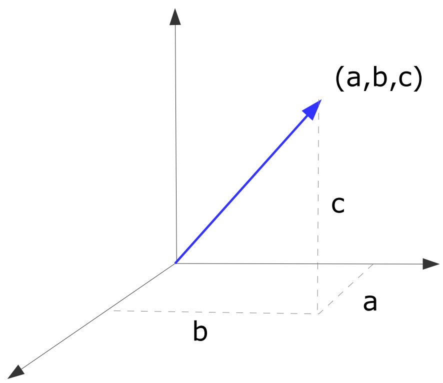
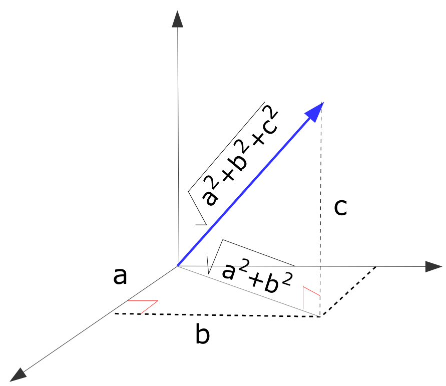
Vectores en el espacio

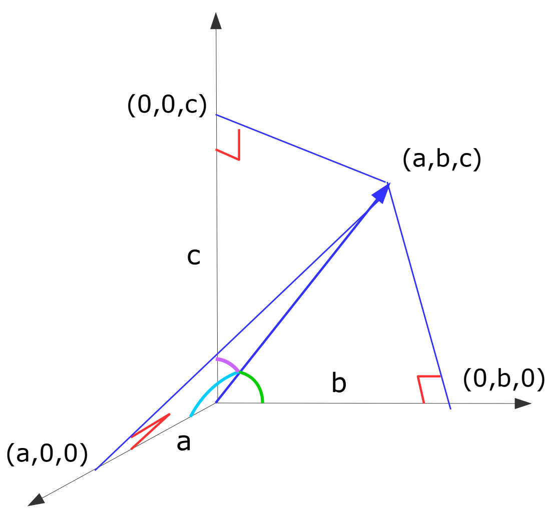
Los puntos y los vectores en el espacio se pueden representar como ternas de números reales



Por el Teorema de Pitagoras, la norma del vector

V = (a,b,c) es $|V| = \sqrt{a^2+b^2+c^2}$





Observar que (aunque no lo parezca) los ángulos rojos son rectos. Por lo tanto los cosenos de los ángulos que el vector (a,b,c) forma con los ejes son

$\cos \alpha = a / |U|$ $\cos \beta = b / |U|$ $\cos \gamma = c / |U|$

Si U es un vector unitario sus coordenadas son los cosenos de los ángulos que forma U con los ejes.

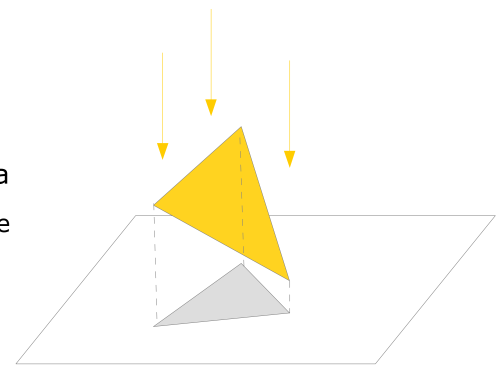
Ejemplos.

- El vector que va de P=(1,5,3) a Q=(6,2,4) es Q-P=(5,-3,1)
- La distancia entre los puntos P y Q es $|Q-P| = \sqrt{5^2+(-3)^2+1^2} = \sqrt{35}$
- Un vector unitario en la dirección del vector V=(1,2,-2) es V/|V| = 1/3 (1,2,-2) = (1/3,2/3,-2/3)
- Los cosenos de los ángulos que el vector (1,2,-2) forma con los ejes son 1/3, 2/3 y -2/3.

Problemas

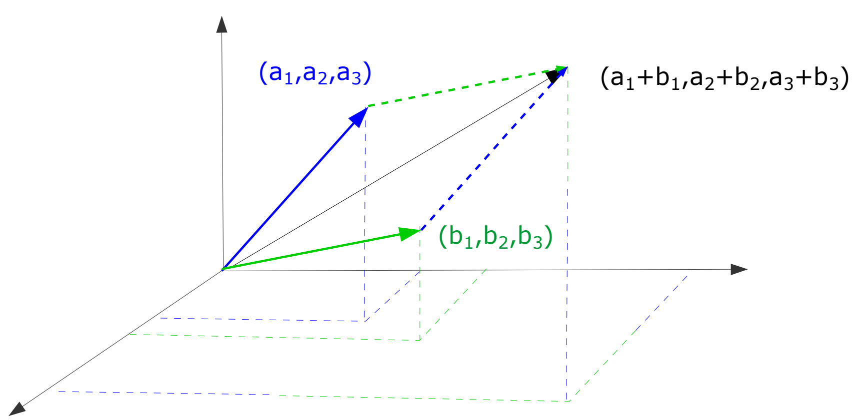
1. Dibuja el triángulo con vértices (3,2,1) (2,0,3) y (-2,1,2).
   Calcula la longitud de sus lados y di si es o no es un triángulo rectángulo.

2. Considera un triángulo Δ en el espacio y la sombra que proyecta en el piso al iluminarse verticalmente. ¿Será posible acomodar a Δ para que su sombra tenga la forma de cualquier otro triángulo? (Dar un argumento que muestre que si es posible o que no lo es, en menos de 1 pagina)



Sumas, múltiplos y combinaciones lineales de vectores.

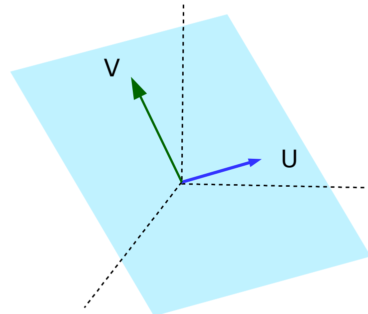
La suma geométrica de vectores en el espacio equivale a la suma algebraica, coordenada a coordenada: Si $U=(a_1, a_2, a_3)$ y $V=(b_1, b_2, b_3)$ entonces $U+V = (a_1+b_1, a_2+b_2, a_3+b_3)$



Los vectores pueden escalarse por un factor k multiplicando cada coordenada por k:
Si $U=(a_1, a_2, a_3)$ entonces $kU = (ka_1, ka_2, ka_3)$. Los múltiplos escalares de U son *colineales*.

Los vectores pueden combinarse multiplicándolos por escalares y sumándolos, el resultado es una *combinación lineal* de esos vectores.

Lema. Si U y V son dos vectores no paralelos en el espacio, las combinaciones lineales de U y V forman un plano.

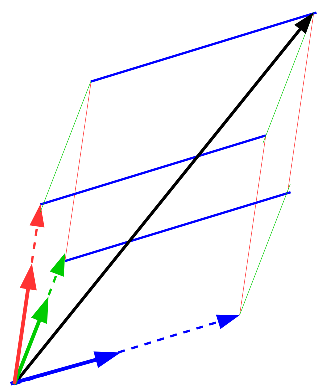


Demostración. Basemos a U y V en el origen, y consideremos al plano que los contiene. Entonces los múltiplos de U y de V están en el plano, y la suma de dos vectores en el plano están en el plano, así que todas las combinaciones lineales de U y V están en el plano.

Y si X es cualquier vector del plano que contiene a U y V, entonces hay un paralelogramo con lados paralelos a U y V con esquinas en el origen y en la punta de X, y X es la suma de los múltiplos de U y V representados por los lados del paralelogramo. •

Tres vectores se llaman *coplanares* si están contenidos en el mismo plano.

Lema. Si U, V y W son 3 vectores no coplanares, entonces cualquier vector en el espacio se puede expresar como combinación lineal de U, V y W.



Demostración. La suma de 3 vectores basados en el mismo punto está dada por la diagonal del paralelepípedo determinado por los 3 vectores.

Dado cualquier vector Z basado en el mismo punto que U, V y W, podemos dibujar por la punta de Z planos paralelos a los generados por U y V, U y W y V y W.
Los 6 planos determinan un paralelepípedo del que Z es una diagonal, sus aristas son múltiplos de U, V y W cuya suma es Z.

•

Problemas.

3. ¿Cuales de estos vectores están en el plano generado por los vectores (1,2,3) y (3,2,1)?

a. (-1,2,5) b. (9,10,11) c. (-5,2,9)

4. ¿Como se descompone la fuerza representada por el vector (0,0,6) como suma de fuerzas en las direcciones de los vectores (5,6,1), (-4,5,0) y (4,7,1)?

5. Muestra analíticamente que cada vector (x,y,z) de R^3 es una combinación lineal de los vectores (1,2,3), (2,-1,1) y (3,0,2).

El Producto interno en el espacio

Podemos definir un producto interior de vectores en el espacio de manera similar a como se hizo en el plano. Si $U = (a_1,a_2,a_3)$ y $V = (b_1,b_2,b_3)$ su producto interno (o producto punto o producto escalar) es el número

$$U \cdot V = a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3$$

Ejemplo. El producto interno de los vectores U=(1,2,3) y V=(4,5,-6) es

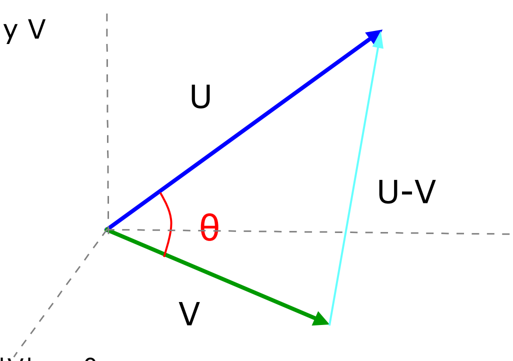
$$U \cdot V = 1\cdot4+2\cdot5-3\cdot6 = 4+10-18 = -4$$

Observar que por su definición, el producto interno tiene las siguientes propiedades:

- $U \cdot V = V \cdot U$ *es conmutativo*
- $U \cdot (V+W) = U \cdot V + U \cdot W$ *se distribuye con la suma*
- $U \cdot \lambda V = \lambda\, U \cdot V$ *saca escalares*

Lema. El producto interno en $\mathbf{R}^3$ tiene el mismo significado geométrico que en $\mathbf{R}^2$:

$U \cdot V = |U||V| \cos\theta$ donde θ es el ángulo que forman U y V



Demostración. Es la misma idea que en el plano:

Si $U = (a_1,a_2,a_3)$ y $V = (b_1,b_2,b_3)$

la ley de los cosenos aplicada a las normas de los vectores da

$|U-V|^2 = |U|^2 + |V|^2 - 2|U||V| \cos\theta$

en coordenadas esto es

$(a_1-b_1)^2+(a_2-b_2)^2+(a_3-b_3)^2 = a_1^2 +a_2^2 +a_3^2 +b_1^2 +b_2^2 +b_3^2 -2|U||V| \cos\theta$

desarrollando y simplificando queda

$$- 2a_1b_1-2a_2b_2-2a_3b_3 = -2|U||V| \cos\theta$$

y dividiendo entre -2 queda

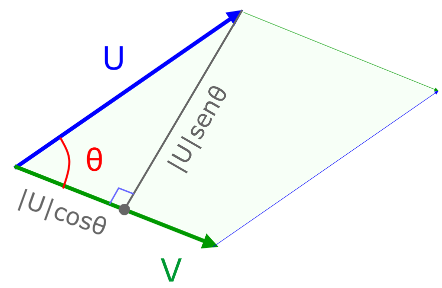
$$a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3 = |U|\ |V| \cos\theta$$

Ejemplo. El ángulo entre los vectores U=(1,2,3) y V=(4,5,-6) esta dado por

$\cos\theta = U\cdot V / |U|\ |V| = (1\cdot4+2\cdot5-3\cdot6) / (1^2+2^2+3^2)^{1/2}(4^2+5^2+6^2)^{1/2} = -3/\sqrt{14}\sqrt{77} = -3/7\sqrt{22}$

El área del paralelogramo generado por dos vectores U y V es

Area = base x altura = $|U||V|$ senθ.



Podemos calcular el área usando el producto interno ya que

$$\underbrace{|U|^2|V|^2 \text{ sen}^2\theta}_{} + \underbrace{|U|^2|V|^2 \cos^2\theta}_{} = |U|^2|V|^2$$

$$\text{Area}^2 \quad + \quad (U\cdot V)^2 \quad = \quad |U|^2|V|^2$$

$$\therefore \quad \text{Area}^2 \quad = \quad |U|^2|V|^2 \; - \; (U\cdot V)^2$$

Ejemplo. El área del paralelogramo generado por los vectores U=(1,2,3) y V=(4,5,-6) es

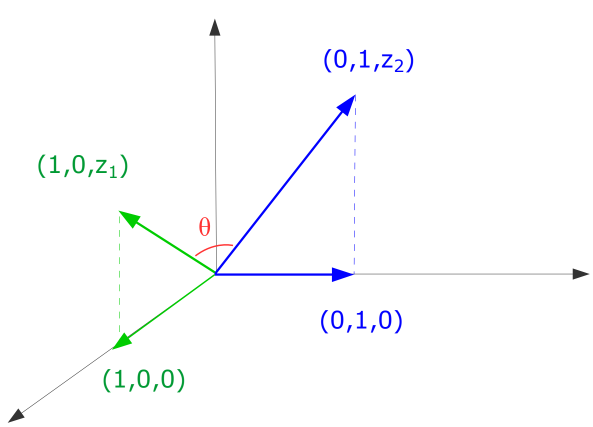
$$\text{Area} = \sqrt{|U|^2|V|^2 - (U\cdot V)^2} = \sqrt{(1^2+2^2+3^2)\,(4^2+5^2+6^2) - (1\cdot 4+2\cdot 5-3\cdot 6)^2} = \sqrt{14\cdot 77 - (-4)^2} = \sqrt{1062} \approx 32.6$$

Problemas

6. Si U=(2,-2,1) y V=(3,1,2), encuentra:
   a. La norma de U y V y el ángulo entre ellos.
   b. Los ángulos que forma U con el eje **x** y con el plano **xy**.

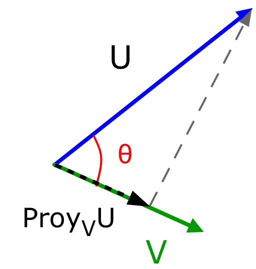
7. Para el triángulo con vértices en A=(1,2,3), B=(2,1,0) y C=(3,1,1)
   a. ¿Cuanto mide el lado mayor?
   b. ¿Cuanto mide el ángulo menor?
   c. ¿Cual es el área del triángulo?
   d. ¿Donde esta su centro de gravedad?

8. Los vectores $(1,0,z_1)$ y $(0,1,z_2)$ se proyectan a dos vectores perpendiculares en el plano xy. Muestra que, dependiendo de como sean z_1 y z_2, los vectores $(1,0,z_1)$ y $(0,1,z_2)$ pueden formar cualquier ángulo θ mayor que 0° y menor que 180°.



Proyecciones

La **proyección ortogonal** de un vector U hacia el vector V es el vector que forma la “sombra” de U al iluminarse perpendicularmente hacia V.



$Proy_V U$ es un múltiplo de V de tamaño $|U|\cos\theta = U\cdot V/|V|$,

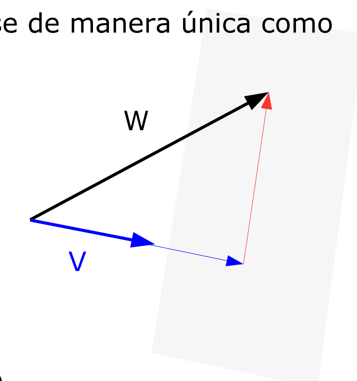
como el vector unitario en la dirección de V es V/|V| entonces

$Proy_V U = (U\cdot V/|V|^2)\ V = (U\cdot V/V\cdot V)\ V$

Ejemplo. La proyección ortogonal de (3,5,7) hacia el vector V=(1,2,2) es

$Proy_V U = (3,5,7)\cdot(1,2,2)\ /(1,2,2)\cdot(1,2,2)\ (1,2,2) = (3\cdot1+5\cdot2+7\cdot2)/(1\cdot1+2\cdot2+2\cdot2)\ (1,2,2) = 27/9\ (1,2,2)$

Lema. Si $V\neq 0$, entonces cada vector W del espacio puede descomponerse de manera única como suma de un vector paralelo y un vector perpendicular a V.



Demostración. Basemos a V y W en el origen. Si P es el plano perpendicular a V que pasa por la punta de W entonces hay un múltiplo V' de V cuya punta esta en el plano. Entonces W= V' + (W-V') donde W-V' es un vector del plano, por lo que es perpendicular a V.

Esto puede verse analíticamente: $V' = Proy_V W = (U\cdot V/V\cdot V)V$ y

$W- Proy_V W$ es perpendicular a V ya que $V \cdot (W - Proy_V W) = V \cdot (W - (U\cdot V/V\cdot V)\ V)$

$= V \cdot W - V \cdot (U\cdot V/V\cdot V)\ V) = = V\cdot W - (U\cdot V/V\cdot V)\ V \cdot V = V\cdot W - W\cdot V = 0$ •

Ejemplo. El vector (3,2,-4) se puede descomponer como suma de un vector paralelo y uno perpendicular a (1,-2,-1).

$Proy_{(1,-2,-1)}(3,2,-4) = [(3,2,-4)\cdot(1,-2,-1)/(1,-2,-1)\cdot(1,-2,-1)]\ (1,-2,-1) = 3/6\ (1,-2,-1) = (1/2,-1,-1/2)$

$(3,2,-4) = (1/2,-1,-1/2) + (3,2,-4)-(1/2,-1,-1/2) = (1/2,-1,-1/2) + (5/2,3,-1/2)$

paralelo a (1,-2—1) *perpendicular a* (1,-2,-1)

ya que es un múltiplo *ya que* (5/2,3,-1/2)·(1,-2,-1)=0

Problemas

9. Si U=(2,-2,1) y V=(3,1,2) encuentra:

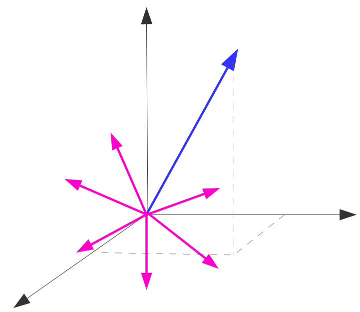
   a. La proyección ortogonal de U hacia (1,0,0) y la proyección ortogonal de (1,0,0) hacia V.

   b. La proyección ortogonal de U hacia V y la proyección ortogonal de V hacia U.

   c. La proyección ortogonal de U hacia *un plano perpendicular* a V.

10. Escribe al vector (0,3,7) como suma de un vector paralelo y otro perpendicular a (1,2,3).

En el espacio tridimensional es fácil hallar vectores ortogonales a un vector dado, porque hay una infinidad de direcciones ortogonales a una dirección dada y hay una infinidad de vectores en cada dirección.



Ejemplo. Hallar varios los vectores ortogonales a (1,2,3).

Los vectores ortogonales a (1,2,3) son los vectores (x,y,z) que satisfacen

$(1,2,3) \cdot (x,y,z) = 0$ o sea $\mathbf{x + 2y + 3z = 0}$

Esta ecuación lineal tiene muchas soluciones, de hecho podemos fijar los valores de dos de las variables y obtener un valor para la tercera, por ejemplo (0,3,-2), (2,-1,0), (1,1,-1).

Lema. Los vectores del espacio ortogonales a un vector U distinto de 0 forman un plano.

Demostración. Intuitivamente esto es claro: si tomamos una escuadra y la giramos alrededor de un lado generamos un plano. Para demostrarlo observemos que si V y W son ortogonales a U, entonces todas las combinaciones lineales de V y W son ortogonales a U (porque su producto punto con U es 0) y estas combinaciones lineales forman un plano P. Si un vector X no esta en P entonces X es una combinación lineal $X=aU+bV+cW$ con $a\neq 0$, por lo tanto $X\cdot U = (aU+bV+cW)\cdot U = aU\cdot U+bV\cdot U+cW\cdot U = |U|^2a+0b+0c = a\,|U|^2 \neq 0$ así que X no es ortogonal a U. •

Ejemplo. Como los vectores (0,3,-2) y (2,-1,0) son ortogonales a (1,2,3), los vectores del espacio ortogonales a (1,2,3) son los de la forma $a(0,3,-2)+ b(2,-1,0) = (2b,3a-b,-2a)$ para $a,b \in \mathbf{R}$.

Siempre es posible hallar un vector ortogonal a dos vectores dados, pero no es tan fácil porque solo hay una dirección ortogonal a dos direcciones distintas.

Ejemplo. Hallar todos los vectores ortogonales a (1,2,3) y a (4,5,6)

Los vectores ortogonales a (1,2,3) y (4,5,6) son los vectores (x,y,z) que satisfacen

$(1,2,3) \cdot (x,y,z) = 0$ y $(4,5,6) \cdot (x,y,z) = 0$ o sea, las soluciones del sistema

$\mathbf{x + 2y + 3z = 0}$ **y** $\mathbf{4x + 5y + 6z = 0}$

Adivinar una solución en este caso no es fácil: hay que resolver el sistema de ecuaciones.

Restando a la segunda ecuación el doble de la primera ecuación podemos eliminar a **z** y queda $\mathbf{2x + y = 0}$

Restando al cuádruple de la primera ecuación la segunda podemos eliminar a **x** y queda $\mathbf{3y + 6z = 0}$

O sea que $\mathbf{y = -2x}$ y $\mathbf{y=-2z}$ y los valores de **x** y **z** están determinados por los valores de **y**: si hacemos por ejemplo $\mathbf{y = 2}$ entonces queda $\mathbf{x =-1}$ y $\mathbf{z = -1}$ así que un vector ortogonal a (1,2,3) y a (4,5,6) es (-1,2,-1) y todos los otros vectores ortogonales son múltiplos de (-1,2,-1).

Lema. Las soluciones de la ecuación $a\mathbf{x + by + cz = 0}$ forman un plano perpendicular al vector (a,b,c)

Demostración. La ecuación puede escribirse como $(a,b,c)\cdot(x,y,z) = 0$, cuyas soluciones son los vectores ortogonales a (a,b,c), que forman un plano. •

Problemas

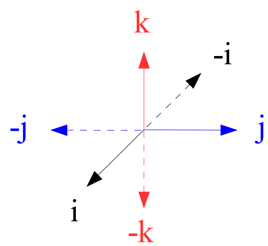
11. a. Encuentra un vector ortogonal a (1,2,3) de la forma (1,2,c) para alguna c
    b. Encuentra tres vectores ortogonales a (1,2,3) de la forma (1,b,c)

12. Encuentra un vector que sea ortogonal a (1,5,2) y (3,-1,4) usando solo el producto punto.

13. Demuestra que si V es un vector distinto de 0, entonces hay una única manera de escribir a cada vector U como suma de un vector paralelo y otro ortogonal a V.

El Producto vectorial (o producto cruz) de vectores en el espacio.

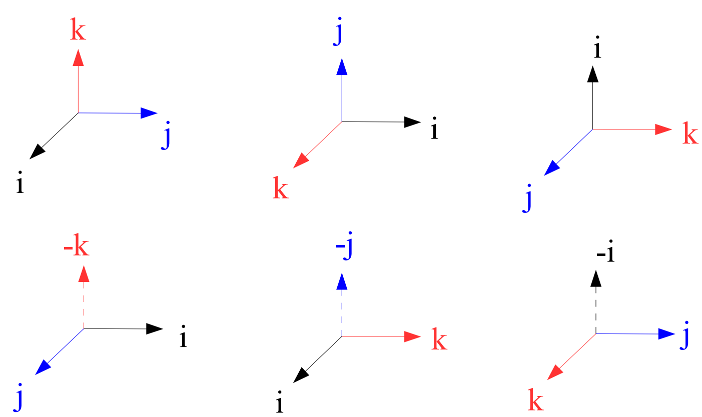
En el espacio es posible definir un producto de dos vectores U y V cuyo resultado es un vector con un significado geométrico independiente de las coordenadas. De hecho, podemos definir el producto de modo que U x V sea ortogonal a U y V, y que se comporte bien respecto a la suma de vectores y el producto por escalares.



Los vectores que forman la base canónica de R^3 se denotan por i, j, k:

i = (1,0,0) j = (0,1,0) k = (0,0,1).

Si observamos a los vectores i, j y k desde distintas posiciones observamos que k esta situado respecto a i y j de la misma manera que j esta situado respecto a k y i, y de la misma manera que i esta situado respecto a j y k. Pero k esta situado respecto a j y i como -k esta situado respecto a i y j.



Así que si queremos definir un producto de vectores que sea independiente de las coordenadas, los productos i x i y i x j determinan todos los otros productos entre vectores básicos.
Una posible selección es i x i = 0 y i x j = k, entonces:

i x i = 0	j x j = 0	k x k = 0
i x j = k	j x k = i	k x i = j
j x i = -k	k x j = -i	i x k = -j

Esta selección es natural, porque si el producto U x V es independiente de las coordenadas y saca escalares, es decir aU x bV = ab (U x V), entonces:

- i x i debe ser un múltiplo de i, ya que al girar alrededor del eje x, i no se mueve y por lo tanto el producto i x i no debería moverse, así que i x i = ai. Pero si rotamos 180° alrededor del eje z, i se mueva a -i y el producto ai debería moverse a -ai, pero -i x -i = i x i así que -ai = ai y entonces a=0.
- i x j debe ser perpendicular a i y j, ya que al rotar 180° alrededor del eje z, i y j se mueven a -i y -j . Por lo tanto -i x -j debe obtenerse rotando 180° a i x j alrededor del eje z. Pero -i x -j = i x j, así que el vector i x j no cambia al rotarlo 180° alrededor del eje z, y esto solo puede ocurrir si esta contenido en el eje z. Por lo tanto i x j =ak para algún a.

Si queremos que el producto preserve sumas de vectores y producto por escalares, entonces para $U = a_1i + b_1j + c_1k$ y $V = a_2i + b_2j + c_2k$ debemos tener

$$\begin{aligned} U \times V &= (a_1i + b_1j + c_1k) \times (a_2i + b_2j + c_2k) = a_1a_2\, i \times i + a_1b_2\, i \times j + a_1c_2\, i \times k + \\ &\quad + b_1a_2\, j \times i + b_1b_2\, j \times j + b_1c_2\, j \times k + \\ &\quad + c_1a_2\, k \times i + c_1b_2\, k \times j + c_1c_2\, k \times k \\ &= a_1b_2\, k - a_1c_2\, j + b_1a_2\, k + b_1c_2\, i + c_1a_2\, j - c_1b_2\, i \end{aligned}$$

Así que usando coordenadas el producto vectorial (o producto cruz) es:

$$(a_1,b_1,c_1) \times (a_2,b_2,c_2) = (b_1c_2 - b_2c_1\, ,\, c_1a_2 - c_2a_1\, ,\, a_1b_2 - a_2b_1)$$

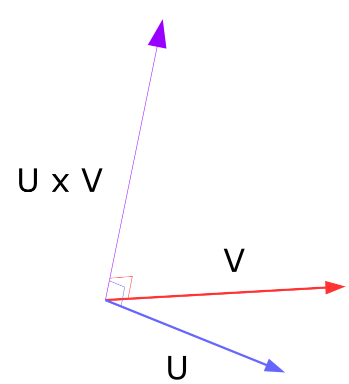
Notar que en cada coordenada aparecen los productos cruzados de las otras dos coordenadas, en orden cíclico: bc,ca,ab.

Ejemplo. Si U = (1,2,3) y V = (4,5,6) entonces
U x V = (2·6 -5·3, 3·4 -6·1, 1·5 -4·2) = (-3,6,-3)

Ejemplo. Si U = (a,b,c) es cualquier vector entonces
U x U = (bc - bc, ca - ca, ab - ab) = (0,0,0).

El producto vectorial tiene las siguientes propiedades algebraicas:

- U x U = 0
- V x U = - (U x V)
- U x (V+W) = U x V + U x W
- U x λV = λU x V = λ (U x V)



Estas propiedades son inmediatas de la definición.

Veamos ahora algunas propiedades geométricas del producto.

Teorema. U x V es un vector perpendicular a U y V.

Demostración. Si $U=(a_1,b_1,c_1)$ y $V=(a_2,b_2,c_2)$ entonces

$U \cdot (U \times V) = (a_1,b_1,c_1) \cdot (b_1c_2 - b_2c_1\ ,\ c_1a_2 - c_2a_1\ ,\ a_1b_2 - a_2b_1) =$

$$= a_1b_1c_2 - a_1b_2c_1 + b_1c_1a_2 - b_1c_2a_1 + c_1a_1b_2 - c_1a_2b_1 = 0$$

Así que U es perpendicular a U x V. De igual manera se prueba que V es perpendicular a U x V. •

Ejemplo. Encontrar un vector perpendicular a los vectores U=(1,2,3) y V=(4,5,6).

Su producto cruz es

$(1,2,3) \times (4,5,6) = (2\cdot6 - 5\cdot3,\ 3\cdot4 - 6\cdot1,\ 1\cdot5 - 2\cdot4) = (-3,6,-3)$.

Podemos comprobar que el resultado es ortogonal calculando su producto punto:

$(1,2,3) \cdot (-3,6,-3) = 1(-3)+2(6)+3(-3) = -3 + 12 - 9 = 0$

$(4,5,6) \cdot (-3,6,-3) = 4(-3)+5(6)+6(-3) = -12 + 30 - 18 = 0$

Ejemplo. Encontrar dos vectores perpendiculares a (1,2,3) que sean perpendiculares entre si.

Hallar el primero es fácil, ya que hay muchas direcciones posibles, basta con hallar un vector cuyo producto interior con (1,2,3) sea 0, como (1,1,-1). Encontrar el segundo es mas difícil porque solo hay una dirección posible. Podemos hallarla tomando el producto cruz de los dos:

$(1,2,3) \times (1,1,-1) = (-21-13,31+11,11-12) = (-5,4,-1)$.

Lema. U x V = (0,0,0) si y solo si U y V son paralelos.

Demostración. U x V = (0,0,0) si y solo si se cumplen las siguientes igualdades

$b_1c_2 - b_2c_1 = 0 \quad\Leftrightarrow\quad b_1/b_2 = c_1/c_2$

$c_1a_2 - c_2a_1 = 0 \quad\Leftrightarrow\quad c_1/c_2 = a_1/a_2$

$a_1b_2 - a_2b_1 = 0 \quad\Leftrightarrow\quad a_1/a_2 = b_1/b_2$

Y $\quad a_1/a_2 = b_1/b_2 = c_1/c_2 = k \quad\Leftrightarrow\quad (a_1,b_1,c_1) = k\,(a_2,b_2,c_2) \quad\Leftrightarrow\quad (a_1,b_1,c_1) \,//\, (a_2,b_2,c_2)$ •

Lema. $|U \times V| = |U||V|\ \text{sen}\theta$, que es el área del paralelogramo determinado por U y V.

Demostración.

El área del paralelogramo es $|U||V|\ \text{sen}\theta$ y sabemos que

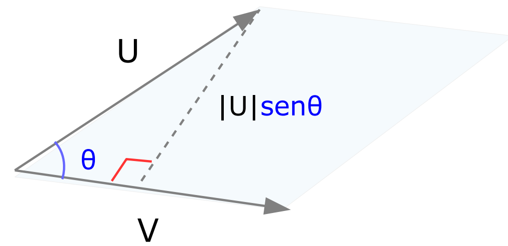
$U\cdot V = |U||V| \cos\theta$.

Como $\cos^2\theta + \text{sen}^2\theta = 1$,

entonces ver para que $|U\times V| = |U||V|\ \text{sen}\theta$

basta mostrar que $(U\cdot V)^2 + |U\times V|^2 = |U|^2|V|^2$

Para esto hay que calcular las tres magnitudes usando coordenadas lo cual es una cuenta muy larga... •



Ejemplo. Si $U = (1,2,3)$ y $V = (4,5,6)$

$U \cdot V = 1{\cdot}4+2{\cdot}5+3{\cdot}6 = 32$ y $U \times V = (2{\cdot}6-5{\cdot}3,\ 4{\cdot}3-6{\cdot}1,\ 1{\cdot}5-4{\cdot}2) = (-3,6,-3)$

$|U|^2|V|^2 = 14{\cdot}77$ $(U \cdot V)^2 = 32^2$,

$|U \times V|^2 = 3^2+6^2+3^2 = 54$ y $32^2 + 54 = 1078 = 14{\cdot}77$

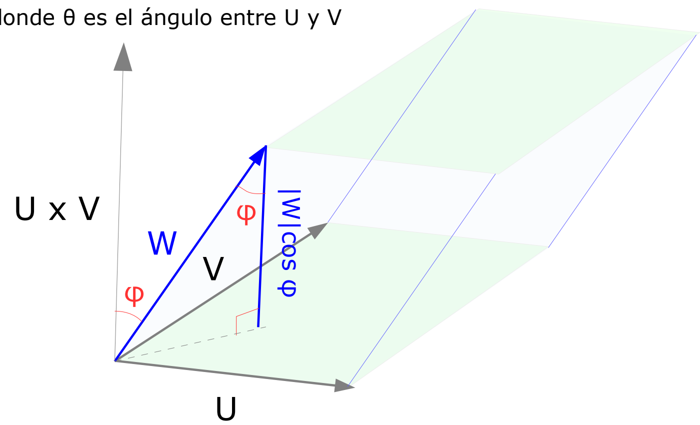
El producto cruz y el producto punto se pueden combinar para obtener otro producto importante, llamado el **triple producto escalar**, definido como el escalar $(U \times V) \cdot W$.

Lema. $(U \times V) \cdot W$ es el volumen (con signo) del paralelepípedo determinado por los vectores U, V y W.

Demostración.

$|(U \times V) \cdot W| = |U \times V||W| \cos\varphi$ donde φ es el ángulo entre $U \times V$ y W

$= \underbrace{|U||V|\operatorname{sen}\theta}_{\text{área base}} \cdot \underbrace{|W|\cos\varphi}_{\text{altura}}$ donde θ es el ángulo entre U y V



El signo depende de en que lado del plano UV se encuentre W.

Ejemplos.

- El área del paralelogramo determinado por (1,2,3) y (4,5,6) es $|(1,2,3) \times (4,5,6)| = |(3,6,-3)| = \sqrt{54}$
- El volumen del paralelepípedo determinado por (1,2,3), (4,5,6) y (7,8,9) es $(1,2,3) \times (4,5,6) \cdot (7,8,9) = (3,6,-3) \cdot (7,8,9) = 3{\cdot}7 + 6{\cdot}8 - 3{\cdot}9 = 42$

Problemas

14. Encuentra un vector perpendicular a (4,5,6) y (7,8,9)

15. Si U=(2,1,3), V=(1,4,2) y W=(1,-1,-2) calcula:

a) U x V	c) (U x V) · W	e) (U x V) x W
b) V x U	d) U · (V x W)	f) U x (V x W)

16. Encuentra 2 vectores perpendiculares a (2,-5,3) que sean perpendiculares entre si.

17. Muestra que U x V está en el plano xy si y solo si las sombras de U y V en el plano xy son paralelas.

18. Calcula el área del paralelogramo generado por los vectores (1,2,3) y (2,1,3) usando el producto cruz.

19. Calcula el volumen del paralelepípedo generado por los vectores (1,2,3), (2,1,3) y (3,1,2).

20. Demuestra que $|U \times V|^2 + |U \cdot V|^2 = |U|^2|V|^2$ y que por lo tanto $|U \times V|=|U||V||\operatorname{sen}\theta|$ donde θ es el ángulo que forman U y V.

21. Muestra que el producto vectorial no es asociativo, es decir que U x (V x W) y (U x V) x W no tienen que ser iguales (basta dar un ejemplo sencillo).

22. Muestra que U · (V x W) = (U x V) · W.