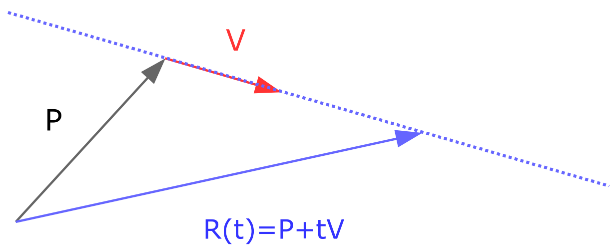
Rectas en el plano

Parametrizaciones de las rectas.

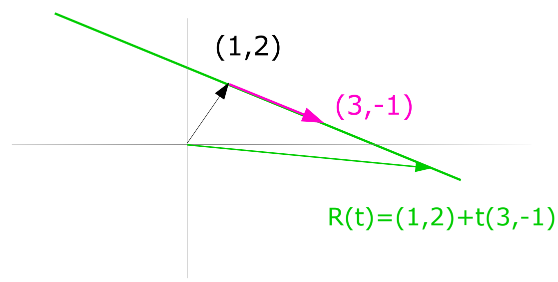
La recta que pasa por el punto P y tiene la dirección del vector V esta formada por los los puntos de la forma $R(t)=P+tV$ donde t es un escalar. Esta es una **parametrización** de la recta (sus puntos están dados en función del parámetro t).



Ejemplos.

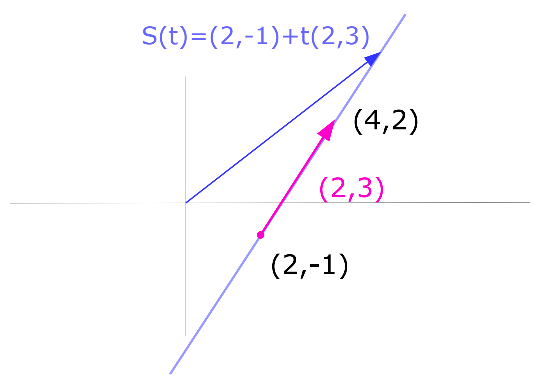
La recta que pasa por el punto (1,2) y tiene la dirección del vector (3,-1) esta formada por los puntos

$R(t) = (1,2) + t\,(3,-1) = (3t+1,-t+2)$



La recta que pasa por P=(2,-1) y Q=(4,2) tiene la dirección del vector V = Q-P = (2,3) y está parametrizada por

$S(t) = (2,-1) + t\,(2,3) = (2t+2,3t-1)$.



Cada recta tienen muchas parametrizaciones. Si pensamos en t como el tiempo.
La parametrización $R(t)=P+ t(Q-P)$ recorre la recta que contiene a los puntos P y Q a velocidad constante, pasando por P en t=0 y por Q en t=1.
También podemos recorrer la recta al revés, usando la parametrización $S(t) = Q + t(P-Q)$ que pasa por Q en t=0 y pasa por P en t=1. También podemos recorrer la recta mas rápido o mas despacio, pasando por P y Q en los momentos que queramos.

Ejemplo. Varias parametrizaciones de la recta que pasa por (1,6) y (3,2):

R(t) = (1,6) + t (2,-4)

S(t) = (1,6) + t (4,-8) (al doble de velocidad)

U(t) = (3,2) - t (1,-2) (a la mitad de la velocidad, en sentido inverso y empezando en el otro punto)

V(t) = (5,-2) + t (-3,6) (a otra velocidad, en sentido inverso y empezando en otro punto de la recta)

T(s) = (1,6) + s (2,-4) el nombre del parámetro no importa!

Problemas.

1. Da parametrizaciones de la recta que pasa por (4,3) y (5,7) de modo que

   a. pase por (4,3) en t=0 y por (5,7) en t=1/2.

   b. pase por (4,3) en t=1 y por (5,7) en t=2.

   c. pase por (5,7) en t=2 y por (4,3) en t=5.

2. Grafica las rectas

   a. P(t)= (1+2t,3-4t) b. Q(t)=(4t-1,3-2t)

3. Para el triángulo con vértices P=(1,2), Q=(3,5) y R=(6,9)

   da parametrizaciones de las rectas que contienen a:

   a. el lado PQ b. La mediana por Q c. La altura por R.

4. ¿Cuales de estas parametrizaciones corresponden a la misma recta? ¿Y a rectas paralelas?

   U(t) = (t,6-2t) V(r) = (2-3r,6r+2) T(s) = (2s+1,4-4s)

5. Las trayectorias de dos puntos que se mueven en el plano están dadas por

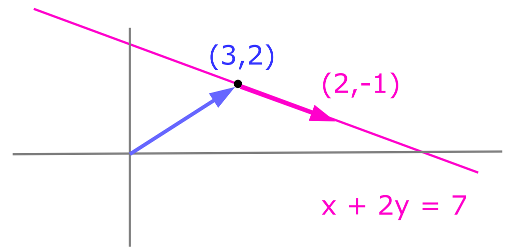
   p(t)=(2+4t,6t-1) y q(t)=(7t+2,5-t)

   a. ¿Que trayectoria sigue el punto medio de los dos puntos?

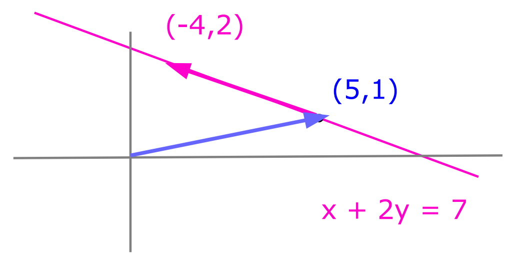
   b. ¿cual de los 3 puntos se mueve mas rápido?

Ecuaciones cartesianas de las rectas.

Las parametrizaciones dan las coordenadas de los puntos de una recta en términos del parámetro, pero también podemos describir a los puntos de la recta por medio de relaciones entre sus coordenadas que no dependen del parámetro.



Ejemplo.
Los puntos de la recta $R(t) = (3,2)+t(2,-1)$ tienen coordenadas $x=2t+3 \quad y=2-t$, que dependen de t, pero x y y también están relacionadas de una manera que no depende de t: sumando x con el doble de y podemos eliminar a t y obtener $x + 2y = 7$.



Si tomamos otra parametrización de la misma recta, como $Z(s) = (5,1) + s(-4,2)$ las coordenadas de los puntos son $x=5-4s \quad y=1+2s$ pero obtenemos de nuevo que $x + 2y = 7$.

Las **ecuaciones cartesianas** de la recta describen a los puntos de la recta por medio de la relación que hay entre sus coordenadas.

Cada recta del plano puede parametrizarse como $R(t)=(a,b)+t(c,d)$ donde (a,b) es un punto de la recta y (c,d) es un vector en la dirección de la recta, así que $x=a+tc$, $y=b+td$. Si multiplicamos a x por d, y multiplicamos a y por c y restamos se eliminan la t's y queda $dx - cy = ad - bc$.

Recíprocamente, cada ecuación de la forma $ax+ by = c$ corresponden a una recta, siempre y cuando $(a,b)\neq(0,0)$. Esto puede verse observando que la ecuación tienen alguna solución (x_1,y_1) y los puntos de la recta parametrizada como
$(x_1,y_1) + t\,(b,-a) = (x_1+tb,y_1-ta)$ satisfacen la ecuación ya que
$ax+ by = a(x_1+tb) + b(y_1-ta) = ax_1+\cancel{t}ab +by_1-\cancel{t}ba = ax_1+by_1 = c$

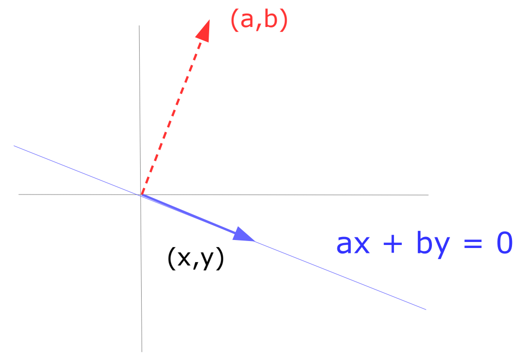
A rectas distintas les corresponden ecuaciones distintas, pero a ecuaciones que se ven distintas les puede corresponder la misma recta.

Ejemplo. Las ecuaciones $3x - 6y = 9$, $2x -4y = 6$, $-x +2y = -3$ corresponden a la misma recta. Todas ecuaciones son equivalentes porque podemos pasar de unas a otras multiplicando por constantes y reacomodando sus términos.

¿Que tan distintas podrán ser las ecuaciones de la misma recta? ¿Como estará codificada la información geométrica de la recta en los coeficientes de la ecuación?

Lema. Las soluciones de la ecuación $ax+by=c$ son los puntos de una recta perpendicular al vector (a,b).

Demostración.

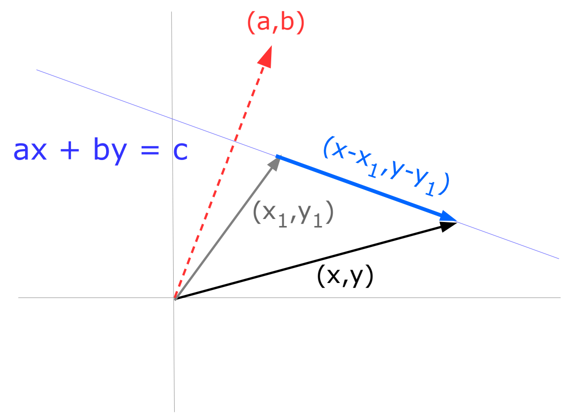


Si $c=0$, la ecuación $ax+by=0$ puede escribirse como

$(a,b) \cdot (x,y) = 0$

así que las soluciones de la ecuación $ax+by=0$

son todos los vectores (x,y) ortogonales a (a,b).



Si $c\neq 0$ y (x_1,y_1) es cualquier solución de la ecuación,

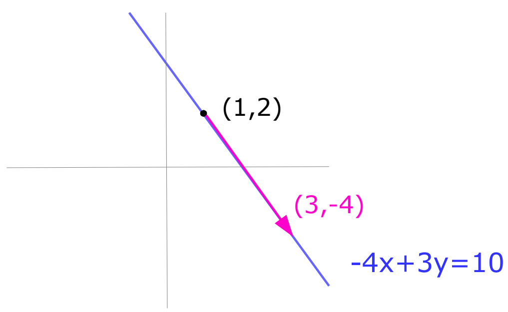
entonces $ax_1+by_1 = c$

y restando esto a la ecuación original queda

$a(x-x_1)+b(y-y_1)= 0$ es decir $(a,b) \cdot (x-x_1,y-y_1) = 0$

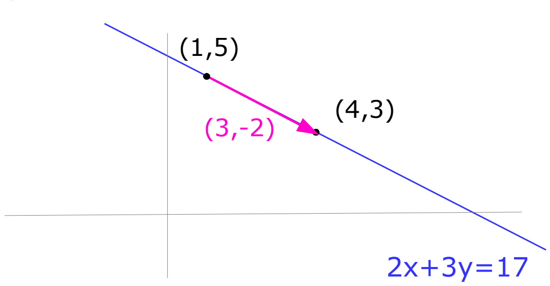
Así que el vector $(x-x_1,y-y_1)$ que apunta de una solución a la otra es ortogonal al vector (a,b). •

Ejemplo. ¿Que ecuación cartesiana cumple la recta que pasa por (1,2) en la dirección (3,-4)?



La recta es perpendicular al vector (4,3), así que tiene una ecuación $4x+3y=C$ para algún C. Como el punto (1,2) esta en la recta $4(1)+3(2)=C$ así que $C=10$ y la ecuación es $4x+3y=10$.

Ejemplo. ¿Que ecuación cartesiana tiene la recta que pasa por P=(4,3) y Q=(1,5)?



La recta tiene dirección P-Q=(3,-2), así que una ecuación es $2x + 3y= C$ donde $2(4) + 3(3) = C$ y la ecuación queda $2x + 3y = 17$.

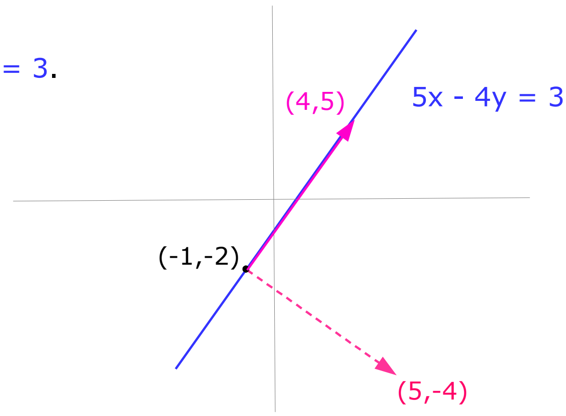
Ejemplo. Da una parametrización de la recta $5x - 4y = 3$.

La recta es perpendicular al vector (5,-4)

así que va en la dirección del vector (4,5).

Un punto en recta es P=(-1,-2) así que una

parametrización es $P(t) = (-1,-2) + t(4,5)$.



Problemas.

6. ¿Que ecuaciones cartesianas satisfacen estas rectas?

   a) La que pasa por (1,2) y (4,3)

   b) $R(t)=(4t+7,2+3t)$

   c) La paralela a $2x+3y=5$ que pasa por (4,1)

   d) La perpendicular a $2x+3y=5$ que pasa por (4,1)

7. Da 3 parametrizaciones distintas de las rectas

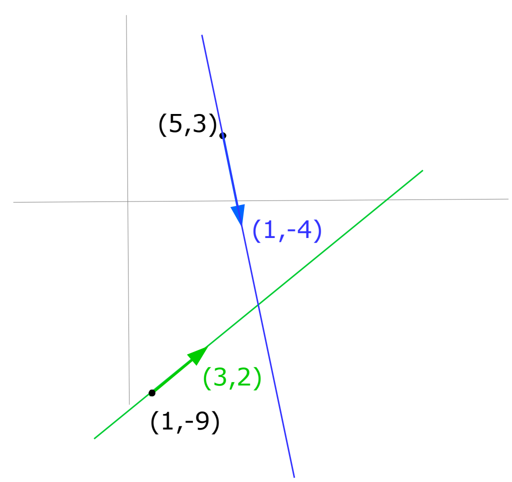
   a. $2x+3y=5$ b. $4y-5x=2$

8. ¿Que ecuación lineal satisfacen los puntos del plano que están a la misma distancia de los puntos (1,2) y (5,4)?

Intersecciones de rectas

Dos rectas en el plano se intersectan siempre que tienen direcciones distintas. Podemos hallar el punto de intersección a partir de las parametrizaciones o las ecuaciones cartesianas de las rectas, resolviendo un sistema de ecuaciones. Para hallar el ángulo de intersección entre las rectas podemos usar el producto punto.

Ejemplo. ¿En que punto y con que ángulo se intersectan las rectas $S(t)=(3t+4,2t-7)$ y $R(s)=(s+5,-4s+3)$?



Para hallar el punto de intersección hay que encontrar valores de t y s tales que $(3t+4,2t-7)=(s+5,-4s+3)$.

Esto da un sistema de ecuaciones lineales:

$3t+4 = s+5$ $\qquad$ $2t -7 = -4s+3$

Podemos despejar s en términos de t en la primera ecuación

$s = 3t-1$ y sustituirlo en la segunda $2t-7 = -4(3t-1)+3 = -12t+7$

así que $14t = 14$ de donde $t = 1$ y $s = 3t-1 = 3-1 = 2$

Así que el punto de intersección es $S(1) = (7,-5) = R(2)$.

El ángulo de intersección de las rectas es el ángulo entre sus vectores de dirección, que son (3,2) y (1,-4):

$\cos\theta = (3,2)\cdot(1,-4)/|(3,2)||(1,-4)|=(3\cdot 1-2\cdot 4)/(3^2+2^2)^{1/2}(1^2+4^2)^{1/2} = -5/\sqrt{13}\sqrt{17}$

$\theta = \arccos(5/\sqrt{13}\sqrt{17}) = \arccos(0.3363) = 1.228$ radianes

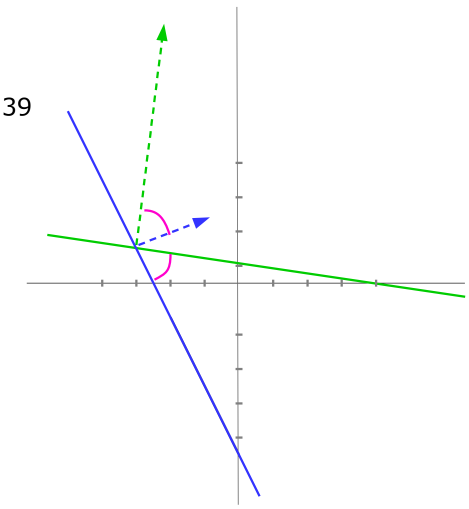
Ejemplo. ¿En que punto y con que ángulo se intersectan las rectas $x+7y=4$ y $2x+y=-5$?

El punto de intersección es la solución del sistema de ecuaciones lineales.

Si despejamos y en en la segunda ecuación obtenemos $y=-2x-5$.

Sustituyendo en la primera obtenemos $x+7(-2x-5) = 4$ es decir $-13x = 39$

o sea $x=-3$, $y=-2(-3)-5=1$ así que las rectas se intersectan en (-3,1).



El ángulo que forman las rectas es igual al ángulo que forman sus vectores normales, que son (1,7) y (2,1):

$\cos\theta = (1,7)\cdot(2,1)/|(1,7)||(2,1)| =$

$=(1\cdot 2+7\cdot 1)/(1^2+7^2)^{1/2}(2^2+1^2)^{1/2} = 9/\sqrt{50}\sqrt{5}$

$\theta = \arccos(9/\sqrt{50}\sqrt{5}) = \arccos(0.56921) = 0.965$ radianes.

Problemas.

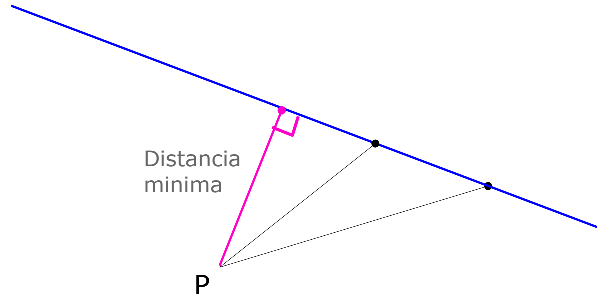
9. ¿En que punto y con que ángulo se cruzan estas rectas?
   a. $x+2y=3$ y $3x-y=4$
   b. $P(t)=(2t-1,-t+2)$ y $Q(s)=(s+3,3s+5)$
   c. $x+2y=3$ y $Q(s)=(4s+1,3s-2)$

10. Si Pedro tiene 2/3 de la edad de Juan, y hace 12 años tenia la mitad de su edad, ¿Que edades tienen Pedro y Juan?

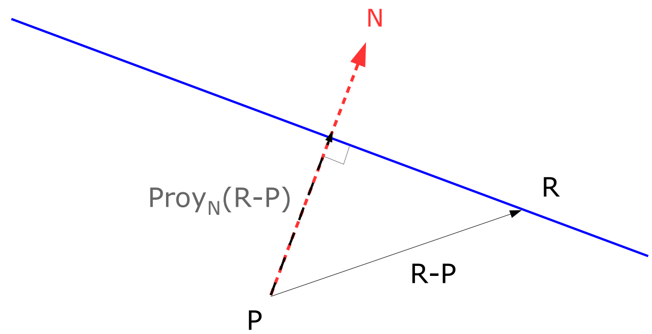
11. Muestra que si se combinan las ecuaciones de dos rectas $Ax+By=C$ y $Dx+Ey=F$ multiplicándolas por constantes y sumándolas, se obtienen las ecuaciones de las rectas que pasan por el punto de intersección de las dos rectas originales, y si no se intersectan se obtienen las ecuaciones de las rectas paralelas.

Distancia de una recta a un punto.

La distancia de una recta a un punto P es la mínima distancia entre un punto de la recta y P. Por el teorema de Pitágoras esta es la longitud del segmento perpendicular a la recta desde P.



El vector que va de P al punto mas cercano en la recta se obtiene proyectando cualquier vector que va de P a un punto de la recta en la dirección del vector N normal a la recta.



$$\mathrm{Proy}_N(R-P) = \frac{(R-P)\cdot N}{N\cdot N}\;N$$

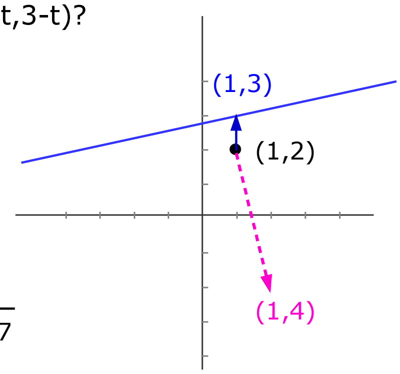
$$\textit{Distancia} = |\mathrm{Proy}_N(R-P)| = \frac{(R-P)\cdot N}{|N|}$$

Ejemplo. ¿Cual es la distancia del punto (1,2) a la recta R(t)=(1+4t,3-t)?

P = (1,2) y un punto de la recta es R=(1,3) , R-P= (0,1)

Un vector normal a la recta es N=(1,4)

La distancia es $|\mathrm{Proy}_{(1,4)}(0,1)| = \dfrac{|(0,1)\cdot(1,4)|}{|(1,4)|} = \dfrac{|0\cdot 1+1\cdot 4|}{\sqrt{1^2+4^2}} = \dfrac{4}{\sqrt{17}}$



Ejemplo. ¿Cual es el punto de la recta R(t)=(1+4t,3-t) mas cercano a (1,2) ?

P = (1,2) y un punto de la recta es R=(1,3) , R-P= (0,1)

Un vector normal a la recta es N=(1,4) así que el punto mas cercano es

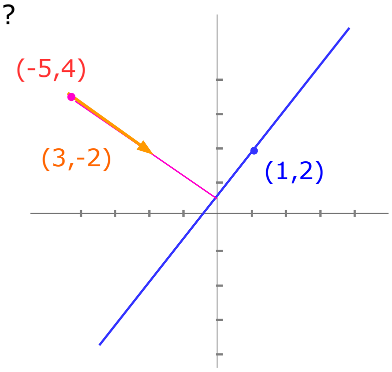
$$(1,2)+\mathrm{Proy}_{(1,4)}(0,1) = (1,2) + \frac{(0,1)\cdot(1,4)}{(1,4)\cdot(1,4)}\,(1,4) = (1,2) + \frac{4}{17}\,(1,4) = (21/17, 50/17)$$

Ejemplo. ¿Cual es la distancia del punto (-5,4) a la recta $3x - 2y = -1$?

Un vector normal a la recta es $N=(3,-2)$.

Un punto de la recta es $R=(1,2)$ y $R-P=(1,2)-(-5,4)=(6,-2)$.

$$D = |\mathrm{Proy}_{(3,2)}(6,-2)| = \frac{(6,-2)\cdot(3,-2)}{|(3,2)|} = \frac{|6\cdot 3+2\cdot 2|}{\sqrt{3^2+2^2}} = 22/\sqrt{13}$$

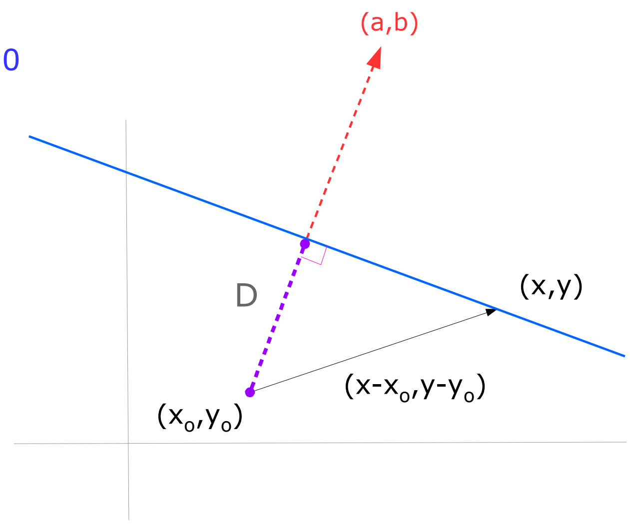


Ejemplo. ¿Cual es el punto de la recta $3x - 2y = -1$ mas cercano a (-5,4)?

$$(-5,4)+\mathrm{Proy}_{(3,2)}(6,-2) = (-5,4) + \frac{(6,-2)\cdot(3,-2)}{(3,-2)\cdot(3,-2)}(3,-2) = (-5,4) + \frac{22}{13}\,(3,-2) = (1/13, 8/13)$$

Lema. La distancia de la recta $ax + by + c = 0$ al punto (x_0,y_0) es

$$D = \frac{|ax_o + by_o + c|}{\sqrt{a^2+b^2}}$$



Demostración.

$D = |\mathrm{Proy}_{(A,B)}(x-x_o,y-y_o)|$

$= |(a,b) \cdot (x-x_o,y-y_o)| / |(a,b)|$

$= |ax + by - ax_o - by_o| / |(a,b)|$

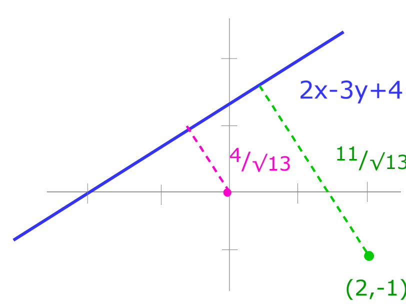
$= |-c - ax_o - by_o| / |(a,b)|$ (ya que $ax+by=-c$ para todos los puntos en la recta)

$= |ax_o + by_o + c| / |(a,b)|$

En particular, la distancia al origen es $|c|/|(a,b)|$ •

Ejemplo. La distancia de la recta $2x-3y+4=0$ al origen es

$D = |c| / |(a,b)| = 4 / \sqrt{2^2+3^2} = 4/\sqrt{13}$.

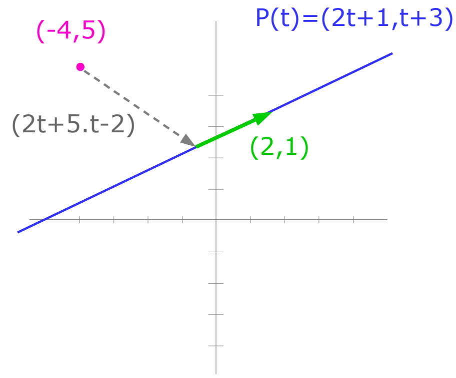


Ejemplo. La distancia de la recta $2x-3y+4=0$ al punto $(2,-1)$ es

$D = |ax_o+by_o+c| / |(a,b)| = |2\cdot 2+(-3)\cdot(-1)+4| / \sqrt{2^2+3^2} = 11/\sqrt{13}$

Ejemplo. Un punto se mueve en el plano siguiendo las trayectoria $P(t)=(2t+1,t+3)$.

¿En que momento estará mas cerca del punto $(-4,5)$?



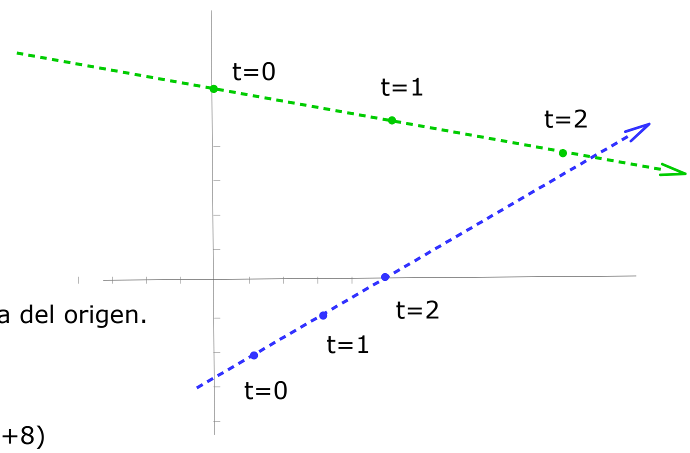
$P(t)=(2t+1,t+3)$ está mas cerca de $(-4,5)$ cuando el vector que apunta de $(-4,5)$ a $P(t)$, que es $P(t)-(-4,5) = (2t+5,t-2)$ es perpendicular a la dirección de la trayectoria $P(t)$ que es $(2,1)$.

Esto ocurre cuando

$0= (2t+5,t-2) \cdot (2,1) = 4t+10+t-2 = 5t+8 = 0$

lo que ocurre cuando $t = -\,^{8}/_{5}$

Ejemplo. Dos puntos P y Q se mueven en el plano siguiendo las trayectorias $P(t)=(2t+1,t-2)$ y $Q(t)=(5t,-t+6)$ respectivamente. ¿En que momento estarán mas cerca uno de otro?



La posición de Q vista desde P está dada por

$D(t) = Q(t) - P(t) = (3t-1,-2t+8)$

Esto muestra que visto desde P, Q se mueve en una trayectoria recta $D(t)$.

$Q(t)$ estará mas cerca de $P(t)$ cuando $D(t)$ esté mas cerca del origen.

Esto ocurre cuando el vector de posición $D(t) = (3t-1,-2t+8)$ es perpendicular al vector de dirección $(3,-2)$, es decir cuando

$0= (3t-1,-2t+8) \cdot (3,-2) = 9t-3+4t-16 = 13t-19$ es decir en $t = \,^{19}/_{13}$

Problemas

12. Calcula la distancia de la recta al punto y encuentra su punto mas cercano.
    a. $P(t)=(3t+2,4t-1)$ al punto $(5,6)$ b. $2x+3y=5$ al punto $(4,1)$

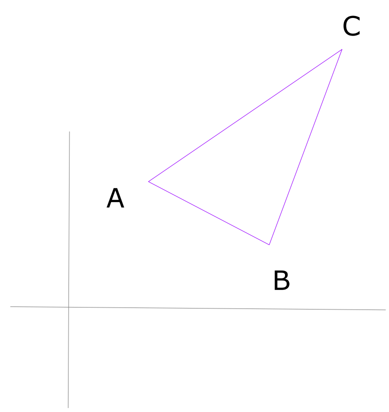
13. La posición de un punto en movimiento está dada por $P(t)=(2t+5,3t-4)$.
    a. ¿En que momento está mas cerca de $(1,2)$? b. ¿Cual es su distancia mínima a $(1,2)$?

14. Las posiciones de dos puntos en movimiento están dadas por $p(t)=(5t-2,t+6)$ y por $q(t)=(t-2,-2t+9)$
    a. ¿En que momento están mas cerca?
    b. ¿Cuales son sus posiciones en el momento de mayor acercamiento?

Problemas de repaso

15. La posición de un punto p en el instante t está dada por $p(t)=(2t+5,4-3t)$
    a. Da la posición de un punto q que sigue a p con 2 unidades de tiempo de retraso.
    b. Da la posición de un punto r que se mueve en la misma trayectoria al doble de velocidad.

16. En el triángulo con vértices $A=(1,2)$, $B=(3,1)$ y $C=(4,4)$ da una parametrización y una ecuación cartesiana para
    a. La mediatriz del lado BC (averiguen que es)
    b. La mediana por A
    c.* La bisectriz por B (averiguen que es)



17. Para el mismo triángulo, calcula
    a. la distancia de A al lado BC
    b. la altura del triángulo sobre el lado AB (sin usar el área).
    c. la distancia de C a la mediana por B.
    d. la distancia de A a la mediatriz de BC.

18. Para el mismo triángulo, encuentra las coordenadas
    a. del baricentro.
    b. del circuncentro (donde se cruzan las mediatrices de los lados).
    c. del punto D tal que ADB y CDB son triángulos rectángulos.