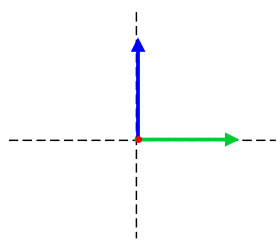


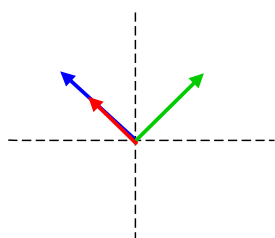
El Producto Interno

Ya que la suma de vectores puede hacerse algebraicamente $(a,b) + (c,d) = (a+c,b+d)$ parece natural definir un "producto" de vectores como $(a,b) \times (c,d) = (ac,bd)$.

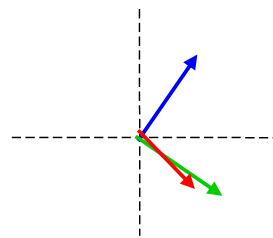
Pero este producto no tiene un significado geométrico independiente de coordenadas, como muestra el siguiente ejemplo, ya que al girar dos vectores su "producto" no gira igual:



$$(1,0) \times (0,1) = (0,0)$$



$$(1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{2}) \times (-1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{2}) = (-1/2, 1/2)$$



$$(4/5, -3/5) \times (3/5, 4/5) = (12/25, -12/25)$$

Pero aunque el producto por coordenadas de dos vectores (a,b) y (c,d) no tiene un significado geométrico, resulta que la suma de los productos, $ac+bd$, si lo tiene:

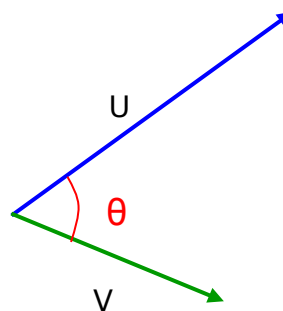
El *producto interno* (o *producto punto* o *producto escalar*) de dos vectores $U=(a,b)$ y $V=(c,d)$ es el número real $U \cdot V = ac+bd$

Ejemplo. Si $U=(2,3)$ y $V=(1,4)$ entonces $U \cdot V = (2,3) \cdot (1,4) = 2 \cdot 1 + 3 \cdot 4 = 2 + 12 = 14$

El significado geométrico del producto interno es:

Teorema. $U \cdot V = |U| |V| \cos \theta$

donde θ es el ángulo que forman los vectores U y V .



Demostración. La ley de los cosenos aplicada al triángulo formado por los dos vectores y su diferencia da

$$|U-V|^2 = |U|^2 + |V|^2 - 2|U||V| \cos \theta$$

en coordenadas esto es

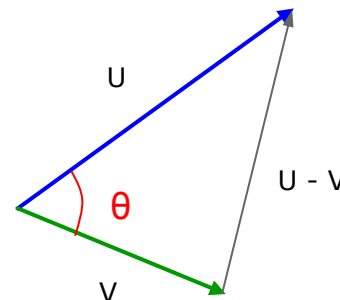
$$(a-c)^2 + (b-d)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + d^2 - 2\sqrt{a^2+b^2} \sqrt{c^2+d^2} \cos \theta$$

desarrollando y simplificando queda

$$-2ac - 2bd = -2\sqrt{a^2+b^2} \sqrt{c^2+d^2} \cos \theta$$

dividiendo entre -2 queda

$$ac + bd = \sqrt{a^2+b^2} \sqrt{c^2+d^2} \cos \theta = |U| |V| \cos \theta \quad \bullet$$



Es fácil ver que el producto interno tiene las siguientes propiedades algebraicas, que son útiles para simplificar los cálculos:

1. $U \cdot U = |U|^2$
2. $U \cdot V = V \cdot U$ *el producto interno es conmutativo*
3. $U \cdot (V+W) = U \cdot V + U \cdot W$ *el producto interno se distribuye con la suma*
4. $rU \cdot V = U \cdot rV = r(U \cdot V)$ *el producto interno saca escalares*

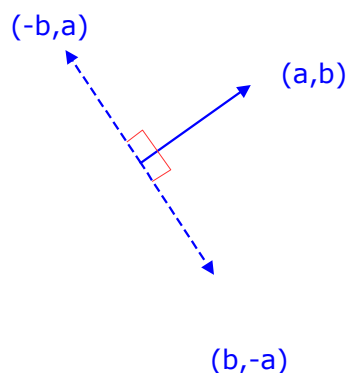
Como $U \cdot V = |U| |V| \cos\theta$, el producto interno tiene las siguientes propiedades geométricas:

5. $U \cdot V \leq |U| |V|$ y la igualdad se da si y solo si U y V tienen la misma dirección y sentido.
6. $U \cdot V = 0$ si y solo si U y V son ortogonales (perpendiculares).

Ejemplos:

1. Los vectores $(2,3)$ y $(9,-6)$ son ortogonales ya que $(2,3) \cdot (9,-6) = 2 \cdot 9 - 3 \cdot 6 = 0$.

2. Los vectores $(b,-a)$ $(-b,a)$ son ortogonales al vector (a,b) ya que $(a,b) \cdot (b,-a) = ab - ba = 0$.
 $(-b,a)$ apunta a la izquierda y $(b,-a)$ apunta a la derecha de (a,b) .



Observar que $U \cdot V > 0$ si $\theta < 90^\circ$ y $U \cdot V < 0$ si $\theta > 90^\circ$, ya que es para esos ángulos que el coseno es positivo o negativo.

Ejemplo: $(6,7) \cdot (-8,7) = -1$ así que $(6,7)$ y $(-8,7)$ forman un ángulo mayor que 90° .

Corolario. El ángulo entre los vectores U y V está dado por $\cos \theta = U \cdot V / |U| |V|$

Ejemplo: El ángulo θ entre los vectores $(1,2)$ y $(3,4)$ está dado por

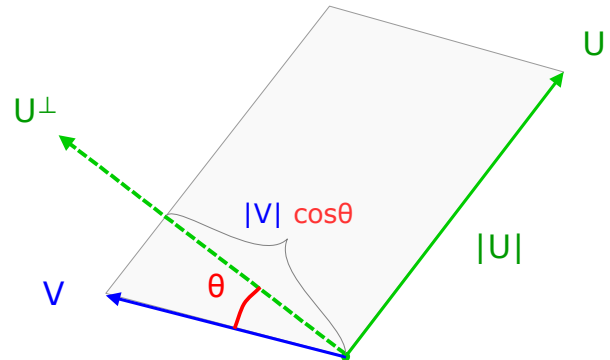
$$\cos \theta = (1,2) \cdot (3,4) / |(1,2)| |(3,4)| = 1 \cdot 3 + 2 \cdot 4 / (1^2 + 2^2)^{1/2} (3^2 + 4^2)^{1/2} = 11 / \sqrt{125}.$$

$$\theta = \arccos(11/\sqrt{125}) \approx 10.3^\circ$$

Teorema. El área del paralelogramo determinado por dos vectores $\mathbf{U}$ y $\mathbf{V}$ del plano es $|\mathbf{U} \times \mathbf{V}|$ donde $\mathbf{U}^\perp$ es un vector perpendicular a $\mathbf{U}$ con la misma norma que $\mathbf{U}$.

Demostración.

$$\begin{aligned} \text{Area} &= \text{base} \times \text{altura} = \\ &= |\mathbf{U}| |\mathbf{V}| \cos \theta = \\ &= |\mathbf{U}^\perp| |\mathbf{V}| \cos \theta = \\ &= \mathbf{U}^\perp \cdot \mathbf{V} \end{aligned}$$



Corolario. El área del paralelogramo generado por $\mathbf{U}=(a,b)$ y $\mathbf{V}=(c,d)$ es (el valor absoluto de) el determinante de $\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}$

Demostración. Si $\mathbf{U} = (a,b)$ y $\mathbf{V} = (c,d)$ entonces $\mathbf{U}^\perp$ es $(-b,a)$ o $(b,-a)$

así que $\mathbf{U}^\perp \cdot \mathbf{V} = (-b,a) \cdot (c,d) = ad-bc$ o bien $\mathbf{U}^\perp \cdot \mathbf{V} = (b,-a) \cdot (c,d) = -ad+bc$

Ejemplos:

El área del paralelogramo determinado por los vectores $(1,2)$ y $(3,4)$ es $(1,2) \cdot (4,-3) = 1 \cdot 4 - 2 \cdot 3 = -2$

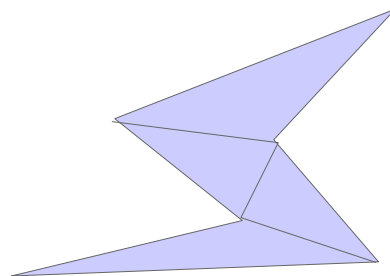
¿Que área tiene el triángulo con vértices $(1,2)$, $(7,4)$ y $(3,5)$?

Los vectores $(7,4)-(1,2)=(6,2)$ y $(3,5)-(1,2)=(2,3)$ dan dos lados del triángulo.

El área del triángulo es la mitad del área del paralelogramo generado por los dos vectores:

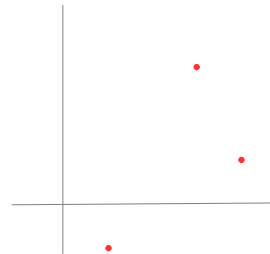
$$\text{Area} = 1/2 (6,2) \cdot (3,-2) = 1/2 (18-4) = 7$$

El área de cualquier polígono puede calcularse a partir de las coordenadas de sus vértices dividiendo al polígono en triángulos.



Problemas

1. (Sin calculadora y sin dibujarlos) ¿Los vectores $(19,-7)$ y $(4,11)$ forman un ángulo menor, igual o mayor que 90° ? ¿Los vectores $(1,2)$ y $(3,1)$ forman un ángulo menor, igual o mayor que 45° ?
2. ¿Cual es el área del paralelogramo generado por los vectores $(1000,37)$ y $(27,1)$? ¿Cual es la altura del paralelogramo sobre el lado largo?
3. ¿Cual es el área del cuadrilátero con vértices en $(1,-1)$, $(-2,2)$, $(4,1)$ y $(3,3)$?



4. Los vértices de un triángulo están en $A=(2,3)$, $B=(5,6)$ y $C=(1,-4)$. Calcula
 - a. La longitud del lado BC
 - b. La longitud de la mediana por A
 - c. El ángulo en el vértice A
 - d. El área del triángulo
 - e. La altura desde el lado BC
 - f. El centro de gravedad del triángulo
 - g. El diámetro del círculo circunscrito

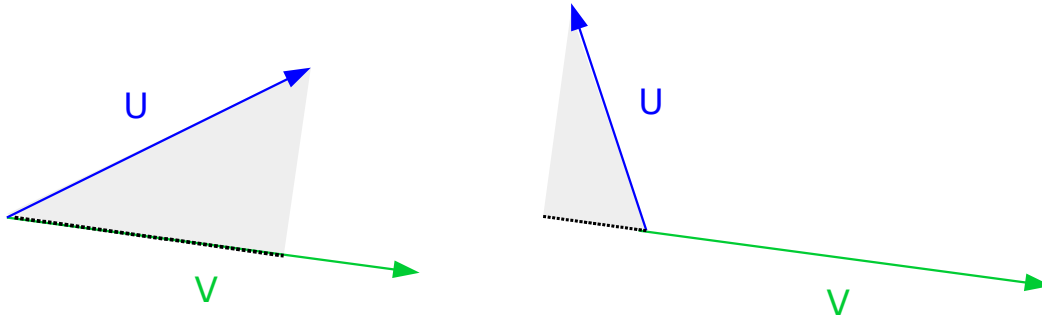
No escriban de mas! Cada inciso puede hacerse en uno o dos renglones.

5.
 - a. Encuentra un vector cuyos productos internos con $(1,2)$ y con $(3,1)$ sean iguales.
 - b. Encuentra un vector que forme ángulos iguales con $(1,2)$ y $(3,1)$.
(iguales significa exactamente iguales)
6.
 - a. ¿Como se ven los vectores del plano cuyo producto interno con el vector $(1,2)$ da 3?
 - b. ¿Como se ven los vectores del plano cuyo producto interno con un vector fijo da el mismo número?
7. Demuestra que $(U+V) \cdot (U-V) = |U|^2 - |V|^2$
8. Demuestra que si $|U-V| = |U+V|$ entonces U y V son ortogonales.

Sugerencia: escribe la igualdad usando el producto interno.

Proyecciones y descomposición de vectores

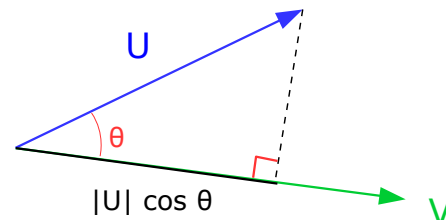
Si U y V son vectores en el plano y $V \neq 0$, la **proyección escalar** de U hacia V es la longitud (con signo) de la sombra de U en la línea de V , si U se ilumina perpendicularmente a V .



Lema. La proyección escalar de U hacia V es $\frac{U \cdot V}{|V|}$

Demostración. La sombra de U en la línea de V mide

$$|U| \cos \theta = \frac{|U||V| \cos \theta}{|V|} = \frac{U \cdot V}{|V|}$$



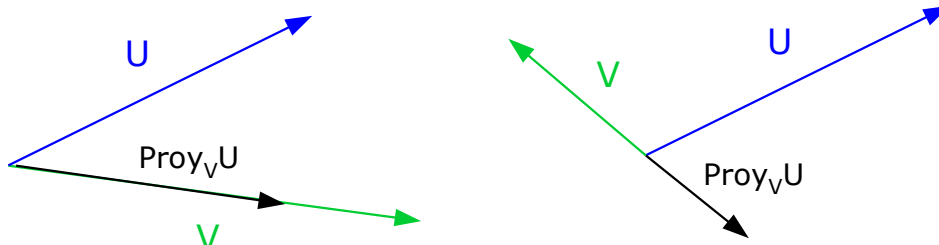
La proyección escalar depende de la dirección de V pero no del tamaño de V , y su signo depende de a que lado de V apunte.

Ejemplo. La proyección escalar de $U=(-3,2)$ hacia $V=(3,4)$ es $\frac{U \cdot V}{|V|} = \frac{(-3,2) \cdot (3,4)}{|(3,4)|} = \frac{-1}{5}$

La proyección escalar de $V=(3,4)$ hacia $U=(-3,2)$ es $\frac{U \cdot V}{|U|} = \frac{(-3,2) \cdot (3,4)}{|(-3,2)|} = \frac{-1}{\sqrt{13}}$

(el signo $-$ indica que la sombra va en la dirección opuesta al vector)

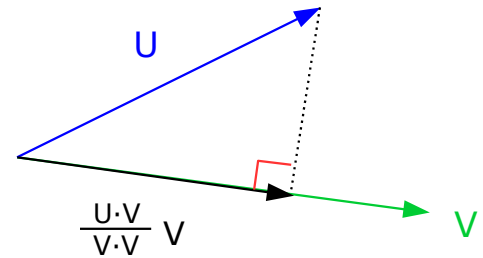
La **proyección vectorial** de U en la dirección de V es el vector formado por la sombra de U en la línea determinada por V .



Lema. La proyección vectorial de U hacia V es $\text{Proy}_V U = \frac{U \cdot V}{V \cdot V} V$

Demostración. Para obtener la proyección de U hacia V, basta multiplicar el tamaño de la sombra por el vector unitario en la dirección de V:

$$\text{Proy}_V U = \frac{U \cdot V}{|V|} \frac{V}{|V|} = \frac{U \cdot V}{V \cdot V} V$$



Ejemplo. La proyección vectorial de $U=(1,2)$ hacia $V=(3,4)$ es

$$\text{Proy}_V U = \frac{U \cdot V}{V \cdot V} V = \frac{(1,2) \cdot (3,4)}{(3,4) \cdot (3,4)} (3,4) = \frac{1 \cdot 3 + 2 \cdot 4}{3^2 + 4^2} (3,4) = \frac{11}{25} (3,4)$$

Y la proyección de $V=(3,4)$ hacia $U=(1,2)$ es

$$\text{Proy}_U V = \frac{V \cdot U}{U \cdot U} U = \frac{(3,4) \cdot (1,2)}{(1,2) \cdot (1,2)} (1,2) = \frac{3 \cdot 1 + 4 \cdot 2}{1^2 + 2^2} (1,2) = \frac{11}{5} (1,2)$$

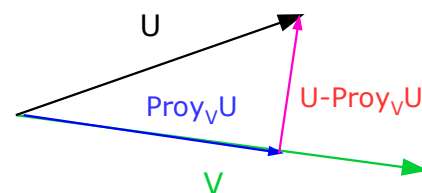
Lema. La proyección de U hacia V es el único vector paralelo a V que al restarlo a U da un vector ortogonal a V.

Demostración. Un vector paralelo a V tiene la forma tV para algún número real t .

El vector $U - tV$ es ortogonal a V si y solo si $(U - tV) \cdot V = 0$, es decir $U \cdot V - tV \cdot V = 0$ o sea $U \cdot V = tV \cdot V$ así que $t = U \cdot V / V \cdot V$. •

Corolario. Si $V \neq 0$, cada vector U puede descomponerse de manera única como la suma de un vector paralelo a V y otro ortogonal a V:

$$U = \text{Proy}_V U + (U - \text{Proy}_V U)$$



Ejemplo. El vector $(3,2)$ puede descomponerse como la suma de un vector paralelo y otro perpendicular a $(5,4)$:

$$\text{Proy}_{(5,4)}(3,2) = \frac{(3,2) \cdot (5,4)}{(5,4) \cdot (5,4)} (5,4) = \frac{23}{41} (5,4) = \left(\frac{115}{41}, \frac{92}{41} \right)$$

$$(3,2) - \text{Proy}_{(5,4)}(3,2) = (3,2) - \left(\frac{115}{41}, \frac{92}{41} \right) = \left(\frac{8}{41}, -\frac{10}{41} \right)$$

$$\left(\frac{115}{41}, \frac{92}{41} \right) + \left(\frac{8}{41}, -\frac{10}{41} \right) = (3,2)$$

paralelo a $(5,4)$ ortogonal a $(5,4)$

Observar que si U y V son perpendiculares entonces cada vector W es la suma de sus proyecciones hacia U y hacia V , pero si U y V no son perpendiculares entonces no lo es.

Aplicación. Para un objeto en un plano inclinado, la fuerza de gravedad se descompone como la suma de una fuerza tangencial al plano (que lo impulsa cuesta abajo) y una fuerza normal al plano (que provoca fricción).

Ejemplo. Si el plano tiene una inclinación de 30° :

un vector tangencial al plano es $(\cos -30^\circ, \sin -30^\circ) = (\sqrt{3}/2, -1/2)$.

y uno normal al plano es $(-\cos -30^\circ, \sin -30^\circ) = (-\sqrt{3}/2, -1/2)$.

La fuerza de gravedad esta dada por el vector $(0, -g)$.

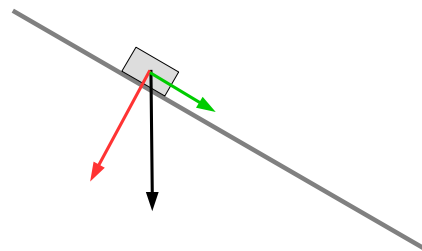
La componente tangencial al plano es

$$\text{Proy}_{(\sqrt{3}/2, -1/2)}(0, -g) = (0, -g) \cdot (\sqrt{3}/2, -1/2) / \sqrt{(\sqrt{3}/2)^2 + (-1/2)^2} \cdot (\sqrt{3}/2, -1/2) = 1/2 g (\sqrt{3}/2, -1/2) = (\sqrt{3}/4 g, -1/4 g)$$

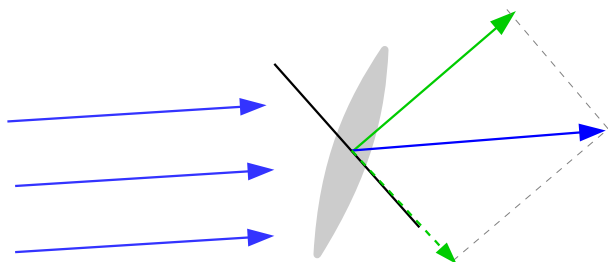
y la componente normal al plano es

$$\text{Proy}_{(-1/2, \sqrt{3}/2)}(0, -g) = (0, -g) \cdot (-1/2, \sqrt{3}/2) / \sqrt{(-1/2)^2 + (\sqrt{3}/2)^2} \cdot (-1/2, \sqrt{3}/2) = \sqrt{3}/2 g (-1/2, \sqrt{3}/2) = (-\sqrt{3}/4 g, -3/4 g)$$

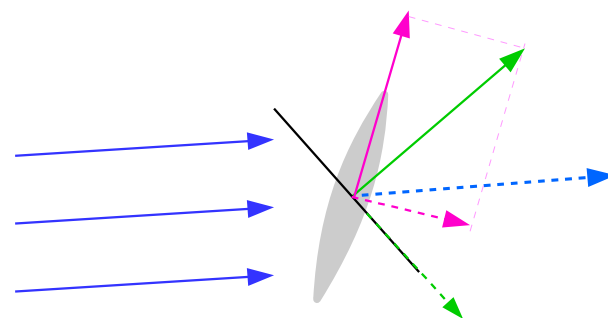
Podeos comprobar que $(\sqrt{3}/4 g, -1/4 g) + (-\sqrt{3}/4 g, -3/4 g) = (0, -g)$.



Aplicación. Un modelo simplificado de un velero. Un velero puede avanzar casi en cualquier dirección (aún direcciones casi opuestas al viento) si se coloca la vela en una dirección apropiada.



La fuerza del viento  se descompone en una componente  ortogonal a la vela, que empuja a la vela, y otra componente  en la dirección de la vela, que se pierde.



La fuerza  que empuja a la vela, se descompone a su vez en una componente  en la dirección del barco, que impulsa al barco, y una componente  ortogonal a la dirección del barco, que es absorbida por la quilla.

Problemas

9. a. Encuentra la proyección vectorial de $(2,3)$ hacia $(1,0)$.
b. Encuentra la proyección vectorial de $(1,0)$ hacia $(2,3)$.
10. a. Si $U=(2,3)$, encuentra un vector V tal que la proyección escalar de U hacia V sea 1.
b. Encuentra un vector W tal que la proyección escalar de W hacia U sea 1.
11. a. Escribe al vector $(1,2)$ como suma de un vector paralelo y uno perpendicular a $(3,4)$.
b. Escribe al vector $(3,4)$ como suma de un vector paralelo y uno perpendicular a $(1,2)$.
12. Demuestra que si $|\text{Proy}_V U| = |\text{Proy}_U V|$ entonces $|U| = |V|$.
13. ¿En que posición debe colocarse la vela para que un velero pueda navegar hacia en noroeste con viento que sopla hacia el este (es decir, navegando a 45° en contra del viento) lo mas rápido posible?

