,4).

Buscamos dos números reales a y b tales que (6,7) = a(1,2) + b (3,4) = (a+3b,2a+4b)

Entonces a + 3b = 6 y 2a+4b = 7.

Multiplicando la primera ecuación por 2 y restando la segunda ecuación queda 2b = 5 así que b = 5/2

Y 4 veces la primera ecuación menos 3 veces la segunda da -2a = 3 así que a =-3/2

Podemos checar si el resultado es correcto calculando la suma:

-3/2(1,2) + 5/2 (3,4) = (-3/2,-3) + (15/2,10) = (6,7)

Ejemplo. ¿Que combinaciones de fuerzas en las direcciones de (1,4) y (1,5) dan por resultado fuerzas en la dirección de (1,0)?

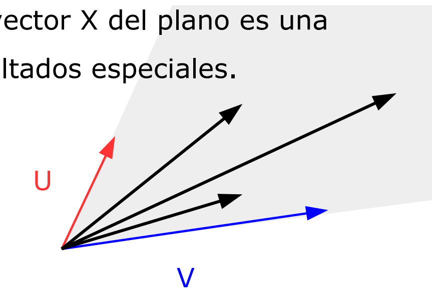
Buscamos números reales tales que a(1,4) + b(1,5) = c(1,0)

a + b = c → a – 4/5 a = c → 1/5 a =c → a = 5c ↘

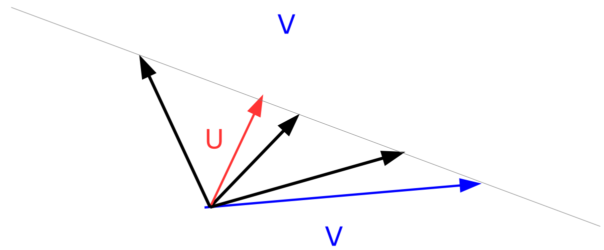
4a+5b = 0 → b = -4/5 a ↗ → b = -4c

Así que las combinaciones buscadas son de la forma 5c (1,4) – 4c (1,5) = c(1,0)

Si U y V son dos vectores no paralelos y distintos de 0, cualquier vector X del plano es una combinación lineal de U y V, pero algunas combinaciones dan resultados especiales.



Por ejemplo, los vectores $aU+bV$ con $a>0$ y $b>0$ son todos los vectores cuyas direcciones quedan entre las direcciones de U y V:



Y los vectores $aU+bV$ con $a+b=1$ son aquellos cuyas puntas están alineadas con las de U y V:

Podemos hacer combinaciones de mas de dos vectores: Si U,V y W son 3 vectores, sus combinaciones lineales son los vectores de la forma $X = aU+bV+cW$ con a,b,c números reales.

Ejemplo. El vector (3,4) se puede escribir como combinación lineal de (1,2), (-1,1) y (0,1) de muchas maneras distintas:

$(3,4) = 2(1,2)-1(-1,1)+1(0,1)$

$(3,4) = 1(1,2)-3(-1,1)+5(0,1)$

$(3,4) = 0(1,2)-3(-1,1)+7(0,1)$

Problemas

10. a. Escribe al vector (7,1) como combinación lineal de (7,4) y (3,-5)
    b. Escribe al vector (3,-5) como combinación lineal de (7,4) y (7,1)

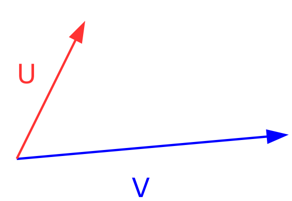
11. Demuestra que existe solo una manera de escribir a cada vector del plano como combinación lineal de dos vectores dados no paralelos.

12. Descomponer a la fuerza dada por el vector (2,3) como suma de fuerzas en las direcciones de los vectores (-1,2) y (-1,-1).

13. Da tres maneras de escribir al vector (2,3) como combinación lineal de (1,0), (0,-1) y (1,1) con todos los coeficientes distintos de 0.

14. Dados dos vectores U y V con distintas direcciones, describe y dibuja cuidadosamente a los vectores de la forma

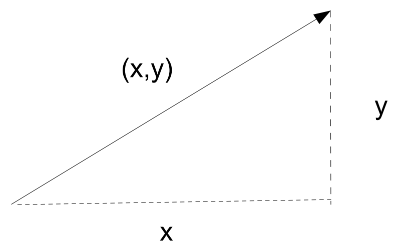
    a. $rU+sV$ con $r-s=0$, con $r,s \in \mathbf{R}$.
    b. $rU+sV$ con $r+s=0$, con $r,s \in \mathbf{R}$



Norma o magnitud

Al tamaño de un vector V se le conoce como su **magnitud** o **norma** y se le denota por $|V|$. Los vectores de norma 1 se llaman **unitarios**.

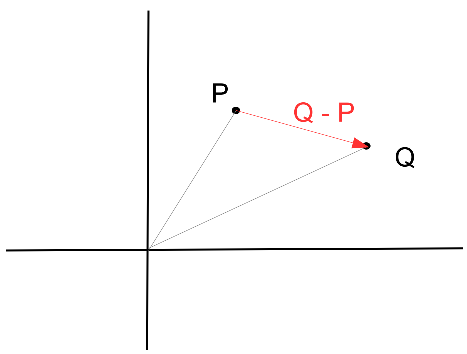
Por el Teorema de Pitagoras la norma del vector (x,y) es $|(x,y)| = \sqrt{x^2+y^2}$



Ejemplo:

$|(4,-3)| = \sqrt{4^2+(-3)^2} = \sqrt{25} = 5$

La distancia entre dos puntos P y Q del plano es la norma del vector Q-P



Ejemplo:

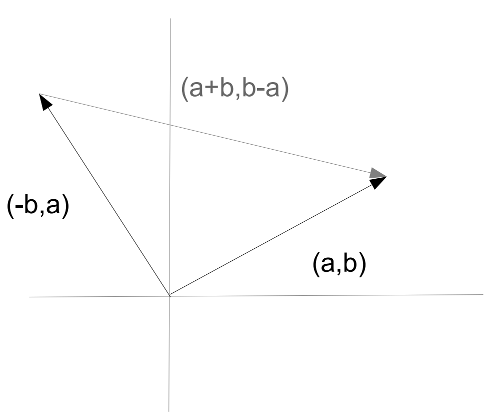
Si P=(4,1) y Q=(7,0) entonces
$dist(P,Q)=|(7-4,0-1)|=\sqrt{3^2+(-1)^2} =\sqrt{10}$

Al multiplicar un vector V por un numero r, se obtiene un vector paralelo a V cuya norma es $|r|$ veces la norma de V, ya que si V=(x,y) entonces rV=(rx,ry) y entonces

$$|rV| =\sqrt{(rx)^2+(ry)^2} = \sqrt{r^2(x^2 +y^2)} = |r|\sqrt{x^2 +y^2} = |r|\ |V|$$

Ejemplo. Un vector unitario paralelo a V=(4,-3) es $\frac{1}{|V|}V= \frac{1}{5}(4,-3) = (\frac{4}{5},\frac{-3}{5})$

Lema. Los vectores (a,b) y (-b,a) tienen magnitudes iguales y son perpendiculares.



Demostración. $|(a,b)|^2 = a^2+b^2 = (-b)^2+a^2 =|(-b,a)|^2$
así que (a,b) y (-b,a) tienen la misma norma.
Para ver que (a,b) y (-b,a) son perpendiculares, basta ver que el triángulo formado por (a,b), (-b,a) y su diferencia (a+b,b-a) cumplen el teorema de Pitágoras:

$|(a+b,b-a)|^2 = a^2+\cancel{2ab}+b^2+b^2-\cancel{2ba}+a^2$

$|(a,b)|^2+|(-b,a)|^2 = a^2+b^2+b^2+a^2$ •

Problemas

15. ¿Si U=(-2,4) y V=(3,-3) cual vector tiene mayor magnitud, U, V, U+V o U-V ?

16. a. Encuentra un vector con la misma norma que (2,5) y la misma dirección que (3,7).

    b. Encuentra los dos vectores unitarios perpendiculares a (3,2).

17. Encuentra las coordenadas de 3 vectores U, V y W *de la misma magnitud*, cuya suma sea el vector 0. Sugerencia: ¿como deben ser las direcciones de los 3 vectores?

18. a. Demuestra analíticamente (usando únicamente coordenadas y álgebra) que para todos los vectores U, V del plano, |U+V| ≤ |U| + |V|.

    b. ¿Será cierto que |U-V| ≤ |U| - |V|?

Problemas de repaso

19. Unos cazadores de osos salen de su campamento y viajan 10km al este y luego 10km al norte, ahí cazan un oso y vuelven a su campamento habiendo recorrido en total 33km. ¿De que color era el oso?

20. Dibuja U-V-W, U-(V-W) y (U-V)-W