Proporción y semejanza

Proporciones

Los pitagóricos, quienes descubrieron entre otras cosas la relación entre la armonía musical y las fracciones, se interesaron y estudiaron las proporciones en la geometría.

Proporciones

En términos modernos, se dice que dos magnitudes A y B están en la *misma proporción* (o en la *misma razón*) que otras dos magnitudes C y D si $A/B = C/D$.

Proporciones

En términos modernos, se dice que dos magnitudes A y B están en la *misma proporción* (o en la *misma razón*) que otras dos magnitudes C y D si $A/B = C/D$.

Ejemplo. Si A y B son 2 magnitudes y existe otra magnitud C de la que son múltiplos enteros:

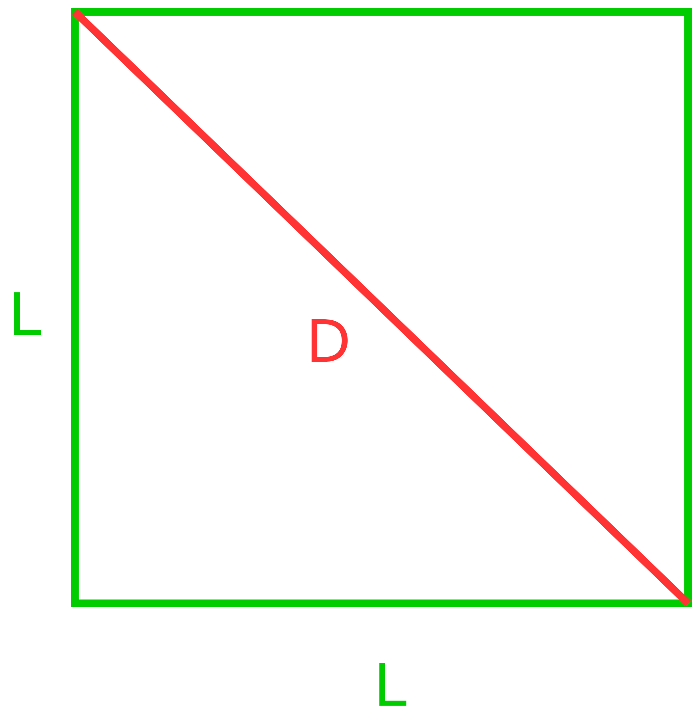
Si $A=mC$ y $B=nC$ entonces $A/B = mC/nC = m/n$.
Así que A y B están en la misma razón que m y n.

Como los pitagóricos creían que todo estaba regido por los números naturales, les parecía natural pensar que cualquier proporción debía poder expresarse como el cociente de dos números naturales.

Fue una gran sorpresa descubrir que **existen cantidades que no son conmensurables** es decir que no existe ninguna magnitud de la que ambas sean múltiplos enteros, y por lo tanto la razón entre ellas no es igual a ninguna fracción.

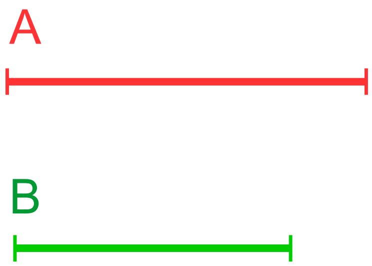
Proposición 2:10. *La diagonal de un cuadrado no es conmensurable con sus lados.*

En otras palabras, no existe ninguna magnitud C *tal que* L=mC *y* D=nC*, así que* D/L ***no*** *es una fracción.*



La existencia de cantidades inconmensurables hace que hablar de proporciones no sea tan fácil.

¿Cual será la razón entre estas 2 longitudes?



Si podemos encontrar una magnitud C de la que A y B sean múltiplos enteros ya acabamos.

¿Y que pasa si no existe tal C?

Euclides encontró una manera de tratar las proporciones usando la multiplicación en lugar de la división:

En el ejemplo:

A

B

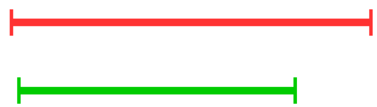
aproximadamente

Aquí podemos adivinar que $A/B \approx 4/3$, o sea que $3A/4B \approx 12/12 = 1/1$

En el ejemplo:

A

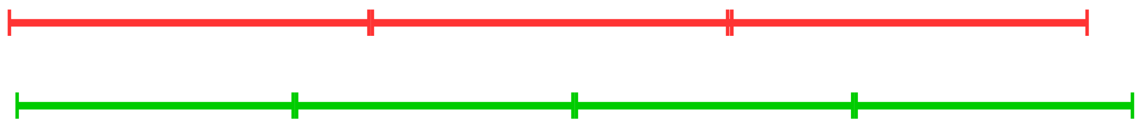
B



aproximadamente

Aquí podemos adivinar que $A/B \approx 4/3$, o sea que $3A/4B \approx 12/12 = 1/1$

si comparamos $3A$ y $4B$

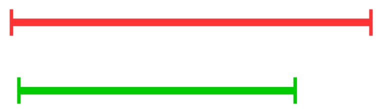


vemos que $3A < 4B$ entonces en realidad $A/B < 4/3$

En el ejemplo:

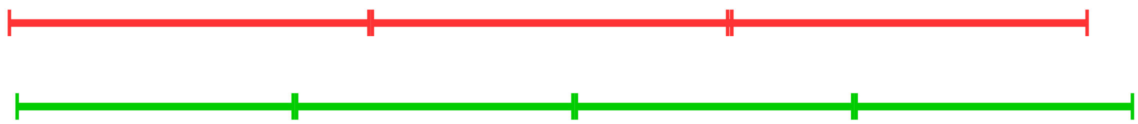
A

B



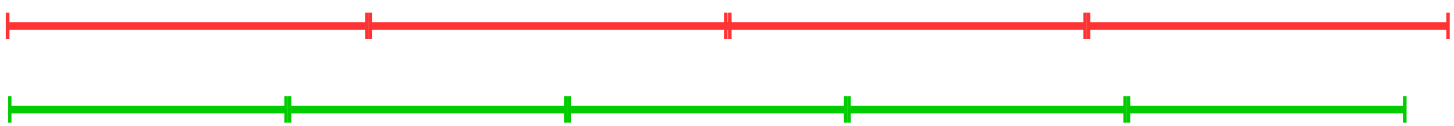
Aquí podemos adivinar que $A/B \approx 4/3$, o sea que $3A/4B \approx 12/12=1/1$

si comparamos $3A$ y $4B$



vemos que $3A < 4B$ entonces en realidad $A/B < 4/3$

¿Y que tal $A/B \approx 5/4$? Si esto sucede entonces $4A/5B \approx 20/20=1/1$ Veamos...



Como ahora $4A > 5B$ entonces en realidad $A/B > 5/4$

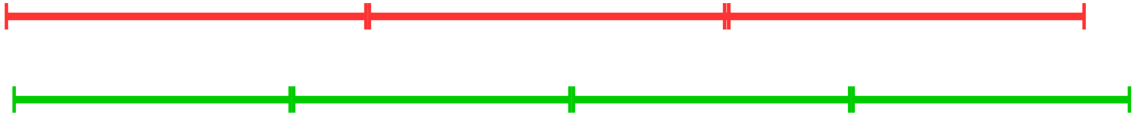
En el ejemplo:

A

B

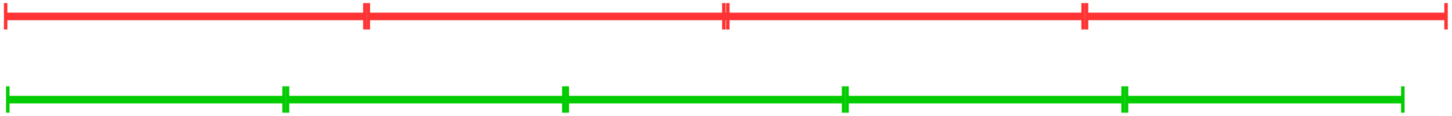
Aquí podemos adivinar que $A/B \approx 4/3$, o sea que $3A/4B \approx 12/12 = 1/1$

si comparamos 3A y 4B



vemos que $3A < 4B$ entonces en realidad $A/B < 4/3$

¿Y que tal $A/B \approx 5/4$? Si esto sucede entonces $4A/5B \approx 20/20 = 1/1$ Veamos...



Como ahora $4A > 5B$ entonces en realidad $A/B > 5/4$

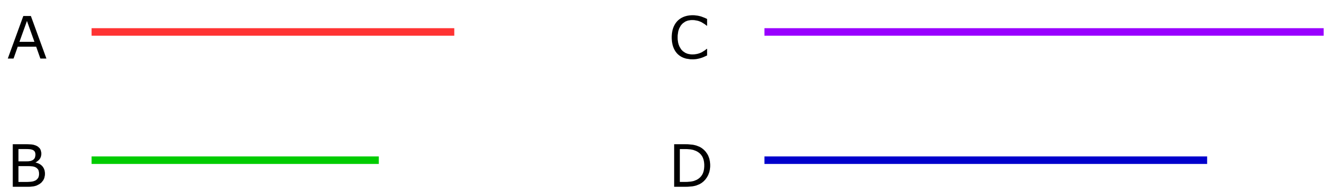
Así podemos hallar aproximaciones cada vez mejores de A/B,

aunque puede ser que nunca encontremos su valor exacto...

Para Euclides, las magnitudes A y B están en la misma proporción que las magnitudes C y D si los múltiplos enteros de A y B se comparan igual que los múltiplos enteros de C y D:

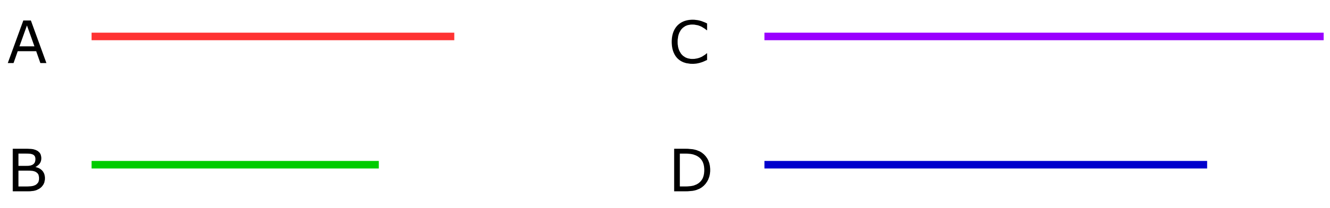
Para Euclides, las magnitudes A y B están en la misma proporción que las magnitudes C y D si los múltiplos enteros de A y B se comparan igual que los múltiplos enteros de C y D:

$$A/B = C/D \quad \text{si} \quad (\forall m,n \text{ en } \mathbf{N},\ mA \leq nB \Leftrightarrow mC \leq nD\ )$$



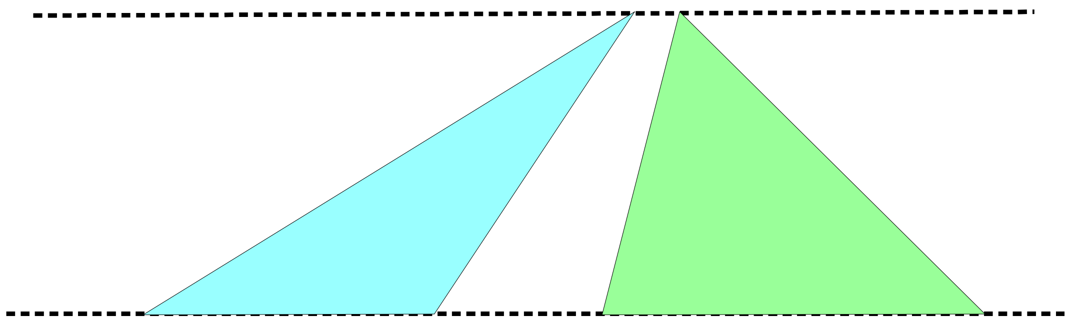
Para Euclides, las magnitudes A y B están en la misma proporción que las magnitudes C y D si los múltiplos enteros de A y B se comparan igual que los múltiplos enteros de C y D:

$$A/B = C/D \quad \text{si} \quad (\forall m,n \text{ en } \mathbf{N},\ mA \le nB \Leftrightarrow mC \le nD)$$

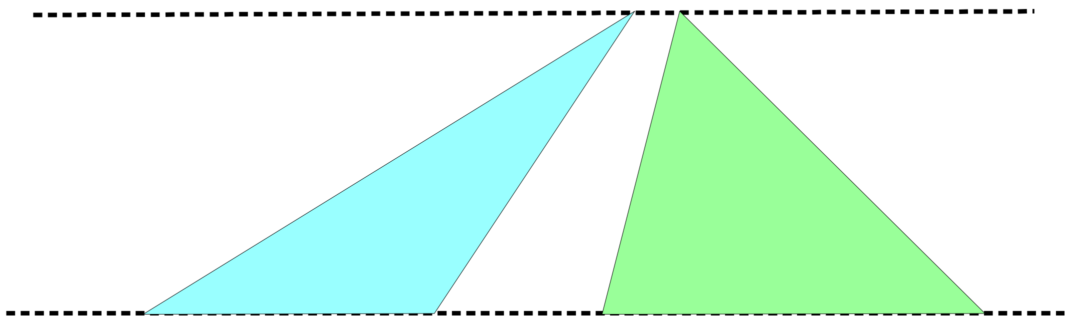


Esta definición es la que se usa en *Los Elementos* para comparar las proporciones de distintas magnitudes, como longitudes y áreas.

Proposición 6:2 *Si dos triángulos tienen la misma altura entonces sus áreas están en la misma proporción que sus bases.*

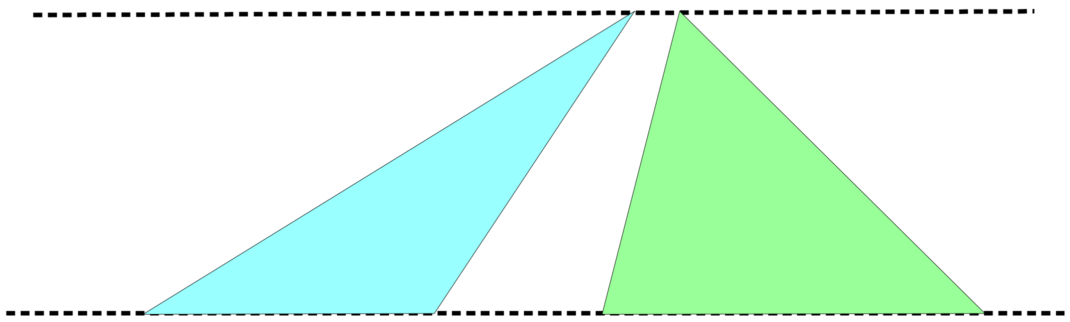


Proposición 6:2 *Si dos triángulos tienen la misma altura entonces sus áreas están en la misma proporción que sus bases.*



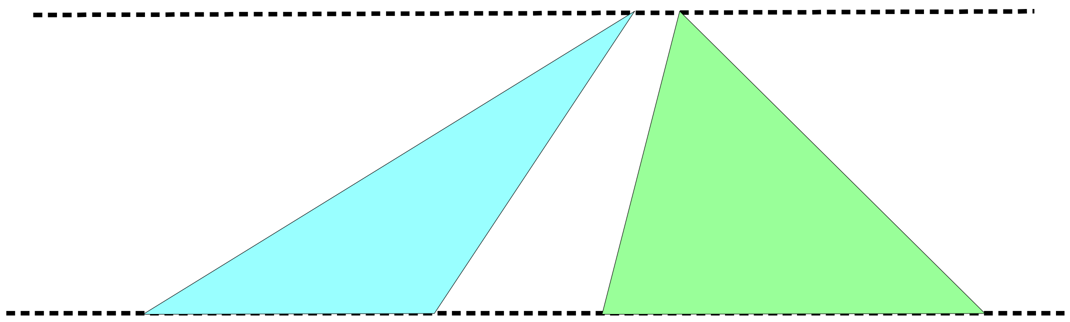
Demostración?

Proposición 6:2 *Si dos triángulos tienen la misma altura entonces sus áreas están en la misma proporción que sus bases.*



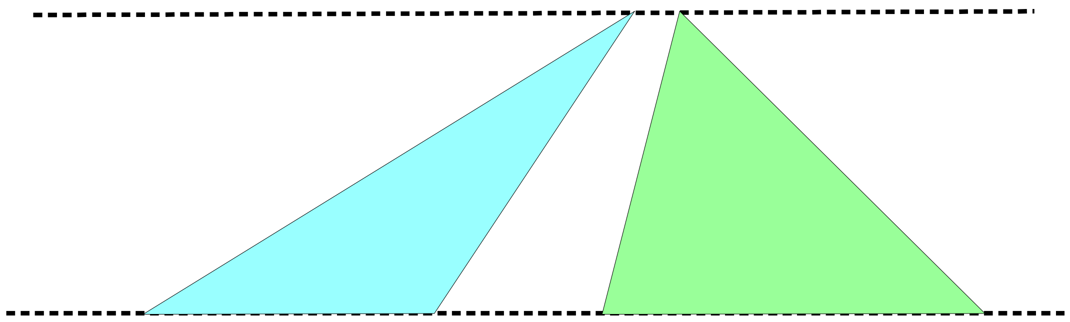
Demostración? *solo se vale usar que 2 triángulos con la misma base y la misma altura tienen las misma área.*

Proposición 6:2 *Si dos triángulos tienen la misma altura, sus áreas están en la misma proporción que sus bases.*



Demostración. Sean B y B' las bases, h la altura y A y A' las áreas de los triángulos. Por definición B y B' están en la misma proporción que A y A' si para todos m,n en **N**, $mB \leq nB' \Leftrightarrow mA \leq nA'$.

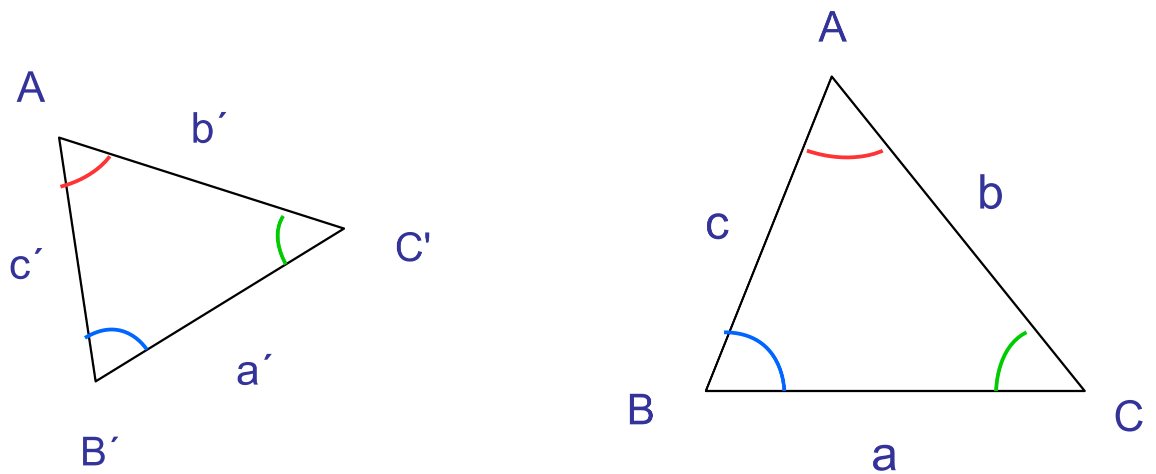
Proposición 6:2 *Si dos triángulos tienen la misma altura, sus áreas están en la misma proporción que sus bases.*



Demostración. Sean B y B' las bases, h la altura y A y A' las áreas de los triángulos. Por definición B y B' están en la misma proporción que A y A' si para todos m,n en **N**, $mB \leq nB' \Leftrightarrow mA \leq nA'$.

Si $mB \leq nB'$ entonces el área de un triángulo de base mB es menor o igual que el área de un triángulo de base nB'. Pero el área de un triángulo de base mB es m veces el área de un triángulo de base B y el área de un triángulo de base nB' es n veces el área de un triángulo de base B', así que $mA \leq nA'$.
La otra desigualdad se demuestra de manera similar.

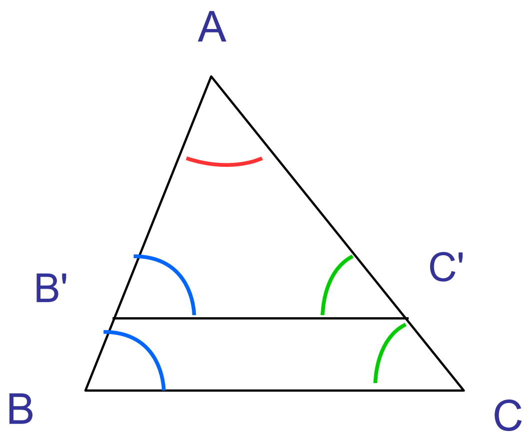
Proposición 6:4 *Si dos triángulos tienen ángulos iguales, entonces sus lados correspondientes son proporcionales.*



Tener lados proporcionales quiere decir que $a'/a = b'/b = c'/c$

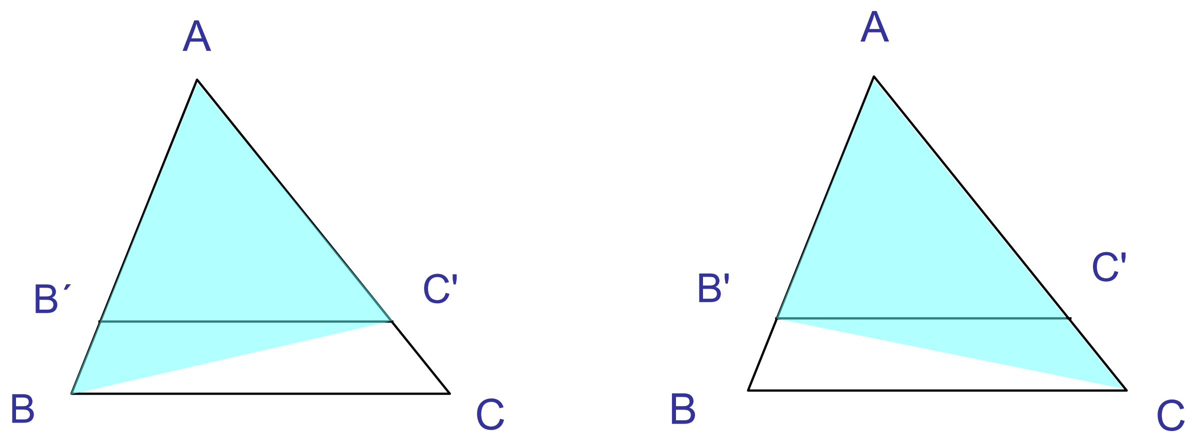
que equivale a $a/b = a'/b'$ $a/c = a'/c'$ $b/c = b'/c'$

Proposición 6:4 *Si dos triángulos tienen ángulos iguales, entonces sus lados correspondientes son proporcionales.*



Demostración. Si los triángulos ABC y AB'C' tienen los mismos ángulos, entonces podemos hacer que los ángulos en A y A' coincidan, de modo que B'C' será paralelo a BC.

Proposición 6:4 *Si dos triángulos tienen ángulos iguales, entonces sus lados correspondientes son proporcionales.*

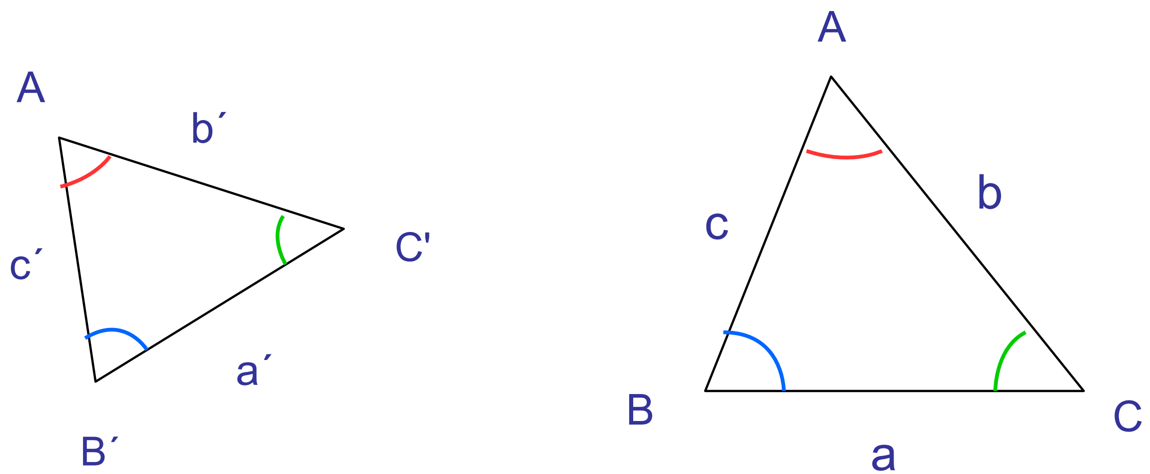


Demostración. Si los triángulos ABC y AB'C' tienen los mismos ángulos, entonces podemos hacer que los ángulos en A y A' coincidan, de modo que B'C' será paralelo a BC.

Los triángulos azules tienen áreas iguales, así que por **6:2** se tiene que

AB'/AB = Area AB'C'/Area ABC' = Area AC'B'/Area ACB' = AC'/AC •

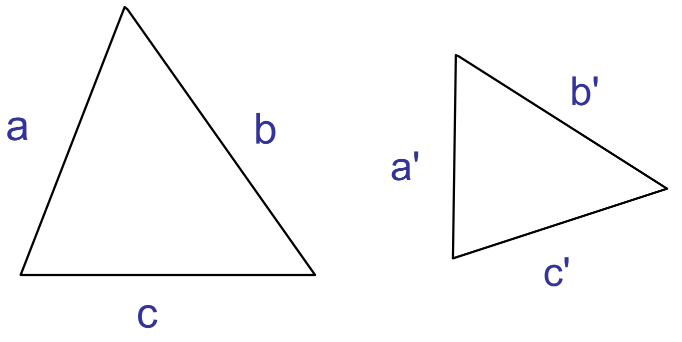
Proposición 6:5 *Si dos triángulos tienen lados proporcionales, entonces sus ángulos correspondientes son iguales.*



(es el recíproco de 6:4)

Proposición 6:5 *Si dos triángulos tienen lados proporcionales, entonces sus ángulos correspondientes son iguales.*

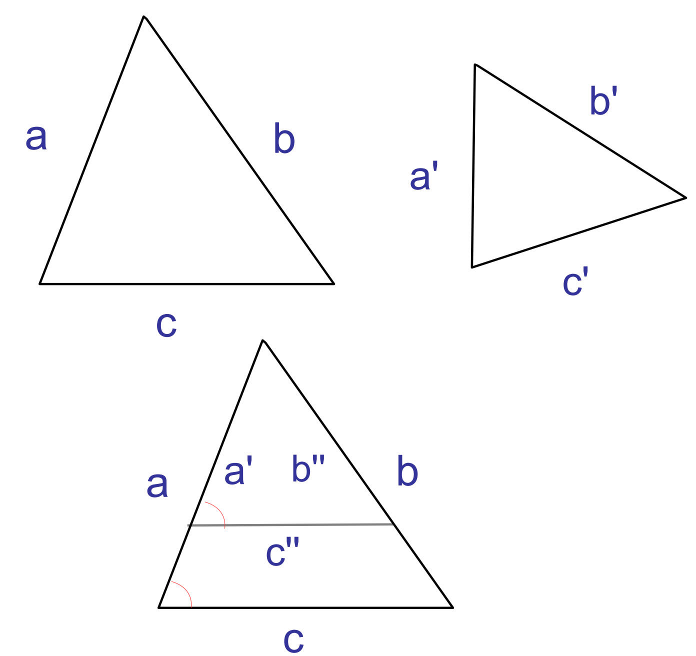
Demostración. Supongamos que los triángulos tienen lados de longitudes a, b, c y a', b', c' respectivamente y que a'/a= b'/b = c'/c



Proposición 6:5 Si dos triángulos tienen lados proporcionales, entonces sus ángulos correspondientes son iguales.

Demostración. Supongamos que los triángulos tienen lados de longitudes a, b, c y a', b', c' respectivamente y que a'/a= b'/b = c'/c

Sobre el lado de longitud a copiemos la longitud a' y donde termine tracemos una paralela al lado de longitud C. Obtenemos un triángulo de lados a', b'' y c''.

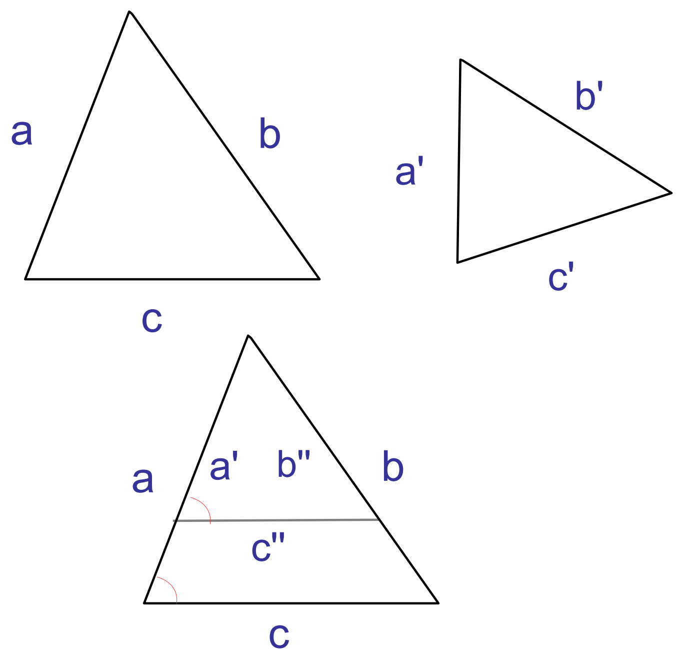


Proposición 6:5 Si dos triángulos tienen lados proporcionales, entonces sus ángulos correspondientes son iguales.

Demostración. Supongamos que los triángulos tienen lados de longitudes a, b, c y a', b', c' respectivamente y que a'/a= b'/b = c'/c

Sobre el lado de longitud a copiemos la longitud a' y donde termine tracemos una paralela al lado de longitud C. Obtenemos un triángulo de lados a', b'' y c''.

Este triángulo tiene ángulos iguales al de lados a,b c, así que a'/a = b''/b = c''/c.

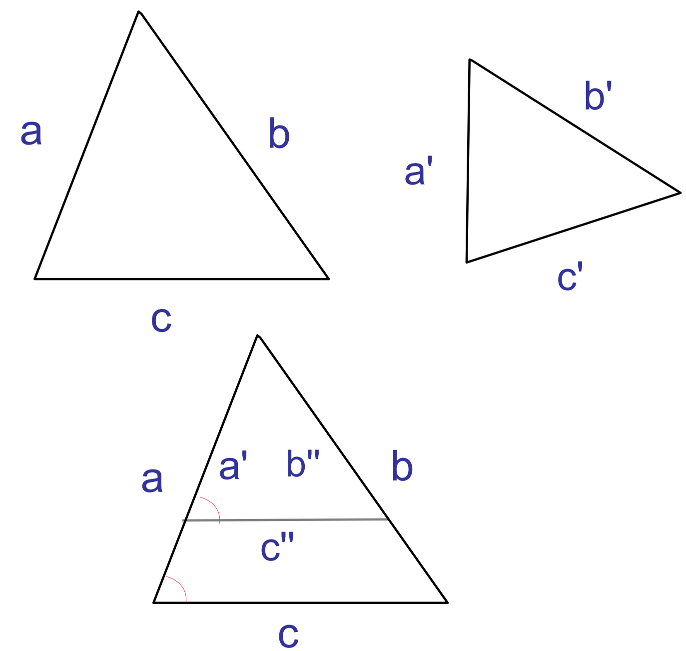


Proposición 6:5 Si dos triángulos tienen lados proporcionales, entonces sus ángulos correspondientes son iguales.

Demostración. Supongamos que los triángulos tienen lados de longitudes a, b, c y a', b', c' respectivamente y que a'/a= b'/b = c'/c

Sobre el lado de longitud a copiemos la longitud a' y donde termine tracemos una paralela al lado de longitud C. Obtenemos un triángulo de lados a', b'' y c''.

Este triángulo tiene ángulos iguales al de lados a,b c, así que a'/a = b''/b = c''/c.



Como ademas   a'/a= b'/b = c'/c entonces a'=a' , b'' = b' y   c'' = c' así que por LLL los triángulos con lados a', b', c' y a', b'', c'' tienen ángulos iguales. •