

Curvas en el plano

Una **curva** es un subconjunto del plano de dimensión 1, que podemos visualizar como la trayectoria de un punto en movimiento.

Una **curva** es un subconjunto del plano de dimensión 1, que podemos visualizar como la trayectoria de un punto en movimiento.

Las curvas en el plano pueden describirse por medio de *parametrizaciones* o por medio de *ecuaciones*:

Una **curva** es un subconjunto del plano de dimensión 1, que podemos visualizar como la trayectoria de un punto en movimiento.

Las curvas en el plano pueden describirse por medio de *parametrizaciones* o por medio de *ecuaciones*:

$$p(t) = (2t, 3t+4)$$

da los puntos de la curva explícitamente, en términos de un parámetro

$$3x+2y = 8$$

da una relación entre las coordenadas de los puntos de la curva

Las parametrizaciones no solo dependen de la curva, sino también del punto de partida y de la velocidad a la que se recorre la curva.

Las ecuaciones solo dependen de la curva.

Las parametrizaciones no solo dependen de la curva, sino también del punto de partida y de la velocidad a la que se recorre la curva.

Las ecuaciones solo dependen de la curva.

¿Parametrizaciones o ecuaciones? depende de lo que queramos hacer.

Las parametrizaciones contienen algo mas de información que las ecuaciones.

A veces es fácil pasar de las parametrizaciones a las ecuaciones y viceversa, otras veces es muy difícil.

Las curvas mas simples en el plano son las lineas rectas, que pueden parametrizarse con las funciones mas simples (polinomios de grado 1)

$$P(t) = (at+b, ct+d)$$

Estas parametrizaciones recorren las rectas a velocidad constante (pero hay parametrizaciones con funciones mas complicadas que recorren las rectas con velocidad variable).

Las líneas rectas satisfacen las ecuaciones mas simples, que son las ecuaciones lineales

$$Ax+By = C$$

Estas ecuaciones son casi unicas, salvo multiplicacion por constantes

Ejemplos.

¿Las parametrizaciones $p(t) = (4t, 6t-2)$ y $q(t) = (6t+2, 9t+1)$ corresponden a la misma recta o a rectas distintas?

Ejemplos.

Las parametrizaciones $p(t) = (4t, 6t-2)$ y $q(t) = (6t+2, 9t+1)$ corresponden a la misma recta, porque ambas satisfacen la ecuación

$$3x - 2y = 4$$

pero recorren la recta a diferente velocidad y empezando de puntos distintos

Ejemplos.

Las parametrizaciones $p(t) = (4t, 6t-2)$ y $q(t) = (6t+2, 9t+1)$ corresponden a la misma recta, porque ambas satisfacen la ecuación

$$3x - 2y = 4$$

pero recorren la recta a diferente velocidad y empezando de puntos distintos

Una parametrización de la recta $4x - 5y = 3$ es ...

Ejemplos.

Las parametrizaciones $p(t) = (4t, 6t-2)$ y $q(t) = (6t+2, 9t+1)$ corresponden a la misma recta, porque ambas satisfacen la ecuación

$$3x - 2y = 4$$

pero recorren la recta a diferente velocidad y empezando de puntos distintos

Una parametrización de la recta $4x - 5y = 3$ es

$$p(t) = t(5, 4) + (2, 1) = (5t+2, 4t+1)$$

Ejemplos.

Las parametrizaciones $p(t) = (4t, 6t-2)$ y $q(t) = (6t+2, 9t+1)$ corresponden a la misma recta, porque ambas satisfacen la ecuación

$$3x - 2y = 4$$

pero recorren la recta a diferente velocidad y empezando de puntos distintos.

Una parametrización de la recta $4x - 5y = 3$ es

$$p(t) = t(5, 4) + (2, 1) = (5t+2, 4t+1)$$

Da una parametrización de la recta $x = y$ a velocidad variable.

Ejemplos.

Las parametrizaciones $p(t) = (4t, 6t-2)$ y $q(t) = (6t+2, 9t+1)$ corresponden a la misma recta, porque ambas satisfacen la ecuación

$$3x - 2y = 4$$

pero recorren la recta a diferente velocidad y empezando de puntos distintos.

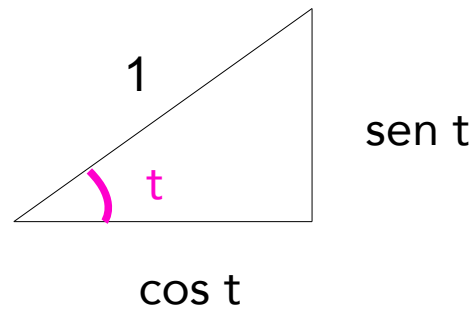
Una parametrización de la recta $4x - 5y = 3$ es

$$p(t) = t(5, 4) + (2, 1) = (5t+2, 4t+1)$$

Una parametrización de la recta $x = y$ a velocidad constante es $p(t) = (t, t)$, una parametrización a velocidad variable es $q(t) = (t^3, t^3)$

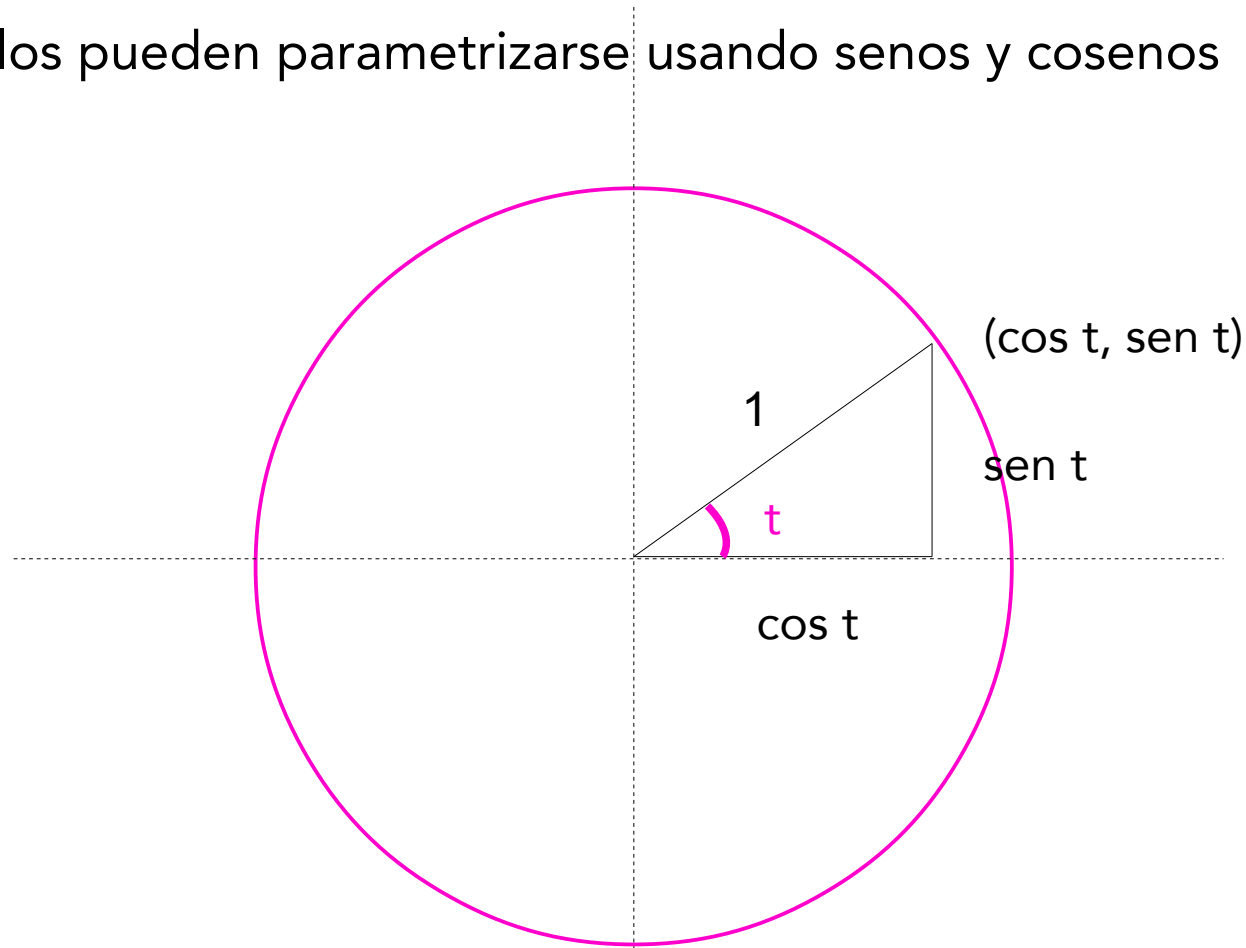
Otras curvas simples son los círculos.

Los círculos pueden parametrizarse usando senos y cosenos



Otras curvas simples son los círculos.

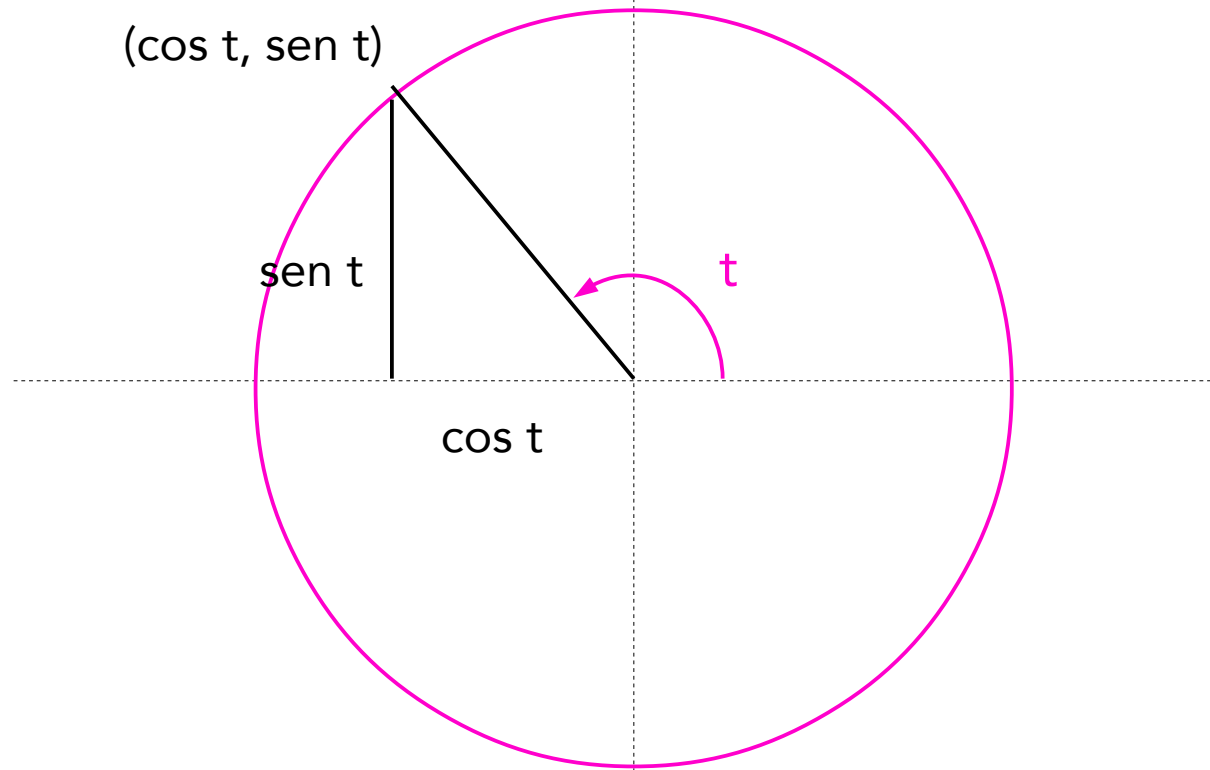
Los círculos pueden parametrizarse usando senos y cosenos



Las funciones $\cos(t)$ y $\text{sen}(t)$ son las coordenadas de un punto en un círculo de radio 1 centrado en el origen.

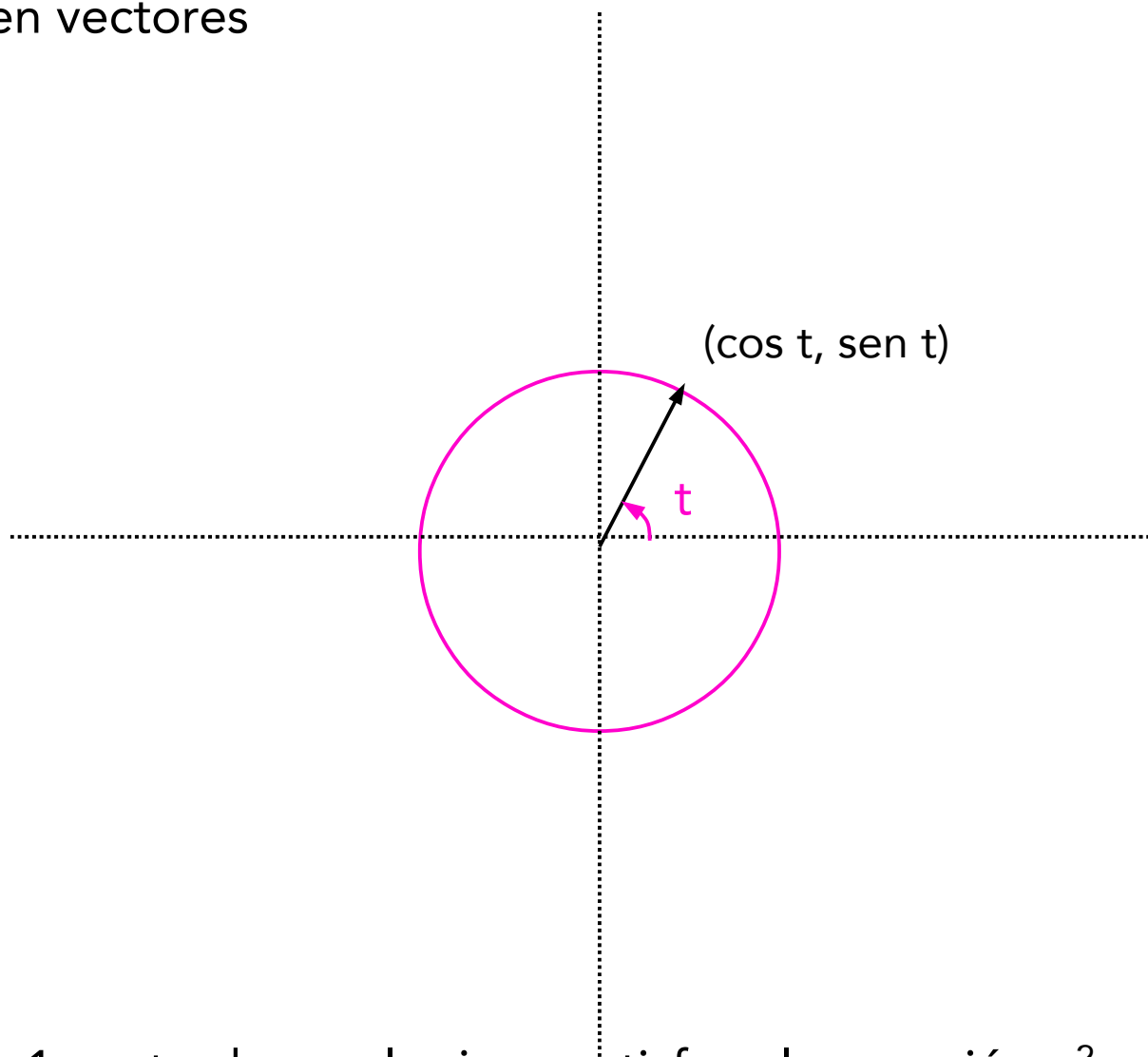
Otras curvas simples son los círculos.

Los círculos pueden parametrizarse usando senos y cosenos



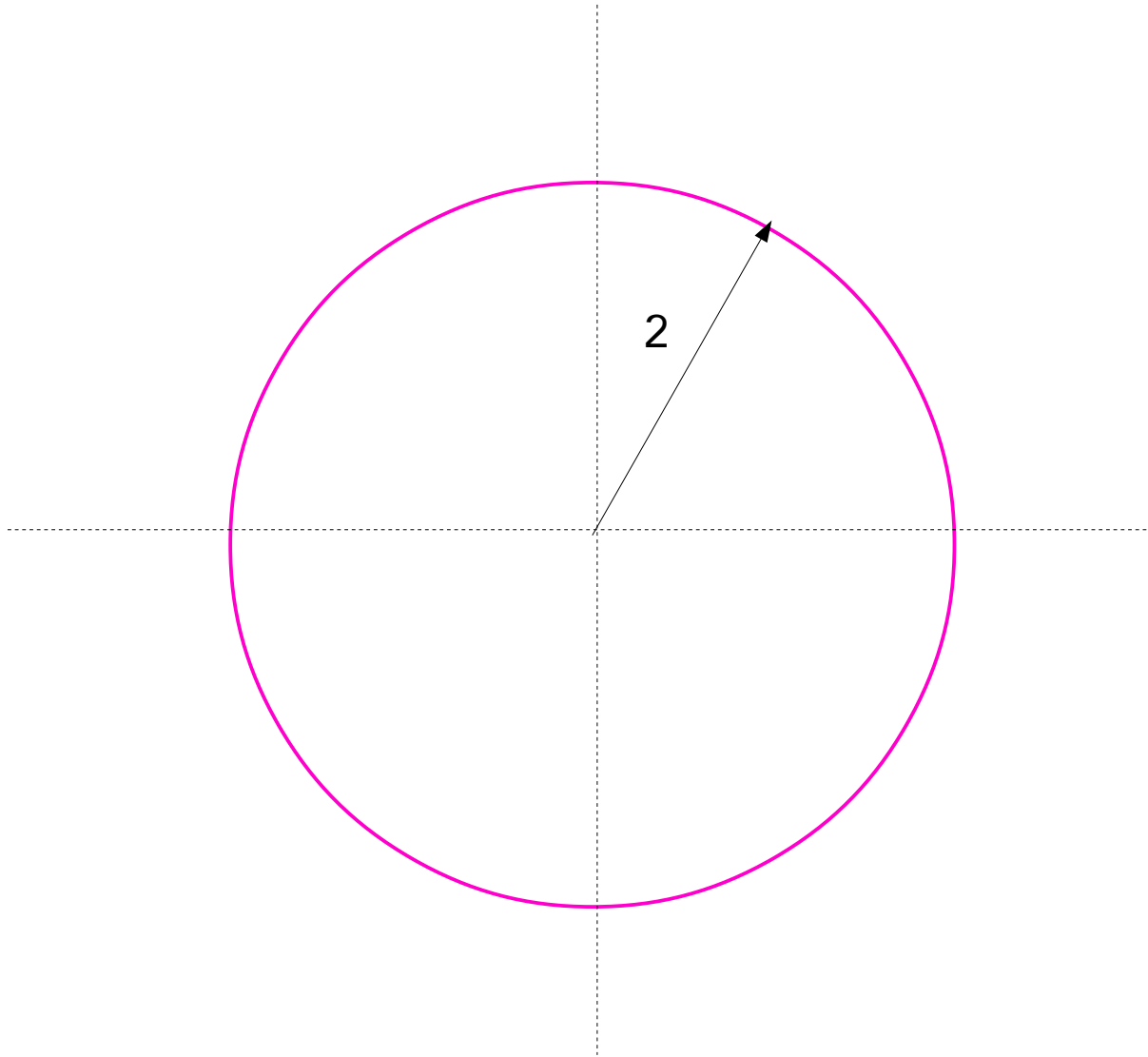
Las funciones $\cos(t)$ y $\text{sen}(t)$ son las coordenadas de un punto en un círculo de radio 1 centrado en el origen.

Para hallar las parametrizaciones de otros círculos o de curvas mas complicadas, conviene pensar en vectores

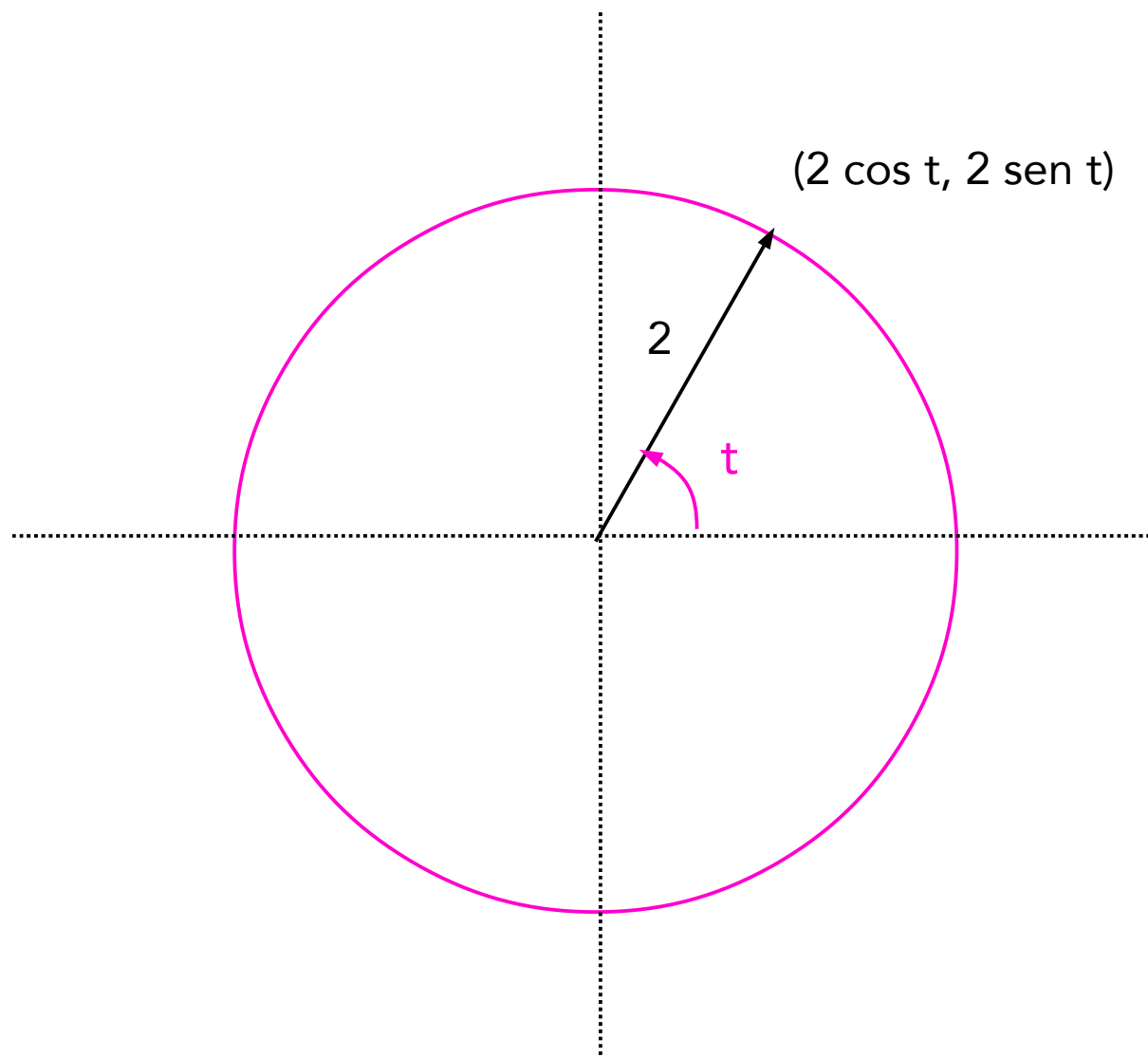


El círculo de radio 1 centrado en el origen satisface la ecuación $x^2 + y^2 = 1$

El círculo de radio 2 centrado en el origen

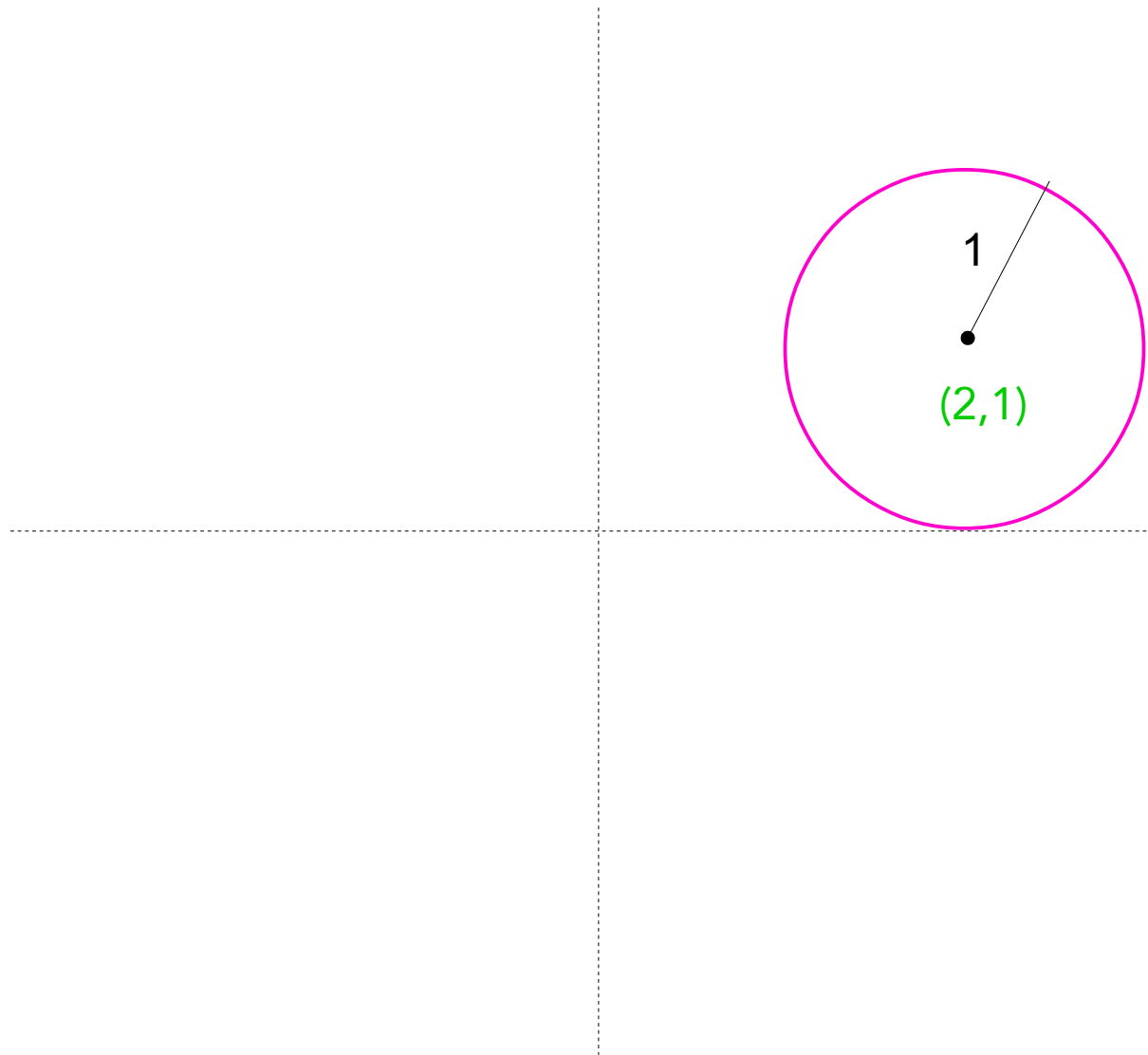


El círculo de radio 2 centrado en el origen

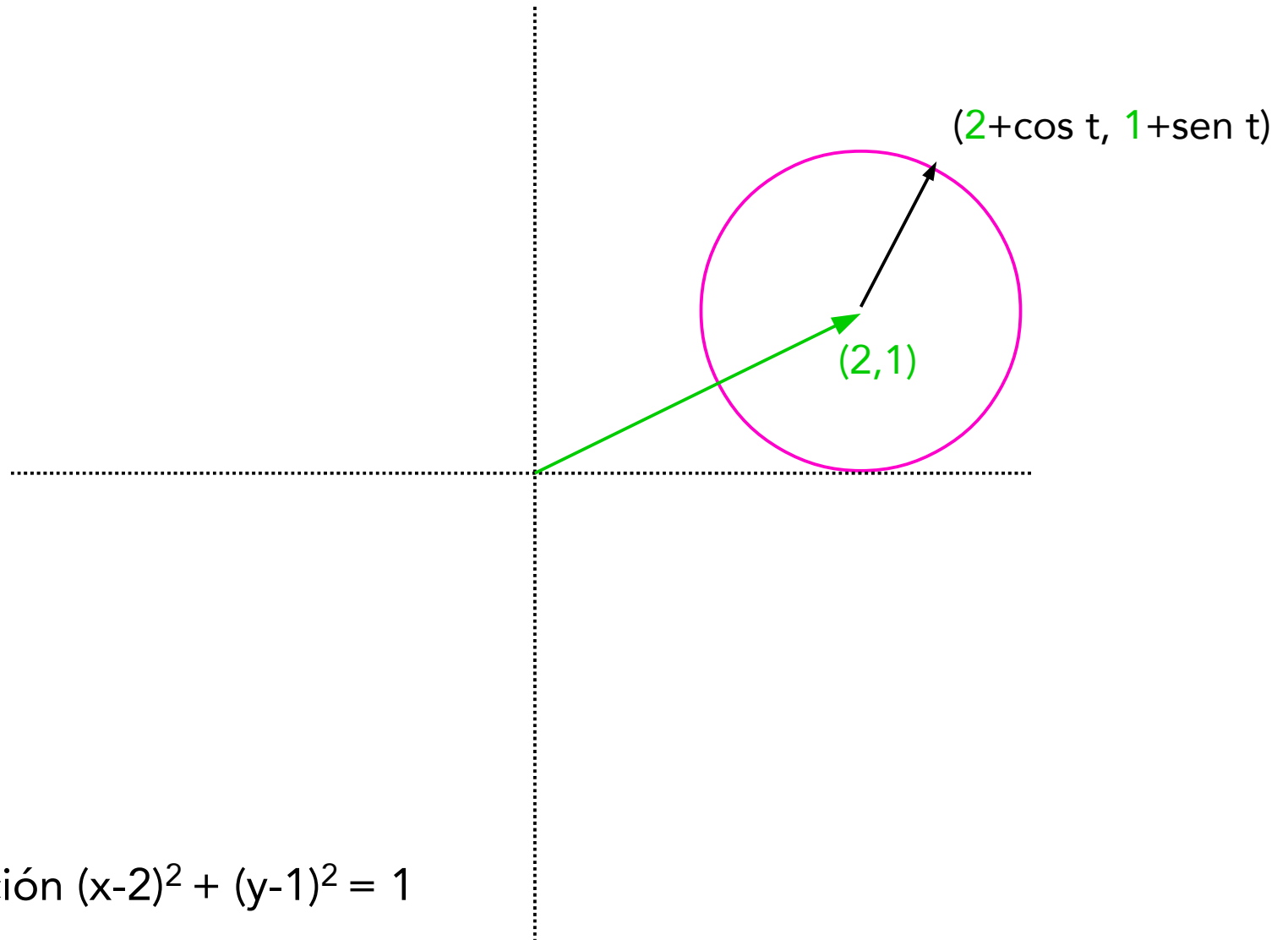


Satisface la ecuación $x^2 + y^2 = 4$

El círculo de radio 1 centrado en $(2,1)$

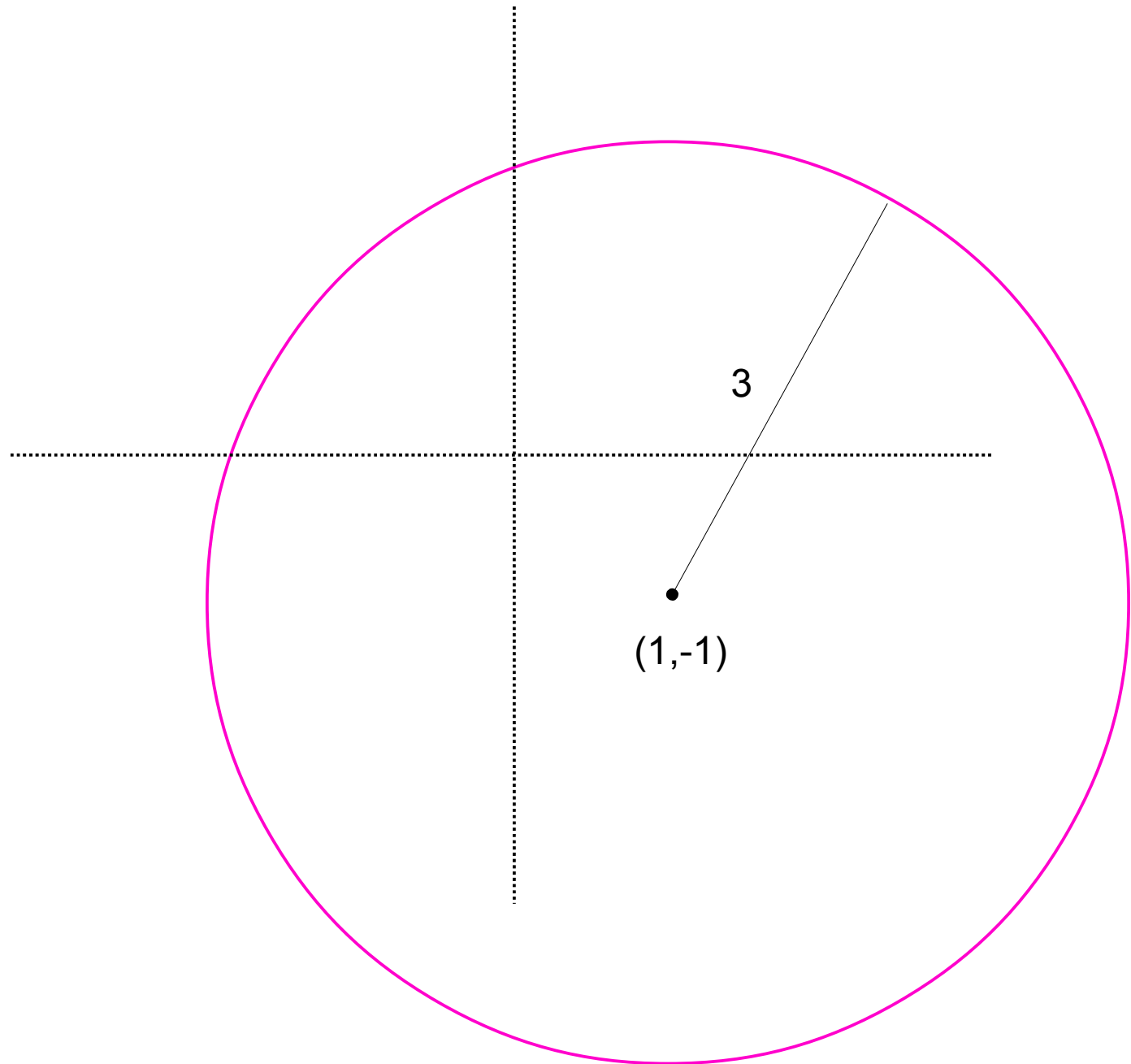


El círculo de radio 1 centrado en $(2,1)$

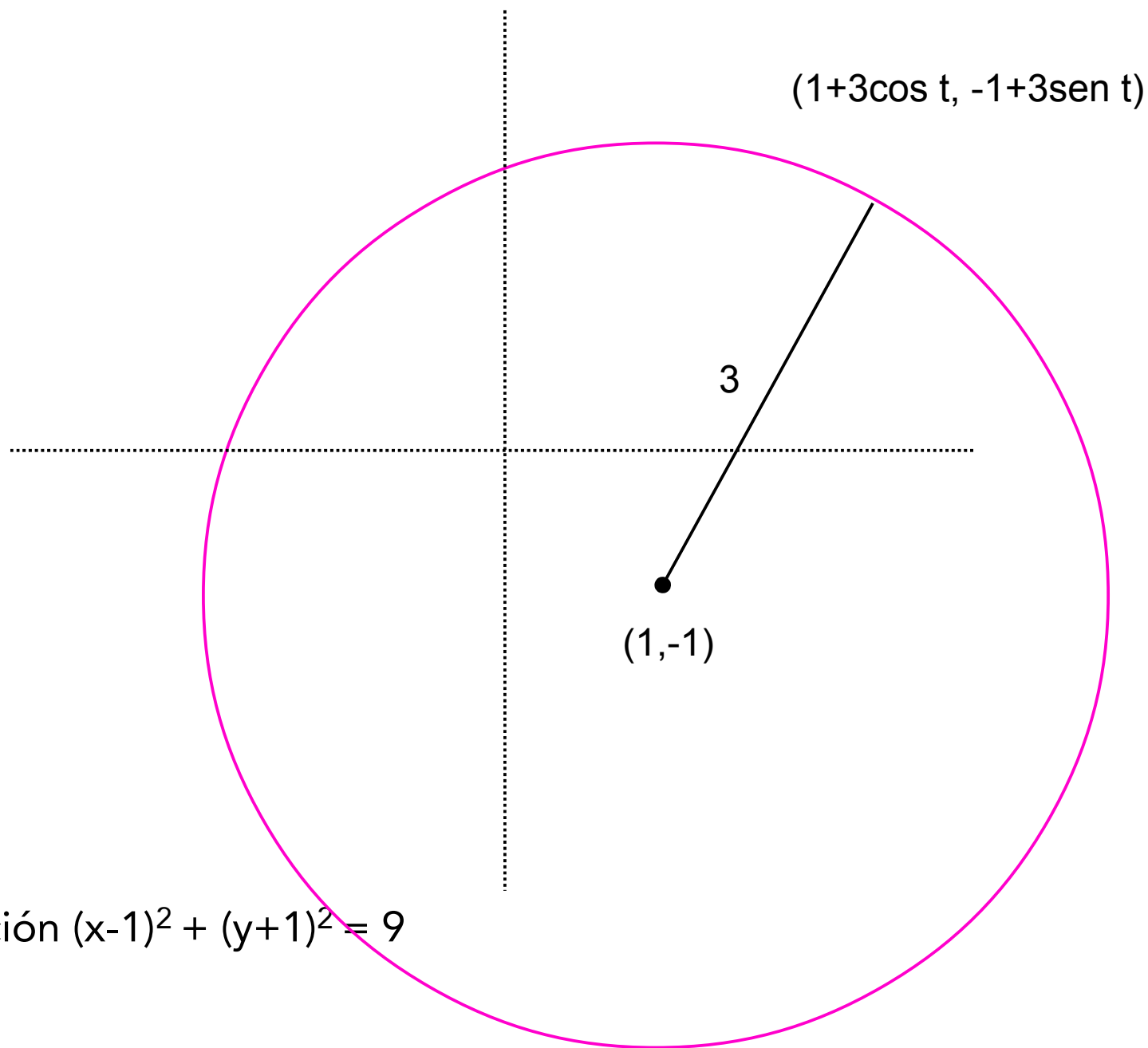


Satisface la ecuación $(x-2)^2 + (y-1)^2 = 1$

Parametriza al círculo de radio 3 centrado en $(1,-1)$ y di qué ecuación satisface



Parametriza al círculo de radio 3 centrado en $(1,-1)$ y di que ecuación satisface

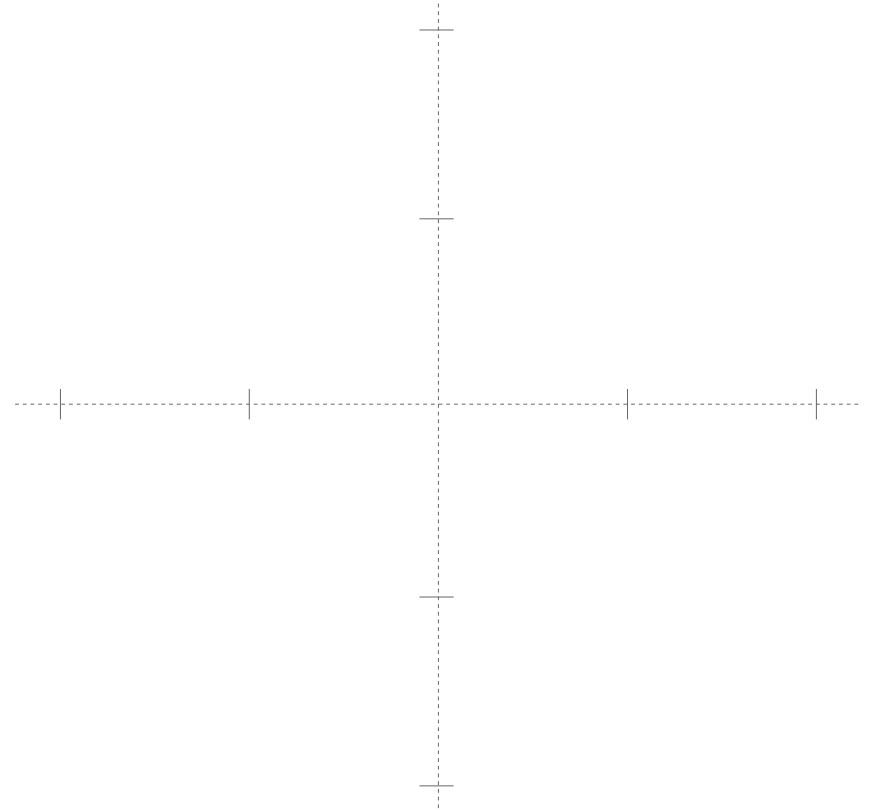
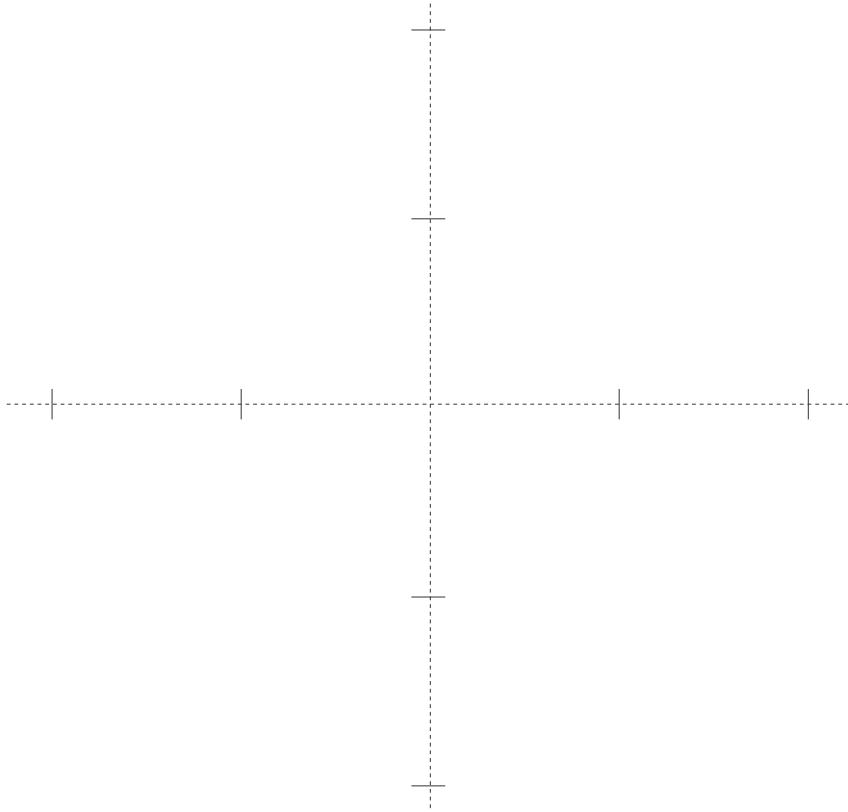


Satisface la ecuación $(x-1)^2 + (y+1)^2 = 9$

¿Cual es la diferencia entre estas curvas?

$$p(t) = (\cos t, \sin t)$$

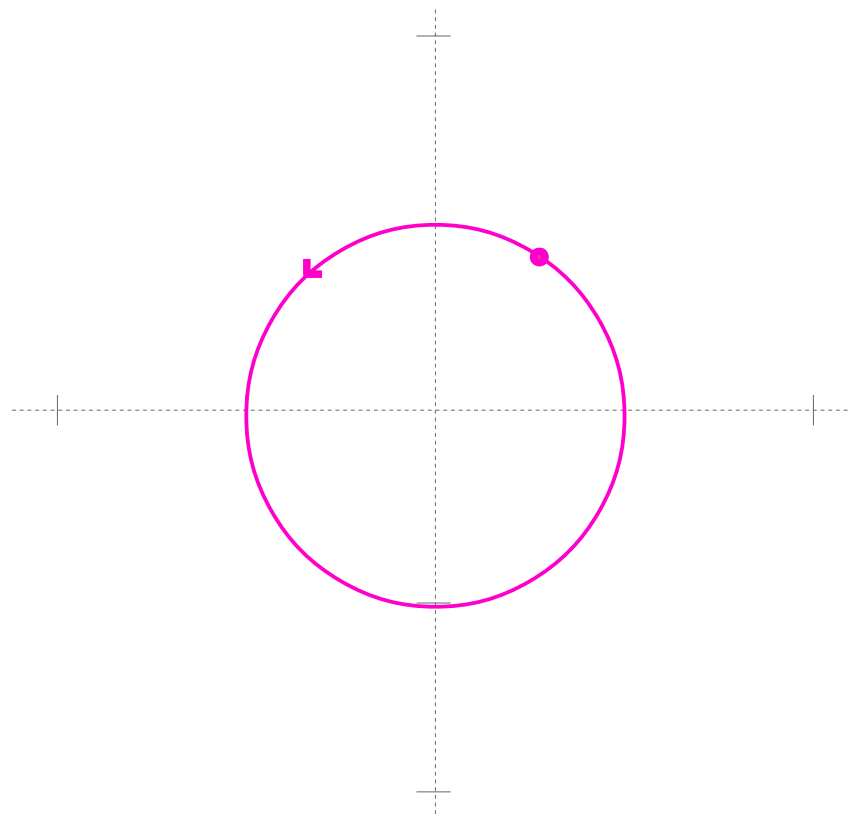
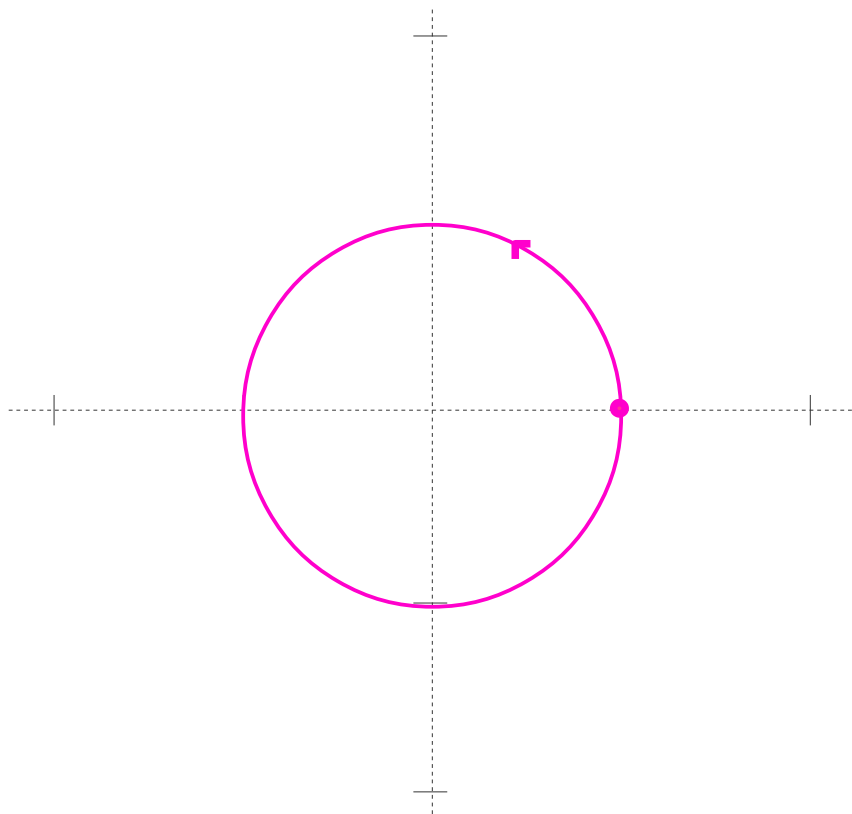
$$q(t) = (\cos(t+1), \sin(t+1)) ?$$



¿Cual es la diferencia entre estas curvas?

$$p(t) = (\cos t, \sin t)$$

$$q(t) = (\cos(t+1), \sin(t+1))$$

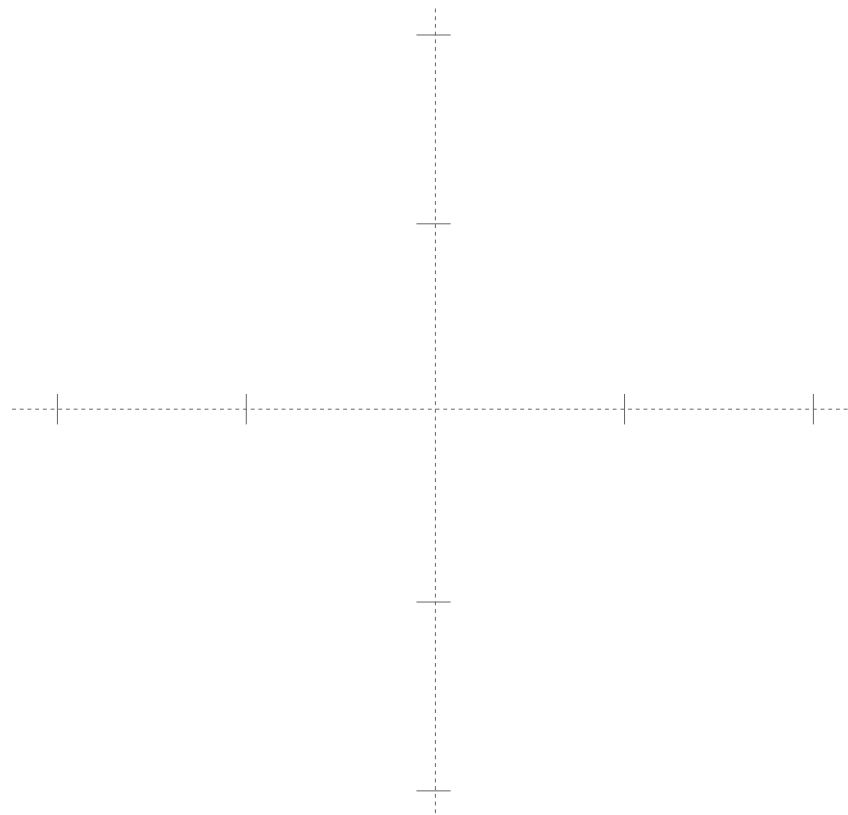
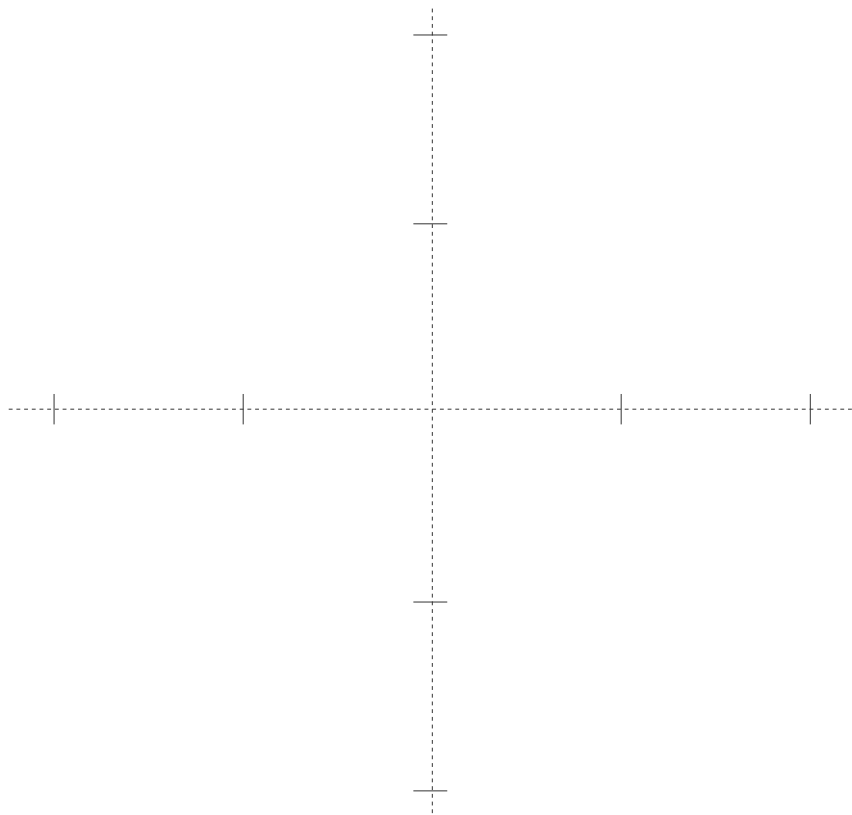


Mismo recorrido, pero q va adelantado

¿Cual es la diferencia entre estas curvas?

$$p(t) = (\cos t, \sin t)$$

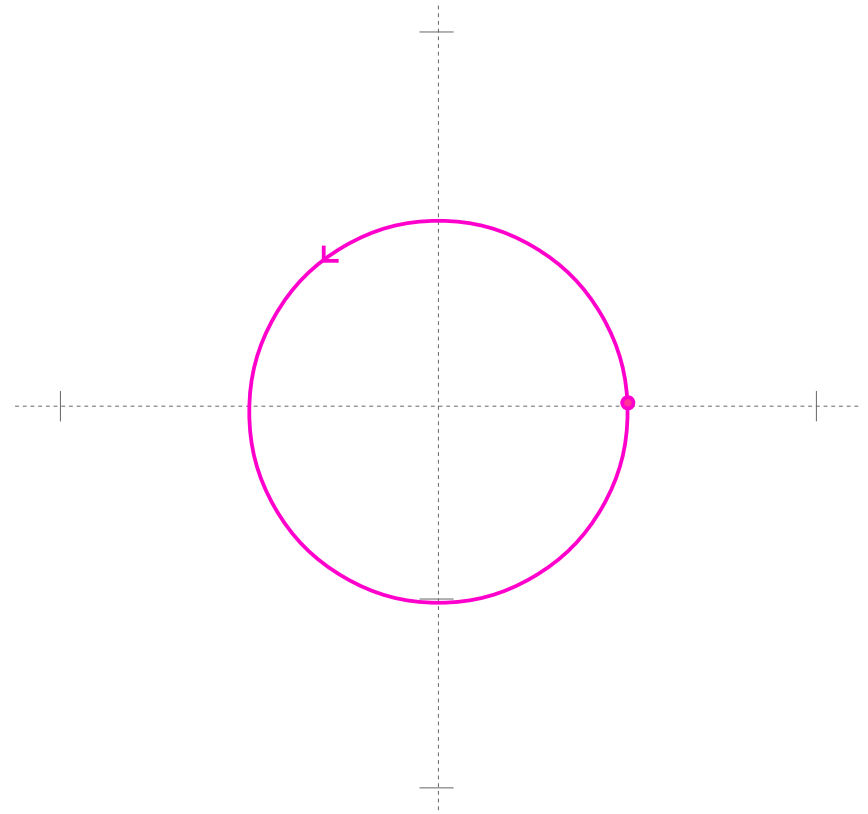
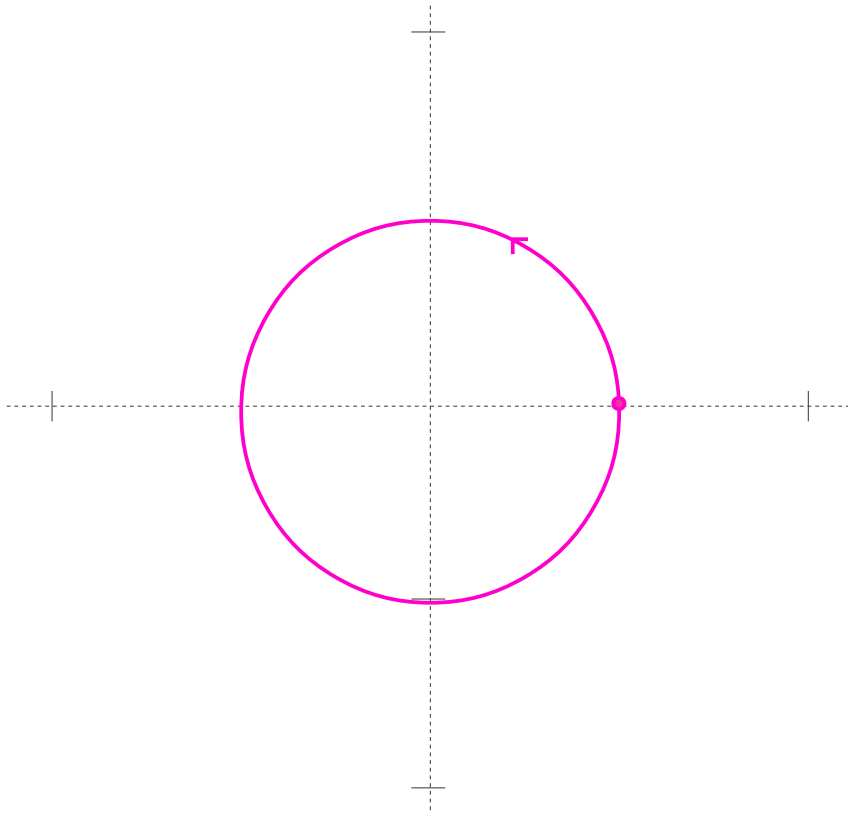
$$q(t) = (\cos 2t, \sin 2t)$$



¿Cual es la diferencia entre estas curvas?

$$p(t) = (\cos t, \sin t)$$

$$q(t) = (\cos 2t, \sin 2t)$$

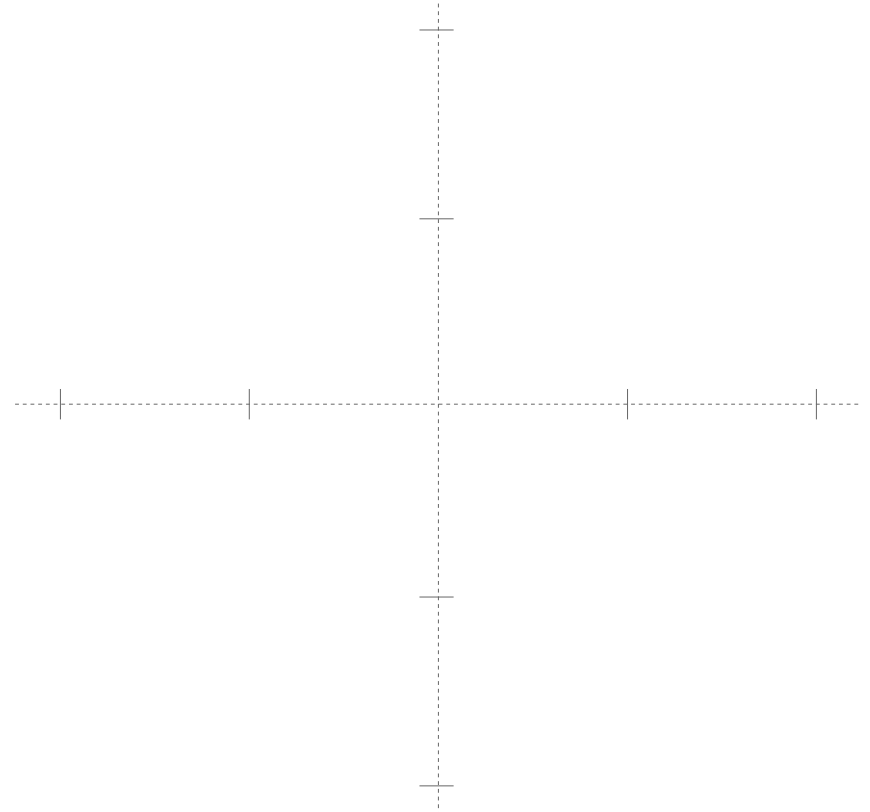
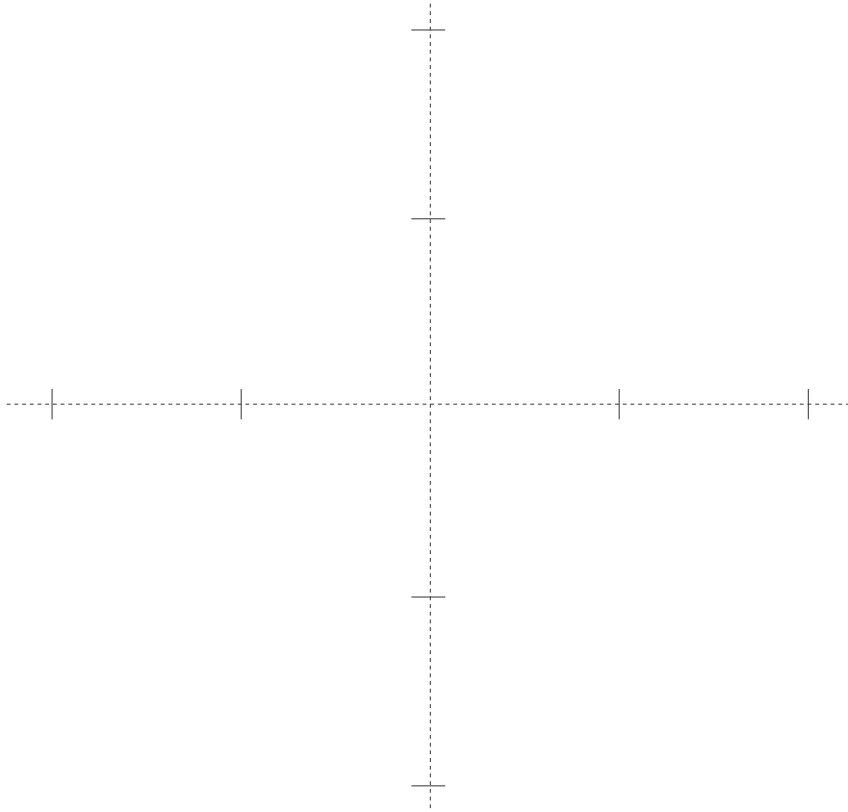


Mismo recorrido, pero q va al doble de velocidad

¿Cual es la diferencia?

$$p(t) = (\cos t, \sin t)$$

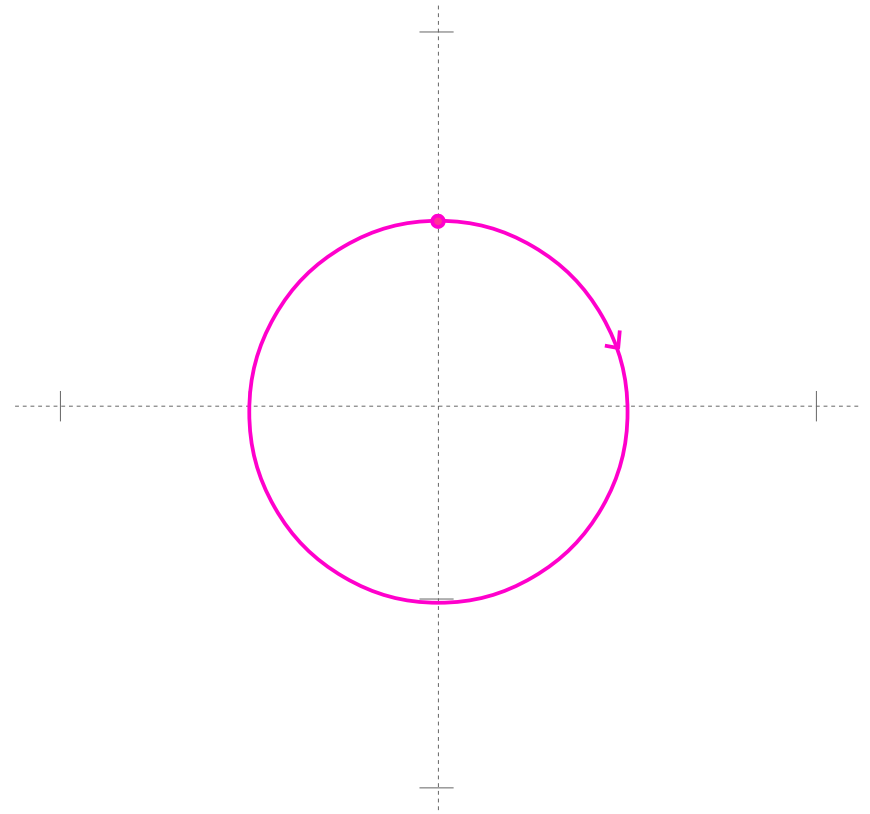
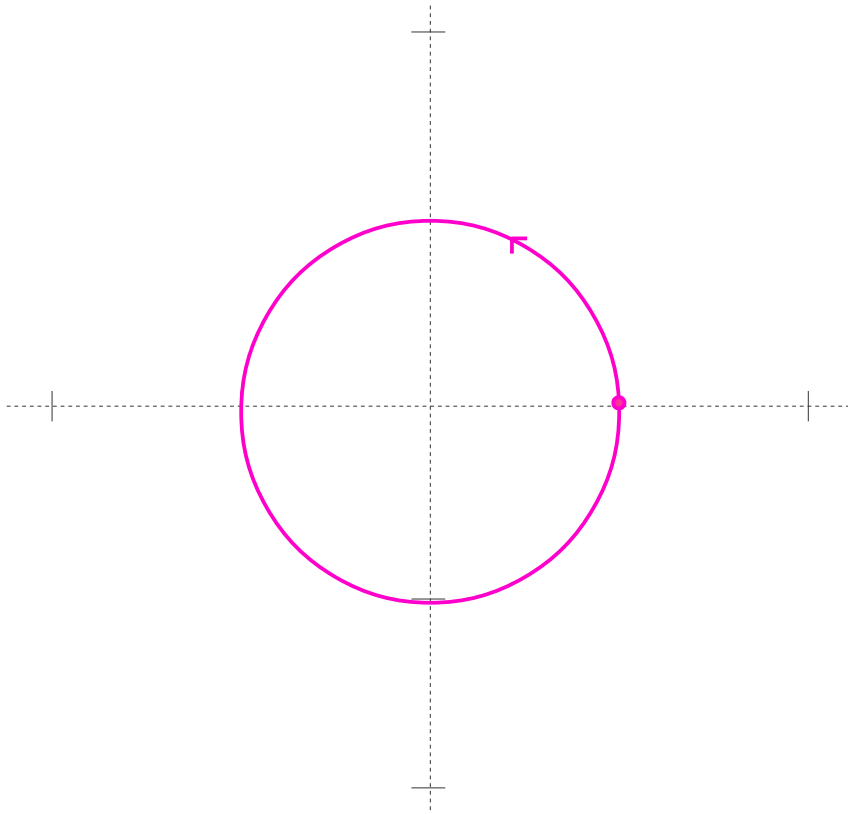
$$q(t) = (\sin t, \cos t) ?$$



¿Cual es la diferencia?

$$p(t) = (\cos t, \sin t)$$

$$q(t) = (\sin t, \cos t) ?$$

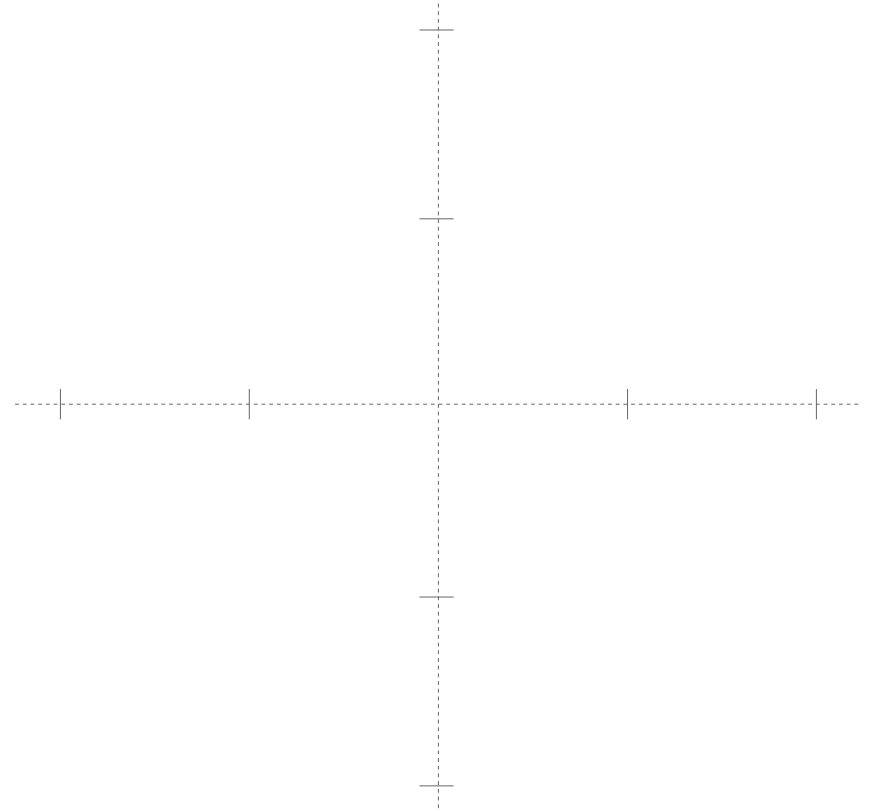
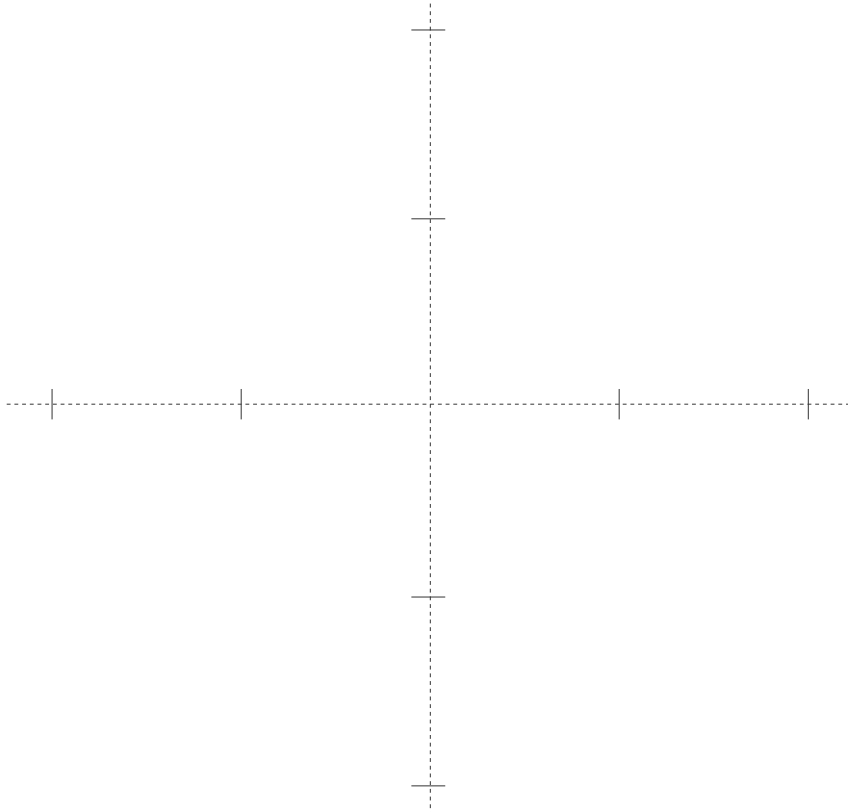


El recorrido de q es el reflejado en la diagonal del recorrido de p

¿Cual es la diferencia?

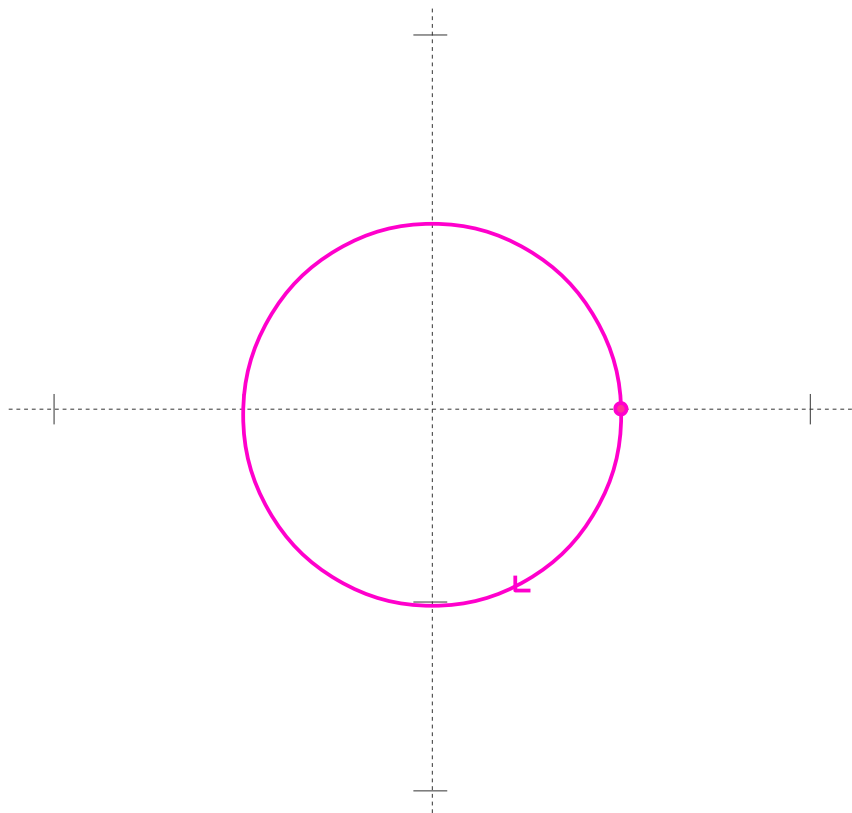
$$p(t) = (\cos -t, \text{sen } -t)$$

$$q(t) = (-\cos t, -\text{sen } t) ?$$

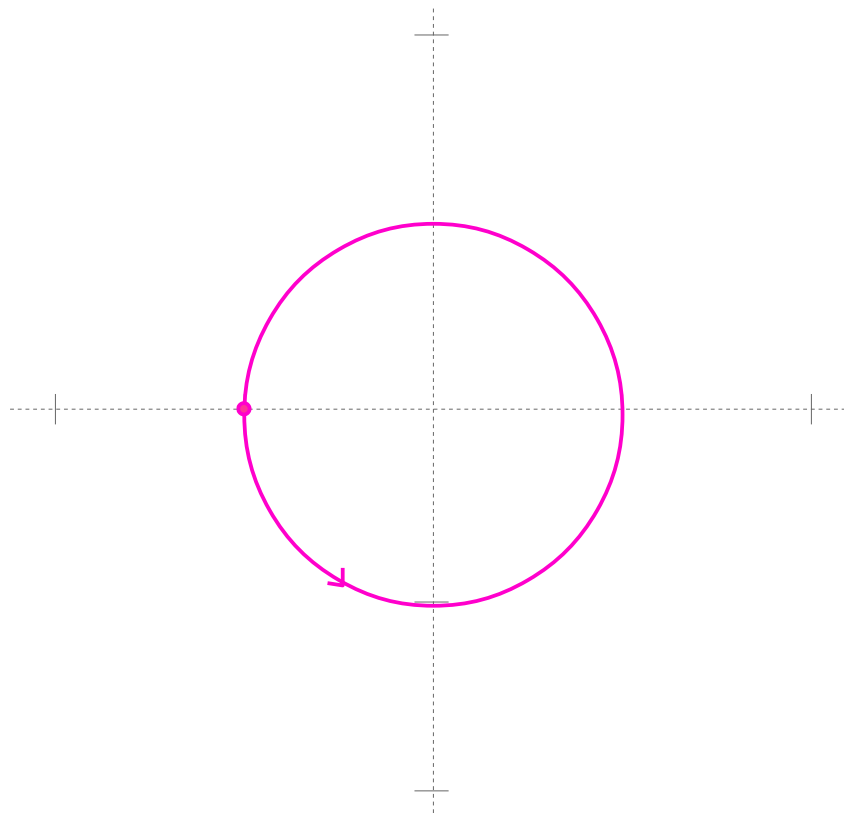


¿Cual es la diferencia?

$$p(t) = (\cos -t, \text{sen } -t)$$

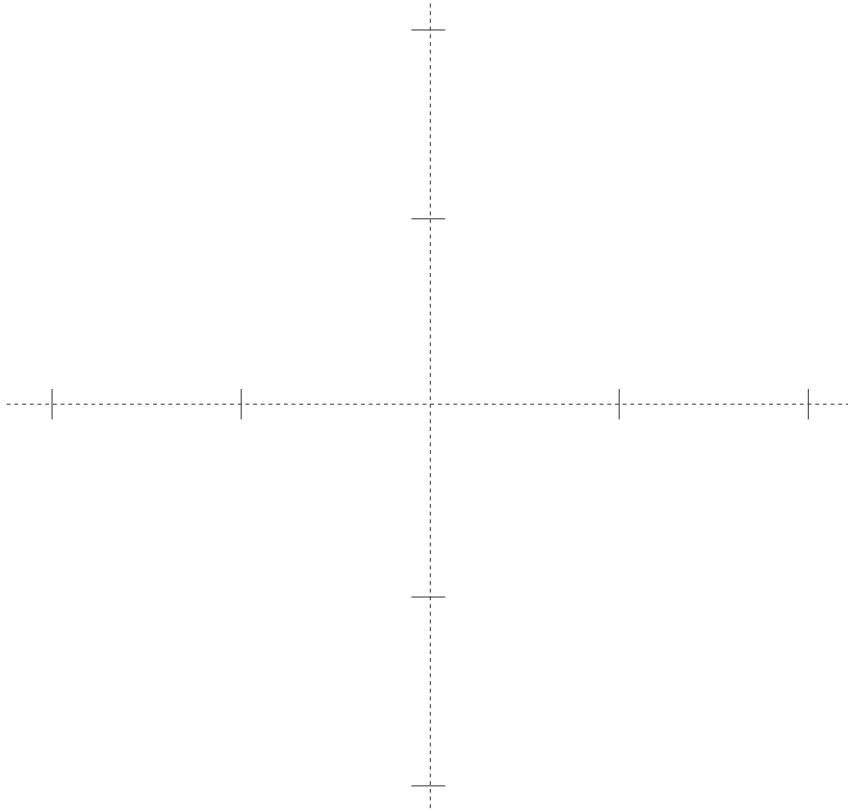


$$q(t) = (-\cos t, -\text{sen } t) ?$$

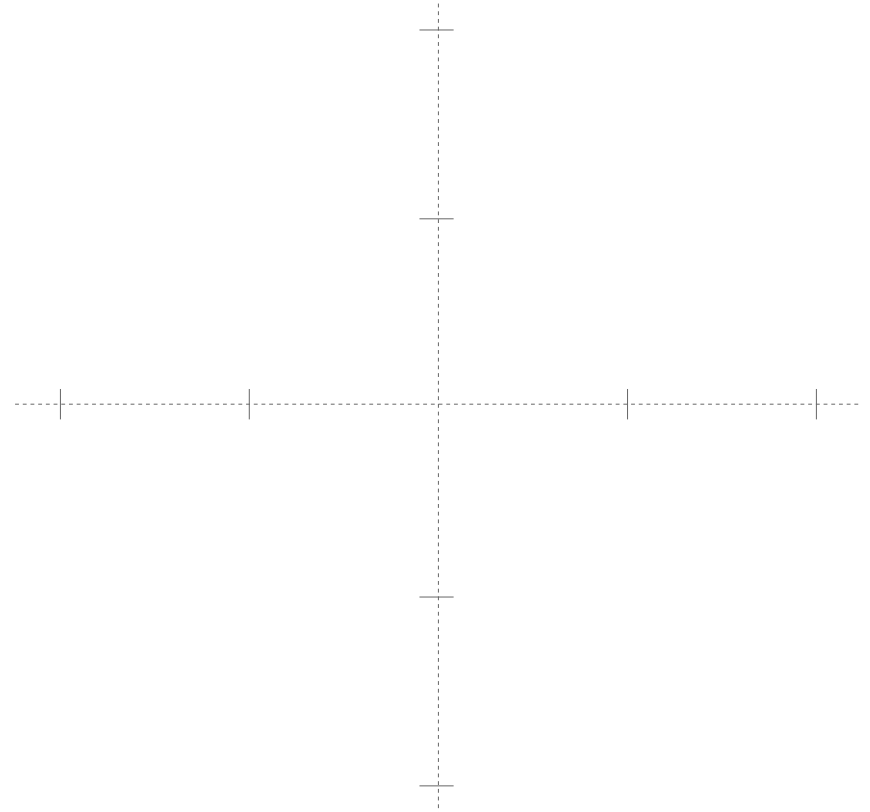


¿Cual es la diferencia?

$$p(t) = (2 \cos t, 2 \sin t)$$

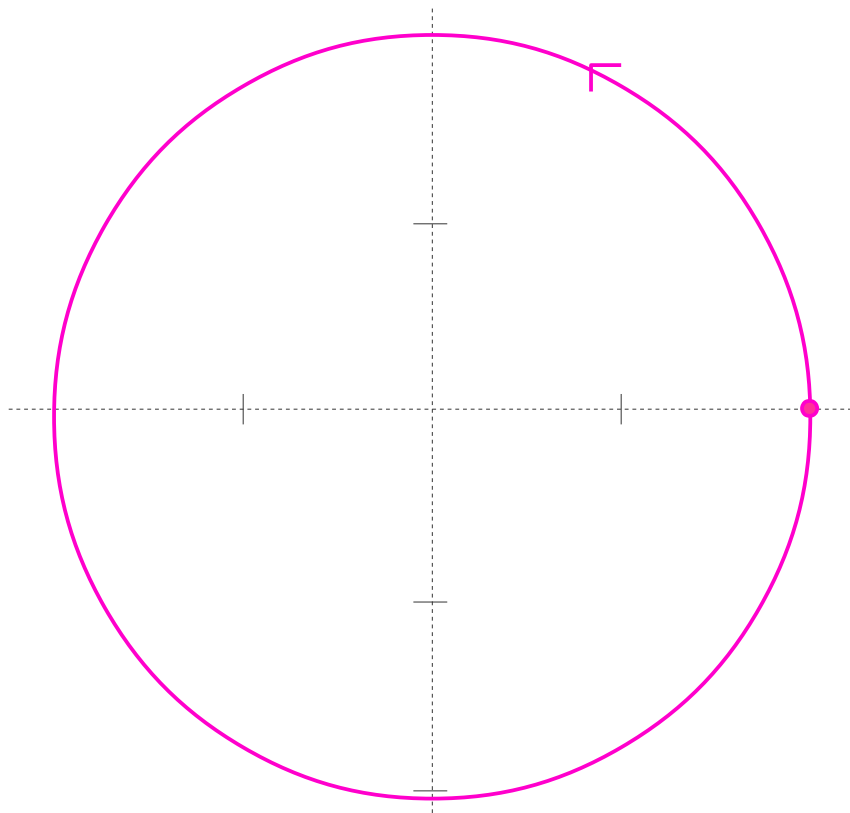


$$q(t) = (\cos 2t, \sin 2t)$$

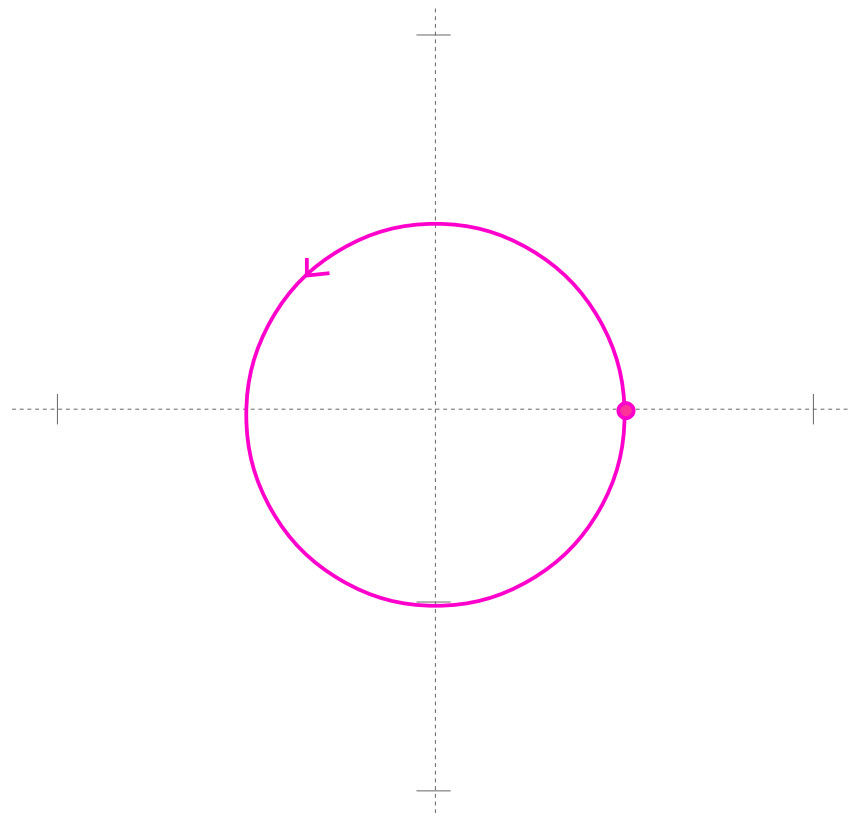


¿Cual es la diferencia?

$$p(t) = (2 \cos t, 2 \sin t)$$

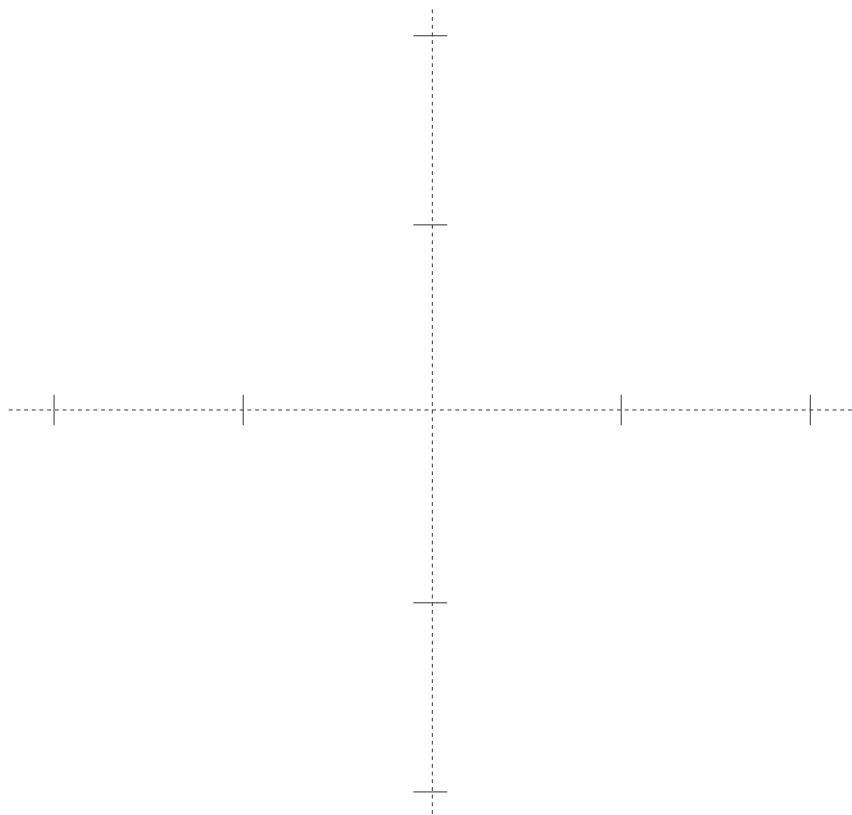


$$q(t) = (\cos 2t, \sin 2t)$$

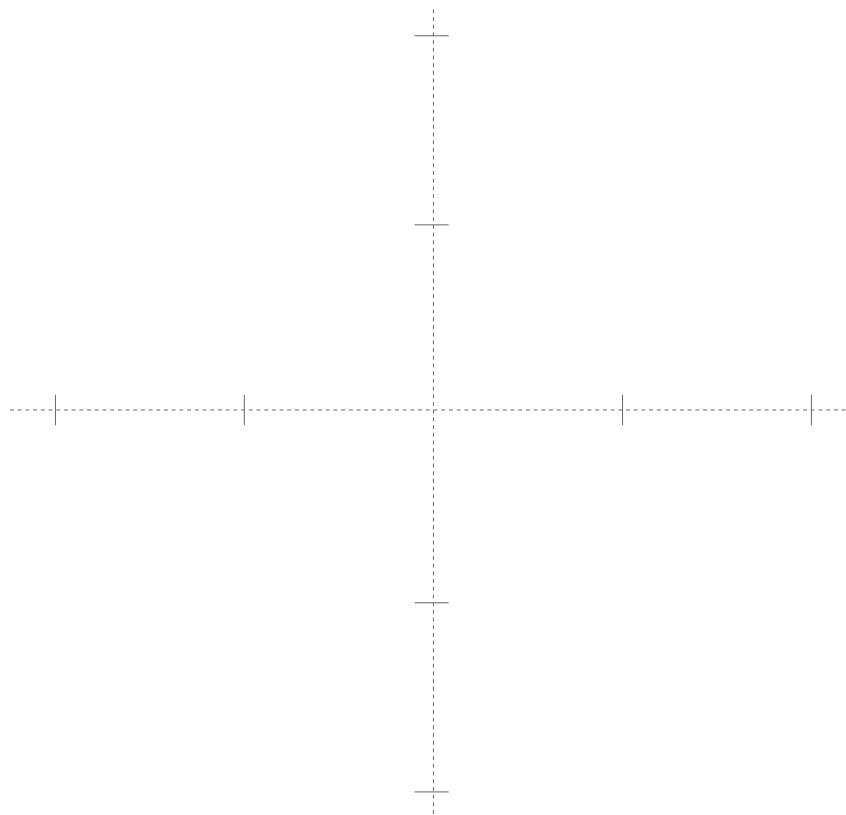


¿Como se ven estas curvas?

$$p(t) = (2 \cos t, \sin t)$$

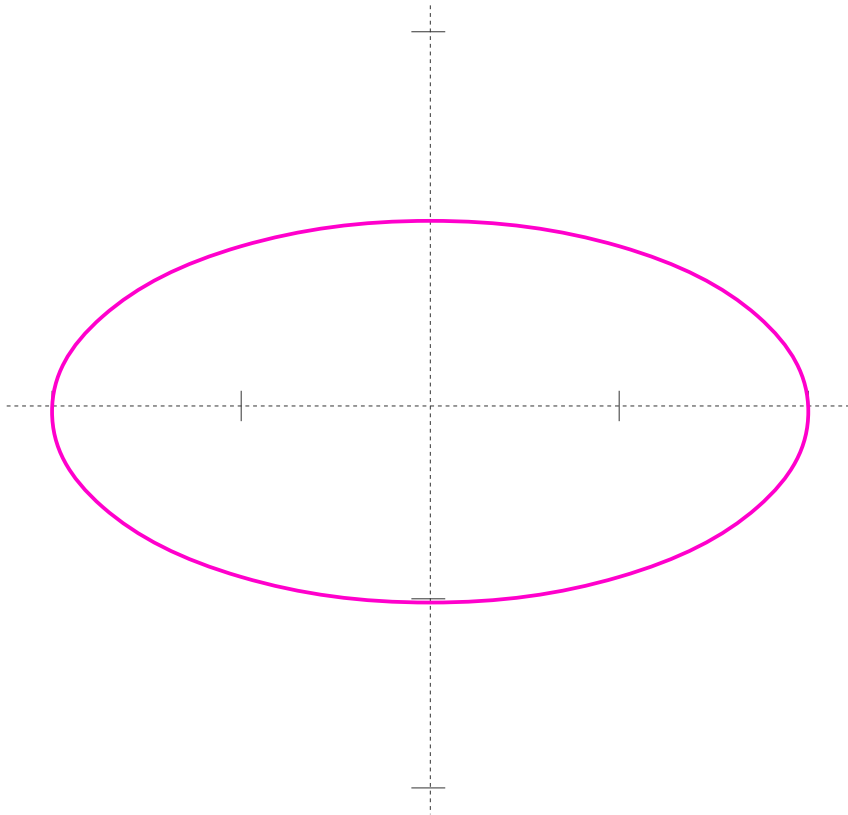


$$q(t) = (2 \cos t, \cos t)$$



¿Como se ven estas curvas?

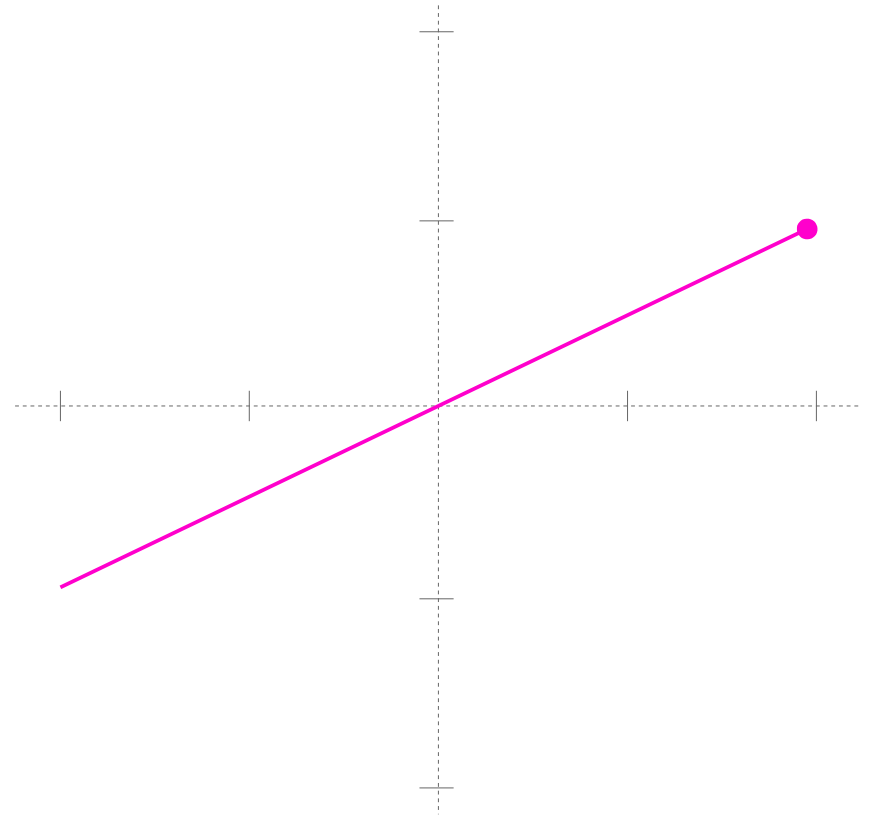
$$p(t) = (2 \cos t, \sin t)$$



$$(x/2)^2 + y^2 = 1$$

Un circulo alargado

$$q(t) = (2 \cos t, \cos t)$$

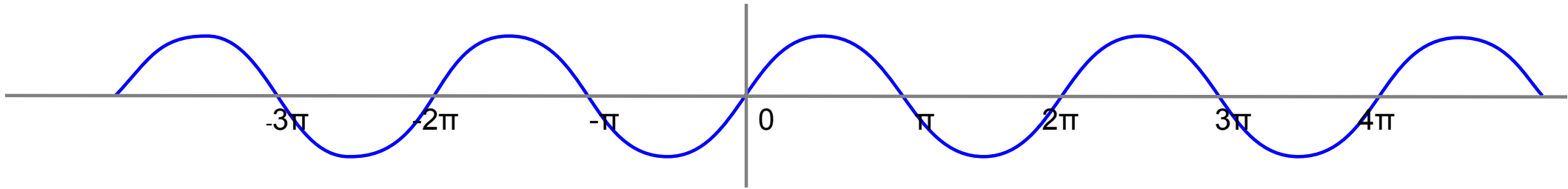


$$x/2 - y = 0$$

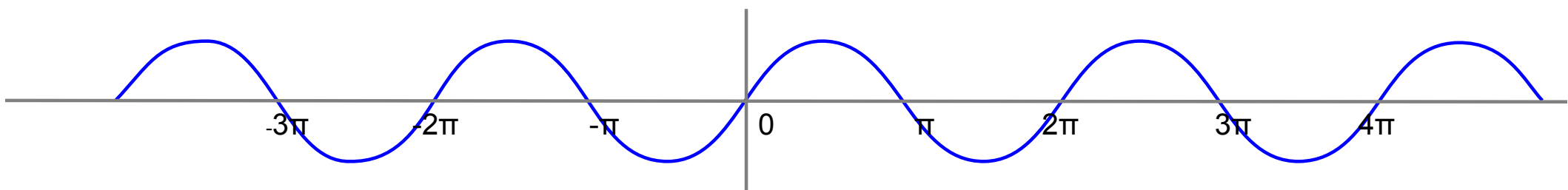
Una segmento de recta

¿Como se ven las curvas $p(t) = (t, \sin t)$ y $q(t) = (t, \cos t)$?

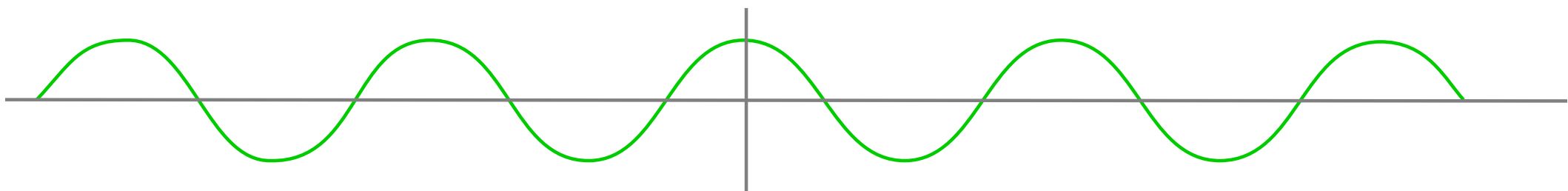
La curva $s(t) = (t, \sin t)$ describe un movimiento ondulatorio: la altura de un punto que gira alrededor del círculo unitario con rapidez constante 1:



La curva $s(t) = (t, \sin t)$ describe un movimiento ondulatorio: la altura de un punto que gira alrededor del círculo unitario con rapidez constante 1:



La curva $c(t) = (t, \cos t)$ se ve igual, pero desplazada, ya que $\cos(t) = \sin(t + \pi/2)$:



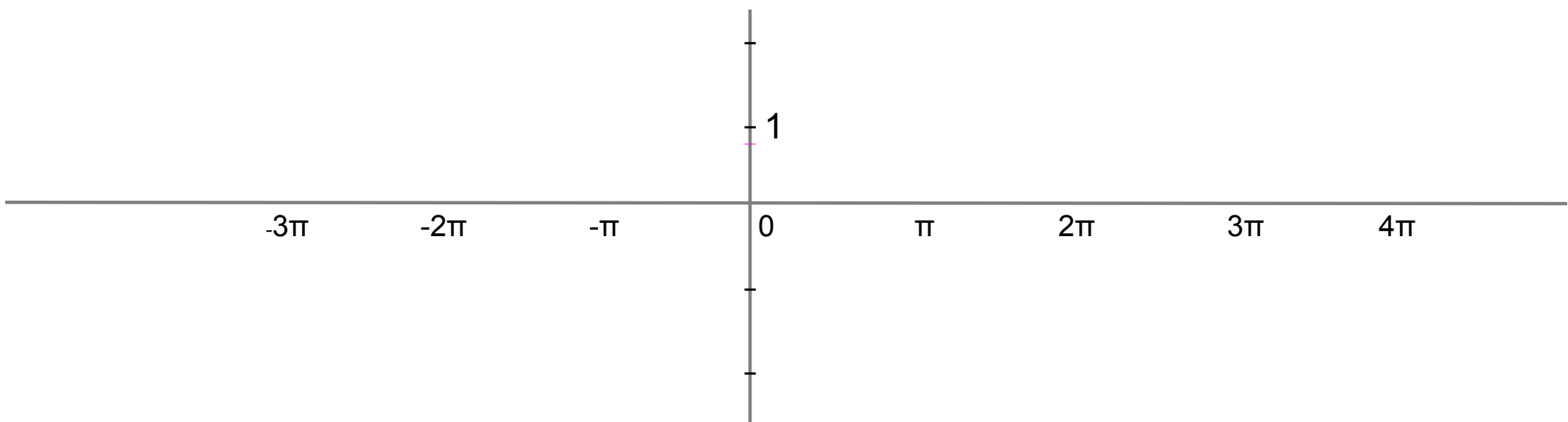
Ejercicio. Grafica estas curvas de modo que se vean claramente sus diferencias:

$$p(t) = (t, 2\sin t)$$

$$q(t) = (t, \sin 2t)$$

$$r(t) = (2t, \sin t)$$

$$s(t) = (2t, \sin 2t)$$



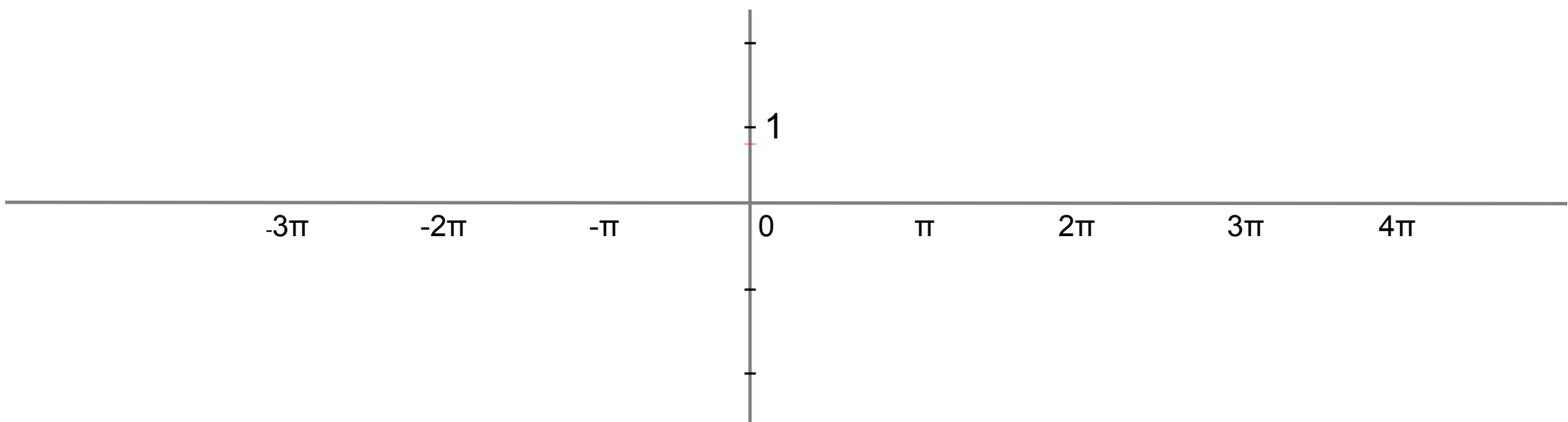
Ejercicio. Grafica estas curvas de modo que se vean claramente sus diferencias:

$$p(t) = (t, 2\sin t)$$

$$q(t) = (t, \sin 2t)$$

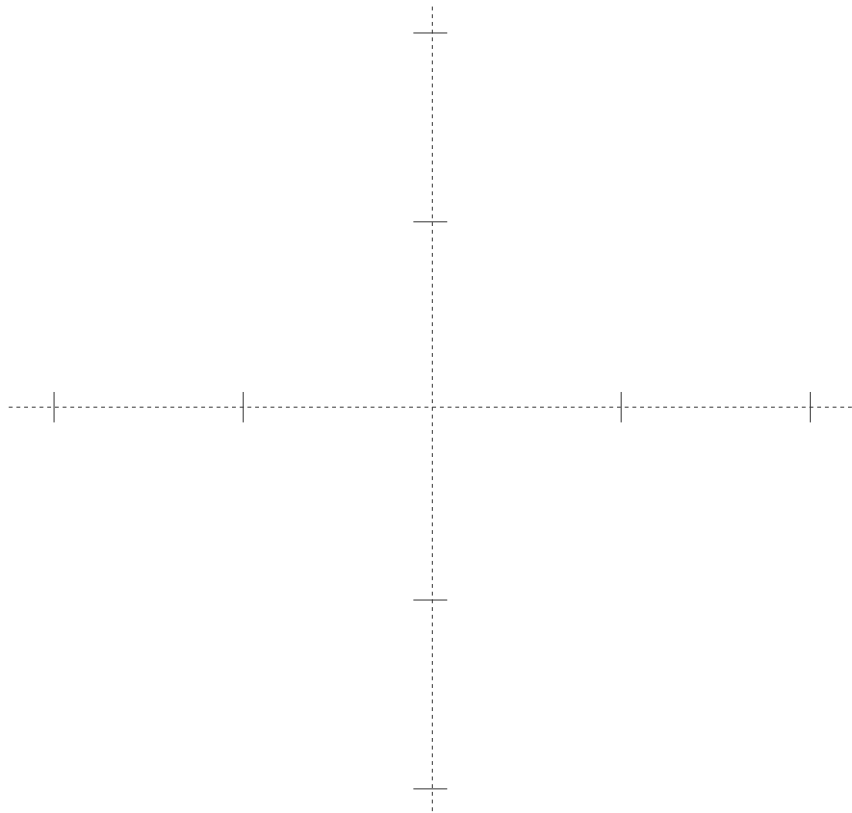
$$r(t) = (2t, \sin t)$$

$$s(t) = (2t, \sin 2t)$$

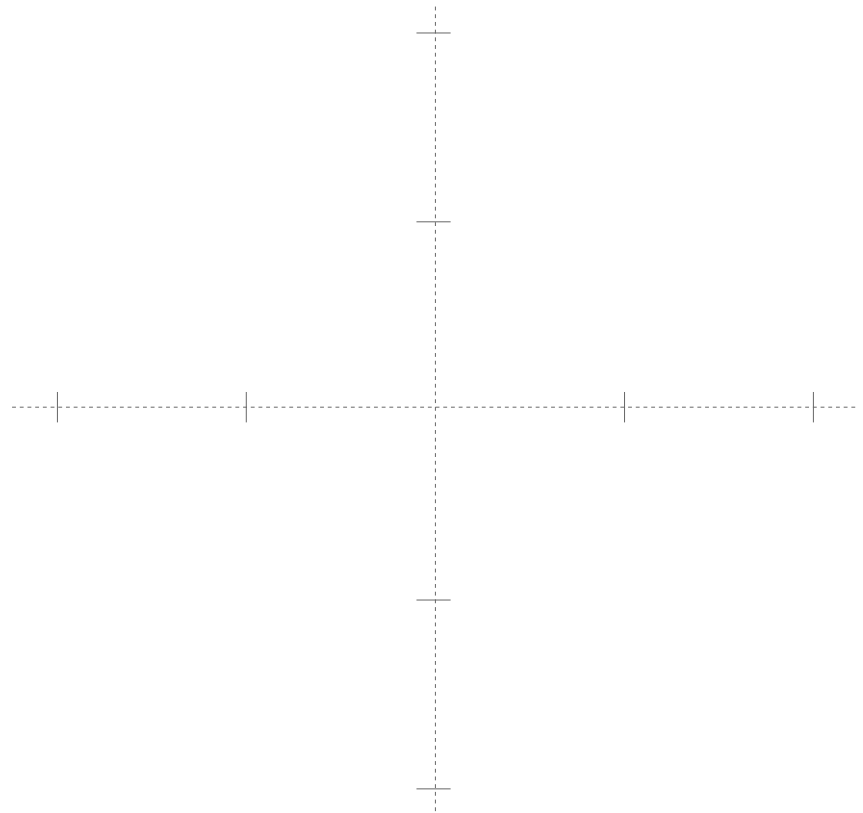


¿Como se verán estas curvas?

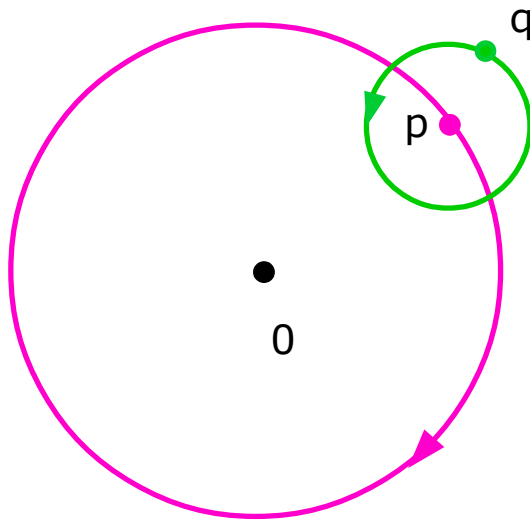
$$p(t) = (\cos 2t, \sin 3t)$$



$$q(t) = (\cos 2t, \cos 3t)$$



Combinando vectorialmente movimientos simples pueden obtenerse movimientos complicados

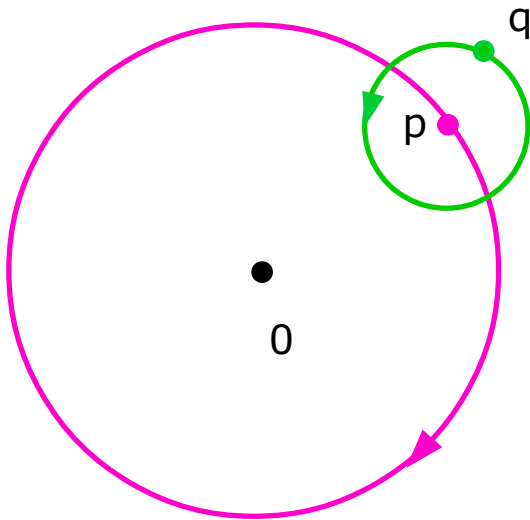


Podemos pensar por ejemplo en un punto q que gira alrededor de un punto p , mientras que p gira alrededor de un punto o . ¿Como se verá el movimiento de q desde o ?

Esto no solo depende del tamaño de los círculos, sino también de las velocidades de giro de p y de q .

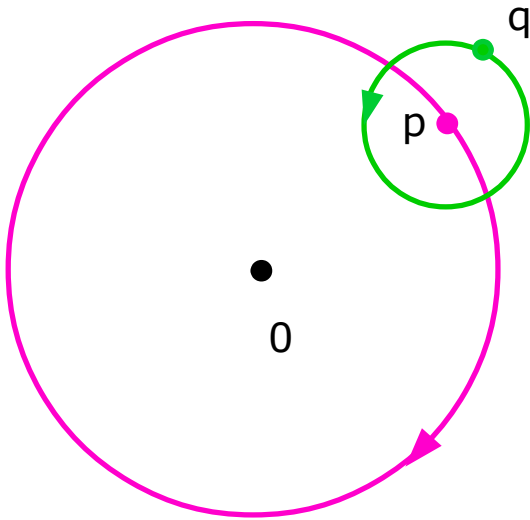
Un punto p gira alrededor del punto o en un círculo de radio 3, en la dirección de las manecillas del reloj con rapidez constante 3 mientras que el punto q gira alrededor de p en un círculo de radio 1 en dirección contraria a las manecillas del reloj con rapidez constante 2.

¿Cual es la posición del punto q respecto al origen en el instante t ?



Un punto p gira alrededor del punto o en un círculo de radio 3, en la dirección de las manecillas del reloj con rapidez constante 3 mientras que el punto q gira alrededor de p en un círculo de radio 1 en dirección contraria a las manecillas del reloj con rapidez constante 2.

¿Cual es la posición del punto q respecto al origen en el instante t ?



La posición de p respecto al origen esta dada por

$$p(t) = (3\text{sent}, 3\text{cost})$$

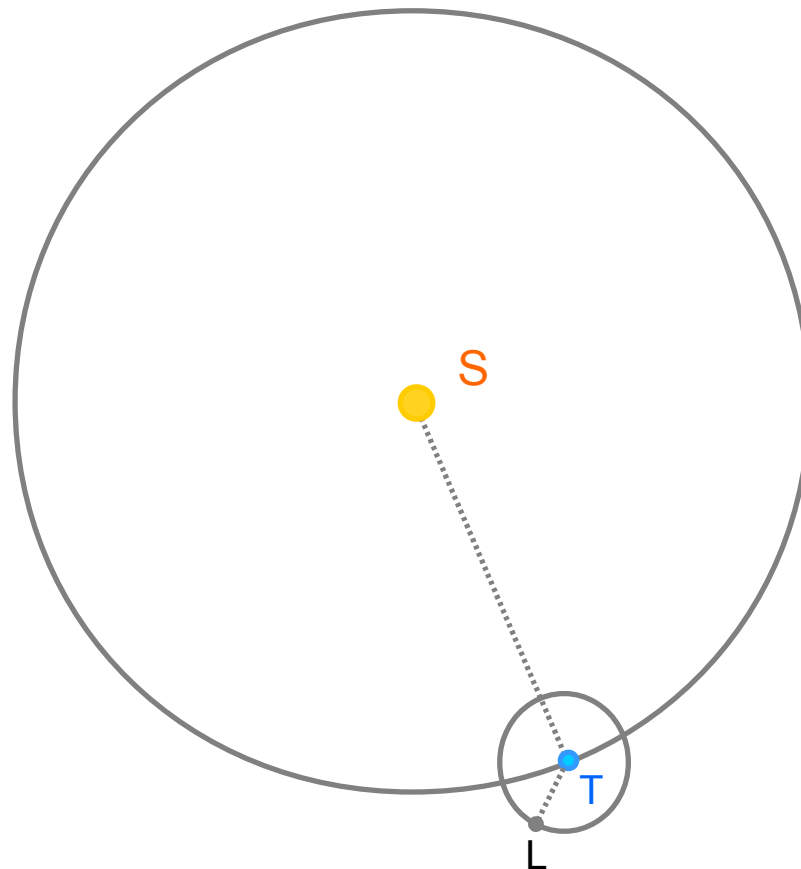
La posición de q respecto a p esta dada por

$$r(t) = (\cos 2t, \text{sen} 2t)$$

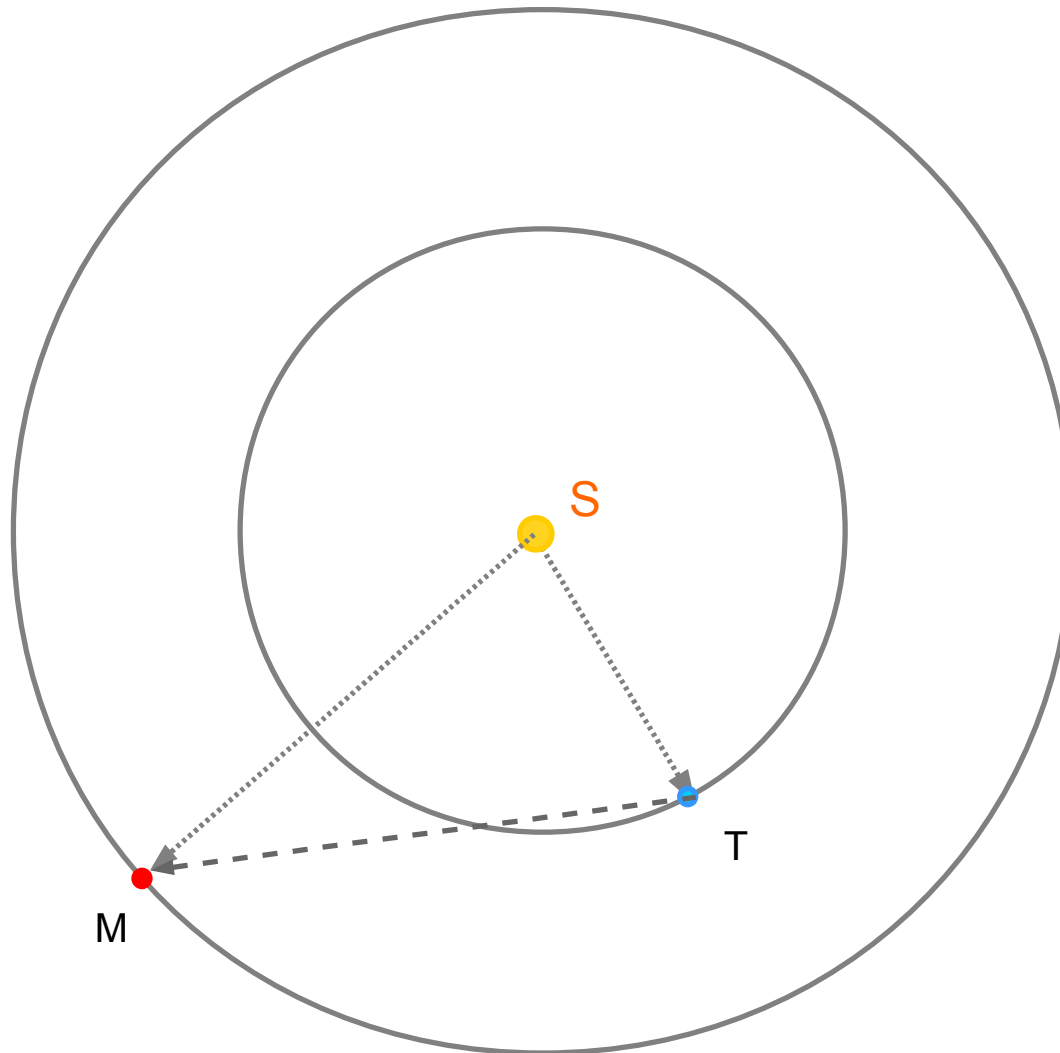
así que la posición de q respecto al origen esta dada

$$\text{por } q(t) = p(t) + r(t) = (3\text{sent} + \cos 2t, 3\text{cost} + \text{sen} 2t).$$

La trayectoria de la Luna alrededor del Sol es la suma de la trayectoria de la Luna alrededor de la Tierra con el movimiento de la Tierra alrededor del Sol.



La trayectoria de Marte desde la tierra es la resta de la trayectoria de Marte desde el Sol y la trayectoria de la Tierra desde el Sol.

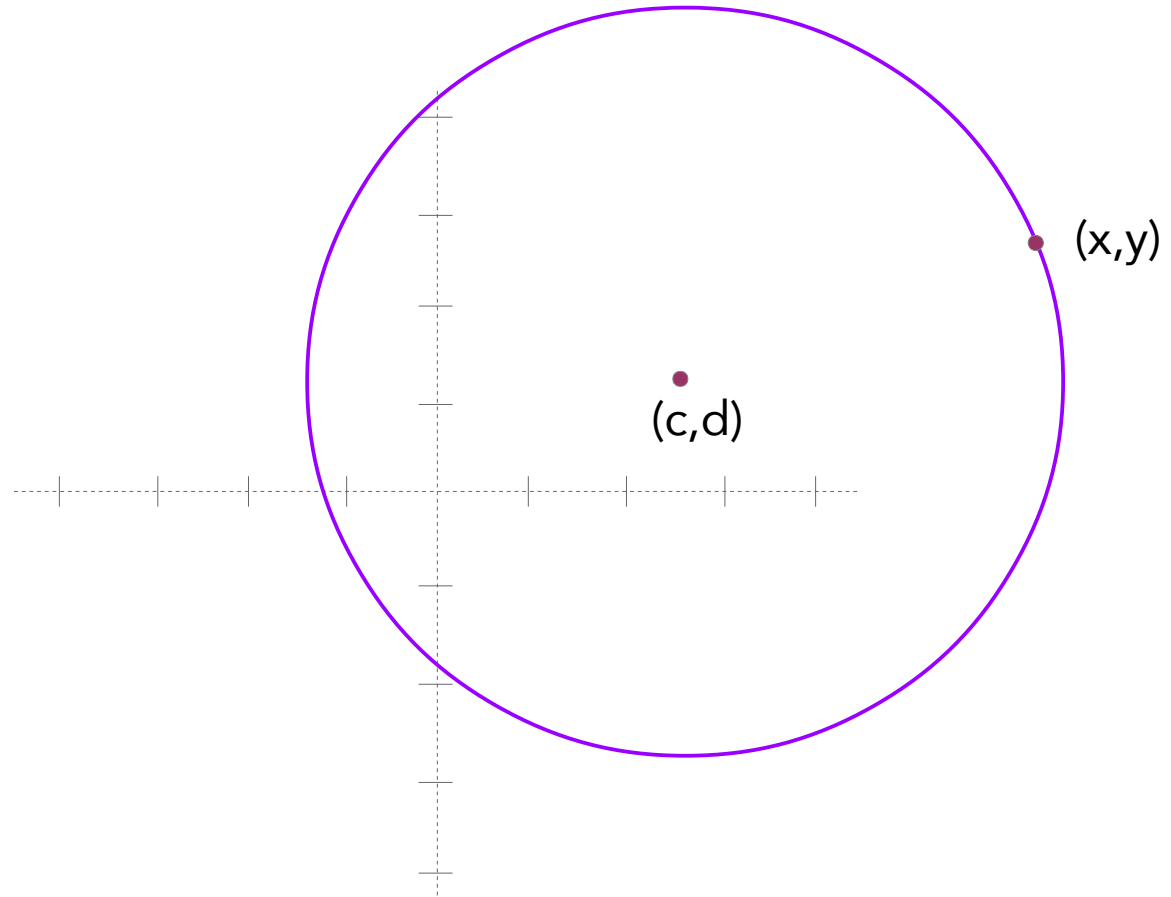


Círculos

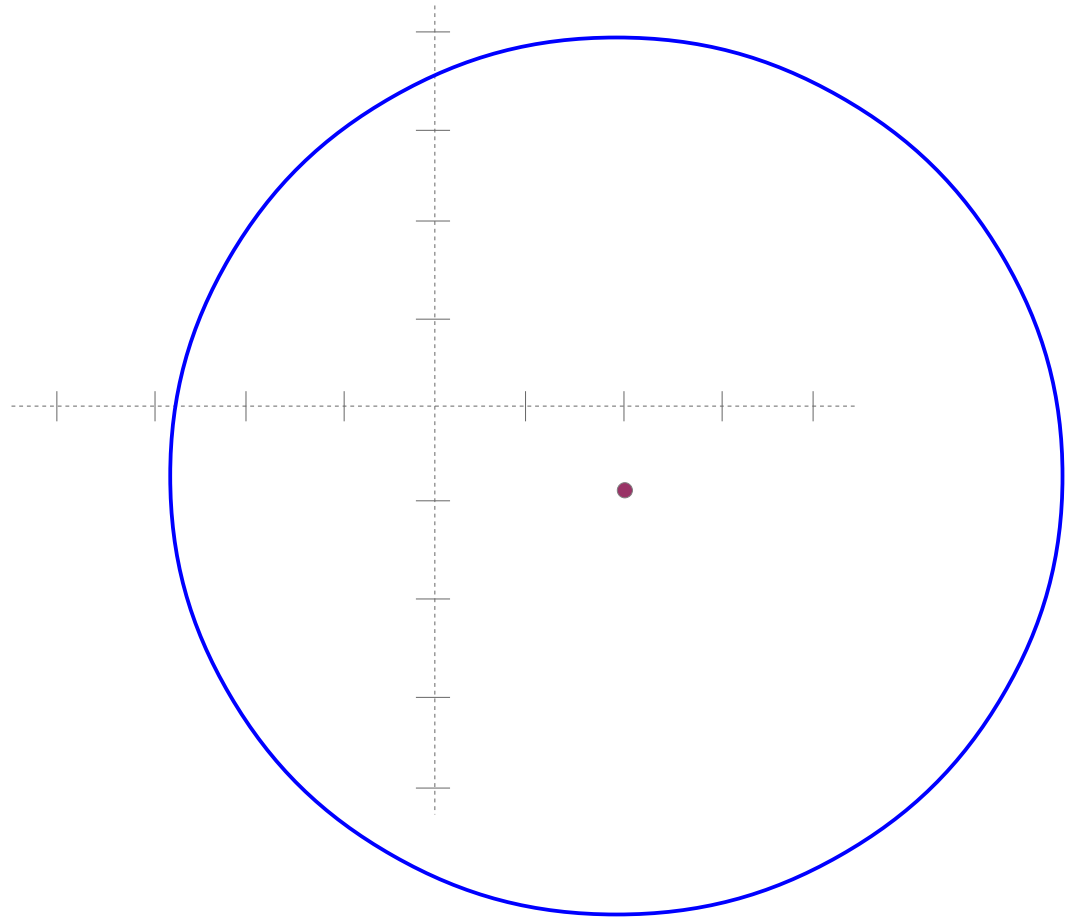
Los círculos son las curvas formadas por los puntos del plano que están a la misma distancia de un punto fijo. Este punto es el centro y la distancia es el radio del círculo.

Como la distancia del punto (x,y) al punto (c,d) es $\sqrt{(x-c)^2+(y-d)^2}$

entonces el círculo de radio r y centro en (a,b) tiene ecuación $(x-c)^2+(y-d)^2 = r^2$



Ejemplo. El círculo de radio 5 con centro en el punto $(2,-1)$ tiene ecuación ...



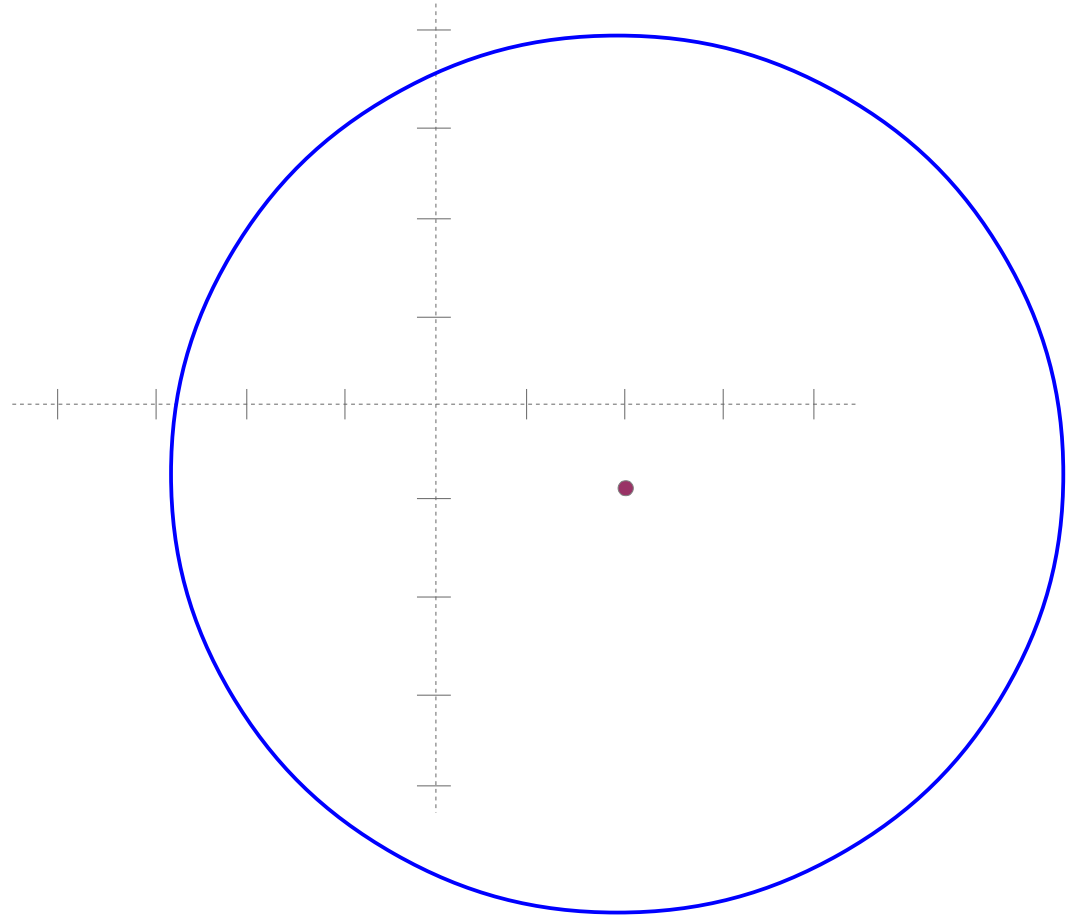
Ejemplo. El círculo de radio 5 con centro en el punto $(2,-1)$ tiene ecuación

$$(x-2)^2+(y+1)^2 = 5^2$$

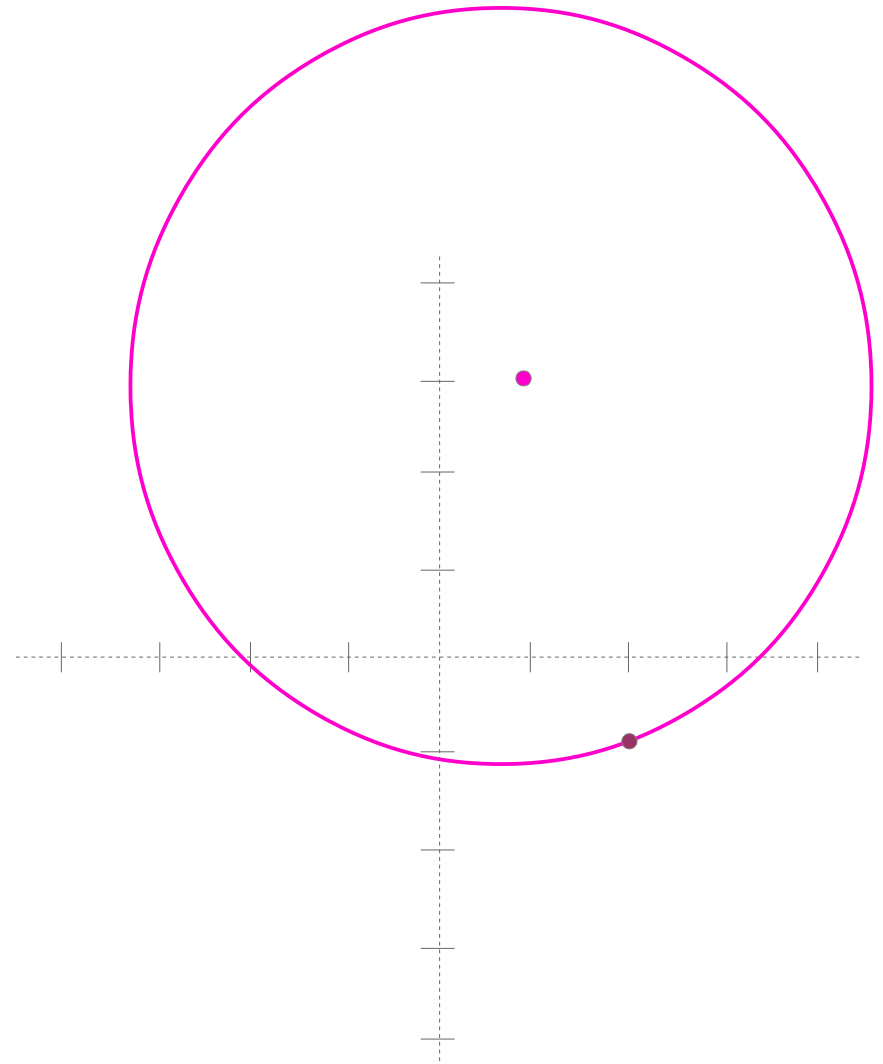
que también puede escribirse

$$x^2-4x+4+y^2+2y+1= 25 \text{ y se simplifica a}$$

$$x^2+y^2-4x+2y = 20$$



Ejercicio. ¿Que ecuación tiene el círculo con centro en el punto $(1,3)$ y que pasa por el punto $(2,-1)$?



Ejercicio. ¿Que ecuación tiene el círculo con centro en el punto (1,3) y que pasa por el punto (2,-1)?

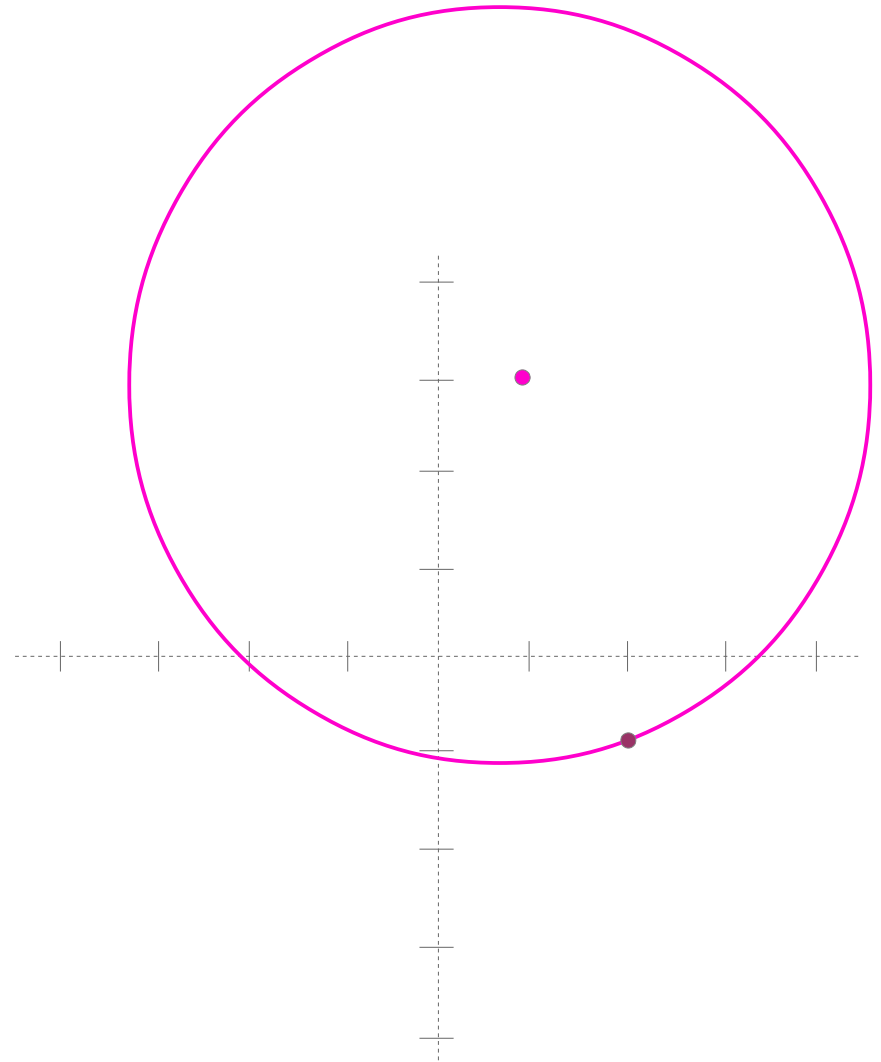
$$\sqrt{\quad\quad\quad} \quad \sqrt{\quad\quad\quad}$$

El radio es $r = \sqrt{(1-2)^2 + (3+1)^2} = \sqrt{17}$

así que la ecuación es

$$(x-1)^2 + (y-3)^2 = 17$$

$$x^2 + y^2 - 2x - 6y = 7$$



Lema. Las ecuaciones de la forma $x^2+y^2+Ax+By = C$ corresponden a...

Lema. Las ecuaciones de la forma $x^2+y^2+Ax+By = C$ corresponden a círculos, puntos o el vacío.

Lema. Las ecuaciones de la forma $x^2+y^2+Ax+By = C$ corresponden a círculos, puntos o el vacío.

Demostración. Podemos reescribir la ecuación en la forma de la ecuación de un círculo reacomodando los términos y completando los cuadrados

$$x^2+Ax+ \quad +y^2+By+ \quad = C$$

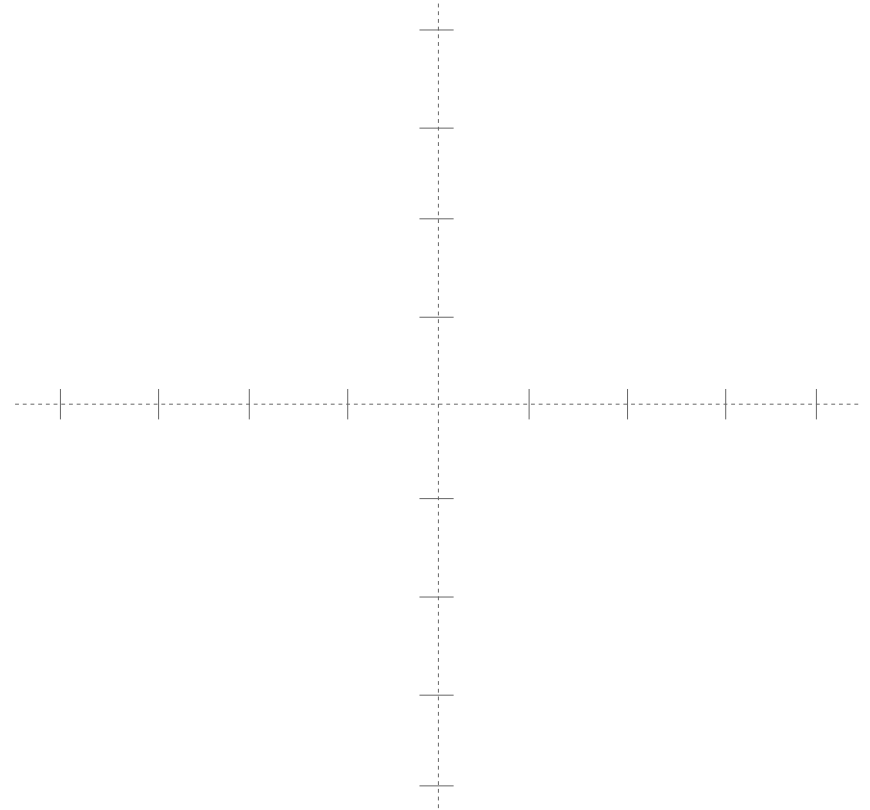
$$x^2+Ax+(A/2)^2+y^2+By+(B/2)^2 = C+(A/2)^2+(B/2)^2$$

$$(x+A/2)^2+(y+B/2)^2 = (A/2)^2+(B/2)^2$$

que es un círculo con centro en $(-A/2, -B/2)$ si $C+(A/2)^2+(B/2)^2 > 0$,

es un punto si $(A/2)^2+(B/2)^2 = 0$ y es el vacío si $C+(A/2)^2+(B/2)^2 < 0$. $\square$

Ejercicio. ¿La ecuación $x^2+y^2+4x-6y = 3$ corresponde a un círculo? ¿donde está su centro y cual es su radio?



Ejercicio. ¿La ecuación $x^2+y^2+4x-6y = 3$ corresponde a un círculo? ¿donde está su centro y cual es su radio?

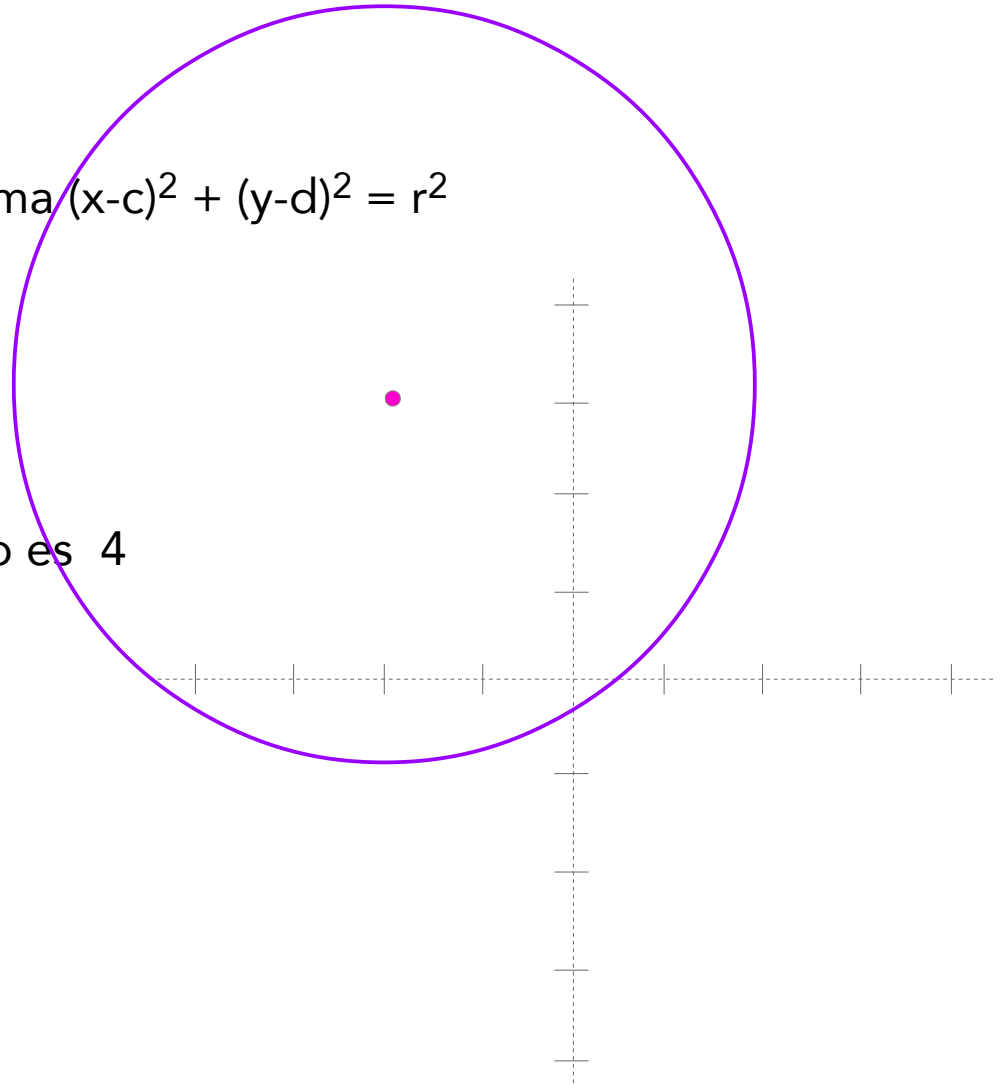
Hay que reescribir la ecuación en la forma $(x-c)^2 + (y-d)^2 = r^2$

$$x^2+4x+ \quad +y^2-6y+ \quad = 3$$

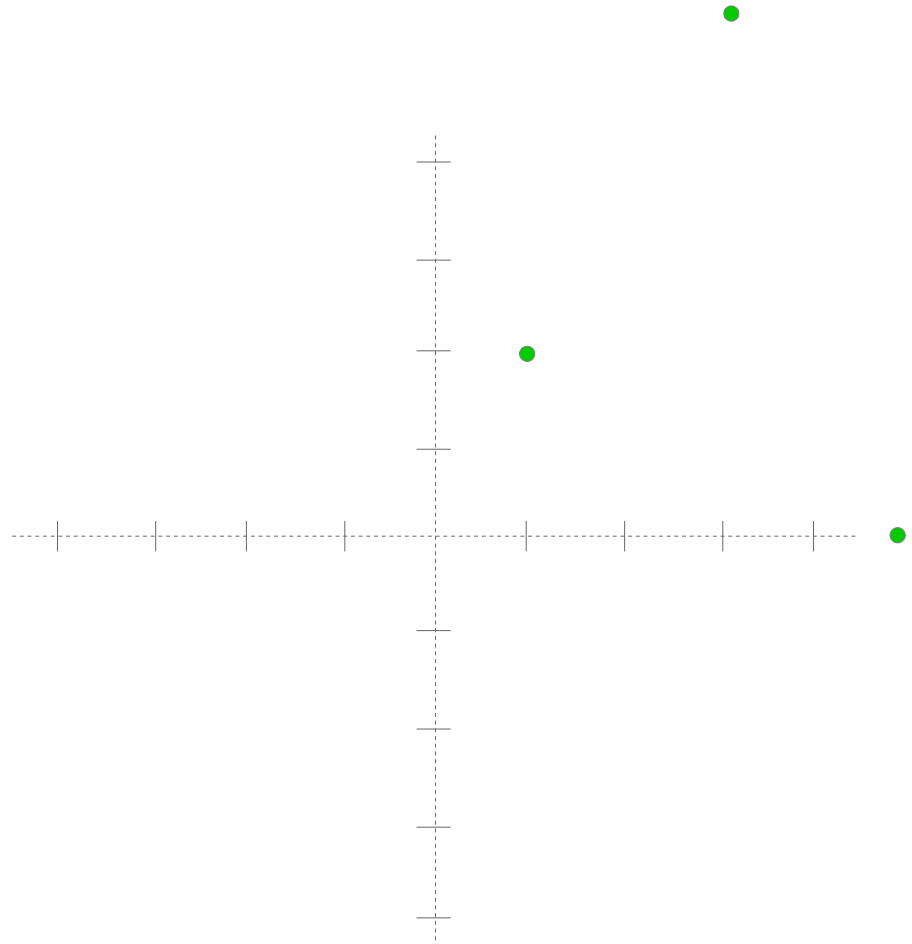
$$x^2+4x+4 +y^2-6y+9 = 3+4+9$$

$$(x+2)^2 + (y-3)^2 = 16$$

así que el centro está en $(-2,3)$ y el radio es 4



Ejercicio. ¿Cual es la ecuación del círculo que pasa por los puntos $(1,2)$, $(3,6)$ y $(5,0)$?



Ejercicio. ¿Cual es la ecuación del círculo que pasa por los puntos (1,2), (3,6) y (5,0)?

Podemos empezar hallando el centro (c,d)

que debe estar a la misma distancia de los 3 puntos

$$(c-1)^2+(d-2)^2 = (c-3)^2+(d-6)^2 = (c-5)^2+(d-0)^2$$

$$c^2-2c+1+d^2-4d+4 = c^2-6c+9+d^2-12d+36 = c^2-10c+25+d^2$$

$$-2c+1-4d+4 = -6c+9-12d+36 = -10c+25$$

$$4c+8d = 40 \quad 4c-12d = -20$$

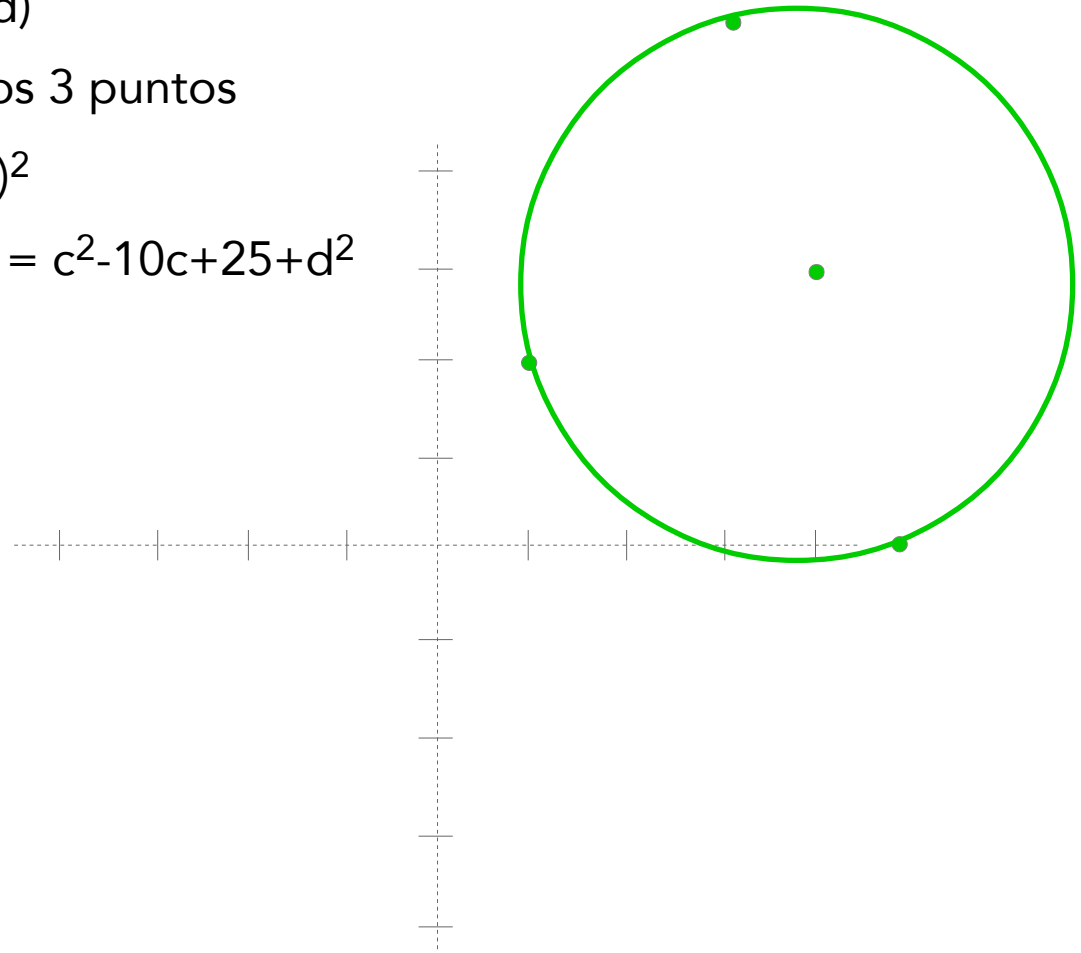
$$20d = 60 \quad d = 3$$

$$4c+24 = 40 \quad c = 4$$

así que el centro está en (4,3)

$$\text{el radio es } \sqrt{(4-1)^2+(3-2)^2} = \sqrt{10}$$

$$\text{Y la ecuación es } (x-4)^2+(y-3)^2 = 10$$



Ejercicio. ¿Cual es la ecuación del círculo que pasa por los puntos (1,2), (3,6) y (5,0)?

Podemos hallar los coeficientes de la ecuación $x^2+y^2+Ax+By = C$, directamente, sabiendo que los 3 puntos deben satisfacerla:

$$\begin{array}{llllll} 1^2+2^2+A1+B2=C & A+2B+5=C & A+2B+5=5A+25 & -4A+2B=20 & 10A=-80 & A=-8 \\ 3^2+6^2+A3+B6=C & 3A+6B+45=C & 3A+6B+45=5A+25 & -2A+6B=-20 & -10B=60 & B=-6 \\ 5^2+0^2+A5+B0=C & 5A+25=C & & & & C=-15 \end{array}$$

La ecuación es $x^2+y^2-8x-6y = -15$

Lugares geométricos

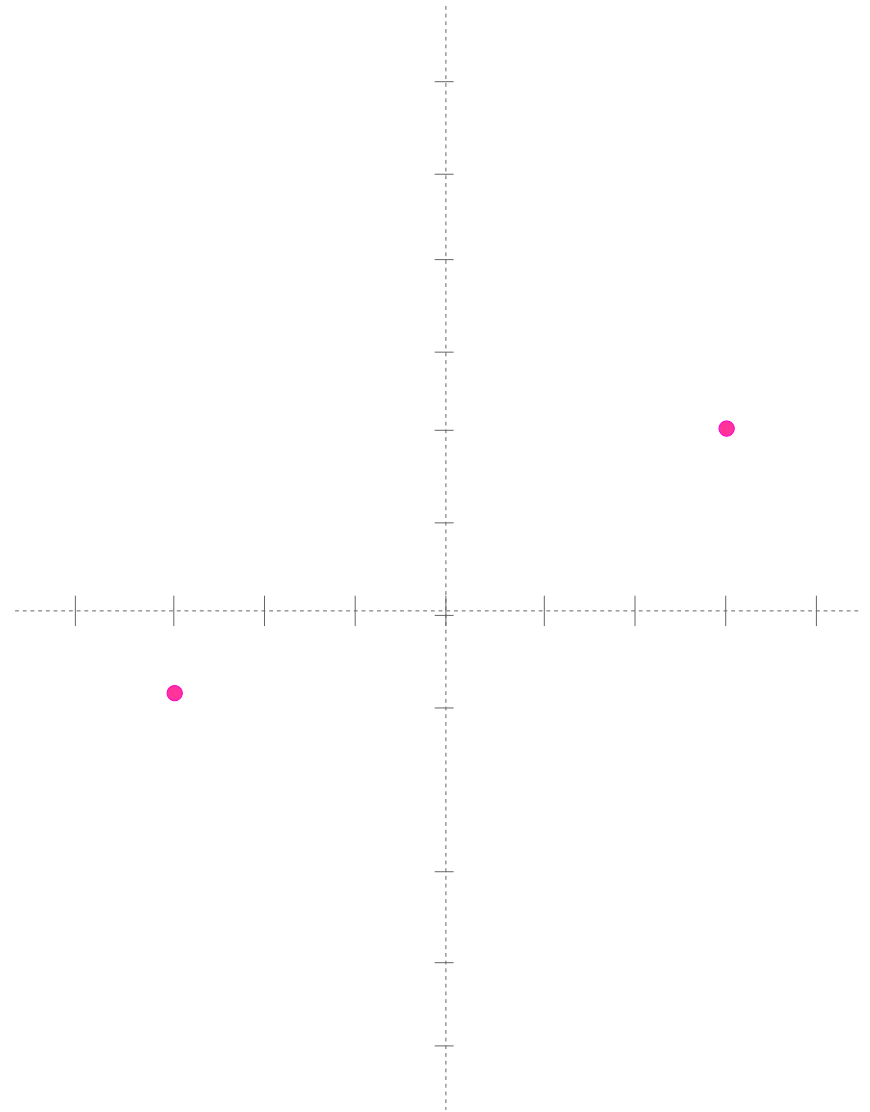
Un **lugar geométrico** es un conjunto de puntos del plano o del espacio que satisfacen alguna condición.

¿Cual será el lugar geométrico de los puntos del plano que están a la misma distancia de dos puntos fijos P y Q?

¿Cual será el lugar geométrico de los puntos del plano cuya distancia a un punto P es el doble de su distancia a otro punto Q?

Ejemplo

¿Que ecuación cumplen los puntos que están a la misma distancia de $(3,2)$ y $(-3,-1)$?



Ejemplo

¿Que ecuación cumplen los puntos que están a la misma distancia de (3,2) y (-3,-1)?

$$\sqrt{(x-3)^2+(y-2)^2} = \sqrt{(x+3)^2+(y+1)^2}$$

$$(x-3)^2+(y-2)^2 = (x+3)^2+(y+1)^2$$

$$x^2-6x+9+y^2-4y+4 = x^2+6x+9+y^2+2y+1$$

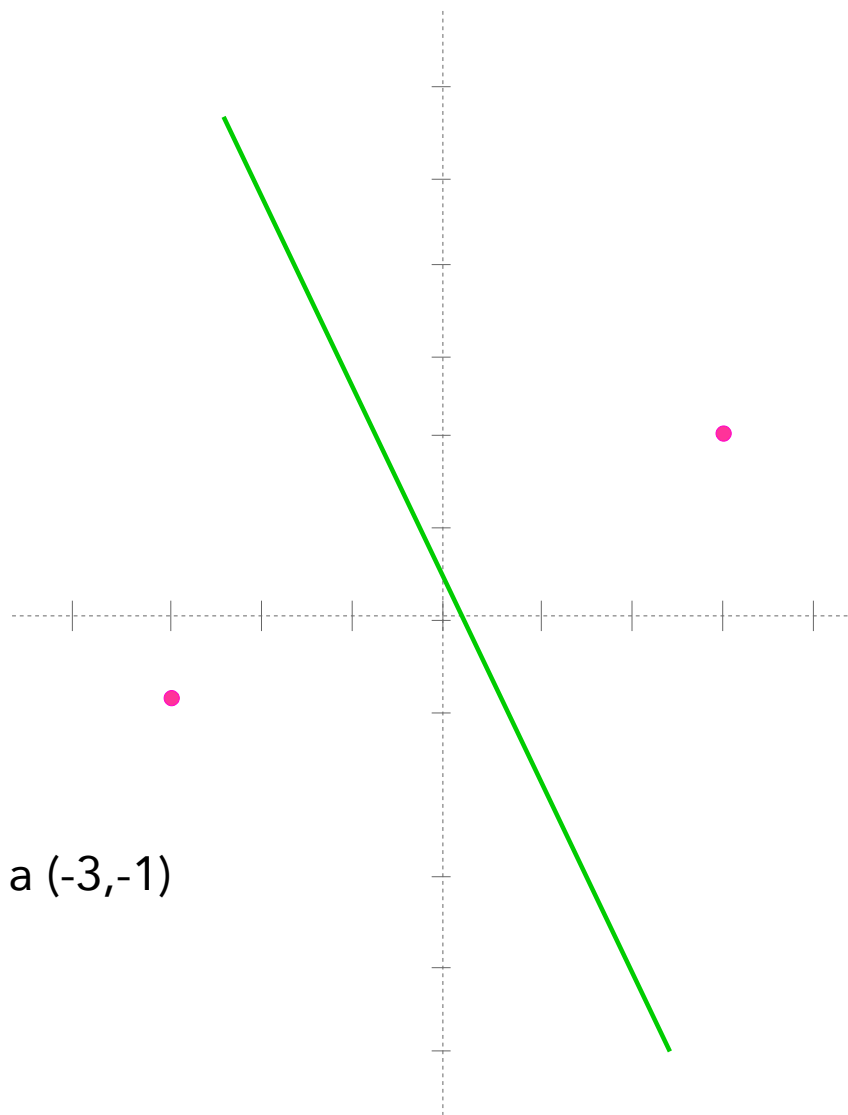
$$-6x-4y+13 = 6x+2y+10$$

$$-12x -6y = -3$$

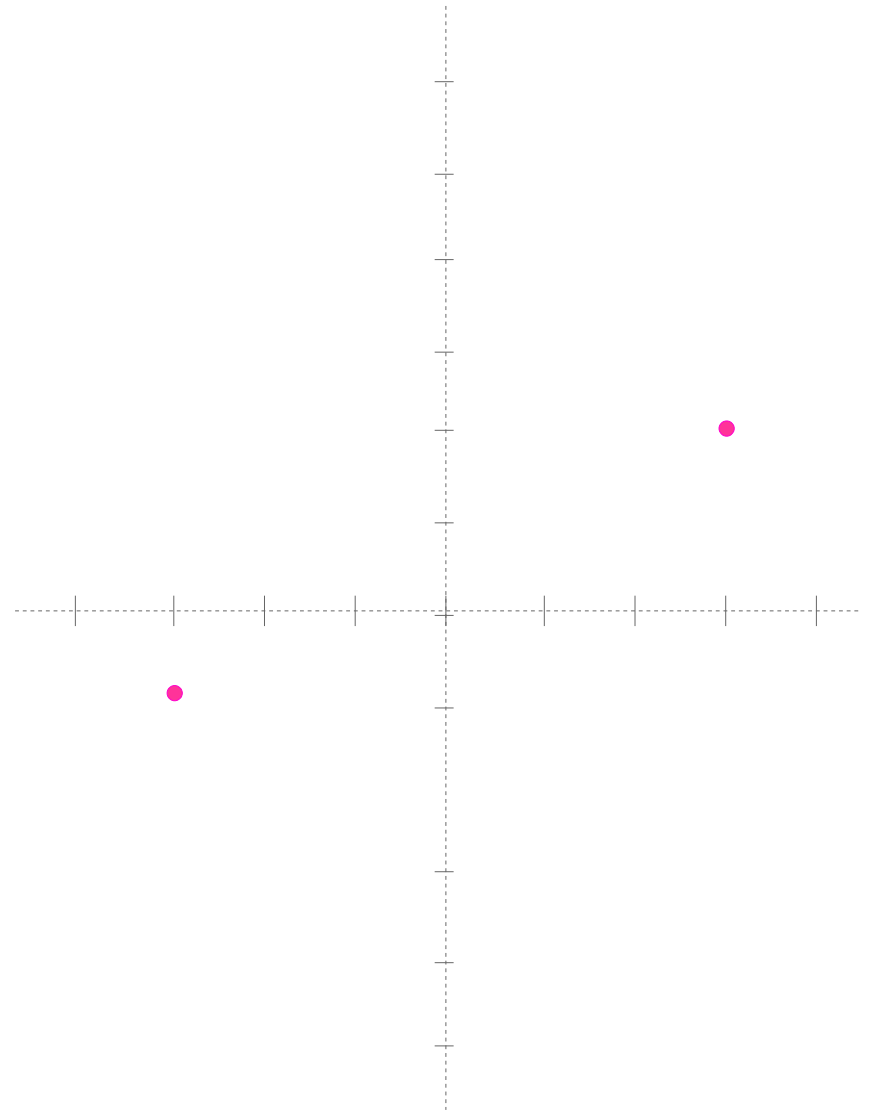
$$4x+2y = 1$$

y esta es una recta

(es la mediatriz del segmento que va de (3,2) a (-3,-1))



Ejemplo ¿Que ecuación cumplen los puntos del plano cuya distancia a $(3,2)$ es el **doble** de su distancia a $(-3,-1)$?



Ejemplo ¿Que ecuación cumplen los puntos del plano cuya distancia a (3,2) es el **doble** de su distancia a (-3,-1)?

$$\sqrt{(x-3)^2+(y-2)^2} = 2 \sqrt{(x+3)^2+(y+1)^2}$$

$$(x-3)^2+(y-2)^2 = 4(x+3)^2+4(y+1)^2$$

$$x^2-6x+9+y^2-4y+4 = 4x^2+24x+36+4y^2+8y+4$$

$$-3x^2-3y^2-30x-12y = 27$$

$$x^2+y^2+10x+4y = -9$$

que se puede reescribir

$$(x+5)^2+(y+2)^2 = 20$$

es un círculo con centro
en (-5,-2) y radio $\sqrt{20}$

