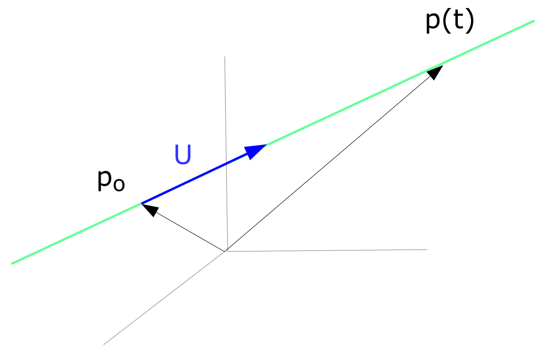
Rectas y planos en el espacio



Los puntos de cualquier recta en el espacio son de la forma $p(t)=p_o+tU$ donde p_o es punto de la recta y U es un vector en la recta.

Esta es una **parametrizacion** de la recta (todos los puntos están en función del parámetro t). Cada recta tiene una infinidad de parametrizaciones, ya que podemos empezar en cualquier punto de la recta y usar cualquier vector en la dirección de la recta.

Ejemplo. La recta que pasa por (1,4,2) y (3,0,5) tiene la dirección del vector (3,0,5)-(1,4,2)= (2,-4,3)

asi que puede parametrizarse como $P(t) = (1,4,2) + t\,(2,-4,3) = (2t+1,-4t+4,3t+2)$

Para hallar otros puntos en la recta, basta darle distintos valores al parámetro, por ejemplo:

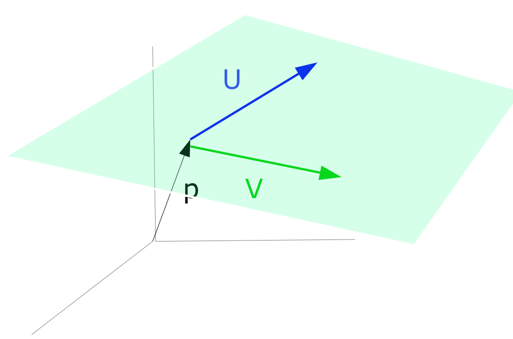
$p(2) = (-1,16,-7)$ $p(-1) = (5,-8,11)$.

La recta tiene muchas otras parametrizaciones, como $P(s) = (3,0,5) + s\,(-4,8,-6) = (-2s+3,8s,-6s+5)$.

Ejemplo. Los puntos de la forma $p(t) = (1+2t,4t+5,3-3t)$ forman una recta ya que pueden escribirse como

$p(t) = (1,5,3)+t(2,4,-3)$ que pasa por el punto (1,5,3) y tiene la dirección del vector (2,4,-3)

Para saber si un punto está en la recta hay que ver si corresponde a algún valor del parámetro.
Por ejemplo, (-3,12,-4) esta en la recta porque cuando t=-2, $p(t)=(2(-2)+1,-4(-2)+4,3(-2)+2)=(-3,12,-4)$.



Los puntos de un plano en el espacio son de la forma

$p(t) = p+tU+sV$

donde p_o es un punto del plano y U y V son dos vectores no paralelos en el plano.

Cada plano tiene una infinidad de parametrizaciones, ya que podemos tomar a cualquier punto del plano y a cualquier par de vectores no paralelos.

Ejemplo. Para dar una parametrización del plano que pasa por (1,0,0) y (0,2,0) y (0,0,3) necesitamos dos vectores no paralelos en el plano. Podemos tomar las diferencias (0,2,0)-(1,0,0) = (-1,2,0) y (0,0,3)-(1,0,0) = (-1,0,3) y la parametrización es P(s,t)=(1,0,0)+s(-1,2,0)+t(-1,0,3)=(1-s-t,2s,3t)

- El mismo plano admite muchas parametrizaciones distintas, como
  Q(u,v) = (0,2,0)+u(1,0,-3)+v(0,-2,3) = (u,2-2v,-3u+3v)
- Los puntos del plano se relacionan de manera independiente de los parámetros:

$x = 1-s-t \longrightarrow x = 1 - y/2 - z/3$

$y = 2s \longrightarrow s = y/2$

$z = 3t \longrightarrow t = z/3$

$\longrightarrow$ **6x +3y + 2z =6**

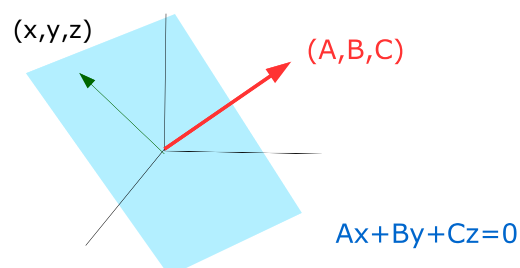
esta es una ecuación ecuación cartesiana del plano.

Ejemplo. El conjunto {(3t+s+1,2t-s-2,t-2s+4) / s,t ∈ R} es un plano, ya que sus puntos se pueden escribir como p(t,s) = (1,2,-4)+t(3,1,0)+s(1,-1,2), que esun vector fijo mas combinaciones lineales de dos vectores independientes. Para ver si un punto está en el plano basta ver si hay valores de los parámetros que lo den.

Teorema. Las soluciones de cada ecuación lineal **Ax+By+Cz=D** forman un plano, y cada plano en el espacio esta formado por las soluciones de una ecuación lineal.

Demostración

Si D= O, la ecuación Ax+By+Cz = 0 puede escribirse como (A,B,C)·(x,y,z)=0 , así que sus soluciones corresponden a los vectores (x,y,z) que son perpendiculares a (A,B,C) y estos vectores forman un plano.



Consideremos ahora la ecuación Ax+By+Cz = D con D≠0.

Si (x_0,y_0,z_0) es una solución particular de la ecuación, es decir si $Ax_0+By_0+Cz_0 = D$

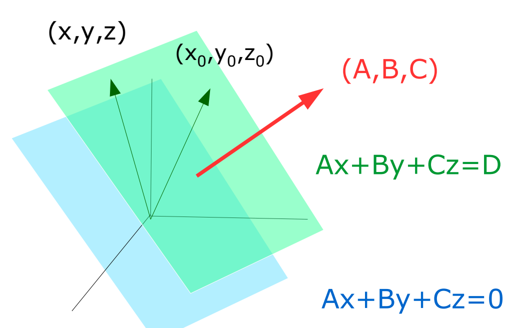
entonces para cualquier otra solución (x,y,z)

$A(x-x_0)+B(y-y_0)+C(z-z_0) = 0$

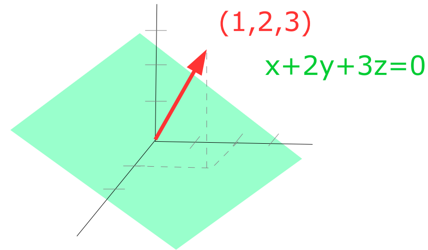
En este caso ya sabemos que los vectores

$(x-x_0,y-y_0,z-z_0)$ forman un plano, y los puntos (x,y,z) se obtienen sumándoles el vector fijo (x_0,y_0,z_0).

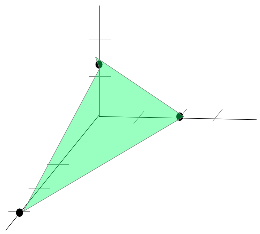
Así que las soluciones de Ax+By+Cz = D forman un plano que se obtiene trasladando a Ax+By+Cz = 0 por el vector (x_0,y_0,z_0).



Ejemplo. Dibuja el plano **x+2y+3z=0**.



Un punto del plano es (0,0,0) y un vector normal es (1,2,3), podemos dibujar este vector y luego un plano por el origen perpendicular a el.



Ejemplo. Las soluciones de la ecuación **x+2y+3z=4** forman un plano paralelo a **x+2y+3z=0** ya que es perpendicular al mismo vector (1,2,3). Podemos dibujar al plano hallando sus intersecciones con los ejes coordenados, que son (4,0,0), (0,2,0) y (0,0,4/3).

Ejemplo. ¿Que ecuación cartesiana cumplen los puntos del plano p(t,s) = (3t+s+1,2t-s-2,t-2s+4) s,t $\in$ **R** ?

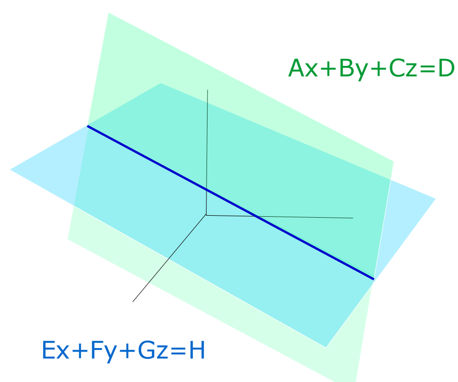
$$\begin{aligned} x &= 3t + s + 1 \\ y &= 2t - s - 2 \\ z &= t - 2s + 4 \end{aligned} \quad \longrightarrow \quad \begin{aligned} x + y &= 5t - 1 \\ -2y + z &= -3t + 8 \end{aligned} \quad \longrightarrow \quad 3(x+y) + 5(-2y+z) = 3(5t-1)+5(-3t+8)$$

$$\mathbf{3x -7y +5z = 37}$$

Otra manera de obtener la ecuación es observando que el vector (3,2,1)x(1,-1-,2) = (-3,7,-5) es perpendicular al plano, así que el plano tiene ecuación **-3x+7y-5z = D**. Como el punto (1,-2,4) debe estar entonces -3·1+7·(-2)-5·4 = D y la ecuación del plano es **-3x+7y-5z =-37**.

¿El punto (6,1,4) esta en el plano? Podríamos tratar de ver si existen s y t tales que P(s.t)=(6,1,4) pero es mucho mas fácil ver si el punto cumple la ecuación: 3(6)-7(1)+5(4) = 31 $\neq$ 37 así que no.

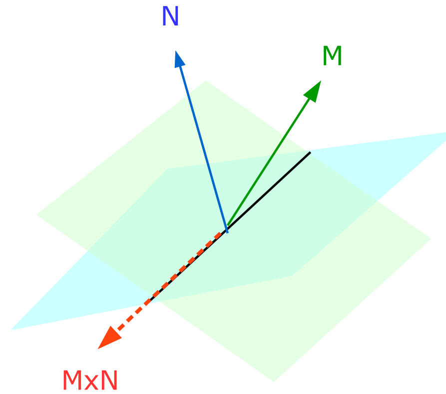
Si las ecuaciones lineales en el espacio corresponden a planos ¿entonces como son las ecuaciones de las rectas? Cada recta esta contenida en muchos planos, así que sus puntos deben satisfacer las ecuaciones de cada uno de esos planos. Y como la recta es la intersección de dos planos, bastan dos ecuaciones lineales para determinarla.



Ejemplos.

- Los puntos de la recta (t+1,2t+4,-3t+2) satisfacen varias ecuaciones simultáneamente: por ejemplo **2x-y=-2**, **3x +z=5**, **3y+2z=16**, **x+y+z=7**. Cada una representa un plano que contiene a la recta, así que cualesquiera dos de estas ecuaciones la determinan a la recta.
- ¿Que ecuaciones cartesianas satisface la recta que pasa por (1,2,3) y (6,5,4)? Los planos que contienen a la recta son los que tienen vectores perpendiculares al vector de dirección de la recta, que es (5,3,1). Si tomamos dos de ellos, como (1,-1,-2) y (-1,2,1), sus planos normales que pasan por (1,2,3) son **x –y -2z = -7** y -**x +2y +z = 6** y estas dos ecuaciones determinan a la recta.

Dos planos no paralelos se intersectan en una recta. Si M y N son vectores normales a los planos, entonces la recta de intersección es perpendicular a M y a N, así que la recta debe tener la dirección del vector MxN.



Ejemplos.

- ¿Que dirección tiene la recta de intersección de los planos **x+2y-3z=4** y **3x-y+4z=2**?

  Como la recta de intersección esta en los dos planos, su dirección debe ser perpendicular a los dos vectores perpendiculares a los planos, que son (1,2,-3) y (3,-1,4) así que la recta debe tener la dirección del vector (1,2,-3) x (3,-1,4) = (5,-13,-7).

- Para dar una parametrización de la recta de intersección basta hallar un punto de la recta y su dirección.

Problemas

1. Da una parametrización de la recta que pasa por (4,1,2) y (1,-2,3) y dí que ecuaciones cartesianas cumple. ¿En que puntos cruza la recta a los planos **x=0**, **y=0** y **z=0**?
2. Da una parametrización para el plano que pasa por los puntos (9,5,2), (1,7,3) y (6,4,8) y dí que ecuación cartesiana cumple. ¿En que puntos intersecta el plano a los ejes x, y, z?
3. Dibuja el plano **2x-3y+4z=12**.
4. Da parametrizaciones de 3 rectas distintas en el plano **x+2y+3z=4**.
5. Da las ecuaciones cartesianas de 3 planos distintos que contengan a la recta p(t)=(t+2,3t+4,5t+6).
6. Da una parametrización de la recta de intersección de los planos

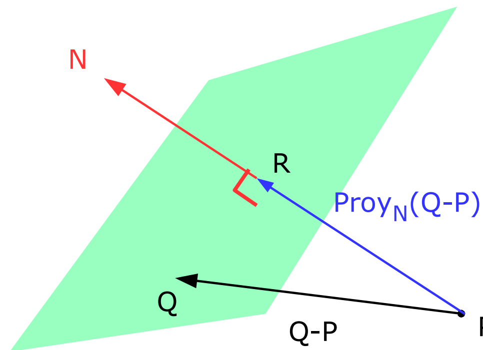
   x+2y−z=3 y **4x−y+3z=1**
7. ¿En que punto se intersectan la recta que pasa por (1,2,3) y (4,5,6) y el plano que pasa por (0,2,1), (3,0,4) y (-1,3,0)?

Distancias y ángulos

La distancia de un punto P a un plano es la mínima distancia de P a algún punto del plano.

Si Q es cualquier punto del plano entonces la proyección del vector Q-P en la dirección del vector N normal al plano es un vector que va de P al plano, y que es mas corto o igual que Q-P. Por lo tanto

$$\text{Distancia} = |\text{Proy}_N(Q-P)|$$



El punto R del plano que esta mas cerca de P es

$$R = P + \text{Proy}_N(Q-P).$$

Ejemplos.

- ¿Cual es la distancia del punto P=(1,4,2) al plano **3x+2y-z=4**?

  Un punto del plano es Q=(1,1,1) y un vector normal al plano es N=(3,2,-1)

  $\text{Distancia}= |\ \text{Proy}_N(Q-P)\ | = |\ \text{Proy}_{(3,2,-1)}(1-1,1-4,1-2)\ | =$

  $= |{}^{(3,2,-1)\cdot(0,-3,-1)}/_{(3,2,-1)\cdot(3,2,-1)}(3,2,-1)| = |-\,{}^{5}/_{14}\,(3,2,-1)| = 5/\sqrt{14}$.

- ¿Cual es el punto del plano **3x+2y-z=4** mas cercano a (1,4,2)?

  Un punto del plano es Q=(1,1,1) y el vector N=(3,2,-1) es normal al plano. El punto mas cercano es

  $R = P + \text{Proy}_N Q\text{-}P = (1,4,2) + \text{Proy}_{(3,2,-1)}(0,-3,-1) = (1,4,2) - {}^{5}/_{14}\,(3,2,-1) = ({}^{-1}/_{14},{}^{46}/_{14},{}^{33}/_{14}).$

- Otra manera de obtener el punto mas cercano es observando que la recta perpendicular al plano que pasa por P tiene parametrización P(t) = P + tN = (1,4,2) + t (3,2,-1) = (3t+1,2t+4,-t+2)

  El punto donde la recta cruza al plano se encuentra donde cumple la ecuación 3x+2y-y=4, es decir donde 3(3t+1)+2(2t+4)-1(-t+2)=4, o sea 9t+3+4t+8+t-2=4, 14t=-5, t=- ${}^{5}/_{14}$ que da el punto

  $P(-{}^{5}/_{14}) = (3(-{}^{5}/_{14})+1,2(-{}^{5}/_{14})+4,-(-{}^{5}/_{14})+2) = (-{}^{1}/_{14},{}^{46}/_{14},{}^{33}/_{14}).$

Lema. La distancia del punto (x_0,y_0,z_0) al plano **Ax+By+Cz+D=0** es $|Ax_0+By_0+C_0+D| / \sqrt{A^2+B^2+C^2}$

Demostración. La distancia es $|\text{Proy}_{(A,B,C)}(x_0-x, y_0-y, z_0-z)| = |(x_0-x, y_0-y, z_0-z)\cdot(A,B,C)| /|(A,B,C)| = |Ax_0+By_0+C_0-Ax-By-Cz|/|(A,B,C)| = |Ax_0+By_0+C_0+D| / \sqrt{A^2+B^2+C^2}$ •

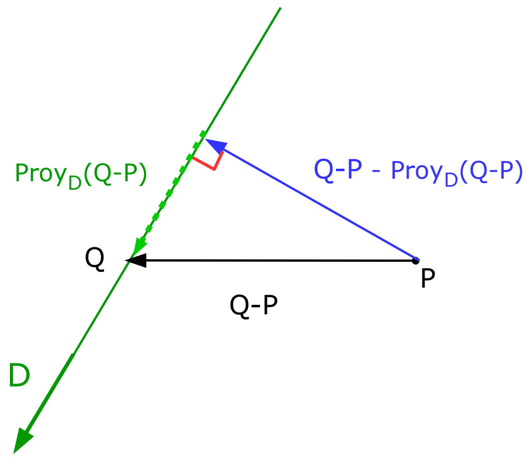
Ejemplo. La distancia del punto (1,4,2) al plano 3x+2y-z=4 es $|3(1)+2(4)-1(2)-4| / \sqrt{3^2+2^2+4^2} = 5/\sqrt{14}$

La distancia de un punto P a una recta es la distancia de P al punto de la recta mas cercano a P.
Si la recta tiene dirección D y Q es cualquier punto de la recta, entonces el vector

$V = (Q-P) - Proy_D(Q-P)$ es perpendicular a la recta y por lo tanto da la distancia mas corta de P a la recta.

El punto de la recta mas cercano a P es

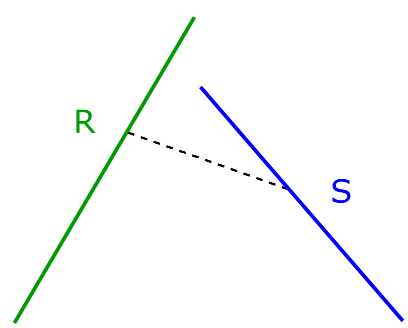
$V-P = Q - Proy_D(Q-P)$.



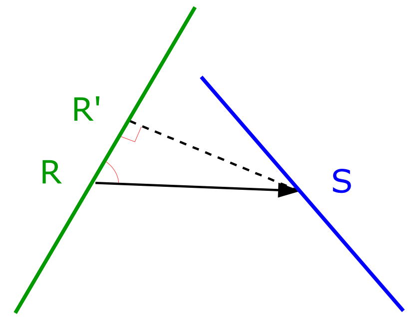
Ejemplos.

- ¿Cual es la distancia de la recta p(t)=(1+2t,3-t,5+4t) al punto P=(3,4,2)?
  Un punto de la recta es Q=(1,3,5) y la dirección de la recta es (2,-1,4).
  Un vector que va de P a la recta es (1,3,5)-(3,4,2) = (-2,-1,3).
  $Proy_{(2,-1,4)}(-2,-1,3) = {}^{(-2,-1,3)\cdot(2,-1,4)}/_{(2,-1,4)\cdot(2,-1,4)}\ (2,-1,4) = {}^9/_{21}\ (2,-1,4) = ({}^6/_7,{}^{-3}/_7,{}^{12}/_7)$
  El vector que va de P a la recta y es perpendicular a la recta es
  $V = (-2,-1,3) - Proy_{(2,-1,4)}(-2,-1,3) = (-2,-1,3) - ({}^6/_7,{}^{-3}/_7,{}^{12}/_7) = ({}^{-20}/_7,{}^{-4}/_7,{}^9/_7)$.
  La distancia de (3,4,2) a la recta es $|V| = |({}^{-20}/_7,{}^{-4}/_7,{}^9/_7)| = {}^{\sqrt{497}}/_7$
  y el punto mas cercano es $(3,4,2) + ({}^{-20}/_7,{}^{-4}/_7,{}^9/_7) = ({}^1/_7,{}^{24}/_7,{}^{23}/_7)$
- Otra manera de hallar el punto mas cercano: En ese punto la diferencia p(t)-(3,4,2) es perpendicular al vector de dirección de la recta, que es (2,-1,4):
  $(p(t)-(3,4,2)) \cdot (2,-1,4) = (-2+2t,-1-t,3+4t)\cdot(2,-1,4) = -4+4t+1+t+12+16t = 21t+9 = 0, \quad t={}^{-3}/_7$
  $p({}^{11}/_{21}) = (1+2({}^{-3}/_7),\ 3-({}^{-3}/_7),\ 5+4({}^{-3}/_7)) = ({}^1/_7,\ {}^{24}/_7,\ {}^{23}/_7)$

La distancia entre dos rectas es la mínima distancia entre dos puntos en esas rectas.

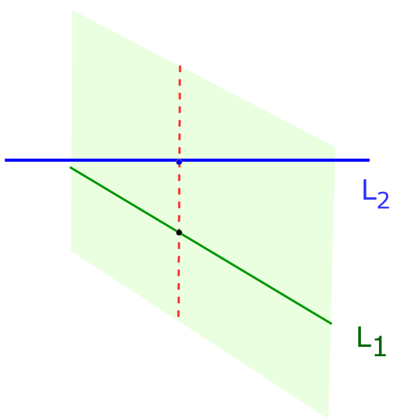


Lema. Si R y S son los puntos mas cercanos de las rectas entonces R-S es perpendicular a las dos rectas.



Demostración. Si R-S no fuera perpendicular al vector D que da la dirección de la recta por R, entonces R' = R + $Proy_D$(S-R) seria un punto en esa recta mas cercano S. Un argumento similar muestra lo mismo para la otra recta. •

El argumento anterior muestra que los puntos mas cercanos de las rectas deben estar en una recta perpendicular a ambas, pero no demuestra que exista tal recta.



Lema. Para cada par de rectas no paralelas en el espacio, hay una única recta que las intersecta y es perpendicular a ambas.

Demostración. Observar que dadas dos direcciones distintas en el espacio, solo existe una dirección perpendicular a ambas. Si L_1 y L_2 son dos rectas no paralelas, considerar al plano P que contiene a la recta L_1 y al vector N perpendicular a L_1 y L_2. Entonces P intersecta a L_2 (de otro modo las rectas serian paralelas). La linea paralela a N que pasa por el punto de intersección cruza a las dos rectas perpendicularmente. •

Ejemplo. ¿Cuales son los puntos mas cercanos de las rectas p(t)=(t+1,2t-2,-t) y q(s)=(2s-3,-s+4,3s+2)?

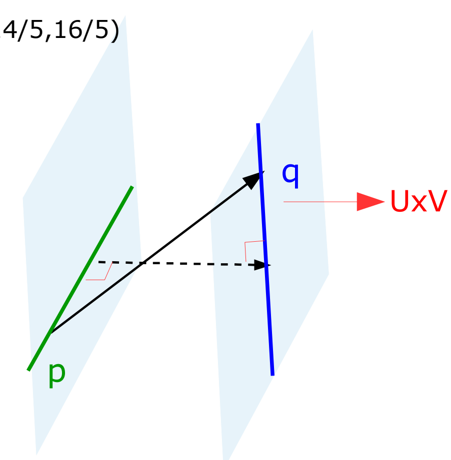
El vector que une los puntos p(t) y q(s) es p(t)-q(s) = (t-2s+4,2t+s-7,-t-3s-2). Cuando p(t) esta mas cerca de q(s) el vector p(t)-q(s) es perpendicular a las direcciones de ambas rectas, que son (1,2,-1) y (2,-1,3), así que el producto punto de p(t)-q(s) con (1,2,-1) y con (2,-1,3) debe ser 0:

$0 = (t-2s+4,\ 2t+s-6,\ -t-3s-2) \cdot (1,2,-1) = t-2s+4 +4t+2s-12 +t+3s+2 = 6t+3s-6$

$0 = (t-2s+4,\ 2t+s-6,\ -t-3s-2) \cdot (2,-1,3) = 2t-4s+8 -2t-s+6 -3t-9s-6 = -3t-14s+8$

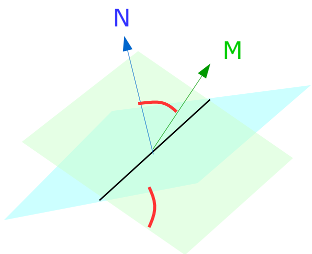
Podemos resolver el sistema de ecuaciones para hallar $s = 2/5$ $t = 4/5$
y os puntos mas cercanos son p(4/5)=(9/5,-2/5,-4/5) y q(2/5)=(-11/5,14/5,16/5)

Lema. La distancia entre dos rectas que pasan por los puntos p y q con direcciones U y V es la norma de la proyección de p-q en la dirección normal a las dos rectas, es decir $|Proy_{UxV}(p-q)|$.

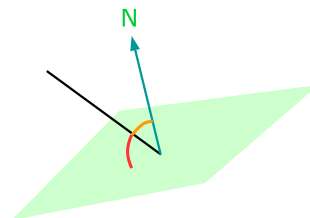


Generalmente una linea intersecta a un plano en un punto, y dos planos se intersectan en una linea.

Podemos hallar los ángulos de intersección usando el producto punto entre vectores apropiados:



El ángulo de intersección entre dos planos es igual al ángulo de intersección de sus vectores normales.



El ángulo de intersección entre una recta y un plano es el complemento del ángulo que forman la recta y el vector normal al plano.

Ejemplo. ¿Con que ángulo se intersectan los planos **2x-3y+z=4** y **x+4y-5z=6** ?

Los vectores normales son (2,-3,1) y (1,4,-5) y el ángulo entre ellos está dado por

$\cos\theta = {}^{(2,-3,1)\cdot(1,4,-5)}/_{|(2,-3,1)||(1,4,-5)|} = {}^{-15}/_{\sqrt{14}\sqrt{42}} = {}^{-15}/_{14\sqrt{3}}$ de donde $\theta \approx 51.78679°$

Ejemplo. ¿Con que ángulo cruza la recta p(t)=(4t-1,2t+3,5t) al plano **2x-3y+z=4**?

El vector de dirección de la recta es (4,2,5) y el vector normal al plano es (2,-3,1).

El ángulo entre estos dos vectores esta dado por

$\cos\theta = {}^{(2,-3,1)\cdot(4,2,5)}/_{|(2,-3,1)||(4,2,5)|} = {}^{7}/_{\sqrt{14}\sqrt{45}}$, de donde ▯ = arccos(-0.61858) ≈ 73.80623°

El ángulo que forma la recta con el plano es $90°-\theta \approx 16.19377°$

Ejemplos.

- ¿Cual es la distancia entre las rectas p(t) = (2t+1, t+4, -t+2) y q(s) = (-s+2, 3s-1, 2s)?

  P = (1,4,2) q = (2,-1,0) U = (2,1,-1) V = (-1,3,2) UxV = (5,-3,7)

  Distancia = $|\text{Proy}_{UxV}(p-q)|$ = |(5,-3,7)·(-1,5,2)| /|(5,3,-7)| = |-5 15+14| /$\sqrt{5^2+3^2+7^2}$ = 6 / $\sqrt{83}$

- Para encontrar la recta que cruza y es perpendicular a las rectas p(t) = (2t+1, t+4, -t+2) y q(s) = (-s+2, 3s-1, 2s) podemos hallar los puntos mas cercanos entre las rectas y hallar la recta que pasa por ellos.

- Otra manera de hallar la recta perpendicular seria usando que su dirección es el producto cruz de las direcciones de las rectas: (2,1,-1) x (-1,3,2) = (5,-3,7), pero falta hallar un punto de la recta.

Problemas.

8. ¿Cual es el punto del plano **2x-3y+4z = 12** mas cercano a (1,3,7)?

9. Encuentra la distancia del plano P(s,t)=(s+t+1, 2s+3,3t-4) al origen.

10. ¿Cual es la distancia del punto (1,2,3) a la recta p(t)=(t+2,3t+4,5t+6)?
¿Cual es el punto de la recta mas cercano a (1,2,3)?

11. ¿En que punto intersecta la recta p(t)=(1+3t,6-4t,5+2t) al plano **x+2y+3z = 4** ?
¿Con que ángulo se cruzan?

12. ¿En que recta y con que ángulo se cruzan los planos **3x-2y+4z = 1** y **x+5y-z = 4** ?

13. a. ¿Cual es la distancia entre las rectas p(t)=(3t-1, t+2,-4t+6) y q(s)=(2s+4, 6s-7, 3s)?
    b. ¿Cuales son los puntos mas cercanos de estas rectas?
    c. Da una parametrización de la recta que ias intersecta y es perpendicular ambas rectas.

Problemas de repaso

14. Las edades de tres hermanas suman 30 años, la mayor tiene 7 años mas que la menor y hace 1 año la mediana tenia el doble de la edad que la menor. ¿Que edad tiene cada una? ¿Que tiene que ver esto con geometría?

15.Desde el punto (3,4,9) se lanza una pelota con dirección [1,-2,-3], que se mueve en linea recta y rebota cada vez que toca alguno de los planos coordenados xy, xz y yz. Da una parametrización del movimiento de la pelota.

16. Un pato vuela en linea recta y a velocidad constante de modo que en t=0 esta en el punto (3,5,7) y en t=1 esta en (4,3,6). El Sol brilla en lo alto.
    a. ¿Cual es la posición del pato en el tiempo t? ¿Y la posición de la sombra en el plano xy?
    b. ¿Cual es la velocidad del pato y la velocidad de su sombra?
    c. ¿En t=2 el pato se esta acercando o alejando del punto (1,2,3)? ¿Y su sombra?
    d. ¿En que momento es que el pato pasa mas cerca del origen? ¿Y su sombra?

17. Las trayectorias de dos aviones están dadas por

P(t)=(-3t+1,-t-2,4t)　　　Q(t)=(2t+8,-3t+10,t-4)

a. ¿Que tan cerca pasan los aviones?　　b. ¿Que tan cerca pasan sus trayectorias?