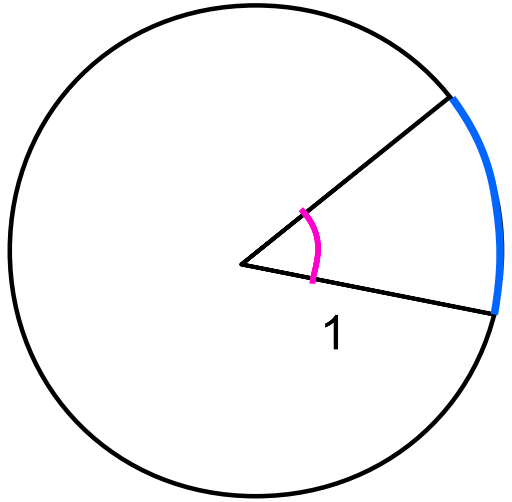
Trigonometría

Angulos

Los ángulos pueden medirse viendo que parte de una circunferencia ocupan. Los babilonios creían que la tierra tardaba 360 días en dar una vuelta al sol, así que dividieron al círculo en 360 *grados*.

Una manera mas natural de medir ángulos es tomar un círculo de radio 1 y medir la longitud del arco determinado por el ángulo. Esta es la medida del ángulo en *radianes*.

Como la circunferencia del círculo mide 2π, entonces



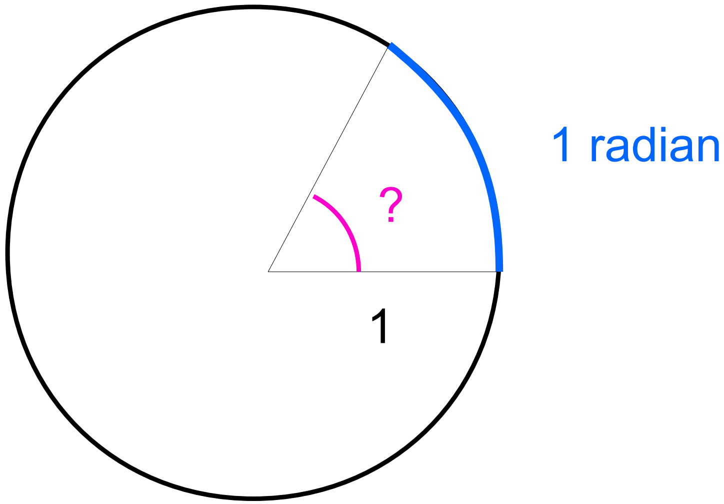
$360° = 2\pi$ radianes

$180° = \pi$ radianes

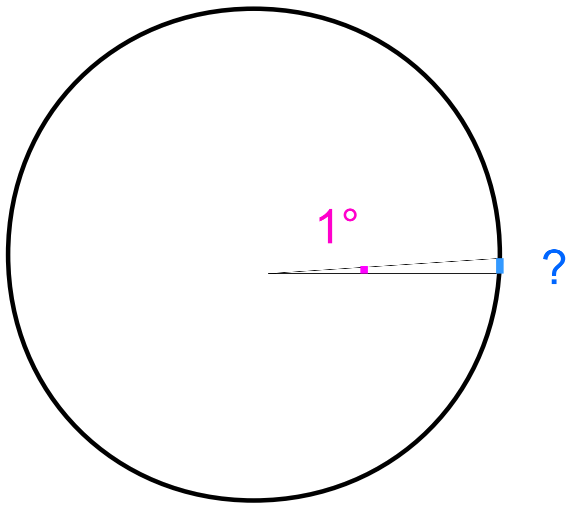
$\pi/4$ radianes $= 180°/4 = 45°$

$\pi/6$ radianes $= 180°/6 = 30°$

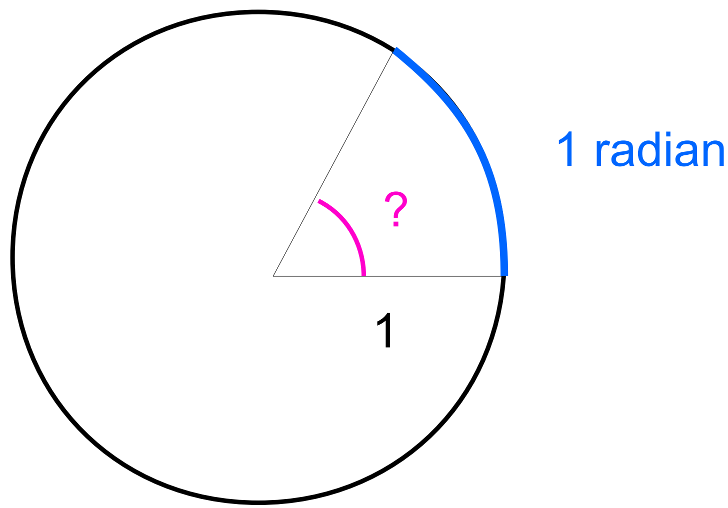
¿Cuantos grados son un radián?



¿Cuantos radianes son un grado?



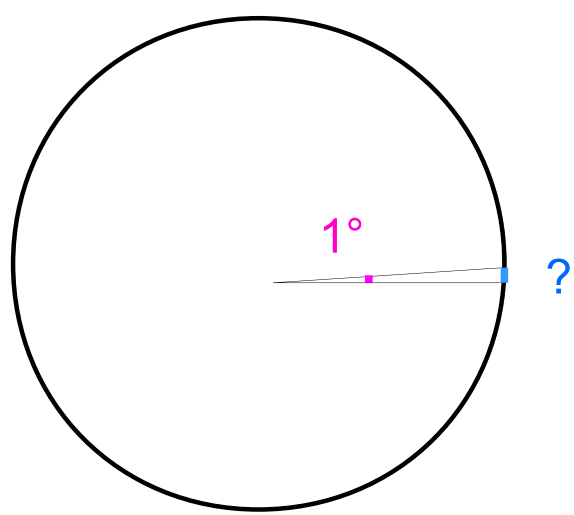
¿Cuantos grados son un radián?



360° = 2π radianes así que

1 radian = 360°/2π ≈ 57.3°

¿Cuantos radianes son un grado?

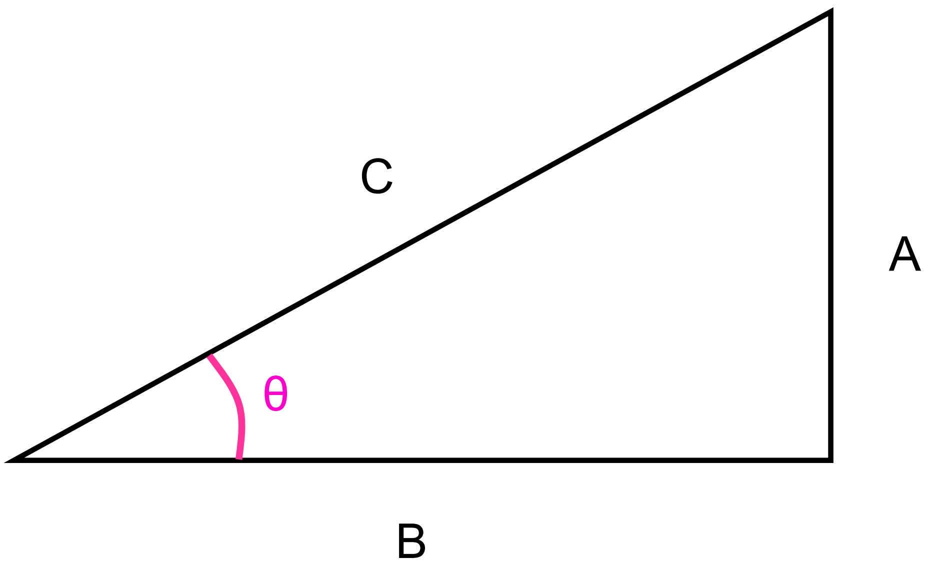


360° = 2π radianes así que

1° = 2π radianes /360 ≈ 0.0174 rad

Funciones trigonométricas

La forma de un triángulo rectángulo está determinada por un solo ángulo, por lo tanto las proporciones entre sus lados son funciones del ángulo:



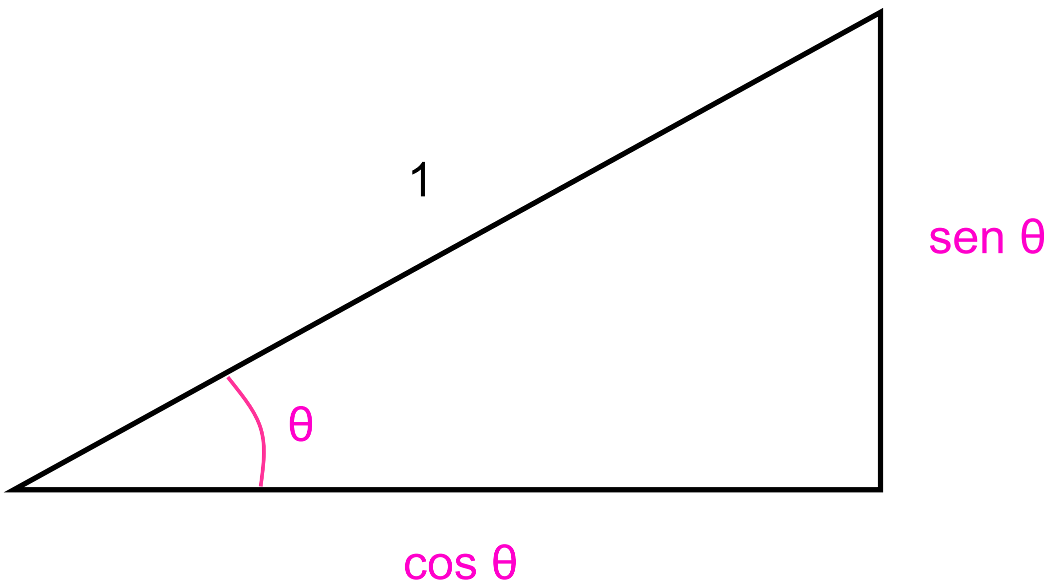
$\sin\theta = A/C$

$\cos\theta = B/C$

$\tan\theta = A/B$

Funciones trigonométricas

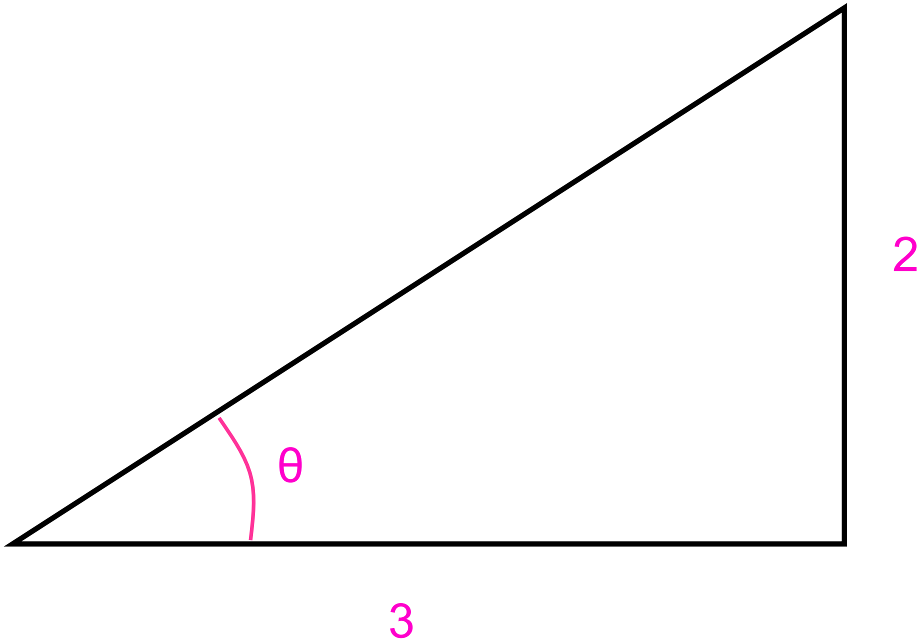
En un triángulo rectángulo de hipotenusa 1:



Por el Teorema de Pitágoras:

$$\text{sen}^2\,\theta + \cos^2\theta = 1$$

Ejemplo: ¿cuanto valen el sen θ y cos θ ?



sen θ =

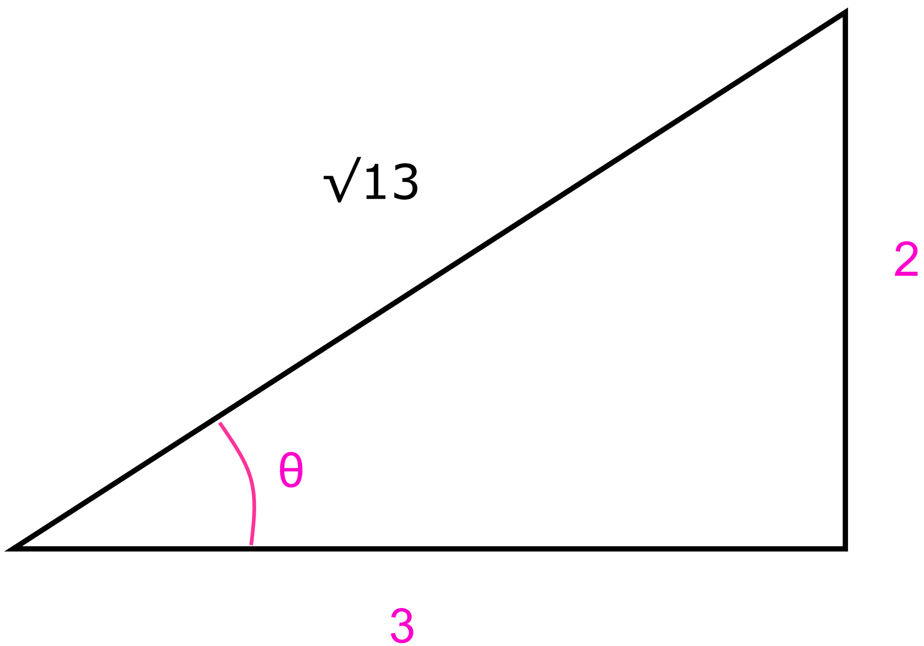
cos θ =

tan θ =

Ejemplo: ¿cuanto valen el sen θ y cos θ ?

Podemos calcular la hipotenusa con Pitágoras:

$C^2 = 3^2 + 2^2 = 13$ así que $C = \sqrt{13}$



sen θ = $2/\sqrt{13}$

cos θ = $3/\sqrt{13}$

tan θ = $2/3$

Ejemplo: ¿Cuánto vale cos $\pi/4$? ¿Cuánto vale sen $\pi/4$?

Ejemplo: ¿Cuánto vale cos $\pi/4$? ¿Cuánto vale sen $\pi/4$?

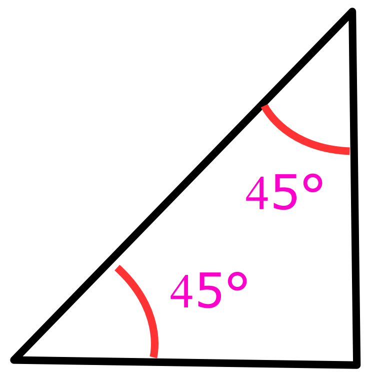
$\pi/4$ radianes = $180°/4 = 45°$

Necesitamos dibujar un triángulo recto con un ángulo de 45°

Ejemplo: ¿Cuánto vale cos $\pi/4$? ¿Cuánto vale sen $\pi/4$?

$\pi/4$ radianes = 180°/4 = 45°

Necesitamos dibujar un triángulo recto con un ángulo de 45°

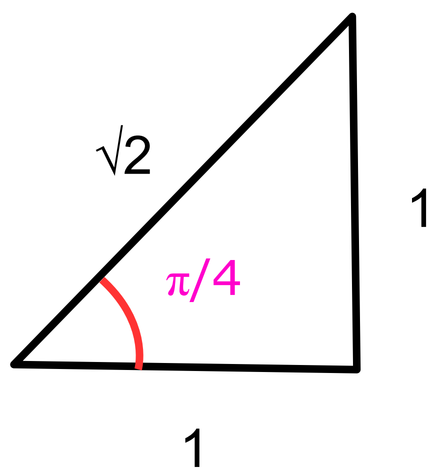


Medio cuadrado sirve

Ejemplo: ¿Cuánto vale cos $\pi/4$? ¿Cuánto vale sen $\pi/4$?

$\pi/4$ radianes = 180°/4 = 45°

Necesitamos dibujar un triángulo recto con un ángulo de 45°



Calculamos la hipotenusa con Pitágoras

$\cos \pi/4 = 1/\sqrt{2}$

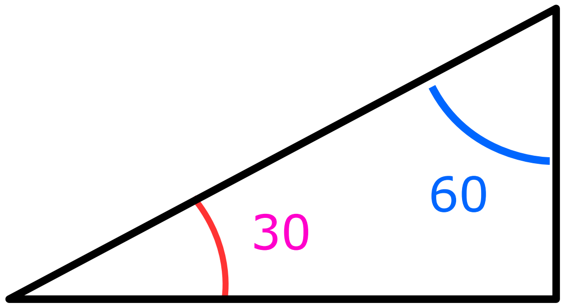
$\text{sen}\ \pi/4 = 1/\sqrt{2}$

Ejemplo: ¿Cuanto vale sen $\pi/6$?

Ejemplo: ¿Cuanto vale sen $\pi/6$?

$\pi/6$ radianes = 180°/6 = 30°.

En un triángulo recto con un ángulo de 30°, el otro ángulo es 60°

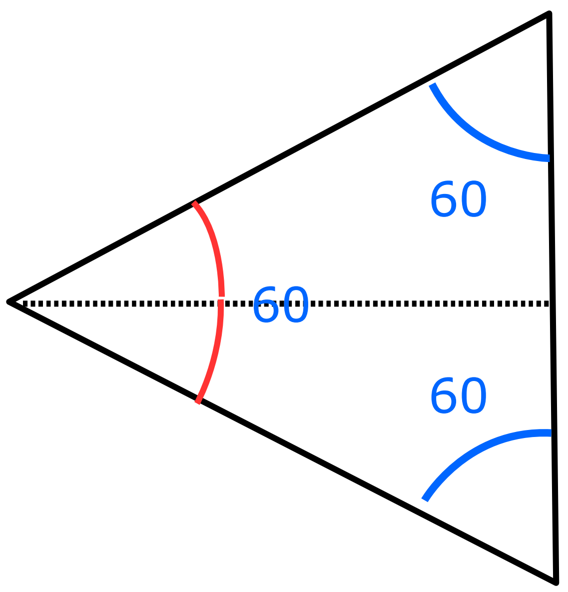


Ejemplo: ¿Cuanto vale sen $\pi/6$?

$\pi/6$ radianes = 180°/6 = 30°.

Si lo duplicamos obtenemos un triángulo equilátero

y podemos calcular el otro cateto con Pitágoras

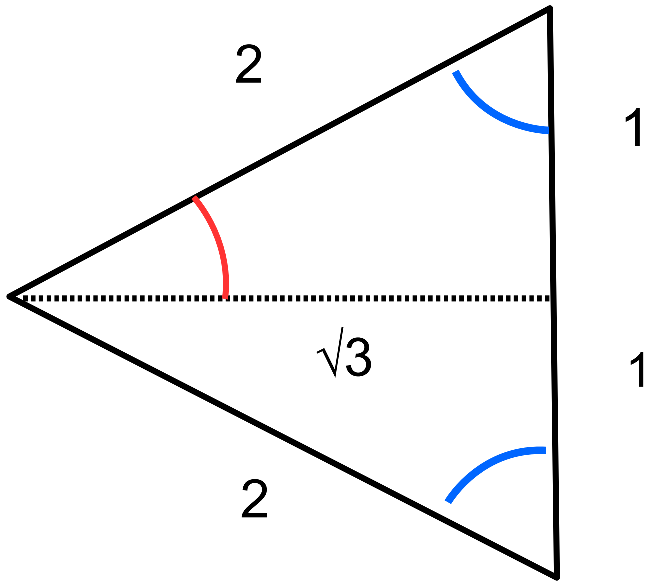


Ejemplo: ¿Cuanto vale sen $\pi/6$?

$\pi/6$ radianes = 180°/6 = 30°.

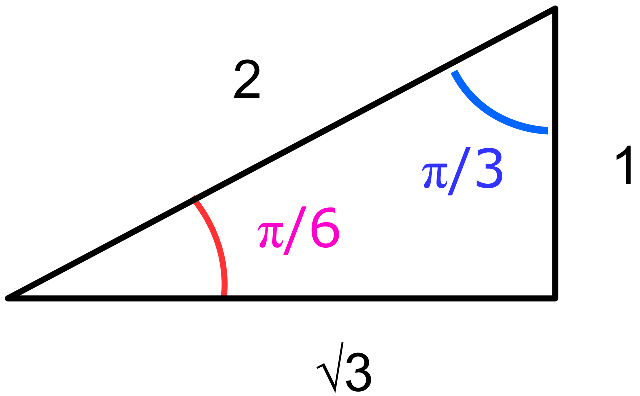
Si lo duplicamos obtenemos un triángulo equilátero

y podemos calcular el otro cateto con Pitágoras



Ejemplo: ¿Cuanto vale sen $\pi/6$?

$\pi/6$ radianes = $180°/6 = 30°$.



sen $\pi/6 = 1/2$

cos $\pi/6 = \sqrt{3}/2$

sen $\pi/3 = \sqrt{3}/2$

cos $\pi/3 = 1/2$

Pregunta: ¿Hay alguna relación entre el sen θ y sen 2θ?

¿Será cierto que sen 2θ = 2 sen θ ?

Pregunta: ¿Hay alguna relación entre el sen θ y sen 2θ?

¿Será cierto que sen $2\theta = 2$ sen θ ?

No! ya vimos que

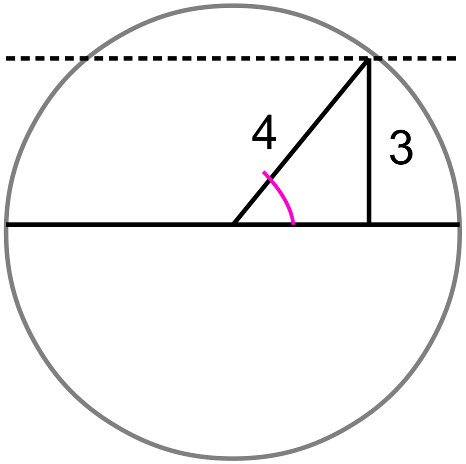
sen $\pi/3 = \sqrt{3}/2$ que no es el doble de sen $\pi/6 = 1/2$

¿Hay algún ángulo θ tal que sen θ = 3/4 ?

¿Hay algún ángulo θ tal que sen θ = 4/3 ?

¿Hay algún ángulo θ tal que sen θ = 3/4 ?

Si, podemos dibujarlo usando un círculo de radio 4 y una paralela al diámetro a distancia 3

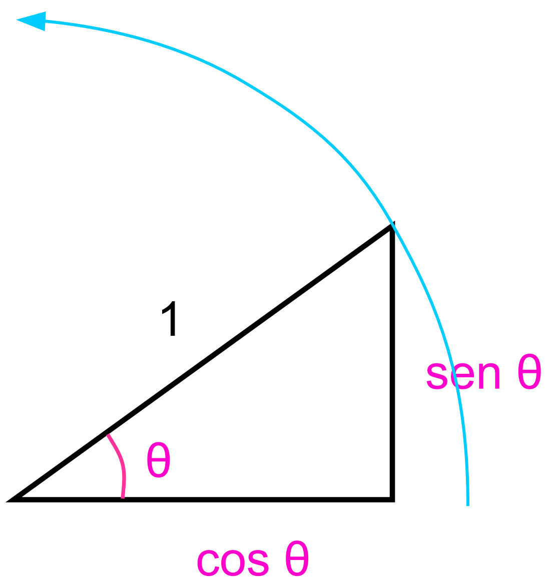


¿Hay algún ángulo θ tal que sen θ = 4/3 ?

No, porque el cateto de un triángulo rectángulo no puede ser mayor que la hipotenusa.

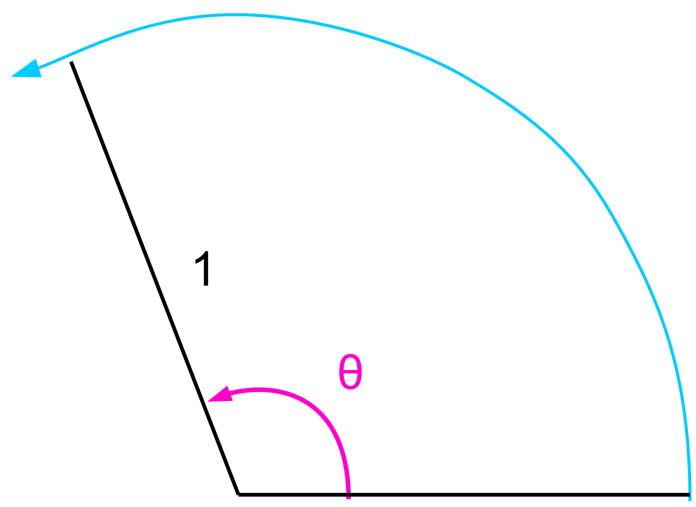
Funciones trigonométricas

Observar que para $0 \leq \theta \leq \pi/2$ se tiene $0 \leq \text{sen}\,\theta \leq 1$ y $0 \leq \cos\theta \leq 1$ y que al aumentar θ entonces $\text{sen}\,\theta$ aumenta desde 0 hasta 1 y $\cos\theta$ disminuye desde 1 hasta 0, mientras que $\tan\theta$ aumenta desde 0 hasta infinito.



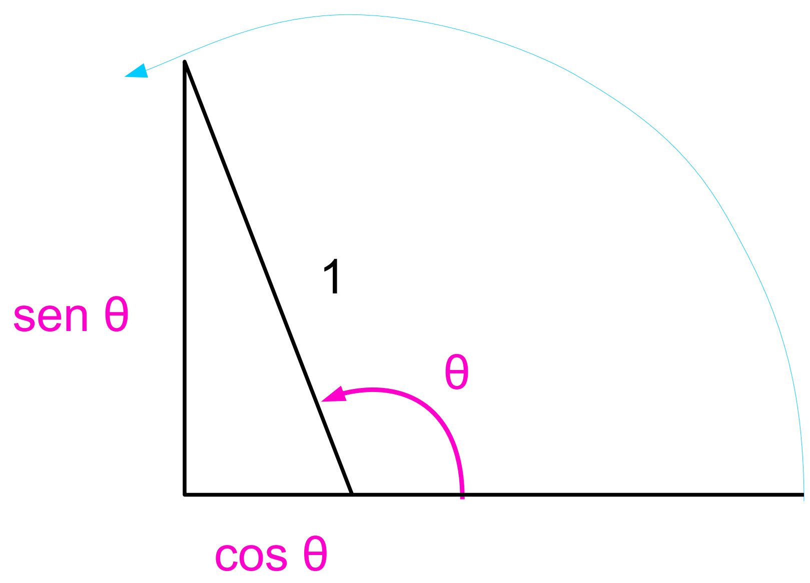
Funciones trigonométricas

Las funciones sen θ , cos θ y tan θ se pueden definir para ángulos mayores que $\pi/2$



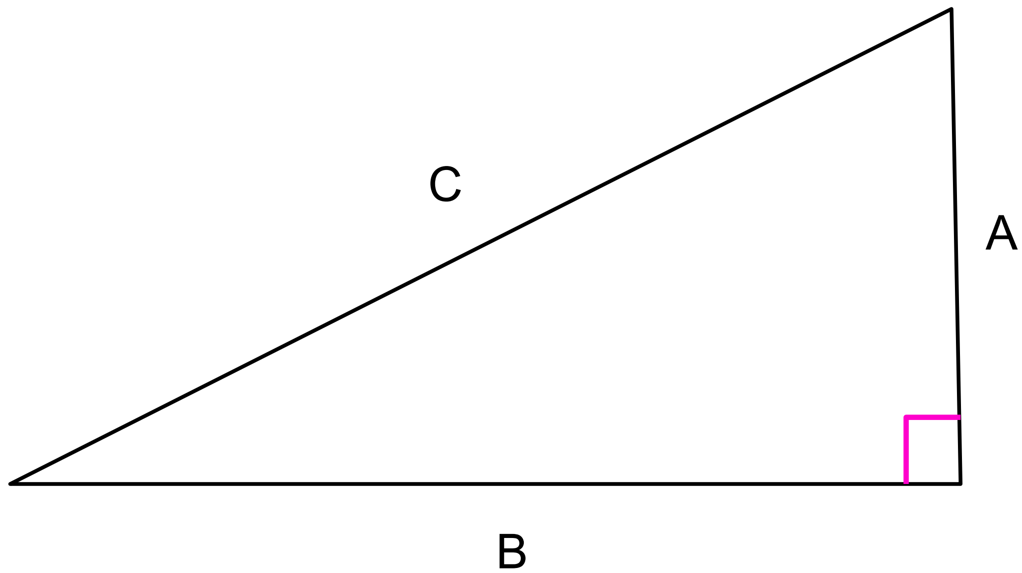
Funciones trigonométricas

Las funciones sen θ , cos θ y tan θ se pueden definir para ángulos mayores que $\pi/2$



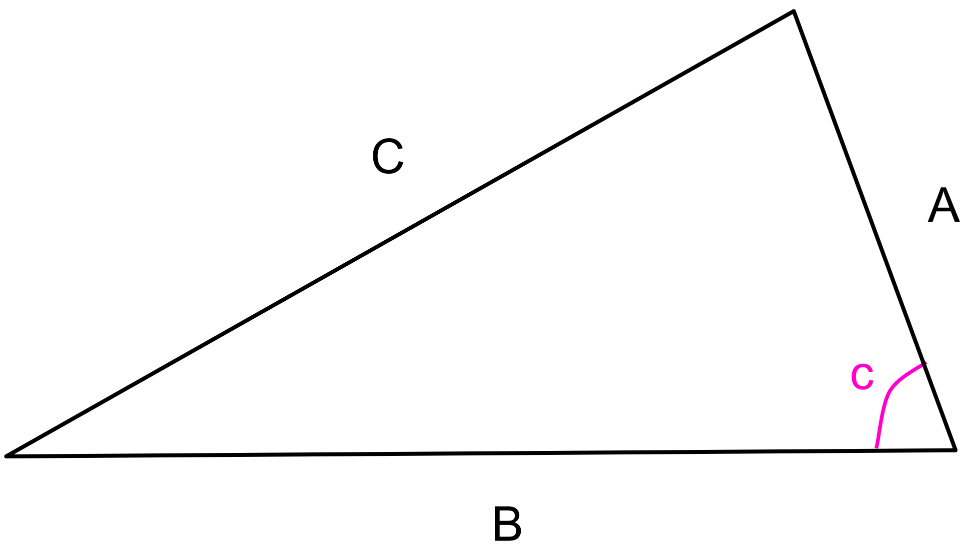
pero hay que ponerles signo negativo si apuntan en la dirección opuesta

El Teorema de Pitágoras da la relación entre los lados de un triángulo rectángulo.



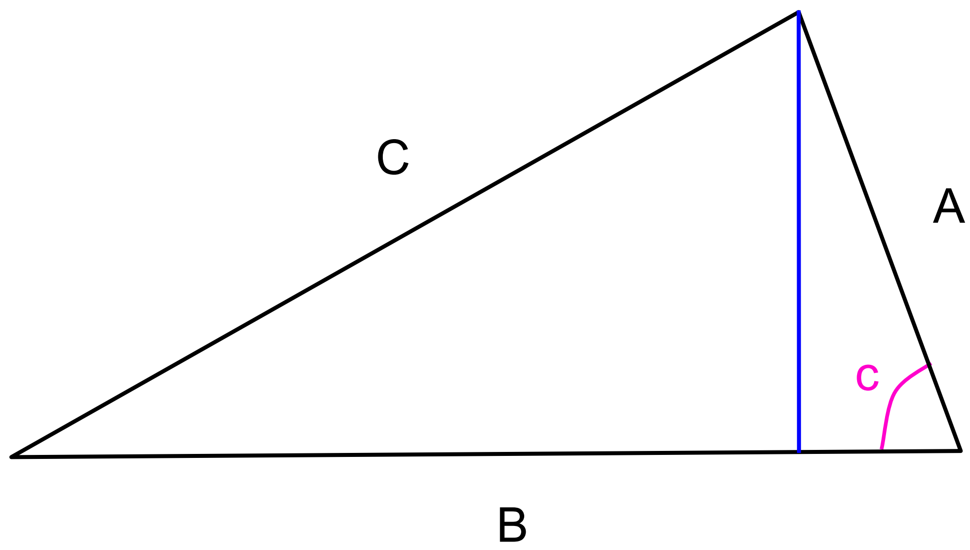
$$C^2 = A^2 + B^2$$

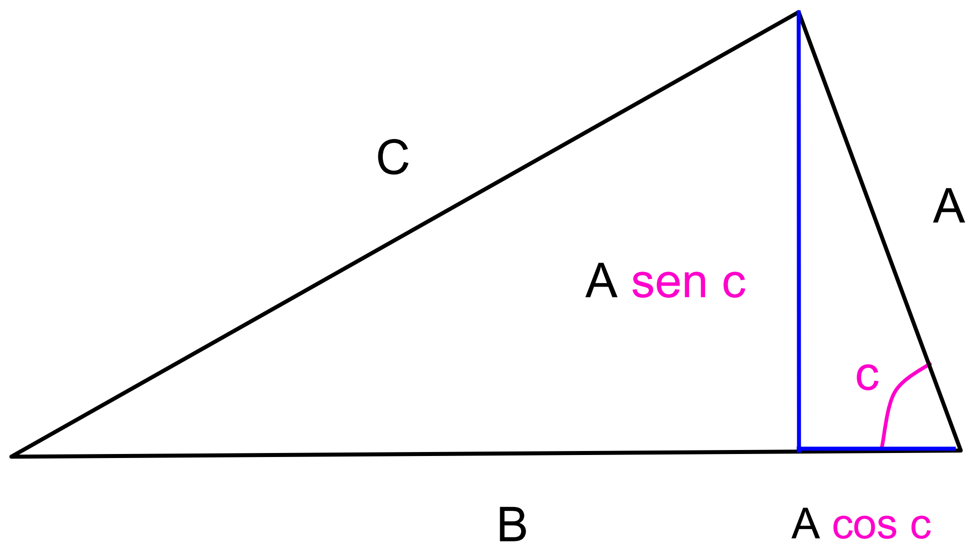
El Teorema de Pitágoras da la relación entre los lados de un triángulo rectángulo.

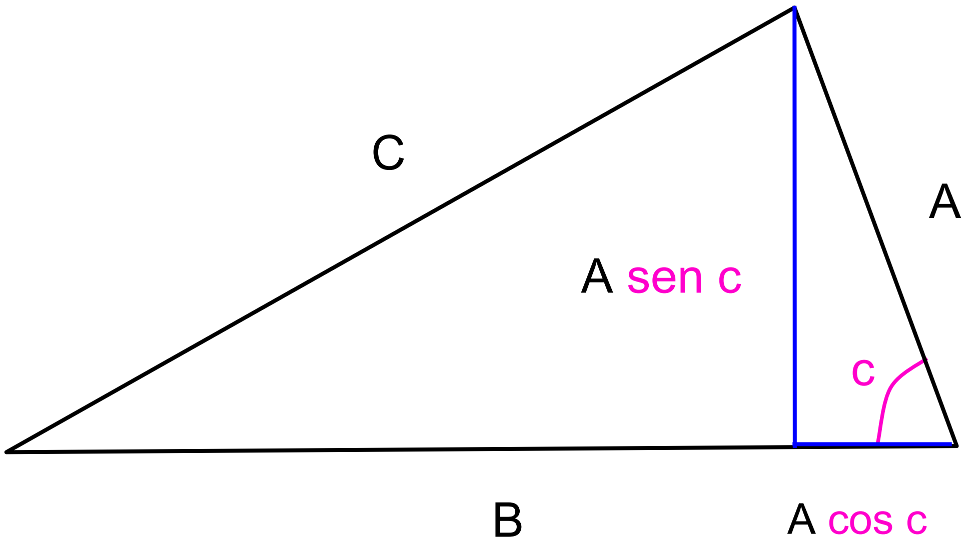


El teorema de Pitágoras no vale para triángulos no rectángulos.

Pero dos lados y el ángulo entre ellos determinan al triángulo así que debe haber una manera de calcular **C** a partir de **A** y **B** y el ángulo c.

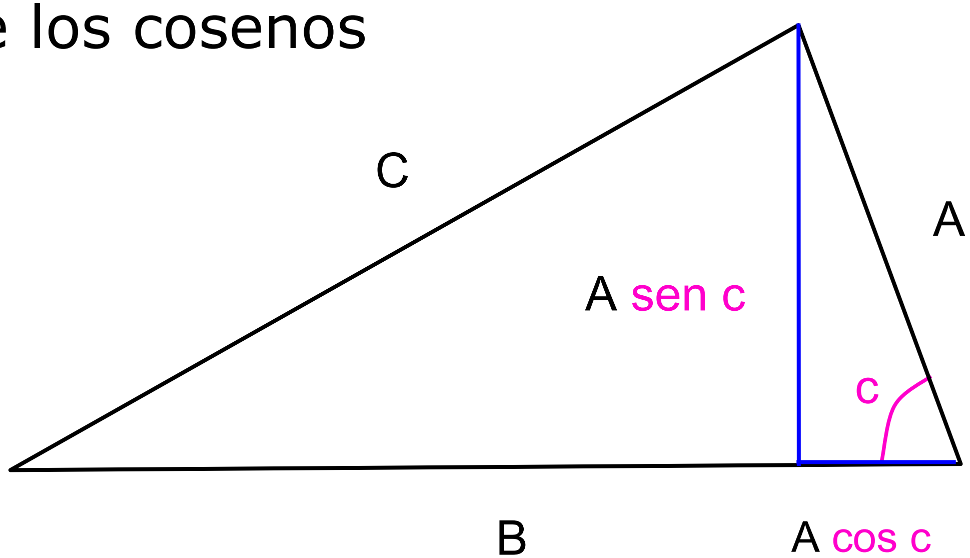

C
A
c
B


C
A
A sen c
c
B
A cos c



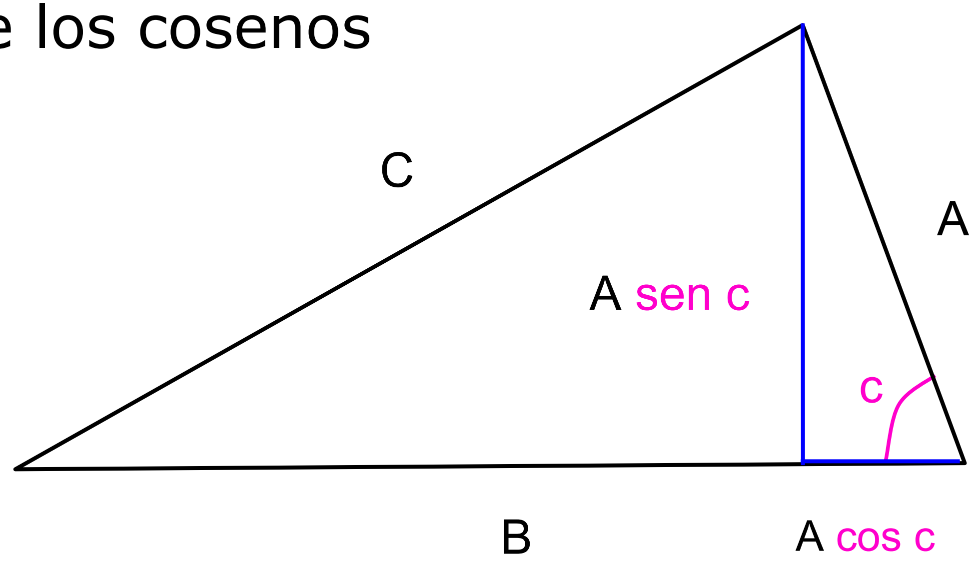
$$C^2 = (B - A\cos c)^2 + (A\,\mathrm{sen}\,c)^2$$
$$= B^2 - 2AB\cos c + A^2\cos^2 c + A^2\,\mathrm{sen}^2\,c$$
$$= A^2 + B^2 - 2AB\cos c$$

La ley de los cosenos



$$C^2 = A^2 + B^2 - 2AB \cos c$$

La ley de los cosenos

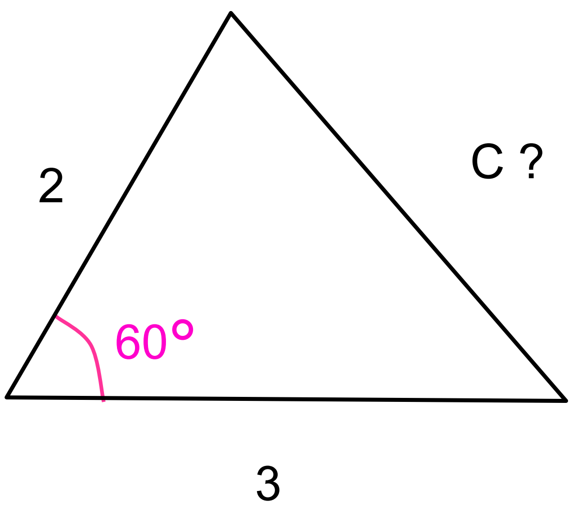


$$C^2 = A^2 + B^2 - 2AB \cos c$$

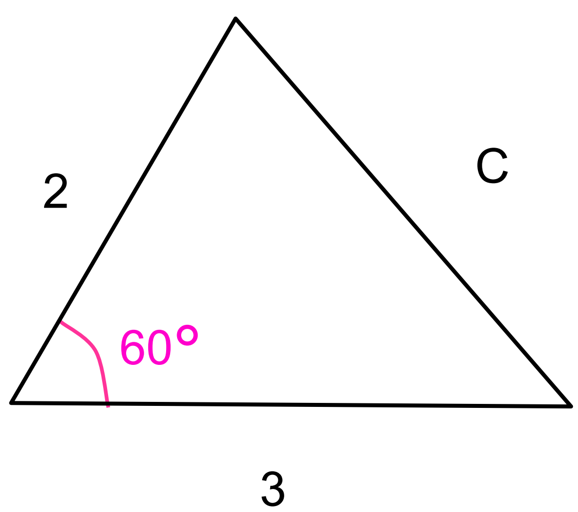
Observar que el termino 2AB cos c se anula si y solamente si c = 90°
y en este caso queda el teorema de Pitágoras.

Ejemplo. Si un triángulo tiene un ángulo de 60° y los lados adyacentes miden 2 y 3, cuanto mide el tercer lado?

Ejemplo. Si un triángulo tiene un ángulo de 60° y los lados adyacentes miden 2 y 3, cuanto mide el tercer lado?



Ejemplo. Si un triángulo tiene un ángulo de 60° y los lados adyacentes miden 2 y 3, cuanto mide el tercer lado?

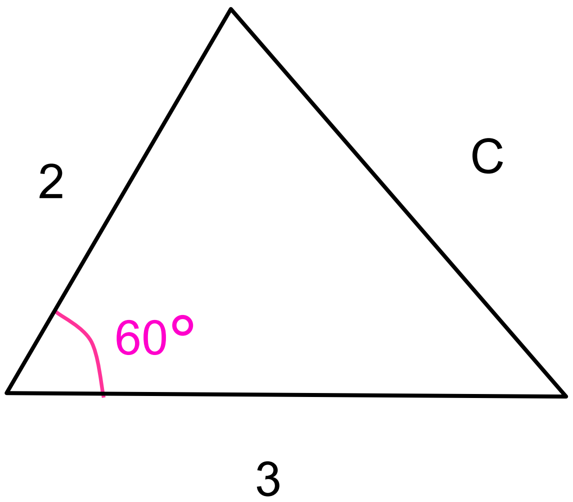


Por la ley de los cosenos

$C^2 = A^2 + B^2 - 2 \cdot A \cdot B \cos c$

$\cos 60° = 1/2$

Ejemplo. Si un triángulo tiene un ángulo de 60° y los lados adyacentes miden 2 y 3, cuanto mide el tercer lado?



Por la ley de los cosenos

$C^2 = A^2 + B^2 - 2 \cdot A \cdot B \cos c$

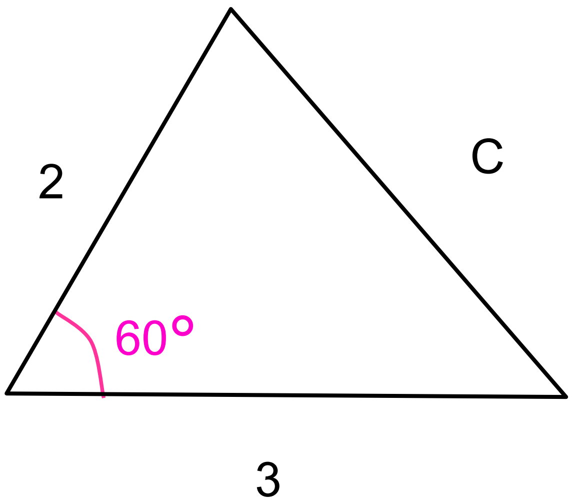
$\cos 60° = 1/2$

$C^2 = 2^2 + 3^2 - 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 1/2$

$= 4 + 9 - 6 = 7$

$C = \sqrt{7}$

Ejemplo. Si un triángulo tiene un ángulo de 60° y los lados adyacentes miden 2 y 3, cuanto mide el tercer lado?



Por la ley de los cosenos

$C^2 = A^2 + B^2 - 2 \cdot A \cdot B \cos c$

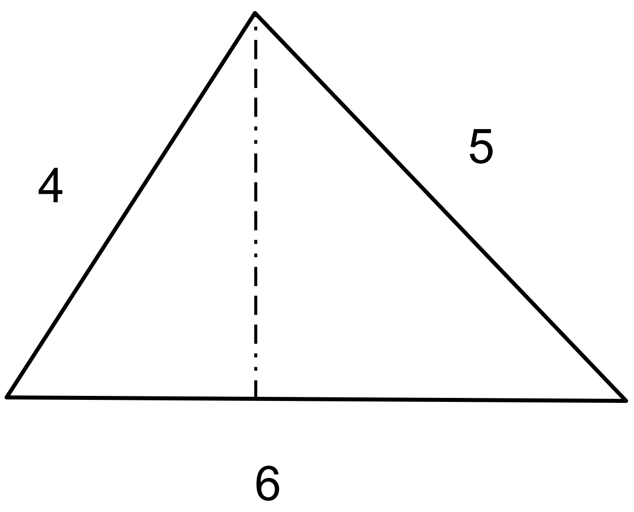
$\cos 60° = 1/2$

$C^2 = 2^2 + 3^2 - 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 1/2$

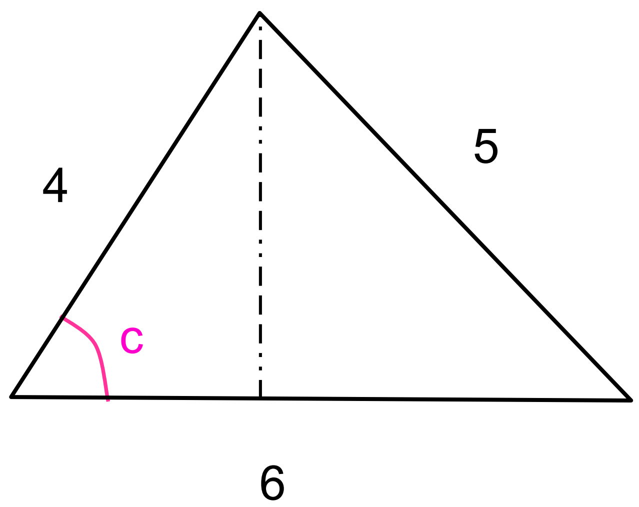
$= 4 + 9 - 6 = 7$

$C = \sqrt{7}$

Ejemplo. Un triángulo tiene lados 4, 5 y 6 ¿cuál es la altura sobre el lado 6 ?

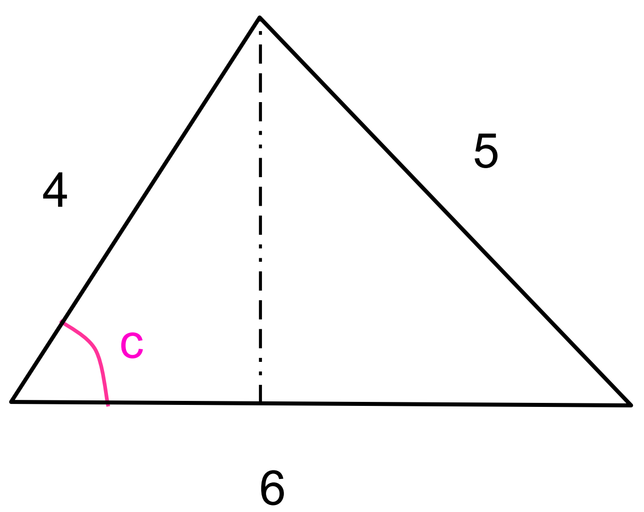


Ejemplo. Un triángulo tiene lados 4, 5 y 6 ¿cuál es la altura sobre el lado 6 ?



altura = 4 sen c

Ejemplo. Un triángulo tiene lados 4, 5 y 6 ¿cuál es la altura sobre el lado 6 ?



altura = 4 sen c

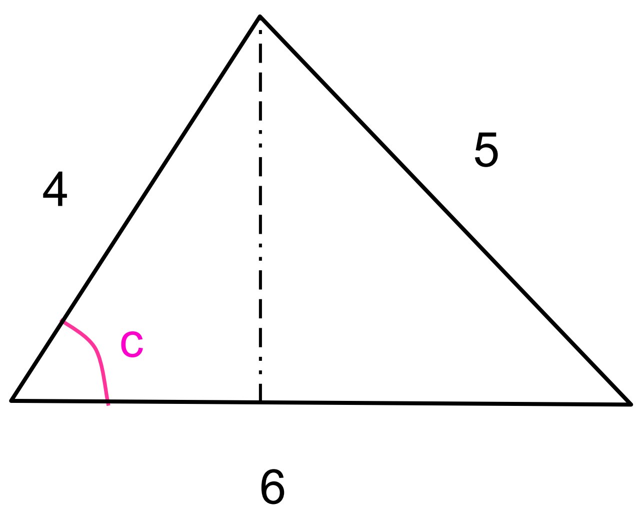
Por la ley de los cosenos:

$5^2 = 6^2 + 4^2 - 2 \cdot 6 \cdot 4 \cos c$

$25 = 52 - 48 \cos c$

$\cos c = (52-25)/48 = {}^{9}/_{16}$

Ejemplo. Un triángulo tiene lados 4, 5 y 6 ¿cuál es la altura sobre el lado 6 ?



altura = 4 sen c

Por la ley de los cosenos:

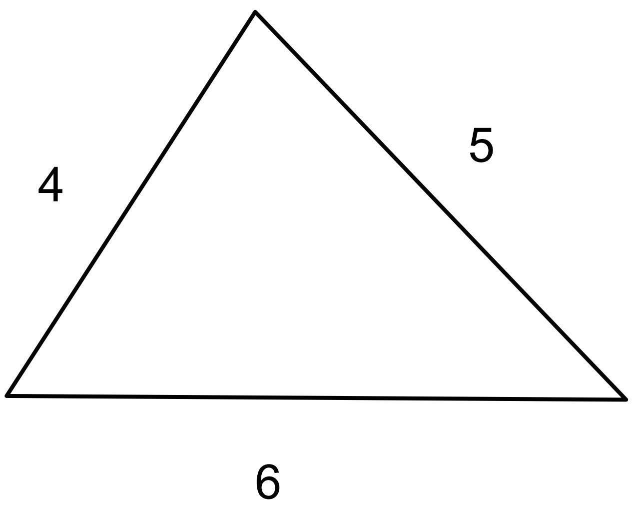
$5^2 = 6^2 + 4^2 - 2\cdot 6\cdot 4 \cos c$

$25 = 52 - 48 \cos c$

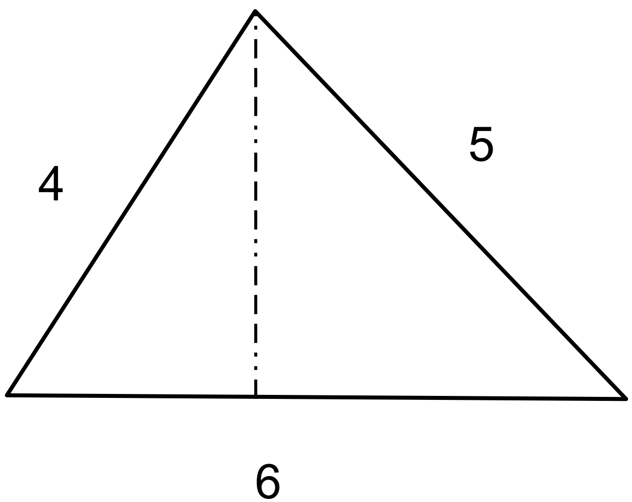
$\cos c = (52-25)/48 = {}^9/_{16}$

$$\text{altura} = 4 \operatorname{sen} c = 4\sqrt{1-\cos^2 c} = 4\sqrt{1-({}^9/_{16})^2} = 4\sqrt{{}^{(256-81)}/_{256}} = {}^{\sqrt{175}}/_4$$

Ejemplo. ¿Cual es su área del triángulo con lados 4, 5 y 6 ?

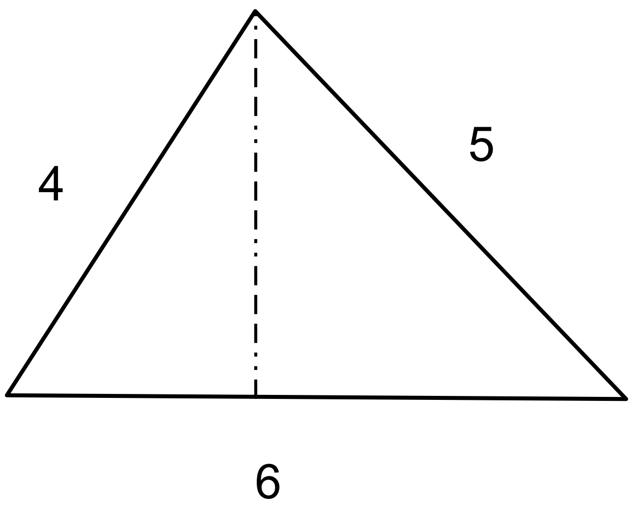


Ejemplo. ¿Cual es su área del triángulo con lados 4, 5 y 6 ?



Area = base x altura / 2

Ejemplo. ¿Cual es su área del triángulo con lados 4, 5 y 6 ?



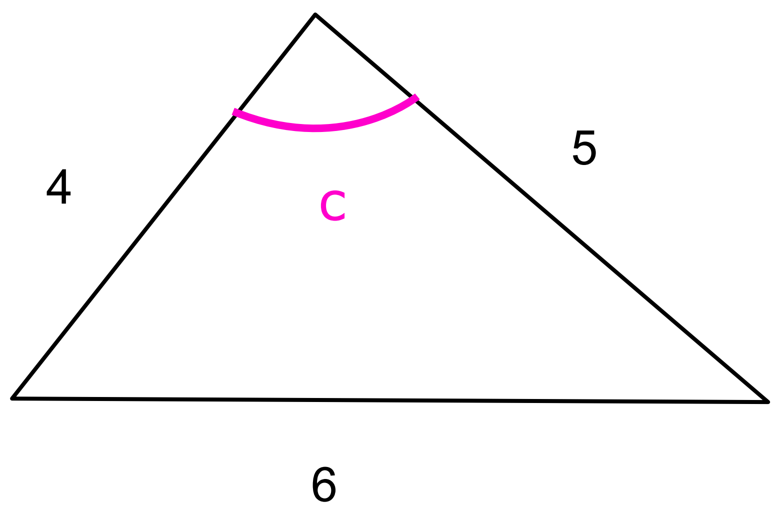
Area = base x altura / 2

ya sabemos que

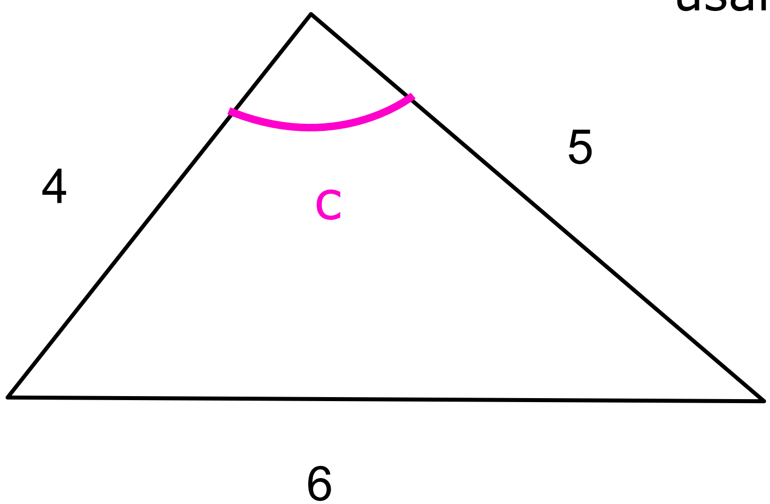
altura = $\sqrt{175}/4$

Area = $6 \times \sqrt{175}/4 \,/2 = \, ^3/_4\sqrt{175}$

Ejemplo. ¿Cuanto miden los ángulos del triángulo con lados 4, 5 y 6 ?



Ejemplo. ¿Cuanto miden los ángulos del triángulo con lados 4, 5 y 6 ?



Podemos calcular los cosenos de los ángulos usando la ley de los cosenos

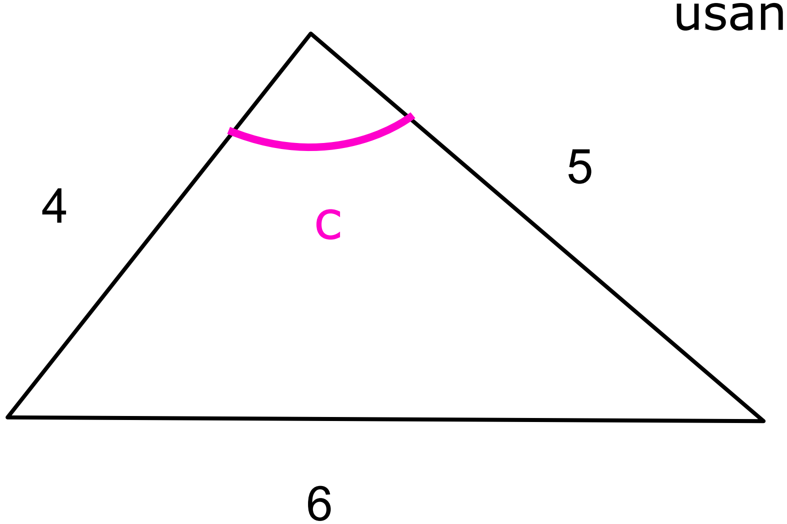
Por la ley de los cosenos:

$6^2 = 5^2 + 4^2 - 2 \cdot 5 \cdot 4 \cos c$

$36 = 41 - 40 \cos c$

$\cos c = (41-36)/40 = {}^1/_8$

Ejemplo. ¿Cuanto miden los ángulos del triángulo con lados 4, 5 y 6 ?



Podemos calcular los cosenos de los ángulos usando la ley de los cosenos

Por la ley de los cosenos:

$6^2 = 5^2 + 4^2 - 2{\cdot}5{\cdot}4 \cos c$

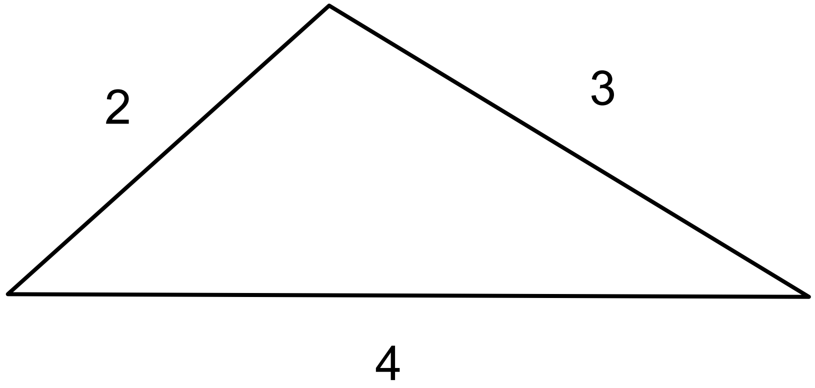
$36 = 41 - 40 \cos c$

$\cos c = (41-36)/40 = {}^1/_8$

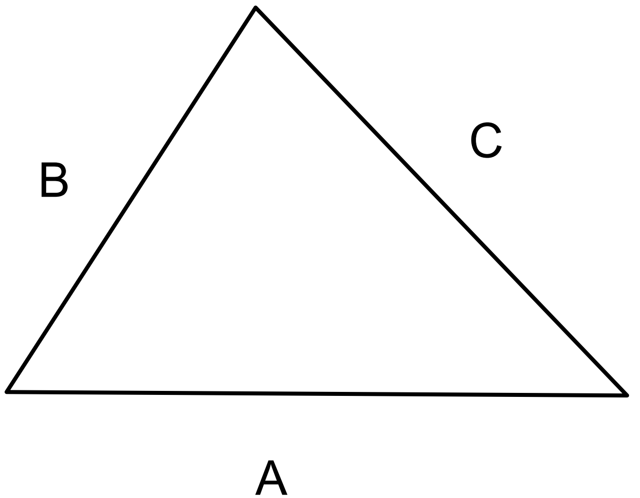
Sabiendo el coseno de un ángulo, podemos obtener el ángulo usando la función inversa (llamada arccos o $\cos^{-1}$) en la calculadora

$c = \cos^{-1}(1/8) = 82.9° = 1.445$ rad

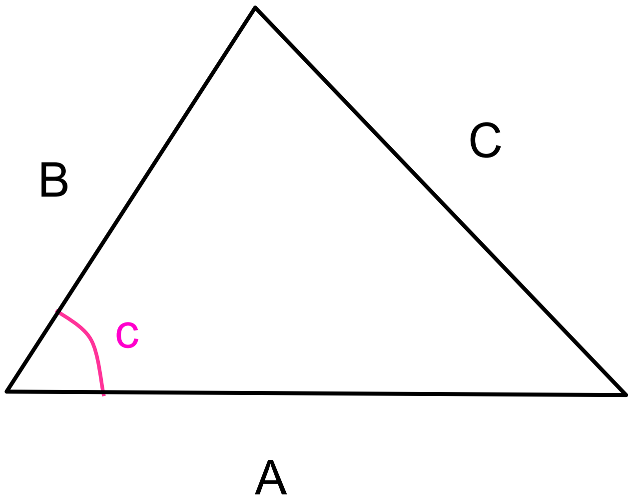
Ejercicio. ¿Cual es el área del triángulo con lados 2, 3 y 4??



¿No habrá una fórmula directa para el área de cualquier triángulo con lados A, B y C?

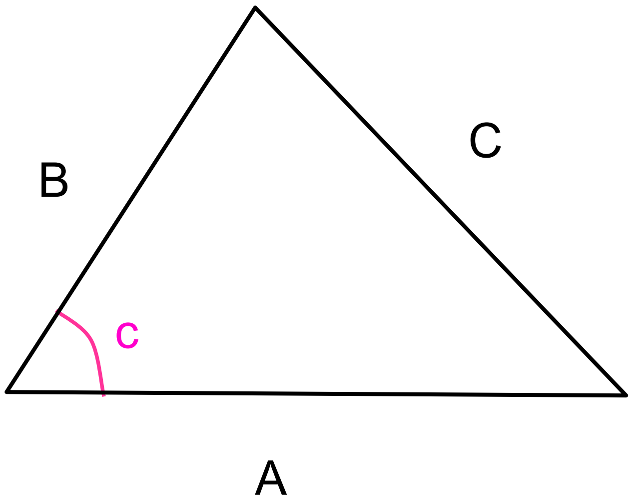


¿No habrá una fórmula directa para el área de cualquier triángulo con lados A, B y C?



Area = base x altura/2 = A B sen c /2

¿No habrá una fórmula directa para el área de cualquier triángulo con lados A, B y C?

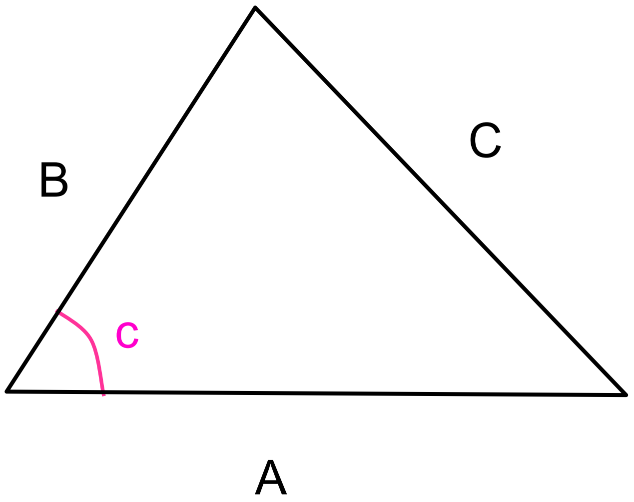


Area = base x altura/2 = A B sen c /2

Ley cosenos:

$C^2 = A^2 + B^2 - 2AB \cos c$

¿No habrá una fórmula directa para el área de cualquier triángulo con lados A, B y C?



Area = base x altura/2 = A B sen c /2

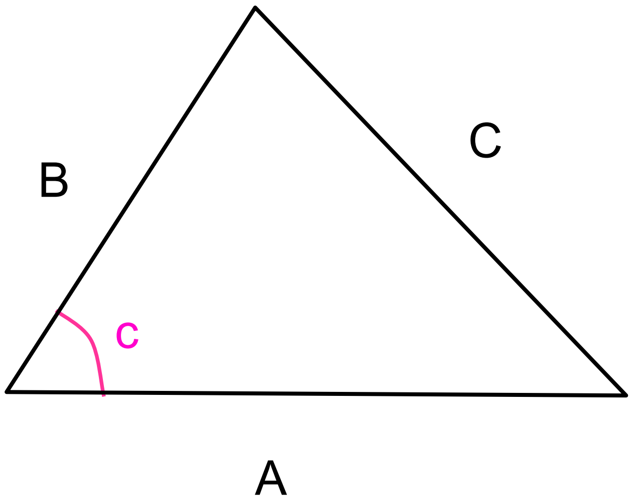
Ley cosenos:

$C^2 = A^2 + B^2 - 2AB \cos c$

$\cos c = (A^2 + B^2 - C^2) / 2AB$

$\text{sen}^2 c = 1 - \cos^2 c$

¿No habrá una fórmula directa para el área de cualquier triángulo con lados A, B y C?



Area = base x altura/2 = A B sen c /2

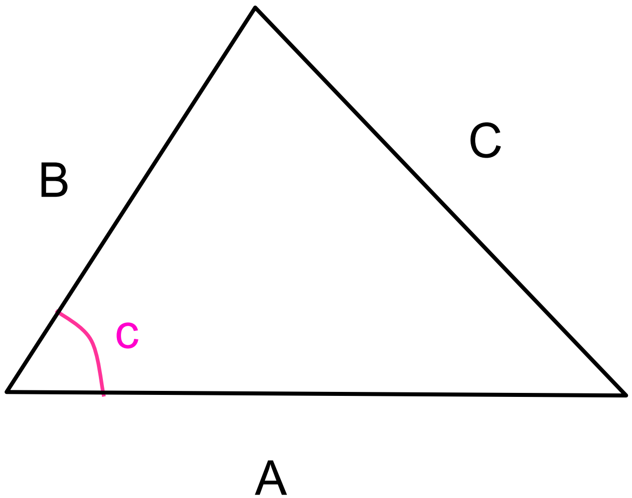
Ley cosenos:

$C^2 = A^2 + B^2 - 2AB \cos c$

$\cos c = (A^2 + B^2 - C^2) / 2AB$

$\text{sen}^2 c = 1 - \cos^2 c = 4A^2B^2/4A^2B^2 - (A^2 + B^2 - C^2)^2 / 4A^2B^2$

¿No habrá una fórmula directa para el área de cualquier triángulo con lados A, B y C?



Area = base x altura/2 = A B sen c /2

Ley cosenos:

$C^2 = A^2 + B^2 - 2AB \cos c$

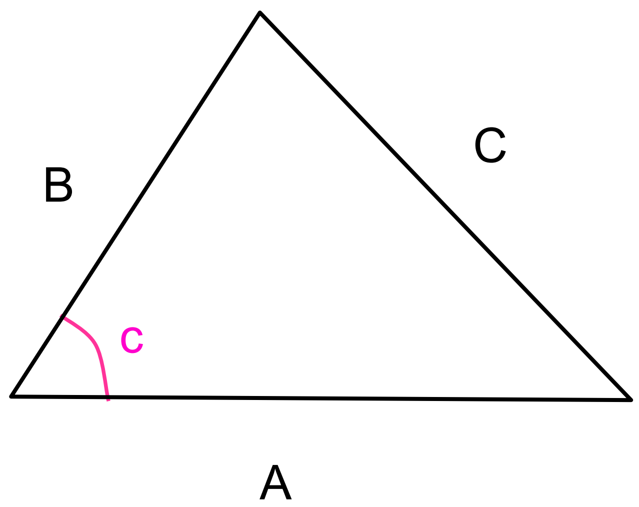
$\cos c = (A^2 + B^2 - C^2) / 2AB$

$\mathrm{sen}^2 c = 1 - \cos^2 c = 4A^2B^2/4A^2B^2 - (A^2 + B^2 - C^2)^2 / 4A^2B^2 =$

$= 4A^2B^2 - (A^4+B^4+C^4+2A^2B^2-2A^2C^2-2B^2C^2) / 4A^2B^2 =$

$= -(A^4+B^4+C^4-2A^2B^2-2A^2C^2-2B^2C^2) / 4A^2B^2$

¿No habrá una fórmula directa para el área de cualquier triángulo con lados A, B y C?



Area = base x altura/2 = A B sen c /2

Ley cosenos:

$C^2 = A^2 + B^2 - 2AB \cos c$

$\cos c = (A^2 + B^2 - C^2) / 2AB$

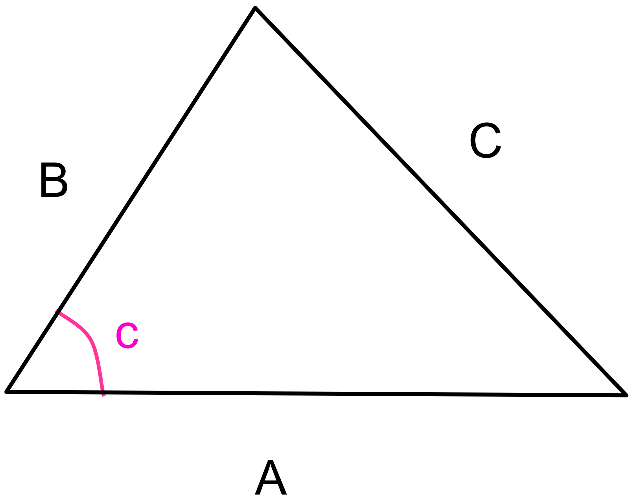
$\text{sen}^2 c = 1 - \cos^2 c = 4A^2B^2/4A^2B^2 - (A^2 + B^2 - C^2)^2 / 4A^2B^2 =$

$= 4A^2B^2 - (A^4+B^4+C^4+2A^2B^2-2A^2C^2-2B^2C^2) / 4A^2B^2 =$

$= -(A^4+B^4+C^4-2A^2B^2-2A^2C^2-2B^2C^2) / 4A^2B^2 =$

$= (A+B+C)(A+B-C)(B+C-A)(C+A-B) / 4A^2B^2$

¿No habrá una fórmula directa para el área de cualquier triángulo con lados A, B y C?



Area = base x altura/2 = A B sen c /2

Ley cosenos:

$C^2 = A^2 + B^2 - 2AB \cos c$

$\cos c = (A^2 + B^2 - C^2)\ /2AB$

$\text{sen}^2 c = 1 - \cos^2 c = 4A^2B^2/4A^2B^2 - (A^2 + B^2 - C^2)^2\ /4A^2B^2 =$

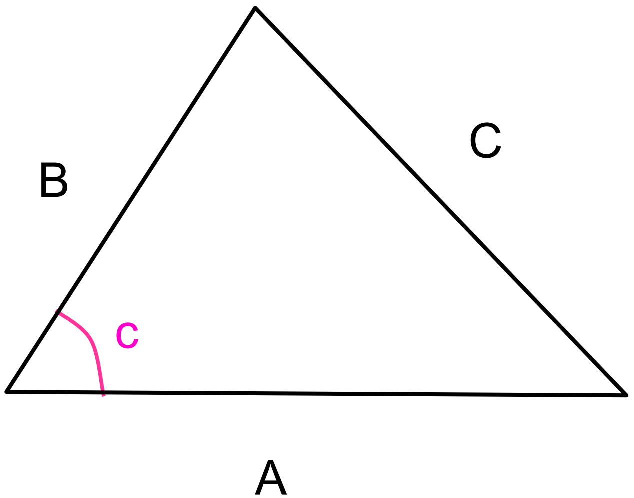
$= 4A^2B^2 - (A^4+B^4+C^4+2A^2B^2-2A^2C^2-2B^2C^2)\ /\ 4A^2B^2 =$

$= -(A^4+B^4+C^4-2A^2B^2-2A^2C^2-2B^2C^2)\ /\ 4A^2B^2 =$

$= (A+B+C)(A+B-C)(B+C-A)(C+A-B)\ /\ 4A^2B^2$

$\text{Area}^2 = (A+B+C)(A+B-C)(B+C-A)(C+A-B)\ /\ 16$

¿No habrá una fórmula directa para el área de cualquier triángulo con lados A, B y C?



$\text{Area} = \text{base} \times \text{altura}/2 = A\,B\,\text{sen}\,c\,/2$

Ley cosenos:

$C^2 = A^2 + B^2 - 2AB\cos c$

$\cos c = (A^2 + B^2 - C^2)\,/2AB$

$\text{sen}^2 c = 1 - \cos^2 c = 4A^2B^2/4A^2B^2 - (A^2 + B^2 - C^2)^2\,/4A^2B^2 =$

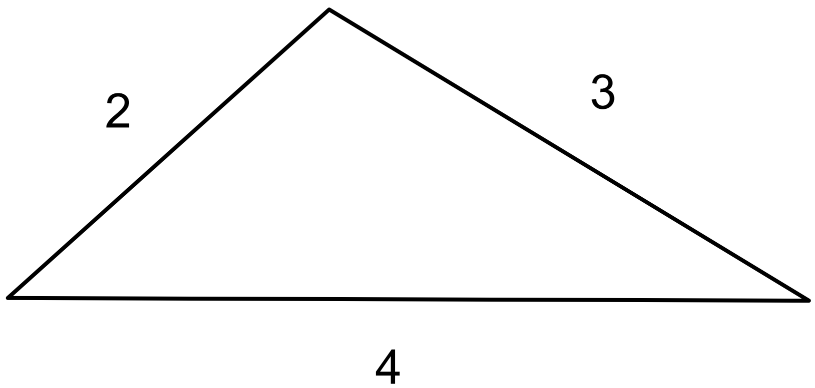
$= 4A^2B^2 - (A^4+B^4+C^4+2A^2B^2-2A^2C^2-2B^2C^2)\;/\;4A^2B^2 =$

$= -(A^4+B^4+C^4-2A^2B^2-2A^2C^2-2B^2C^2)\;/\;4A^2B^2 =$

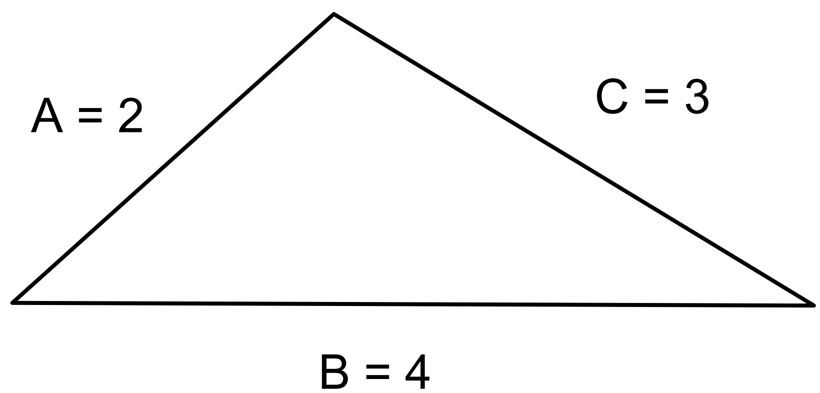
$= (A+B+C)(A+B-C)(B+C-A)(C+A-B)\;/\;4A^2B^2$

$$\text{Area} = {}^{1}/_{4}\sqrt{(A+B+C)(A+B-C)(B+C-A)(C+A-B)}$$

Ejemplo. ¿Cual es el área del triángulo con lados 2, 3 y 4?



Ejemplo. ¿Cual es el área del triángulo con lados 2, 3 y 4?

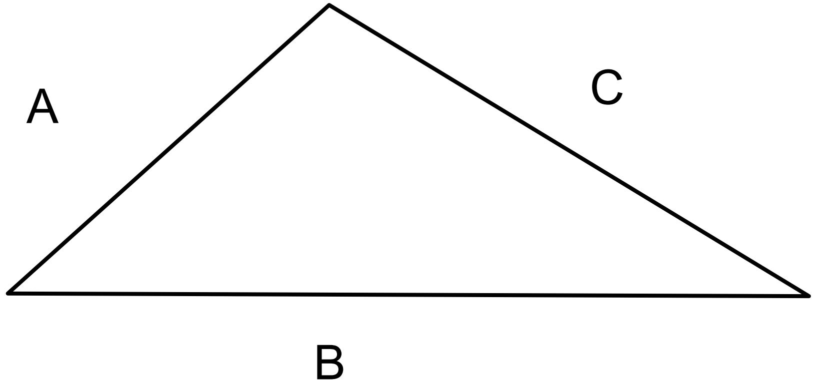


$$\text{Area} = {}^{1}/_{4}\sqrt{(A+B+C)(A+B-C)(B+C-A)(C+A-B)}$$

$$= {}^{1}/_{4}\sqrt{9 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 1}$$

$$= \sqrt{135}\ /\ 4$$

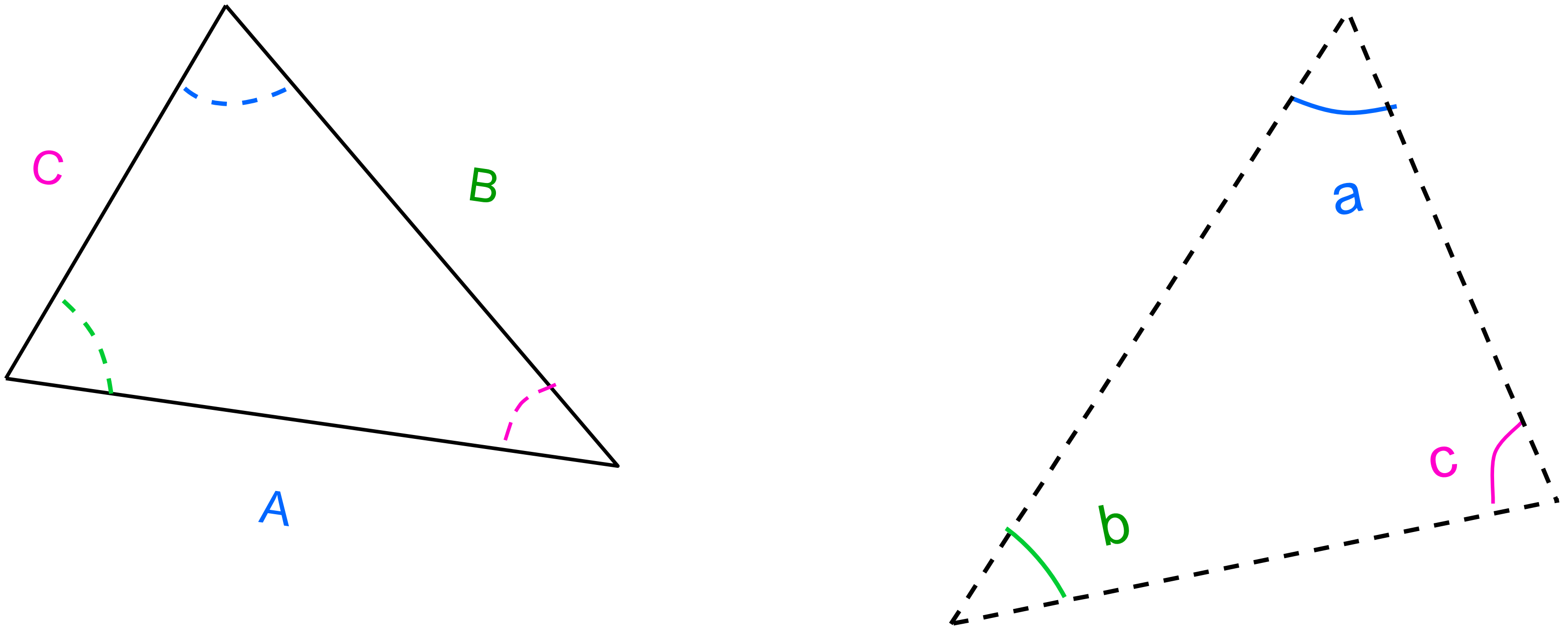
¿Por qué esta fórmula es razonable?



$$\text{Area} = {}^{1}/_{4}\sqrt{(A+B+C)(A+B-C)(B+C-A)(C+A-B)}$$

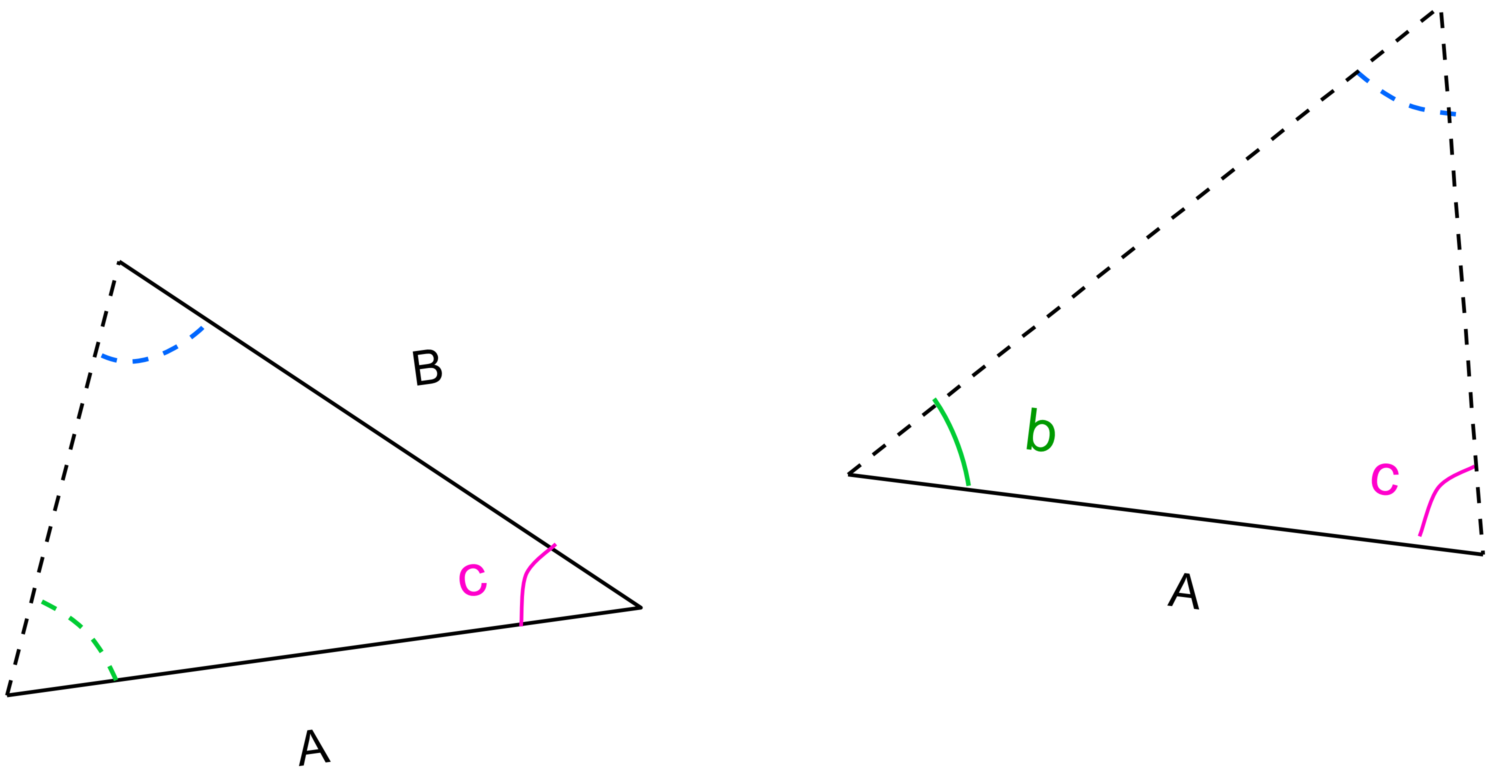
- Es simétrica (los 3 lados juegan el mismo papel)
- Es proporcional al cuadrado de la escala (como el área)

Sabemos que los lados de un triángulo determinan los ángulos, y también que los ángulos del triángulo determinan las proporciones de los lados:



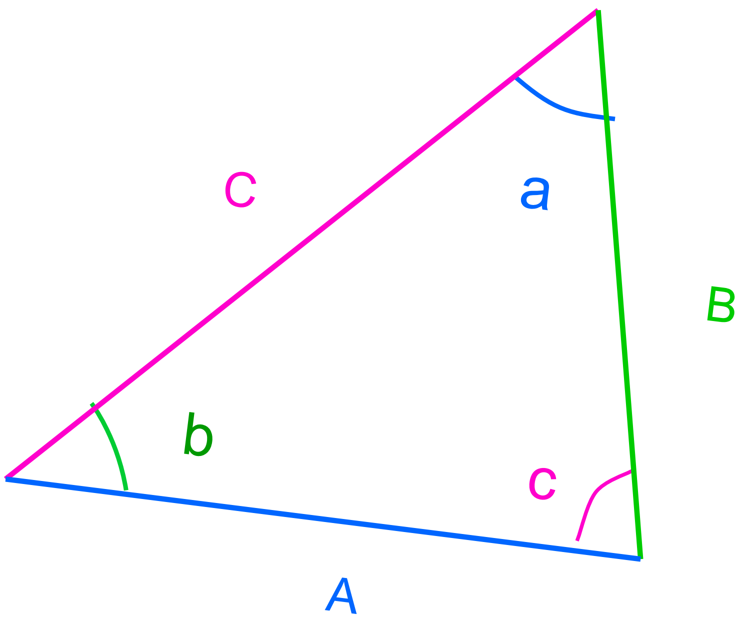
¿Pero como podemos obtenerlos?

También sabemos que dos lados y el ángulo entre ellos determinan al triángulo (LAL) y que dos ángulos y el lado entre ellos determinan al triángulo (ALA)



¿Como podemos obtener los lados y ángulos faltantes?

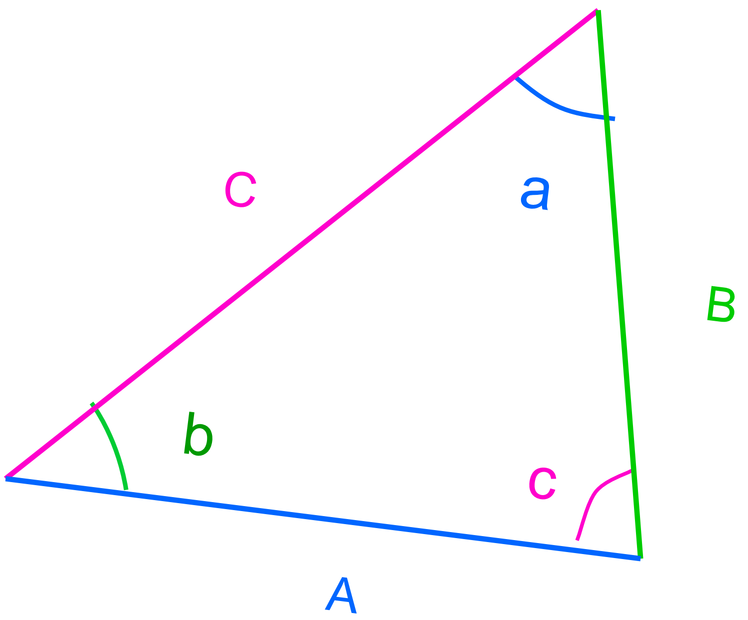
Hay otra relación entre los lados y los ángulos de un triángulo que involucra a los senos en lugar de los cosenos



Hay otra relación entre los lados y los ángulos de un triángulo que involucra a los senos en lugar de los cosenos

Ley de los senos:

A / sen a = B / sen b = C / sen c



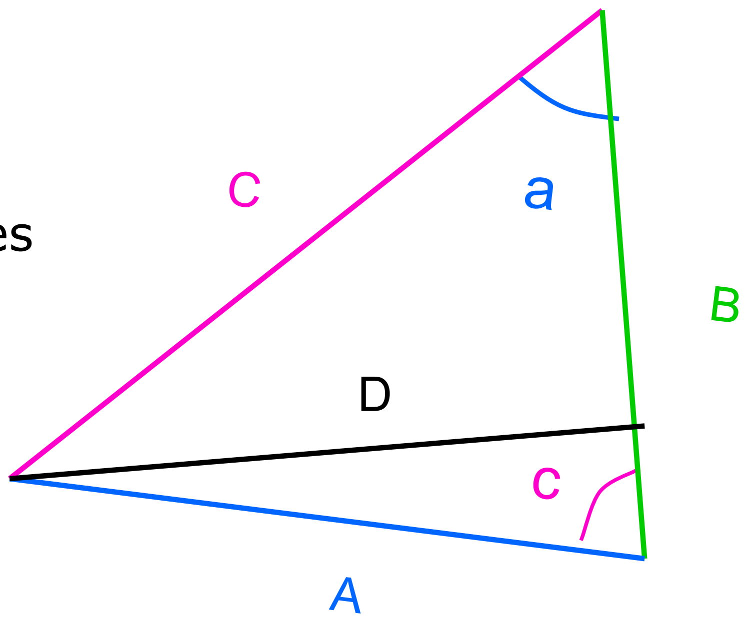
Ley de los senos:

A / sen a = B / sen b = C / sen c

Demostración.

Sea D la altura sobre el lado B entonces

sen a =   y   sen c =



Ley de los senos:

A / sen a = B / sen b = C / sen c

Demostración.

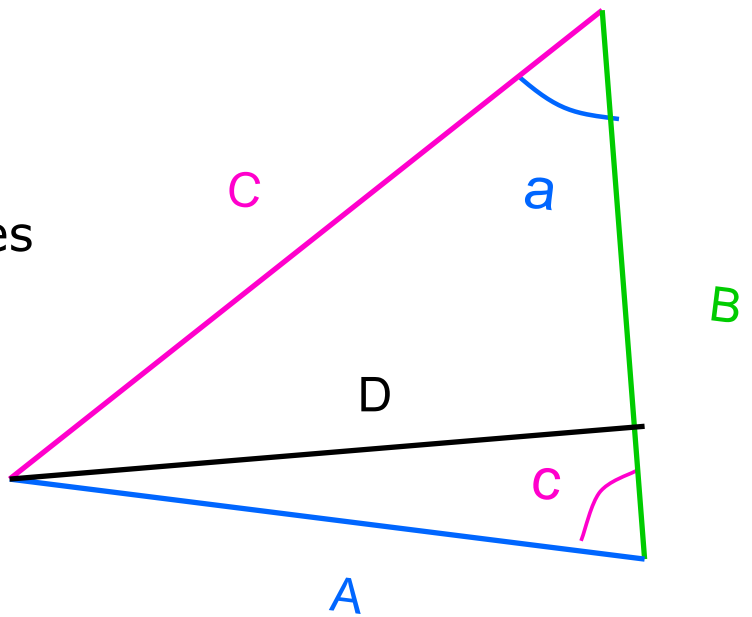
Sea D la altura sobre el lado B entonces

sen a = D/C y sen c = D/A

por lo tanto

A / sen a = A / (D/C) = AC / D

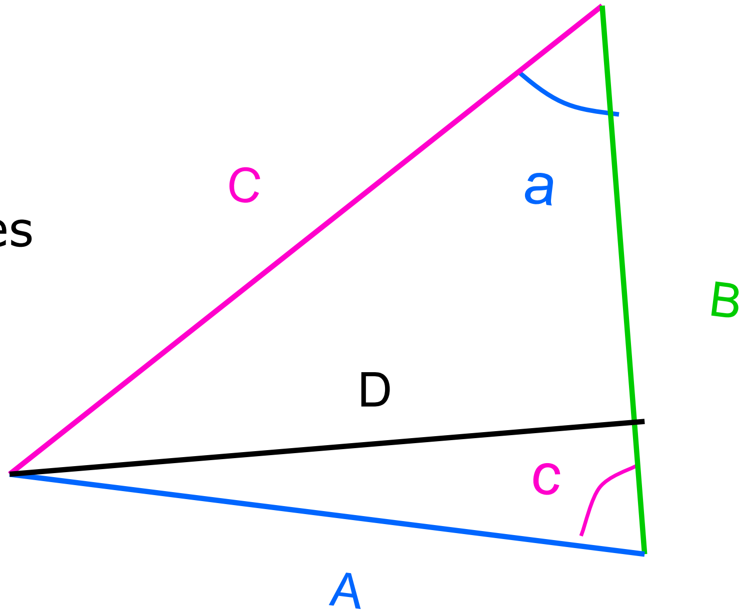
C / sen c = C / (D/A) = CA / D



Ley de los senos:

A / sen a = B / sen b = C / sen c

Demostración.



Sea D la altura sobre el lado B entonces

sen a = D/C y sen c = D/A

por lo tanto

A / sen a = A / (D/C) = AC / D

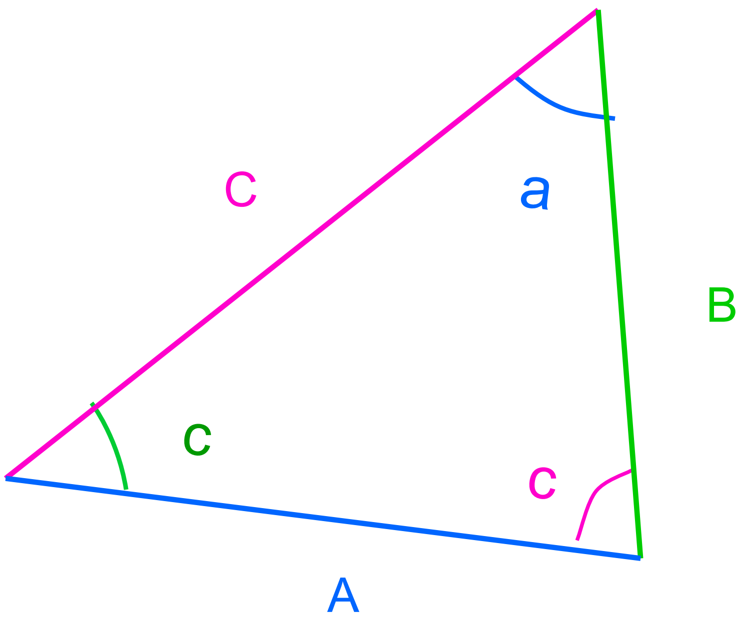
C / sen c = C / (D/A) = CA / D

Así que A / sen a = C / sen c

Las otras igualdades se obtienen cambiando de altura. •

Ley de los senos:

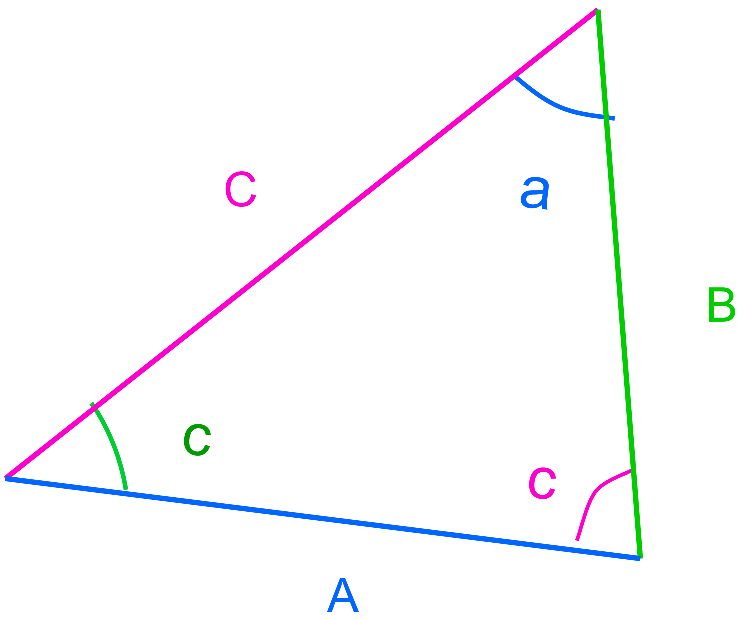
A / sen a = B / sen b = C / sen c



¿Y para que sirve?

Ley de los senos:

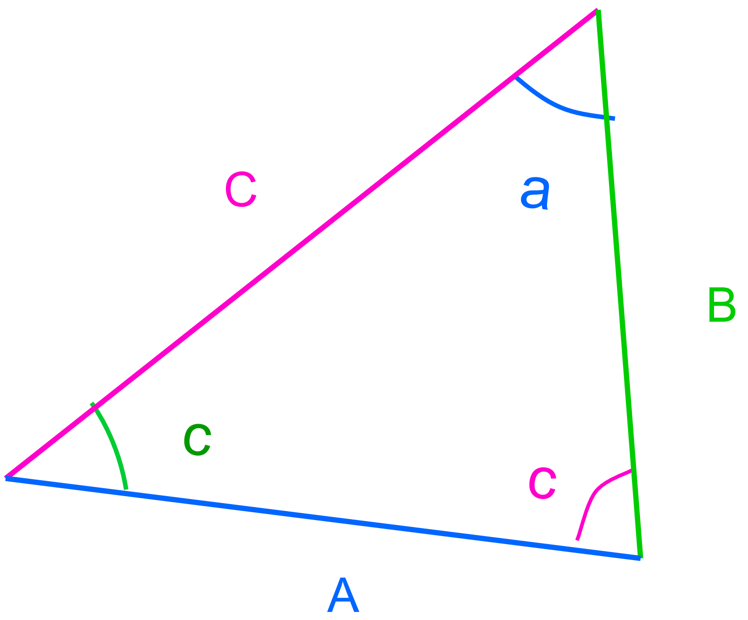
A / sen a = B / sen b = C / sen c



Corolario. A / C = sen a / sen c o sea que los lados del triángulo están en la misma proporción que los senos de los ángulos opuestos.

Ley de los senos:

A / sen a = B / sen b = C / sen c



Corolario. A / C = sen a / sen c o sea que los lados del triángulo están en la misma proporción que los senos de los ángulos opuestos.

Corolario. En cualquier triángulo el lado mayor es el opuesto al ángulo mayor.

Ejemplo. En un triángulo con ángulos 45°, 60° y 75° ¿que proporción guardan los lados?

Ejemplo. En un triángulo con ángulos 45°, 60° y 75° ¿que proporción guardan los lados?

Sean A, B y C los lados opuestos a esos ángulos.

Por la ley de los senos los lados guardan la misma proporción que los senos de los ángulos opuestos.

Ejemplo. En un triángulo con ángulos 45°, 60° y 75° ¿que proporción guardan los lados?

Sean A, B y C los lados opuestos a esos ángulos.

Por la ley de los senos los lados guardan la misma proporción que los senos de los ángulos opuestos.

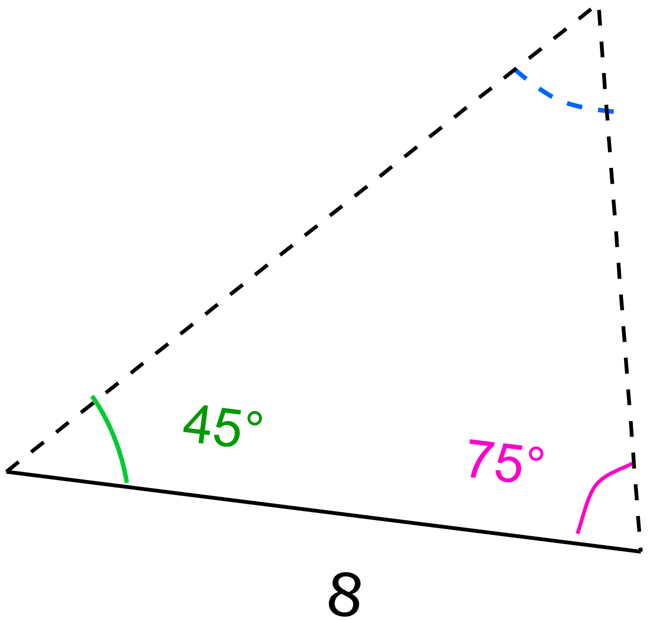
sen 45° = $1/\sqrt{2} \approx 0.7071...$

sen 60° = $\sqrt{3}/2 \approx 0.8660...$

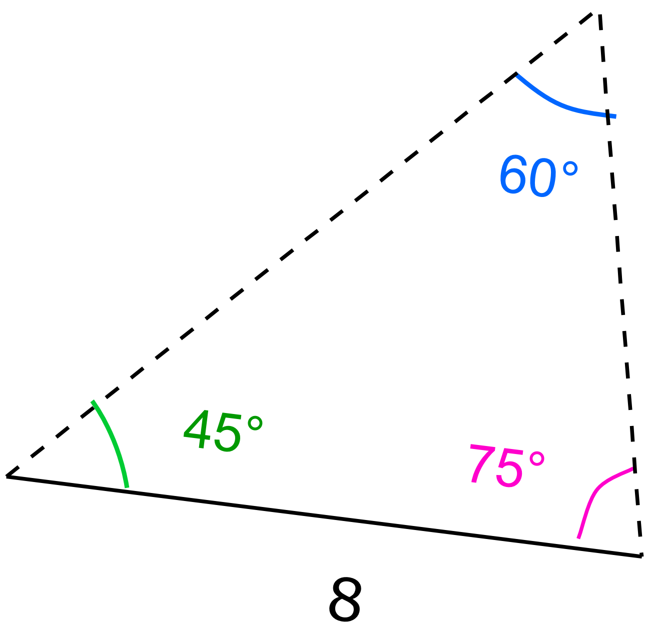
sen 75° $\approx 0.9659...$

Así que el triángulo con lados 0.7071.. 0.8660.. y 0.9659.. (y todos los triángulos semejantes) son los que tienen ángulos 45°, 60° y 75°.

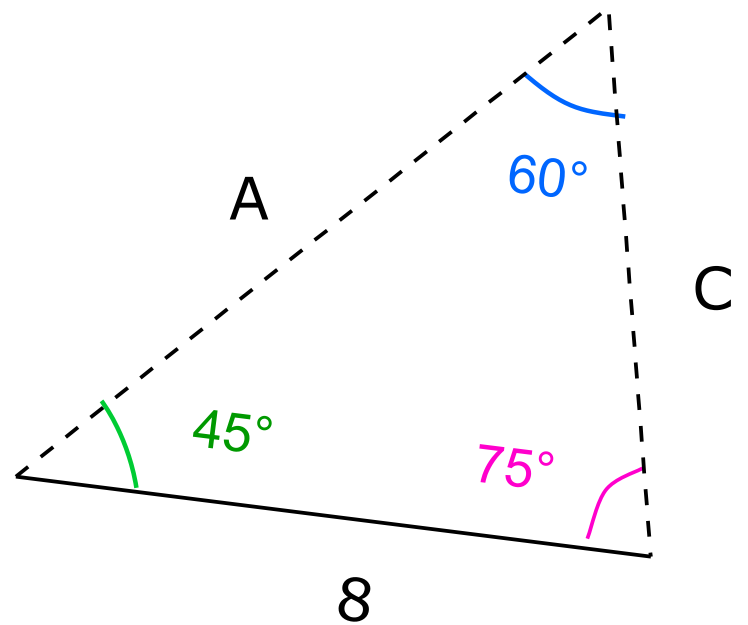
Ejemplo. Si un triángulo tiene un lado de longitud 8y ángulos adyacentes de 45° y 75° ¿cuanto miden los otros lados?



Ejemplo. Si un triángulo tiene un lado de longitud 8y ángulos adyacentes de 45° y 75° ¿cuanto miden los otros lados?

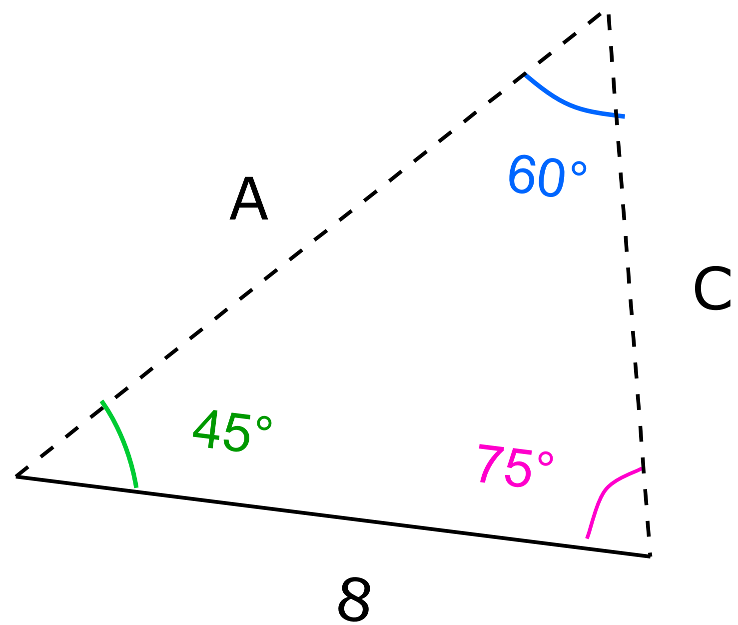


Ejemplo. Si un triángulo tiene un lado de longitud 8y ángulos adyacentes de 45° y 75° ¿cuanto miden los otros lados?



8 / sen 60° = A / sen 75° = C / sen 45°

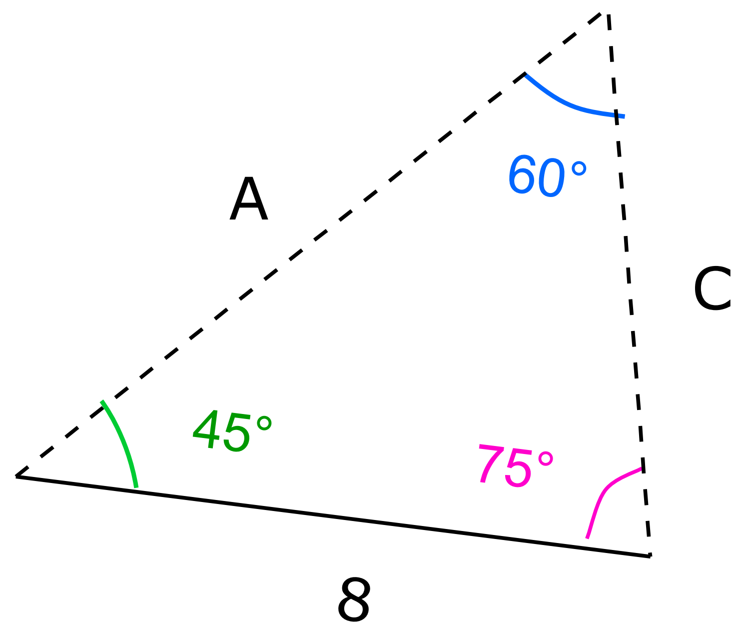
Ejemplo. Si un triángulo tiene un lado de longitud 8y ángulos adyacentes de 45° y 75° ¿cuanto miden los otros lados?



$8 / \text{sen } 60° = A / \text{sen } 75° = C / \text{sen } 45°$

$8 / 0.7071 \approx A / 0.9659 \approx C / 0.8660$

Ejemplo. Si un triángulo tiene un lado de longitud 8y ángulos adyacentes de 45° y 75° ¿cuanto miden los otros lados?

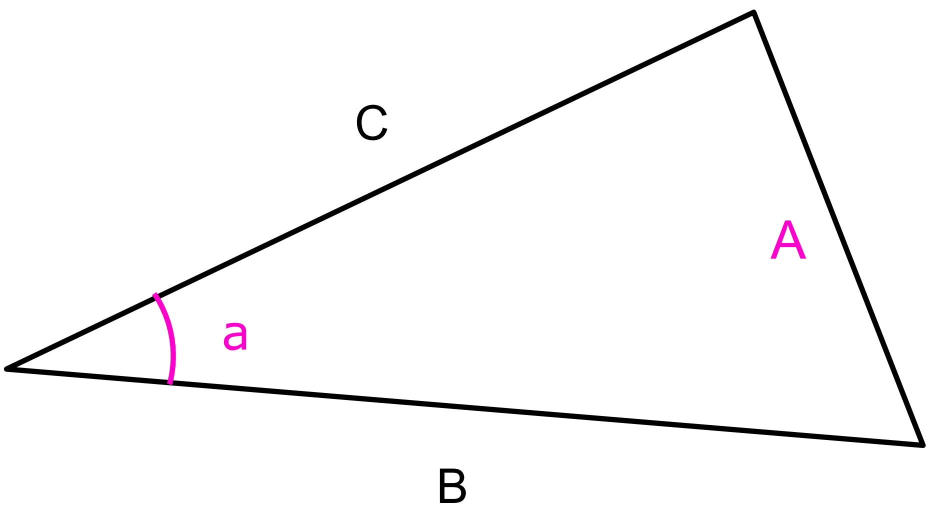


$8 / \text{sen } 60° = A / \text{sen } 75° = C / \text{sen } 45°$

$8 /_{0.866} \approx A /_{0.966} \approx C /_{0.707}$ y podemos despejar A y C

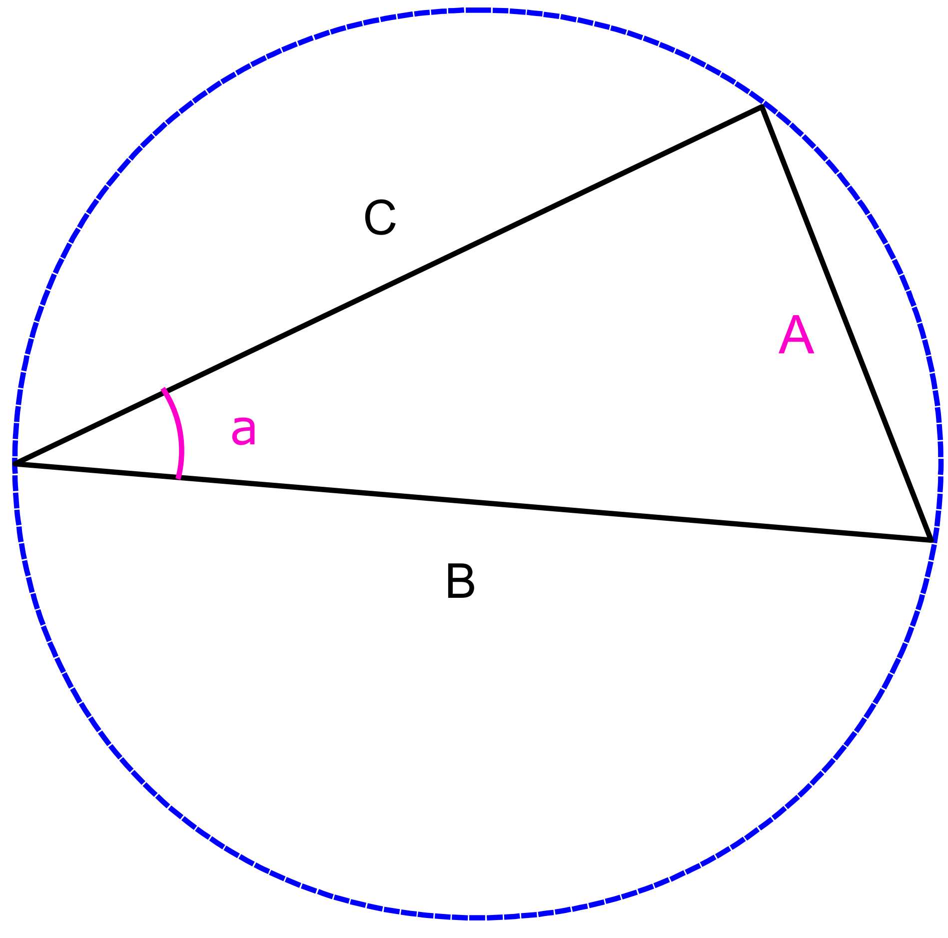
$A \approx 0.966 \cdot 8/_{0.866} \approx 8.923$ $\quad$ $C \approx 0.707 \cdot 8/_{0.866} \approx 6.532$

¿Que significado geométrico tiene A / sen α ?

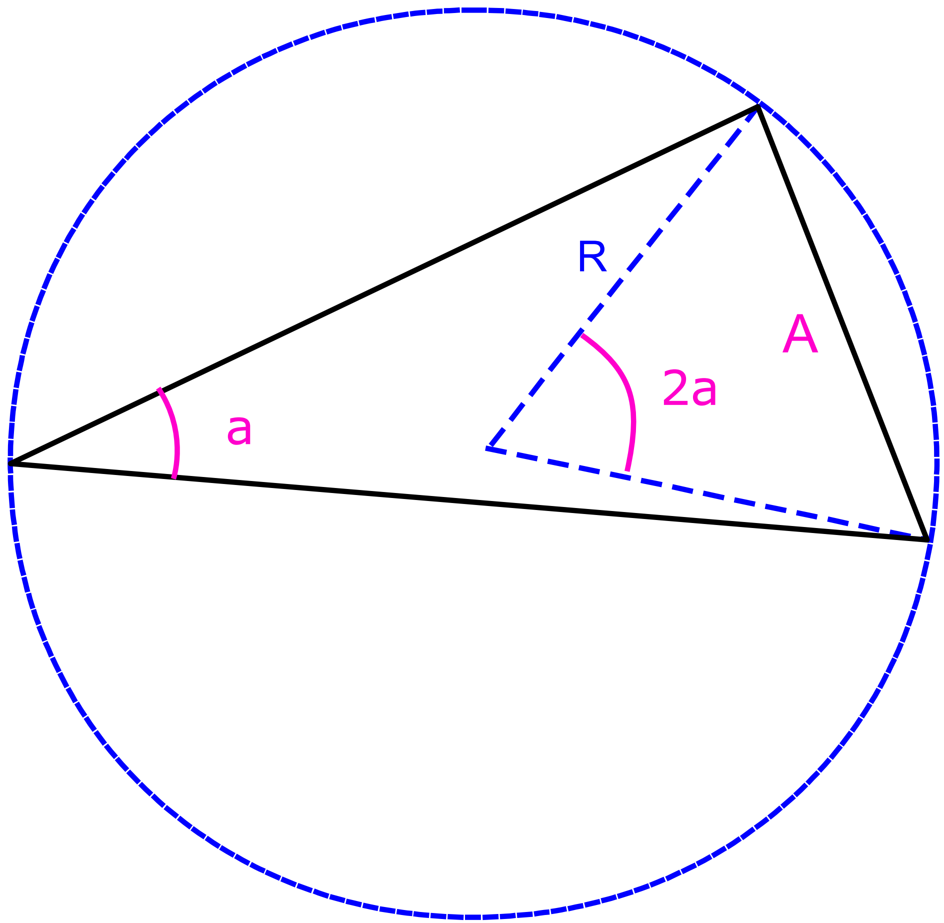


¿Que significado geométrico tiene A / sen α ?

Veamos el círculo circunscrito

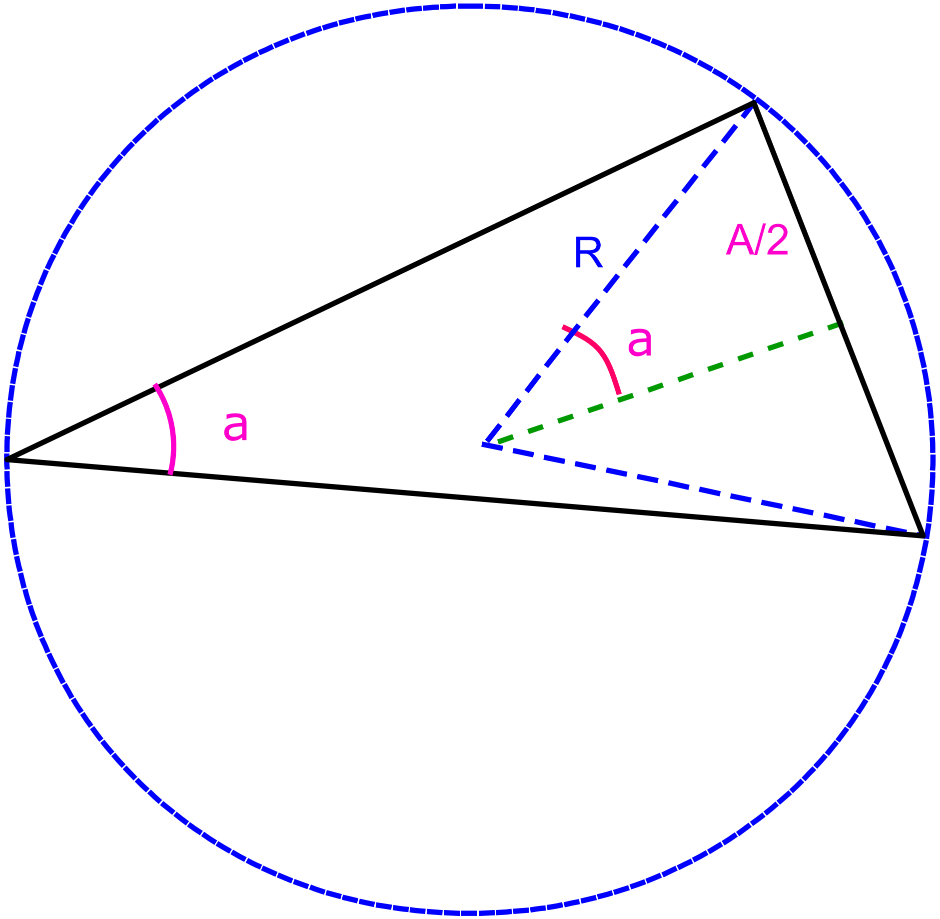


¿Que significado geométrico tiene A / sen α ?



Si R es el radio del círculo circunscrito al triángulo

¿Que significado geométrico tiene A / sen ɑ ?



Si R es el radio del círculo circunscrito al triángulo

sen ɑ = A/2 / R = A / 2R

Así que

A / sen a = 2R = diámetro

Ejemplo ¿Cual será el diámetro del círculo circunscrito al círculo con lados 3, 5 y 7?

Ejemplo ¿Cual será el diámetro del círculo circunscrito al círculo con lados 3, 5 y 7?

El diámetro es A /sen a, donde A es un lado y a es el ángulo opuesto.

Tomemos A=7 ¿de donde sacamos sen a ?

Ejemplo ¿Cual será el diámetro del círculo circunscrito al círculo con lados 3, 5 y 7?

El diámetro es A /sen a, donde A es un lado y a es el ángulo opuesto.

Tomemos A=7   ¿de donde sacamos sen a ?

De la ley de cosenos!

Ejemplo ¿Cual será el diámetro del círculo circunscrito al círculo con lados 3, 5 y 7?

El diámetro es A /sen a, donde A es un lado y a es el ángulo opuesto.

Tomemos A=7   ¿de donde sacamos sen a ?

De la ley de cosenos!

$7^2 = 3^2 + 5^2 - 2 \cdot 3 \cdot 5 \cos a$

$49 = 34 - 30 \cos a$

$\cos a = -1/2$

$a = 120°$

$\text{sen } 120° = \sqrt{3}/2$

$A / \text{sen } a = 7 / \sqrt{3}/2 \approx 8.083$

Ejemplo ¿Cual será el diámetro del círculo circunscrito al círculo con lados 3, 5 y 7?

El diámetro es A /sen a, donde A es un lado y a es el ángulo opuesto.

Y si hubiéramos tomado otro lado, digamos B = 5?

$5^2 = 3^2 + 7^2 - 2 \cdot 3 \cdot 7 \cos b$

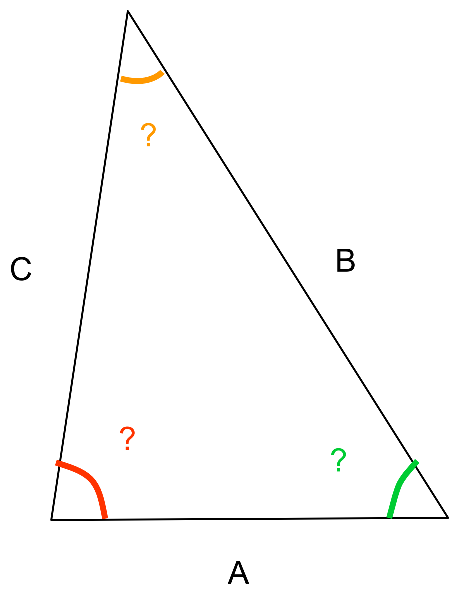
$25 = 58 - 42 \cos b$

$\cos b = 33/42$

$\text{sen } b = \sqrt{1-(33/42)^2} \approx 0.6186$

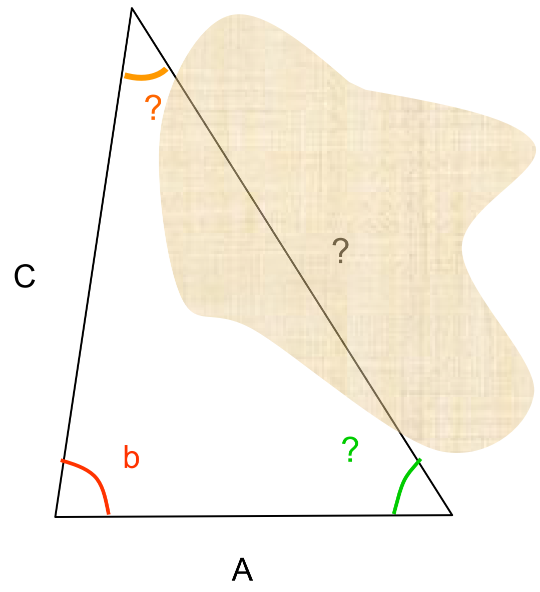
$B / \text{sen } b \approx 5 / 0.6186 \approx 8.083$

Aplicaciones de las leyes de senos y cosenos

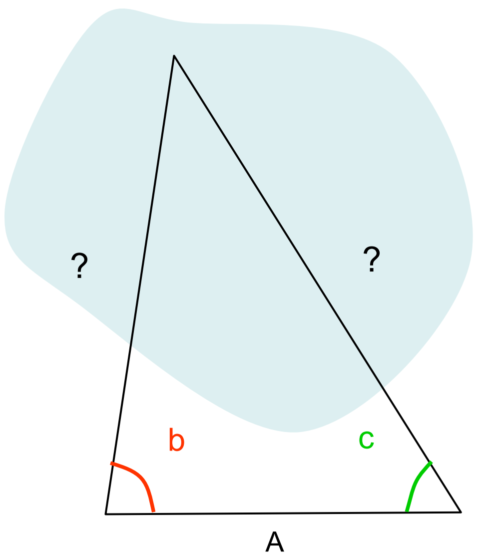


Hallar los ángulos de un triángulo a partir de los lados.

O hallar las proporciones de los lados a partir de los ángulos.



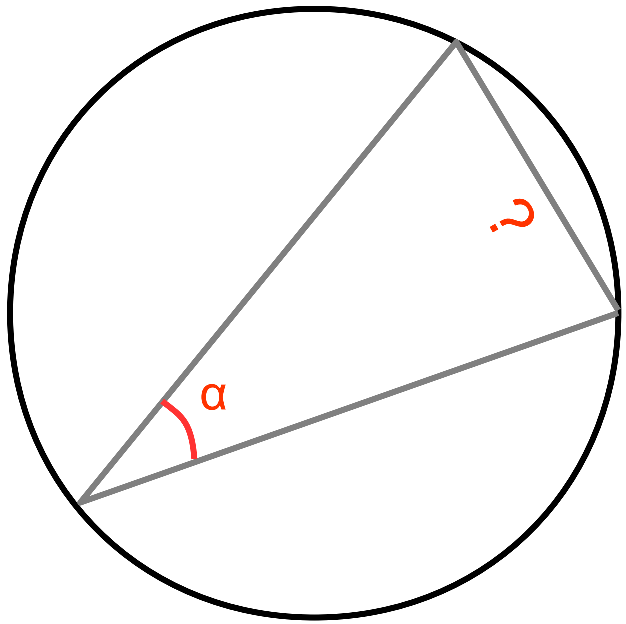
Hallar la dirección y la distancia entre puntos que no se ven directamente.



Hallar la distancia a un punto inaccesible

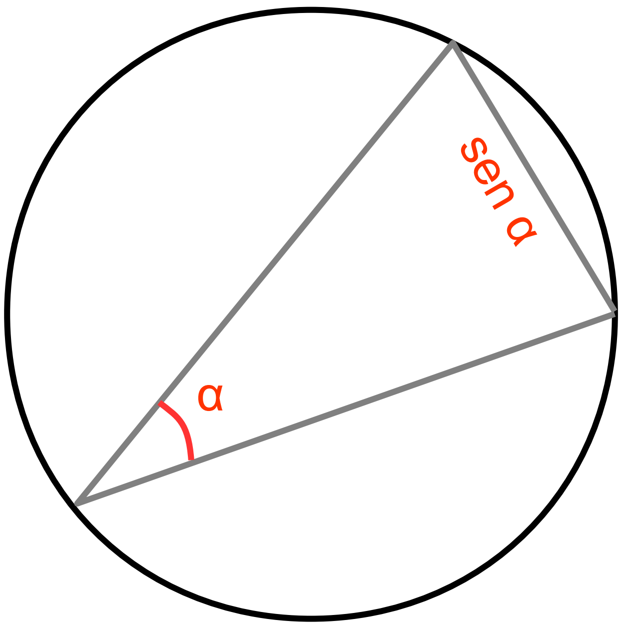
Para muchas aplicaciones como la astronomía es necesario saber los valores de senos y cosenos de los ángulos con mucha precisión, pero los únicos ángulos para los que pueden calcularse exactamente a partir de la definición son para 30°, 45° y 60°.

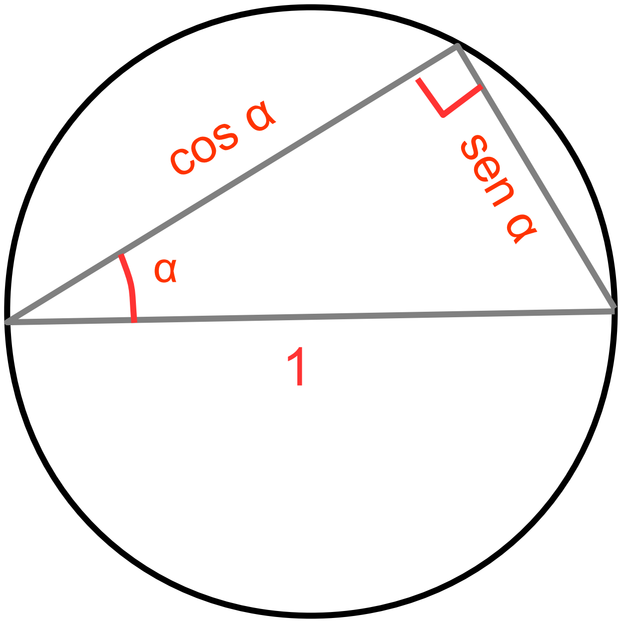
Para muchas aplicaciones como la astronomía es necesario saber los valores de senos y cosenos de los ángulos con mucha precisión, pero los únicos ángulos para los que pueden calcularse exactamente a partir de la definición son para 30°, 45° y 60°.



Para muchas aplicaciones como la astronomía es necesario saber los valores de senos y cosenos de los ángulos con mucha precisión, pero los únicos ángulos para los que pueden calcularse exactamente a partir de la definición son para 30°, 45° y 60°.

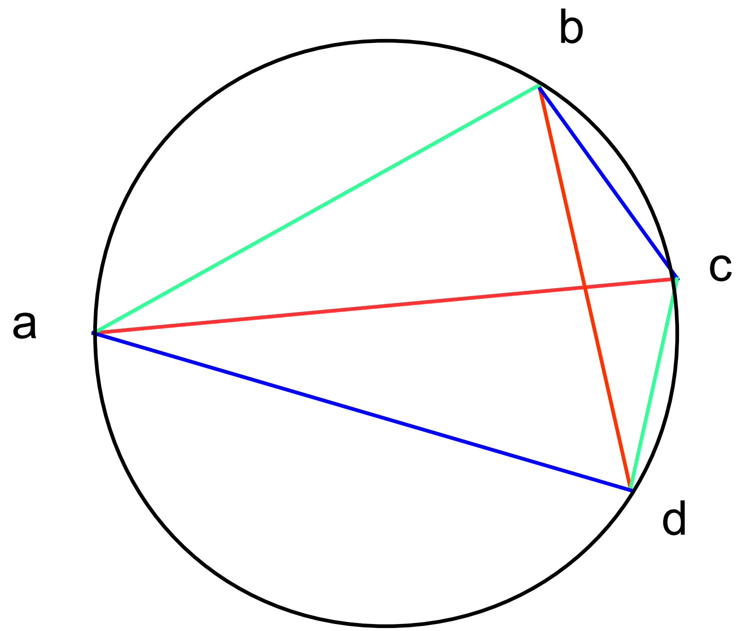
Observar que si inscribimos cualquier triángulo con ángulo α en un circulo de diámetro 1, el lado opuesto mide sen α (ley de los senos). Si un lado del triángulo es el diámetro, el triángulo es rectángulo y su otro lado mide cos α.





Las primeras tablas de senos y cosenos fueron calculadas por Ptolomeo hace 2000 años usando un teorema que lleva su nombre:

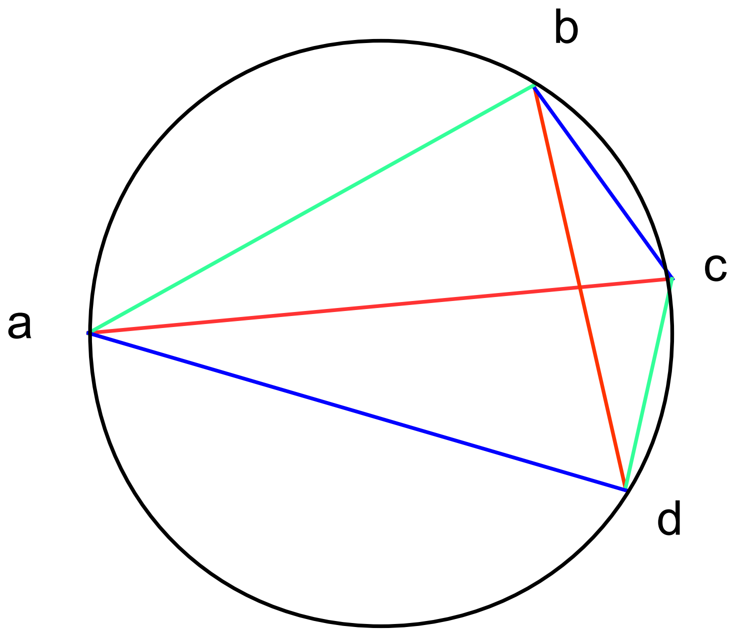
Las primeras tablas de senos y cosenos fueron calculadas por Ptolomeo hace 2000 años usando un teorema que lleva su nombre:



Teorema de Ptolomeo: Para cada cuadrilátero inscrito en un círculo, el producto de las diagonales es igual a la suma de los productos de los lados opuestos:

$$ac \cdot bd = ab \cdot cd + ad \cdot bc$$

Las primeras tablas de senos y cosenos fueron calculadas por Ptolomeo hace 2000 años usando un teorema que lleva su nombre:

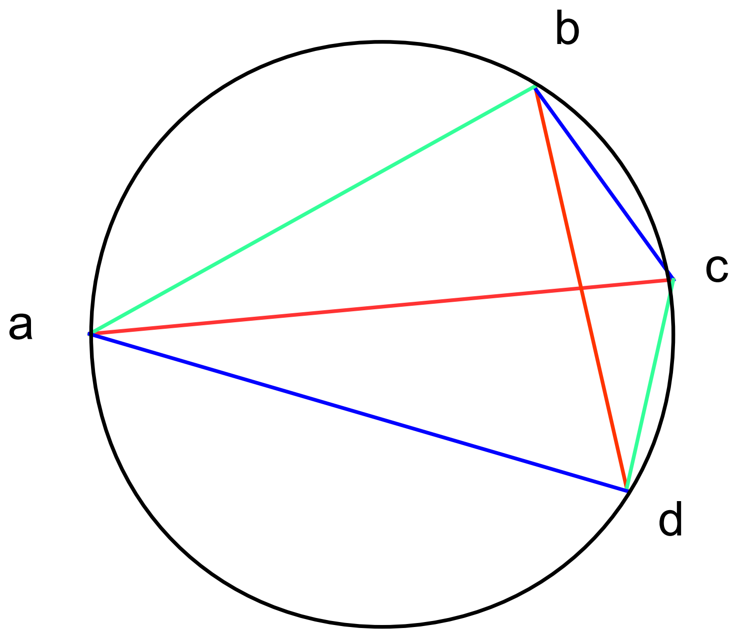


Teorema de Ptolomeo: Para cada cuadrilátero inscrito en un círculo, el producto de las diagonales es igual a la suma de los productos de los lados opuestos:

$$ac \cdot bd = ab \cdot cd + ad \cdot bc$$

El teorema de Ptolomeo es otra generalización del teorema de Pitágoras.

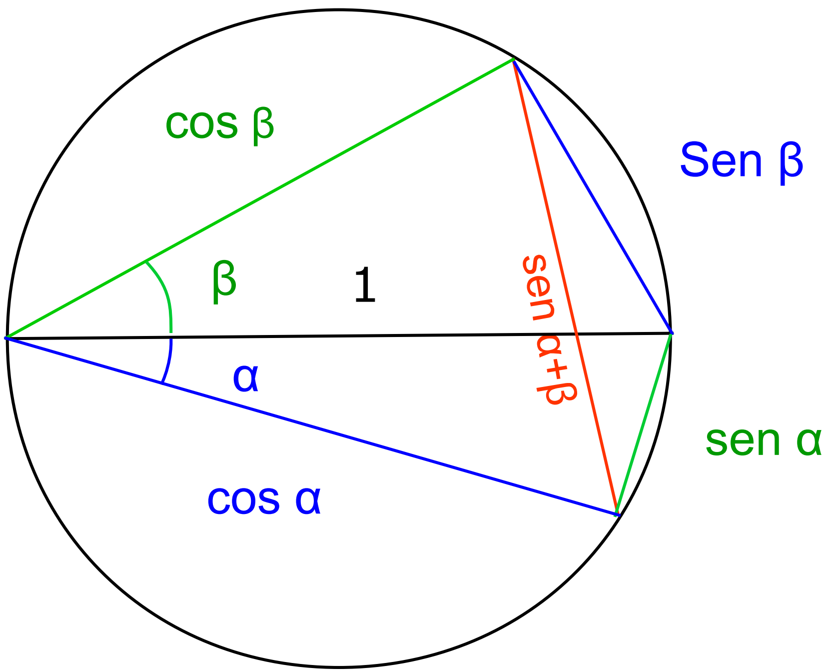
Teorema de Ptolomeo: Para cada cuadrilátero inscrito en un círculo, el producto de las diagonales es igual a la suma de los productos de los lados opuestos:



$$ac \cdot bd = ab \cdot cd + ad \cdot bc$$

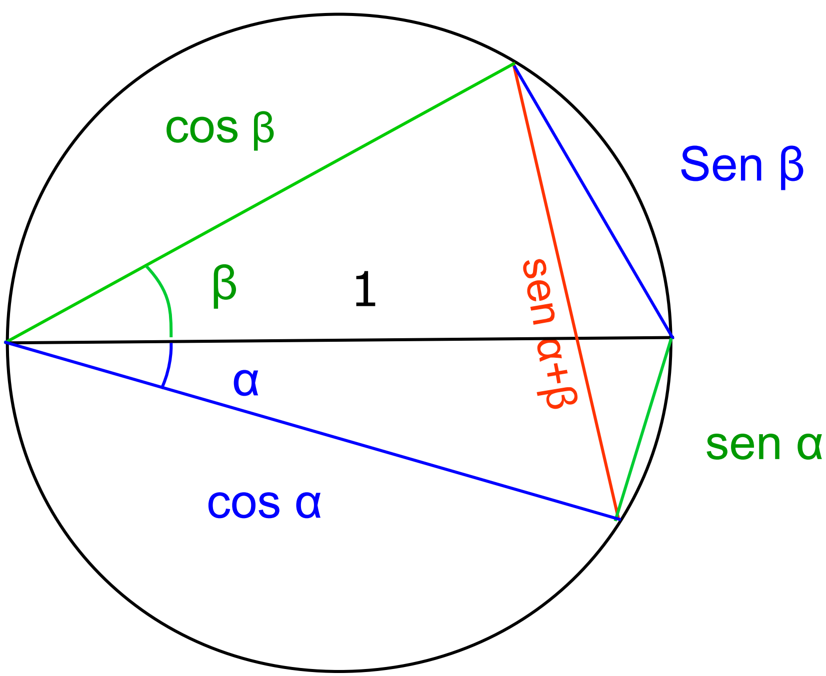
El teorema de Ptolomeo da una fórmula para calcular los senos y cosenos de la suma y la resta de dos ángulos.

Dibujemos un cuadrilátero inscrito en un círculo de diámetro 1, donde una diagonal es el diámetro y sus ángulos con los lados son α y β



El teorema de Ptolomeo da una fórmula para calcular los senos y cosenos de la suma y la resta de dos ángulos.

Dibujemos un cuadrilátero inscrito en un círculo de diámetro 1, donde una diagonal es el diámetro y sus ángulos con los lados son α y β



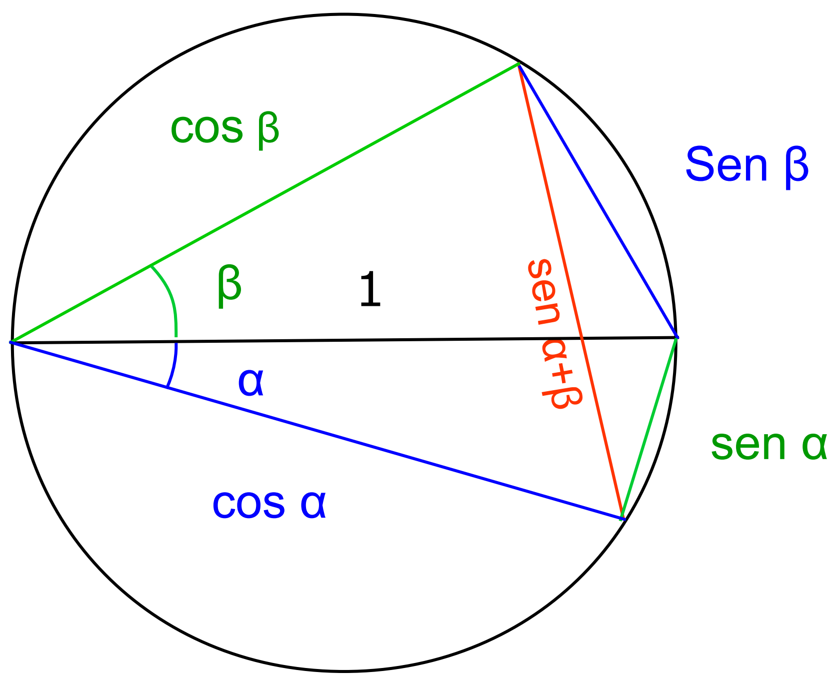
Por el teorema de Ptolomeo:

$\operatorname{sen}(\alpha+\beta) = \operatorname{sen}\alpha \cdot \cos\beta + \operatorname{sen}\beta \cdot \cos\alpha$

La igualdad también vale si cambiamos suma por resta.

El teorema de Ptolomeo da una fórmula para calcular los senos y cosenos de la suma y la resta de dos ángulos.

Dibujemos un cuadrilátero inscrito en un círculo de diámetro 1, donde una diagonal es el diámetro y sus ángulos con los lados son α y β



Por el teorema de Ptolomeo:

$\mathrm{sen}(\alpha+\beta) = \mathrm{sen}\ \alpha \cdot \cos\beta + \mathrm{sen}\ \beta \cdot \cos\alpha$

Ejemplos:

sen 75º = sen (45º+30º) = sen45ºcos30º + sen30ºcos45º = $1/\sqrt{2}\ \sqrt{3}/2 + 1/2\ 1/\sqrt{2}$

sen 15º = sen (45º -30º) = sen45ºcos30º - sen30ºcos45º = $1/\sqrt{2}\ \sqrt{3}/2 - 1/2\ 1/\sqrt{2}$