Demostraciones

Una **demostración** (o **prueba**) es un argumento *irrefutable* de que algo es cierto.

Una **demostración** (o **prueba**) es un argumento *irrefutable* de que algo es cierto.

¿Y como sabe uno que es irrefutable?

Una **demostración** (o **prueba**) es un argumento *irrefutable* de que algo es cierto.

¿Y como sabe uno que es irrefutable?

En un juicio por asesinato

En un juicio por asesinato

Lo vieron matarlo

En un juicio por asesinato

Lo vieron matarlo

Lo había amenazado

Nadie sabe donde estuvo cuando lo mataron

Encontaron sus huellas

Las órbitas de los planetas

Las órbitas de los planetas

Son circulos

No son circulos

Son elipses

No son elipses

Las demostraciones en matemáticas son argumentos lógicos en el que cada paso esta plenamente justificado y es consecuencia lógica de los pasos anteriores.

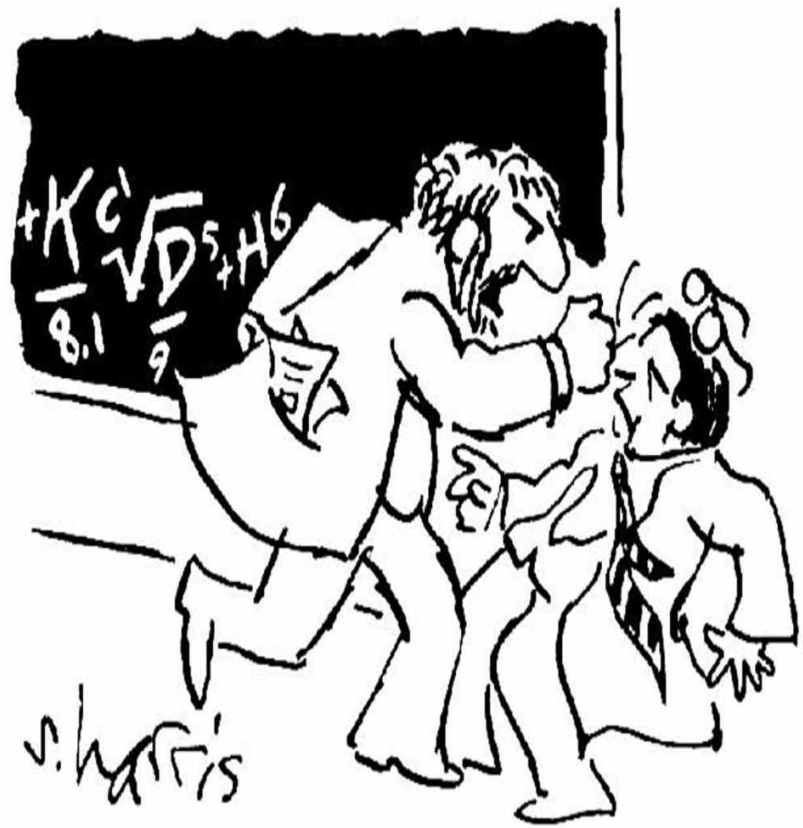
Las demostraciones en matemáticas son argumentos lógicos en el que cada paso esta plenamente justificado y es consecuencia lógica de los pasos anteriores.

En matemáticas **todo** se demuestra

Hacer demostraciones no es fácil!

Para ser irrefutable un argumento debe ser convincente

Y para ser convincente debe ser entendible



YOU WANT PROOF?
I'LL GIVE YOU PROOF!

Hacer demostraciones no es fácil, aprender toma tiempo y dedicación.

Hay distintos tipos de demostraciones, unas directas y otras indirectas, que a veces se combinan.

Demostraciones directas, o por pasos

Digamos que queremos demostrar que $P \to Q$ pero no vemos una relación directa entre las dos proposiciones.

Demostraciones directas, o por pasos

Digamos que queremos demostrar que $P \rightarrow Q$ pero no vemos una relación directa entre las dos proposiciones.

Como $(P \rightarrow R) \wedge (R \rightarrow Q) \Rightarrow (P \rightarrow Q)$ podemos demostrar $P \rightarrow Q$ demostrando $P \rightarrow R$ y $R \rightarrow Q$ donde R es *cualquier* otra proposición.

Demostraciones directas, o por pasos

Mas generalmente, podemos demostrar que $A \rightarrow Z$ hallando una serie de proposiciones B, C, D, E, ... tales que podamos demostrar que $A \rightarrow B$, $B \rightarrow C$, $C \rightarrow D$,..., $Y \rightarrow Z$

El chiste esta en hallar ls proposiciones intermedias

Demostrar que el producto de números impares es impar.

Demostrar que el producto de números impares es impar.

Hipótesis: m y n son números impares

Por demostrar: $m \cdot n$ es impar

Demostrar que el producto de números impares es impar.

Hipótesis: m y n son números impares

Por demostrar: $m \cdot n$ es impar

Demostración (directa):

Si m es impar entonces existe un entero k tal que $m=2k+1$

Si n es impar entonces existe un entero l tal que $n=2l+1$

Demostrar que el producto de números impares es impar.

Hipótesis: m y n son números impares

Por demostrar: $m \cdot n$ es impar

Demostración (directa):

Si m es impar entonces existe un entero k tal que $m=2k+1$

Si n es impar entonces existe un entero l tal que $n=2l+1$

Entonces $mn=(2k+1)(2l+1)=4kl+2l+2k+1=2(2kl+l+k)+1$

Demostrar que el producto de números impares es impar.

Hipótesis: m y n son números impares

Por demostrar: $m \cdot n$ es impar

Demostración (directa):

Si m es impar entonces existe un entero k tal que $m=2k+1$

Si n es impar entonces existe un entero l tal que $n=2l+1$

Entonces $mn=(2k+1)(2l+1)=4kl+2l+2k+1=2(2kl+l+k)+1$

Así que existe un entero r tal que $mn=2r+1$

Esto dice que mn es impar. □

Demostraciones contrapositivas

Como $p \rightarrow q$ es equivalente a $\neg q \rightarrow \neg p$ entonces podemos demostrar $p \rightarrow q$ demostrando la *contrapositiva* $\neg q \rightarrow \neg p$

Demostraciones contrapositivas

Como $p \rightarrow q$ es equivalente a $\neg q \rightarrow \neg p$ entonces podemos demostrar $p \rightarrow q$ demostrando la *contrapositiva* $\neg q \rightarrow \neg p$

Para demostrar que si pasa A entonces tiene que pasar B podemos **suponer** que B no pasa y mostrar que entonces tampoco puede pasar A.

Demostrar que si el cuadrado de un número entero es par, entonces el número es par.

Demostrar que si el cuadrado de un número entero es par, entonces el número es par.

Hipótesis: n es un numero entero y n^2 es par

Por demostrar: n es par

Demostrar que si el cuadrado de un número entero es par, entonces el número es par.

Hipótesis: n es un numero entero y n^2 es par

Por demostrar: n es par

Demostración (contrapositiva):

Supongamos que la conclusión es falsa, es decir que n es impar

Entonces $n=2m+1$ para algún entero m

Por lo tanto $n^2 =(2m+1)^2 = 4m^2+4m+1= 2(2m^2+2m)+1$

esto dice que n^2 es impar lo que niega la hipótesis. □

Demostraciones por contradicción:

Para demostrar $p \to q$ podemos suponer que la implicación es falsa (es decir, que $p \land \neg q$ es cierta) y a partir de ahí deducir algo falso (una contradicción).

Demostrar que no existen 2 números enteros m y n tales que $^{m}/_{n} = \sqrt{2}$.

Demostrar que no existen 2 números enteros m y n tales que ${}^{m}/_{n} = \sqrt{2}$*.*

Demostración (por contradicción)

Supongamos que sí existen dos enteros m y n tales que
${}^{m}/_{n} = \sqrt{2}$

Podemos asumir que m y n no son ambos pares, porque si lo fueran podríamos simplificar m/n.

Demostrar que no existen 2 números enteros m y n tales que $^{m}/_{n} = \sqrt{2}$.

Demostración (por contradicción)

Supongamos que sí existen dos enteros m y n tales que $^{m}/_{n} = \sqrt{2}$

Podemos asumir que m y n no son ambos pares, porque si lo fueran podríamos simplificar m/n.

Si $m/n = \sqrt{2}$ entonces $m^2/n^2 = 2$ así que $m^2 = 2n^2$

Demostrar que no existen 2 números enteros m y n tales que $^{m}/_{n} = \sqrt{2}$.

Demostración (por contradicción)

Supongamos que sí existen dos enteros m y n tales que $^{m}/_{n} = \sqrt{2}$

Podemos asumir que m y n no son ambos pares, porque si lo fueran podríamos simplificar m/n.

Si $m/n = \sqrt{2}$ entonces $m^2/n^2 = 2$ así que $m^2 = 2n^2$

Como $m^2 = 2n^2$ entonces m^2 es par, así que m es par

$m=2m'$ para algún número natural m'

Demostrar que no existen 2 números enteros m y n tales que $^m/_n = \sqrt{2}$.

Demostración (por contradicción)

Supongamos que sí existen dos enteros m y n tales que

$^m/_n = \sqrt{2}$

Podemos asumir que m y n no son ambos pares, porque si lo fueran podríamos simplificar m/n.

Si $m/n = \sqrt{2}$ entonces $m^2/n^2 = 2$ así que $m^2 = 2n^2$

Como $m^2 = 2n^2$ entonces m^2 es par, así que m es par

m=2m' para algún número natural m´

Así que $(2m')^2 = 2n^2$ por lo tanto $4m'^2 = 2n^2$ o sea $2m'^2 = n^2$

por lo tanto n^2 es par, así que n es par·

Demostrar que no existen 2 números enteros m y n tales que $^{m}/_{n} = \sqrt{2}$.

Demostración (por contradicción)

Supongamos que sí existen dos enteros m y n tales que $^{m}/_{n} = \sqrt{2}$

Podemos asumir que m y n no son ambos pares, porque si lo fueran podríamos simplificar m/n.

Si $m/n = \sqrt{2}$ entonces $m^2/n^2 = 2$ así que $m^2 = 2n^2$

Como $m^2 = 2n^2$ entonces m^2 es par, así que m es par

$m=2m'$ para algún número natural m´

Así que $(2m')^2 = 2n^2$ por lo tanto $4m'^2 = 2n^2$ o sea $2m'^2 = n^2$

por lo tanto n^2 es par, así que n es par.

Por lo tanto m y n son ambos pares que contradice la suposición □

La prueba por contradicción es una de las armas mas poderosas de los matemáticos. Es un gambito mas fino que cualquier gambito de ajedrez, en que un jugador ofrece una pieza. Un matemático ofrece el juego. G.H.Hardy