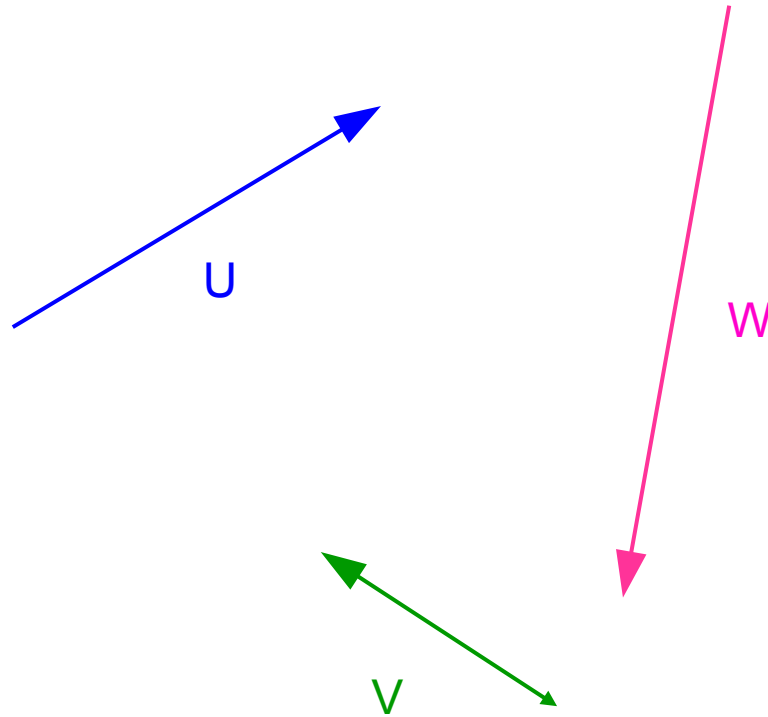
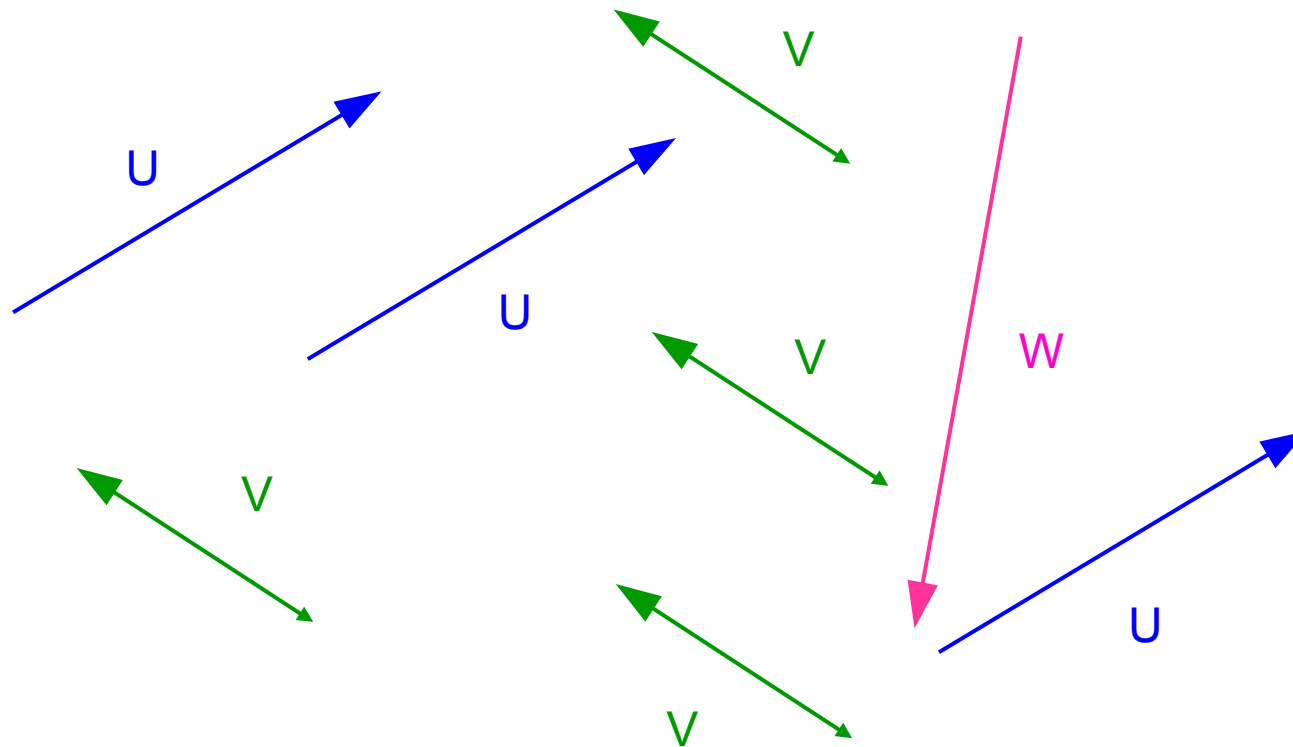


Vectores

Un *vector* es un segmento de recta dirigido en el plano o el espacio euclidiano.



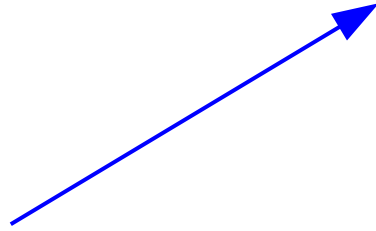
Un *vector* es un segmento de recta dirigido en el plano o el espacio euclidiano.



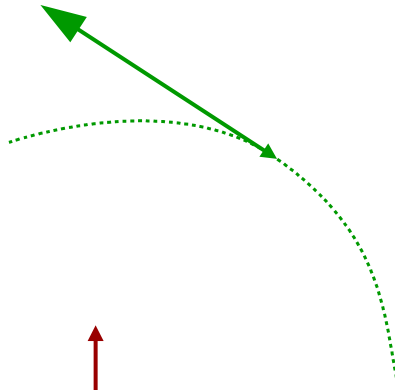
Diremos que dos vectores son *iguales* si tienen la misma dirección, magnitud (tamaño) y sentido, sin importar donde estén.

Los vectores sirven para representar muchas cosas, como:

- Desplazamientos



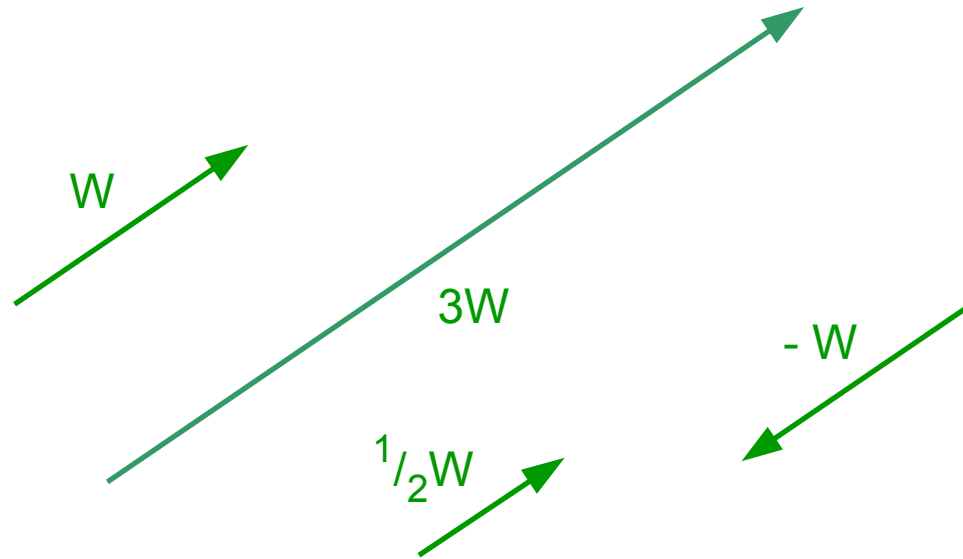
- Velocidades



- Fuerzas

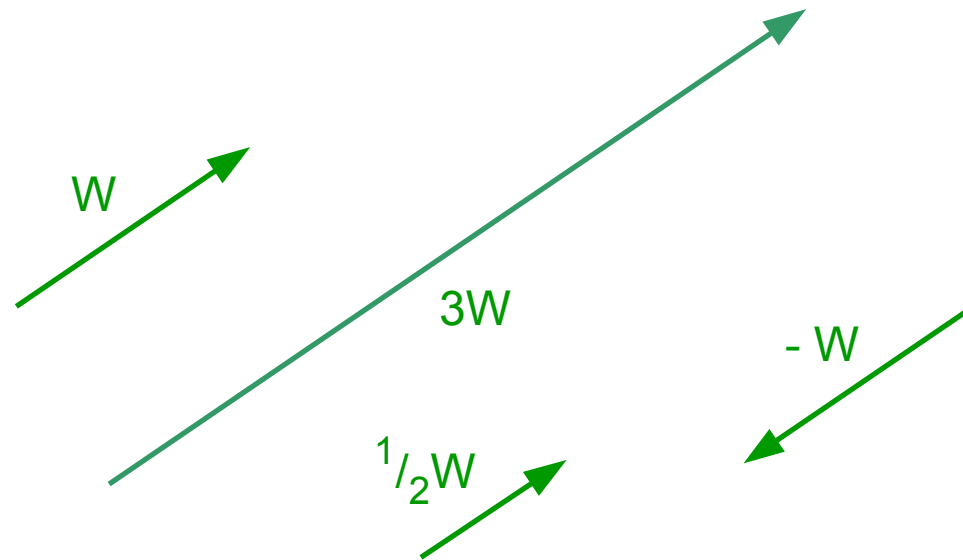


Los vectores pueden multiplicarse por números reales:



rV tiene la misma dirección que V , tiene $|r|$ veces su magnitud y tiene el mismo sentido si $r > 0$ y el sentido opuesto si $r < 0$

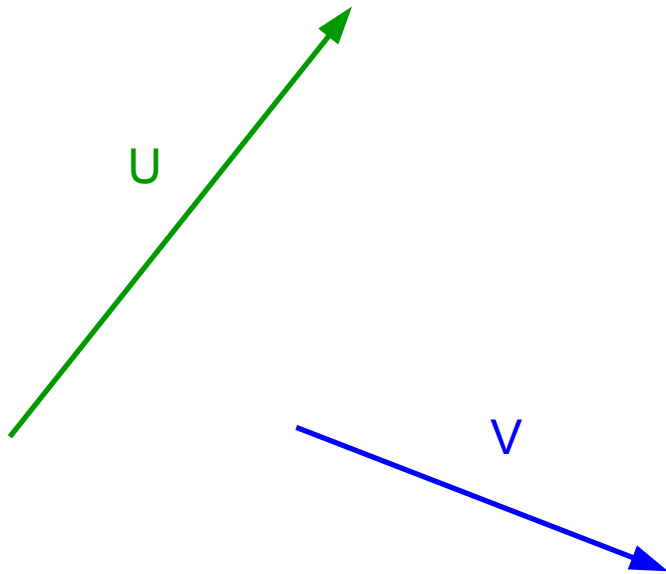
Los vectores pueden multiplicarse por un número real r :



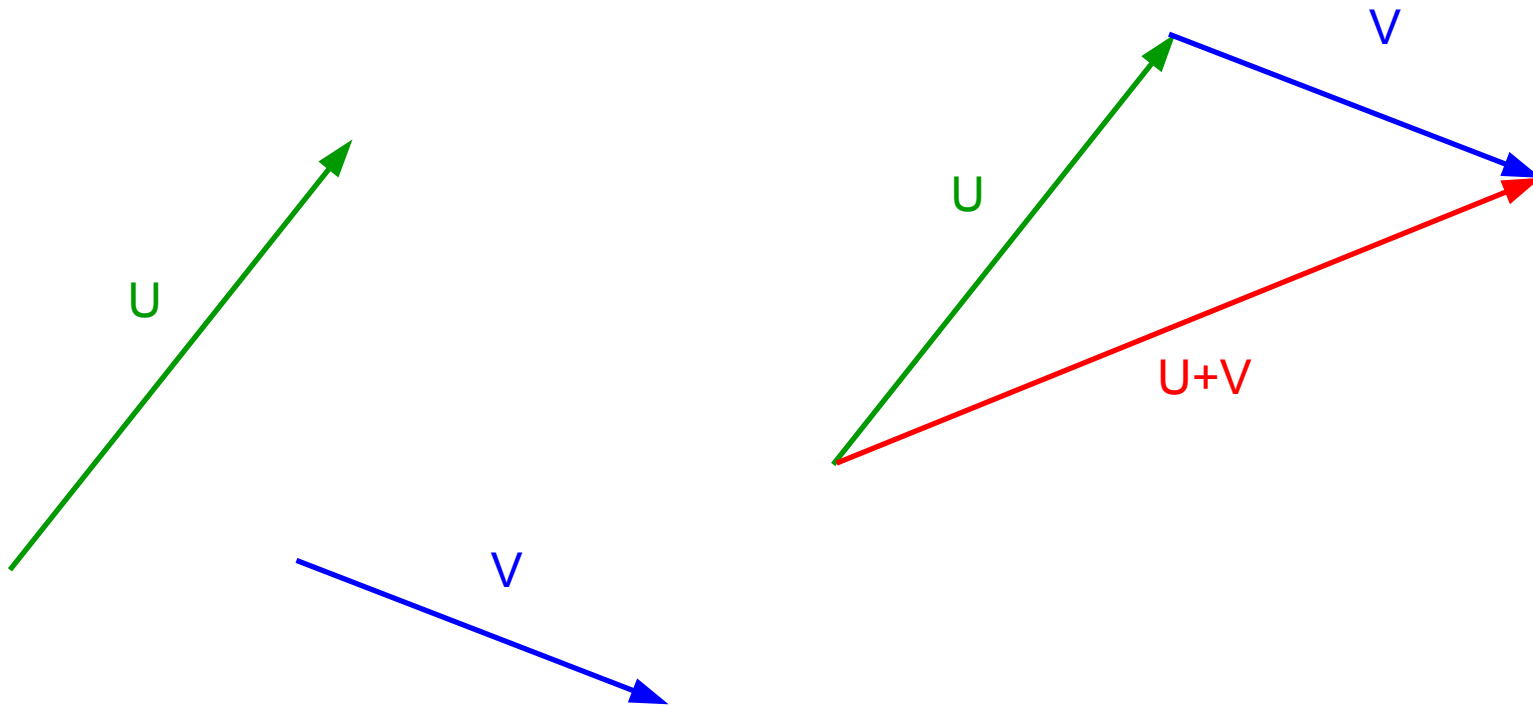
rV tiene la misma dirección que V , tiene $|r|$ veces su magnitud y tiene el mismo sentido si $r > 0$ y el sentido opuesto si $r < 0$

El negativo de un vector w es un vector que tiene la misma dirección y tamaño que w , pero sentido opuesto, es decir $-1w = -w$

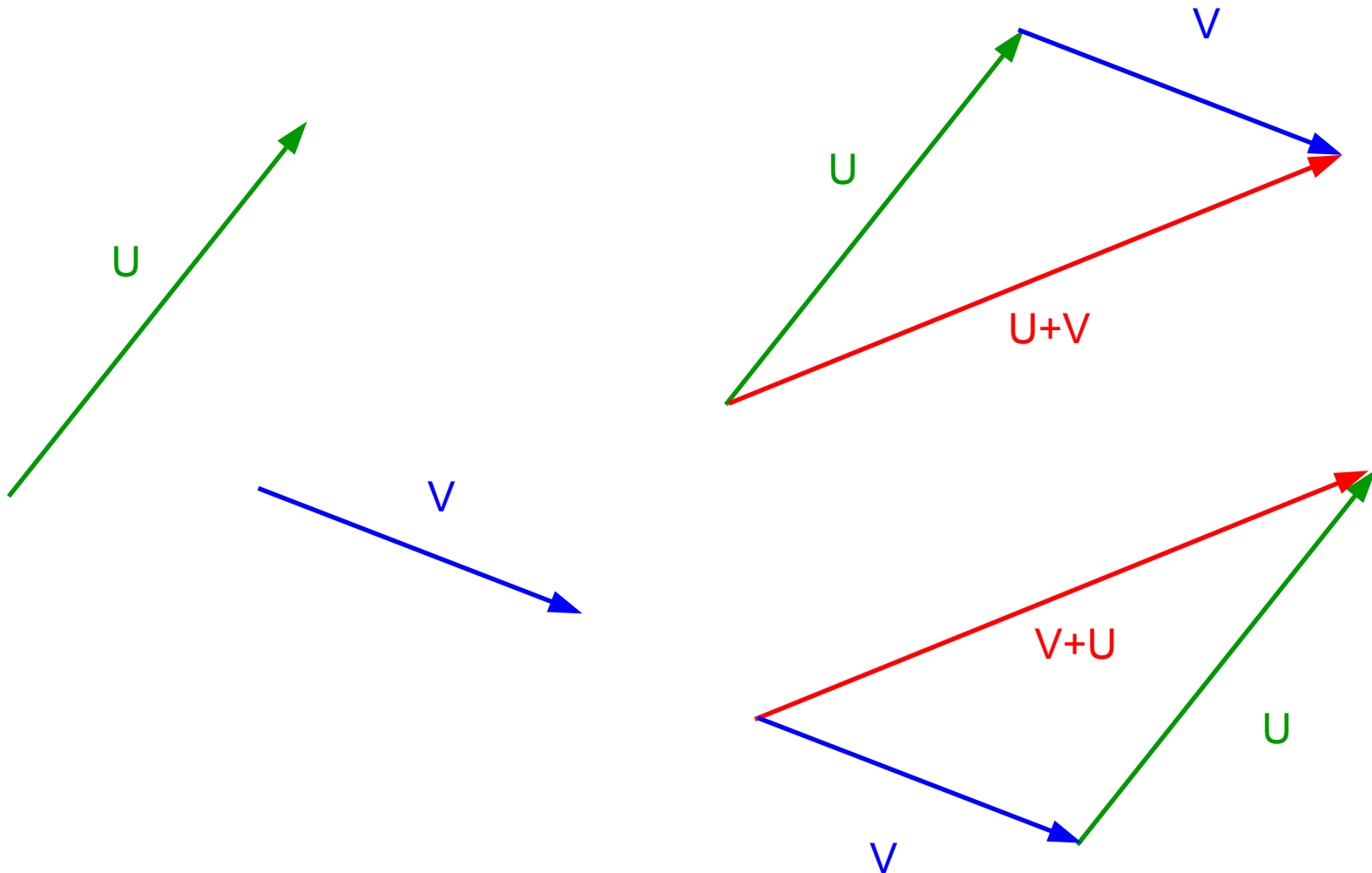
Los vectores se pueden sumar:



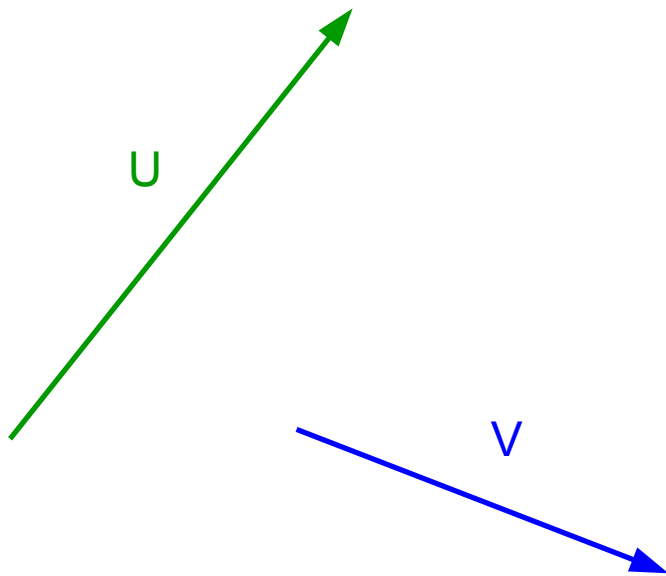
Los vectores se pueden sumar:



Los vectores se pueden sumar:

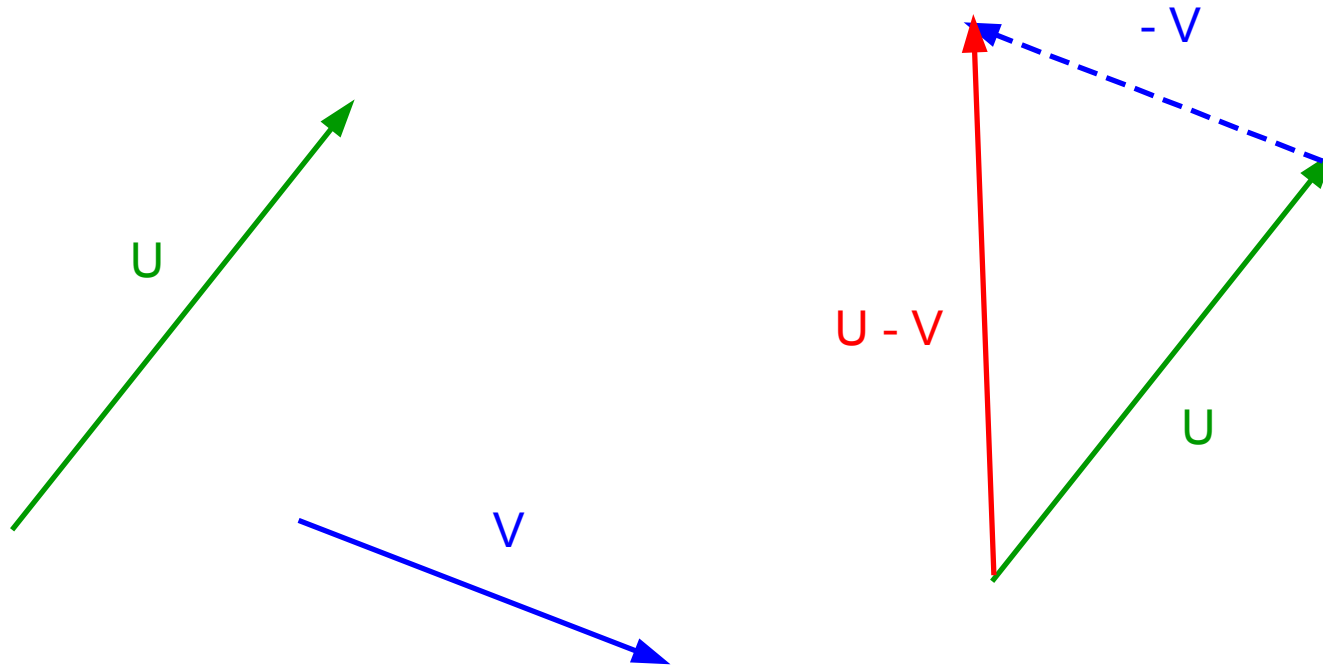


Los vectores también se pueden restar:



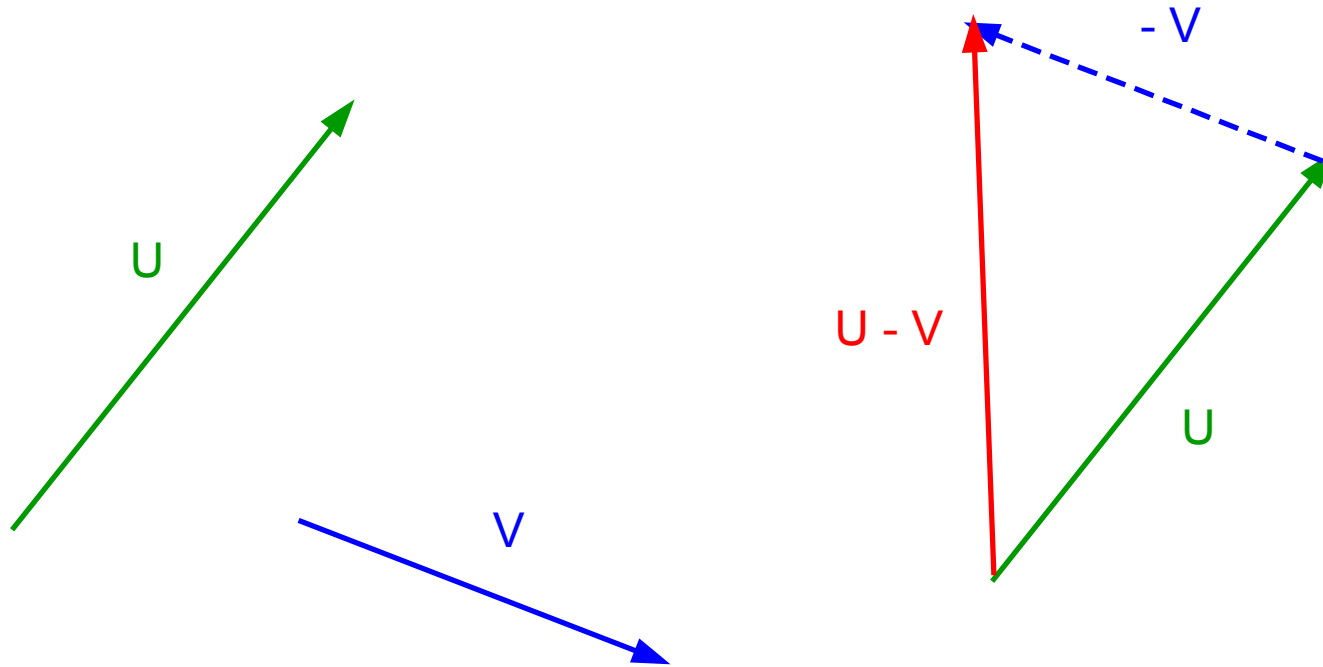
$$U - V = ?$$

Los vectores también se pueden restar:



$$U - V = U + (-V)$$

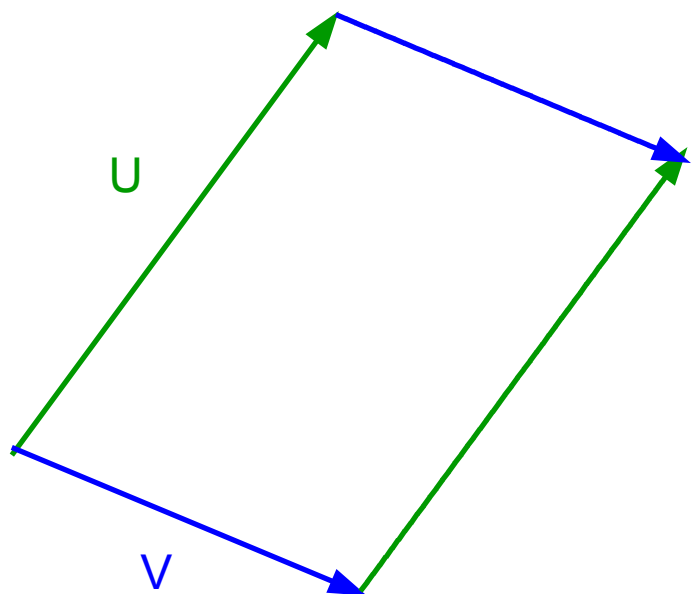
Los vectores también se pueden restar:



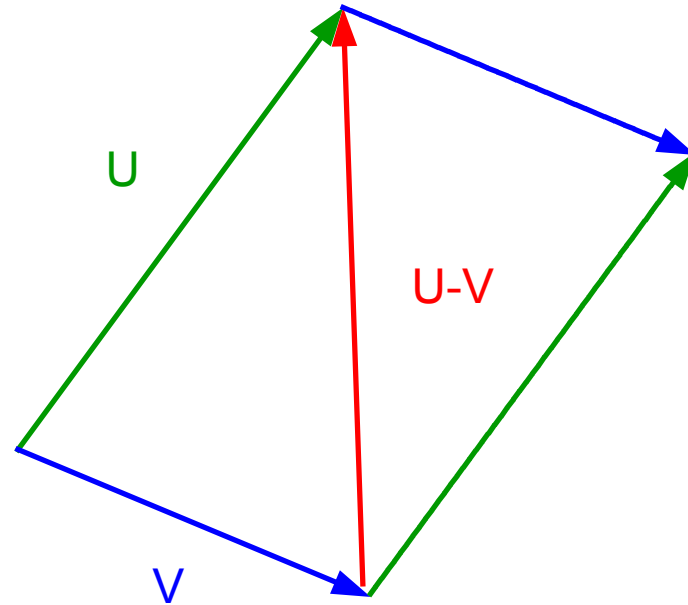
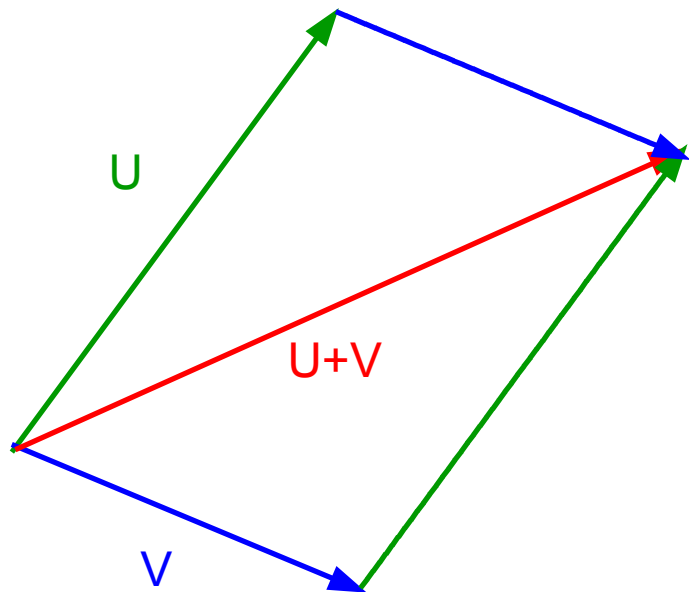
$$U - V = U + (-V)$$

$U - V$ es el vector que al sumarle V da U

La regla del paralelogramo:

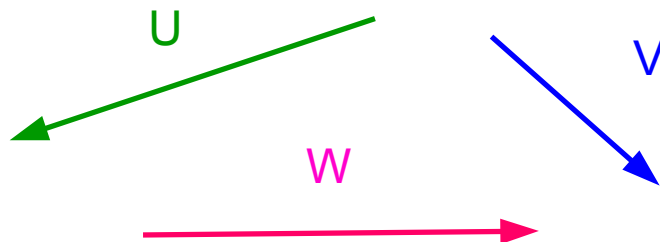


La regla del paralelogramo:



La suma y resta de dos vectores basados en el mismo punto están dadas por las diagonales del paralelogramo definido por los dos vectores.

Ejemplo.



$$U+2V$$

$$-V+U$$

$$U+V+W$$

$$-V-W$$

$$U+2V-3W$$

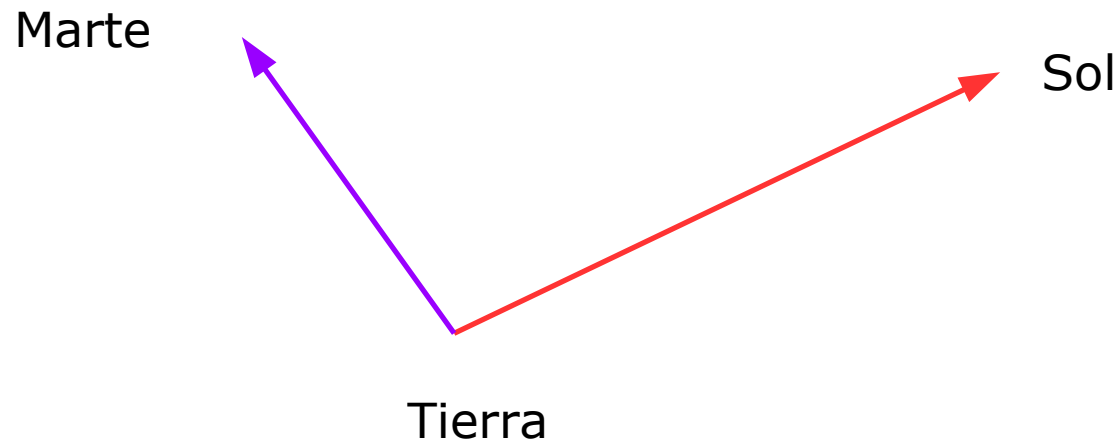
Propiedades de la suma de vectores y su multiplicación por escalares:

- $U + V = V + U$ *conmutatividad*
- $(U + V) + W = U + (V + W)$ *asociatividad*
- $a(U + V) = aU + aV$
distributividad
- $(a + b)U = aU + bU$

Estas propiedades se obtienen de la ley del paralelogramo y de la semejanza de triángulos.

Aplicaciones

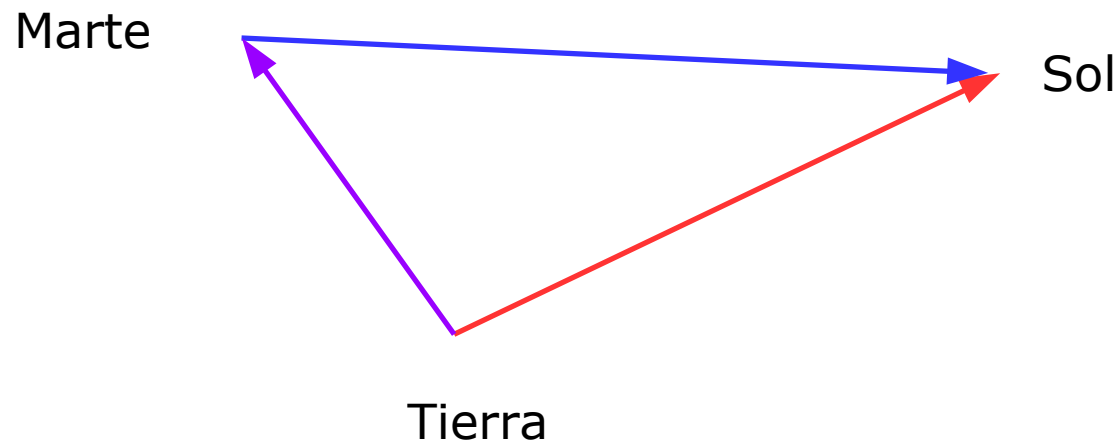
Las posiciones relativas se suman como vectores:



Supongamos que conocemos las posiciones del Sol y de Marte vistos desde la tierra. ¿cual será la posición del sol visto desde Marte?

Aplicaciones

Las posiciones relativas se suman como vectores:

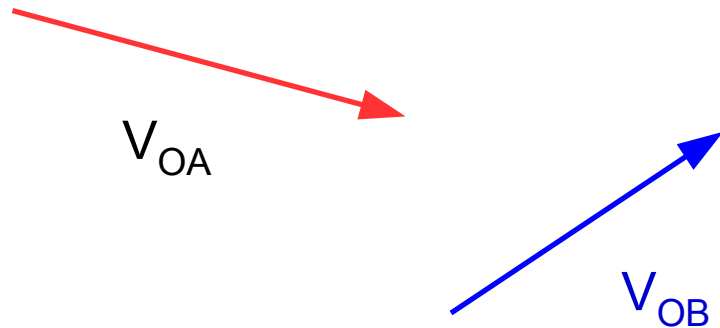


El vector MS que da la posición del Sol visto desde Marte es la suma del vector TS que da la posición del Sol visto desde la Tierra mas el vector MT que da la posición de la tierra vista desde Marte, o sea

$$MS = MT + TS = TS - TM$$

Aplicaciones

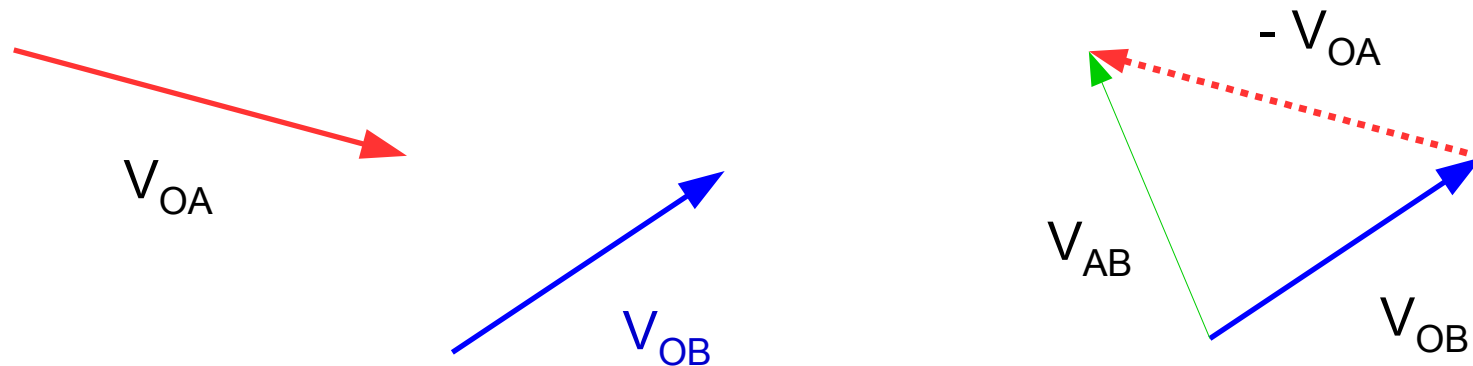
Las velocidades relativas se suman como vectores:



Supongan que observamos la velocidad de dos objetos A y B y queremos saber la velocidad de B respecto a A.

Aplicaciones

Las velocidades relativas se suman como vectores:

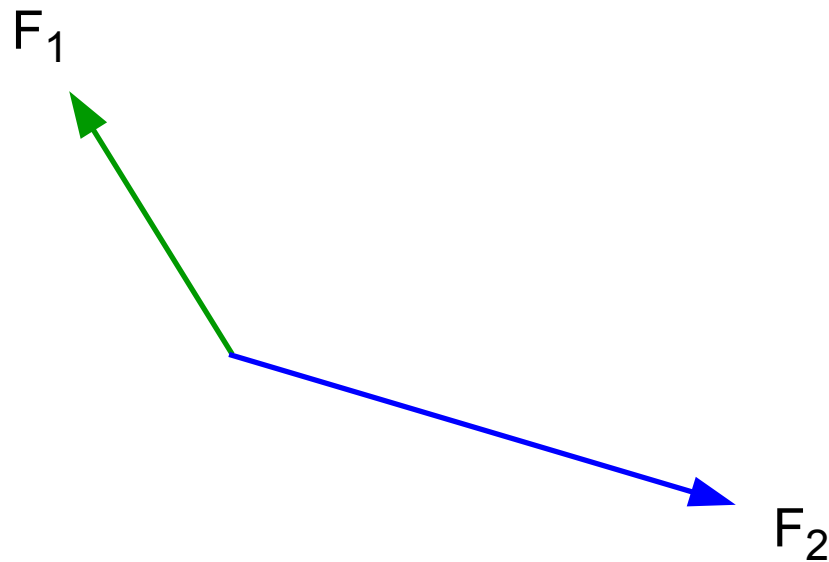


La velocidad V_{AB} de un objeto B respecto a otro objeto A es la velocidad de B respecto a un observador menos la velocidad de A respecto al observador:

$$V_{AB} = V_{AO} + V_{OB} = V_{OB} - V_{OA}$$

Aplicaciones

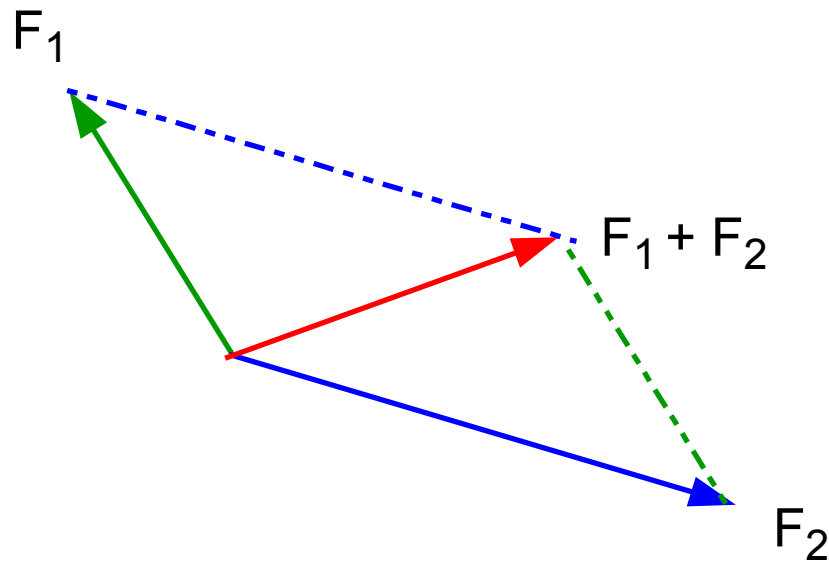
Las fuerzas se suman como vectores:



Supongamos que aplicamos 2 fuerzas sobre el mismo punto
¿cual será la fuerza resultante?

Aplicaciones

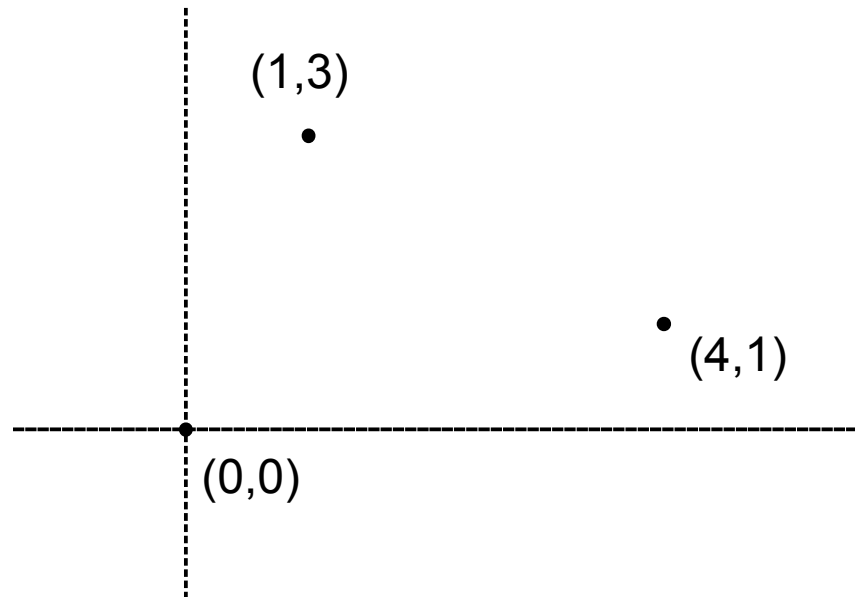
Las fuerzas se suman como vectores:



Si se aplican simultáneamente dos fuerzas sobre un punto, la fuerza resultante es su suma vectorial.

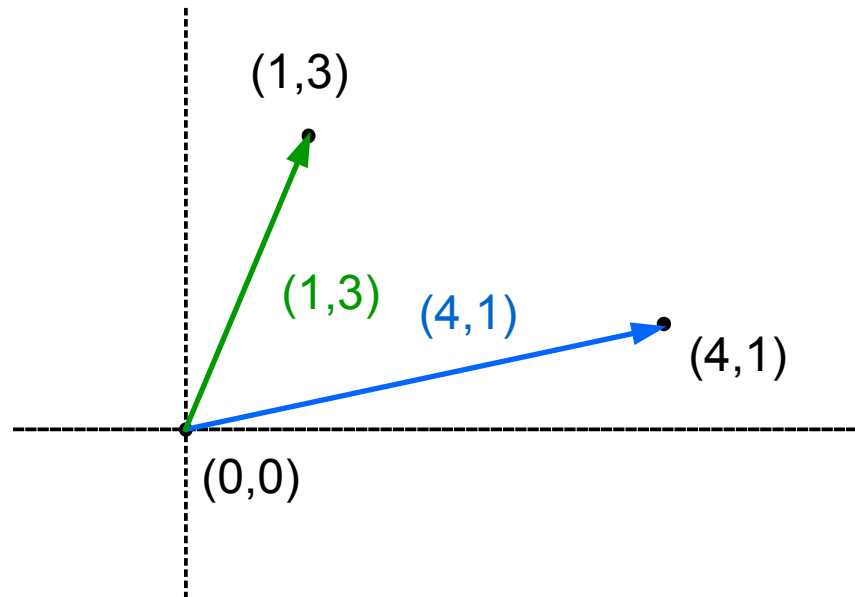
Vectores y coordenadas

Cada punto del plano (x,y) determina un vector que va del origen al punto, y que se denota también por (x,y) .



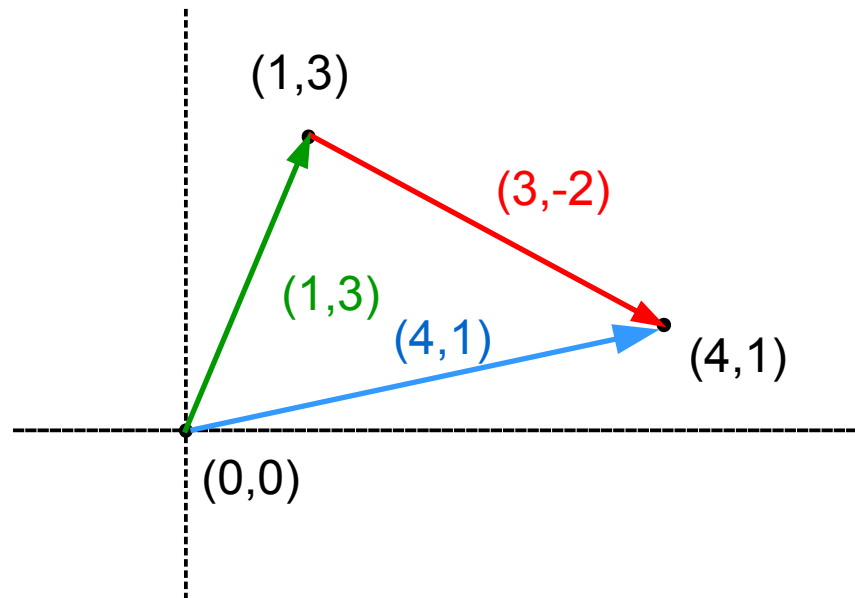
Vectores y coordenadas

Cada punto del plano (x,y) determina un vector que va del origen al punto, y que se denota también por (x,y) .



Vectores y coordenadas

Cada punto del plano (x,y) determina un vector que va del origen al punto, y que se denota también por (x,y) .

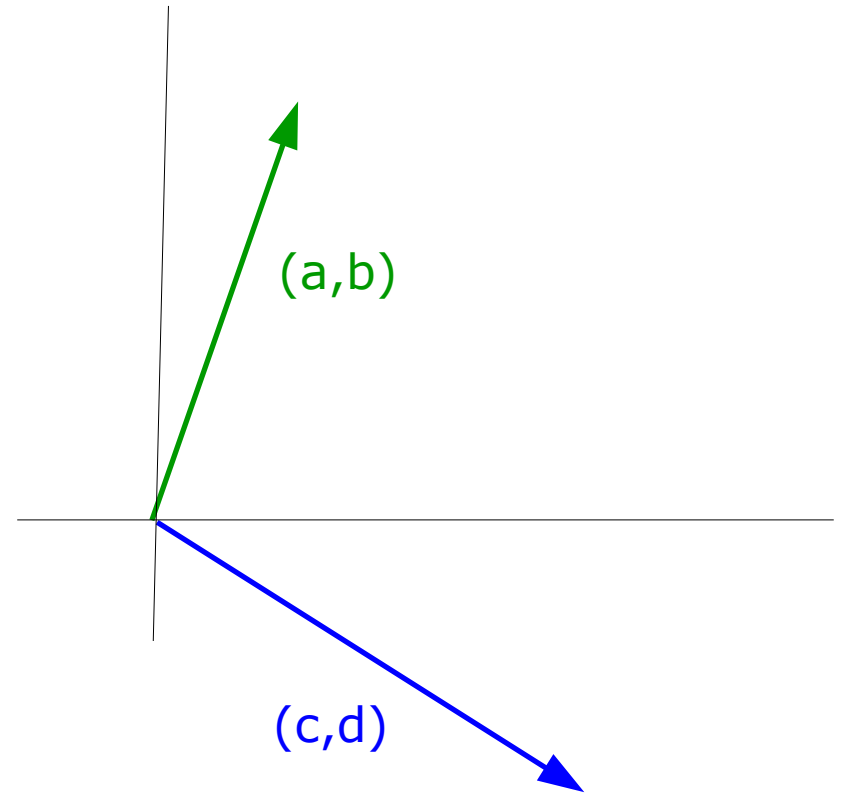
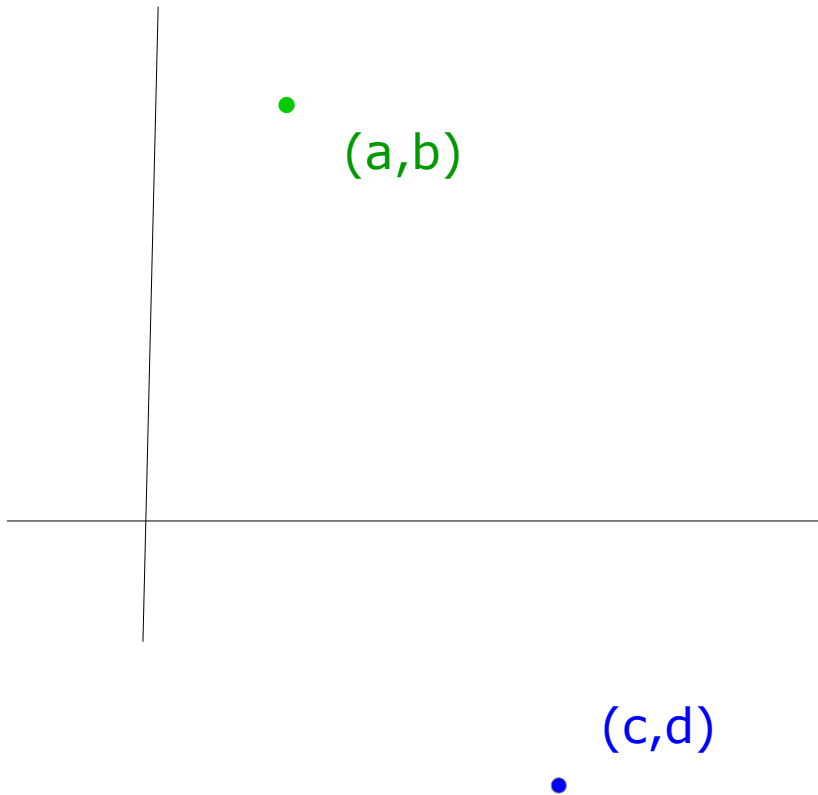


El vector que va del punto (x,y) al punto (x',y') es $(x'-x,y'-y)$.

Vectores y coordenadas

Aunque los puntos y los vectores se escriben igual, no son lo mismo:

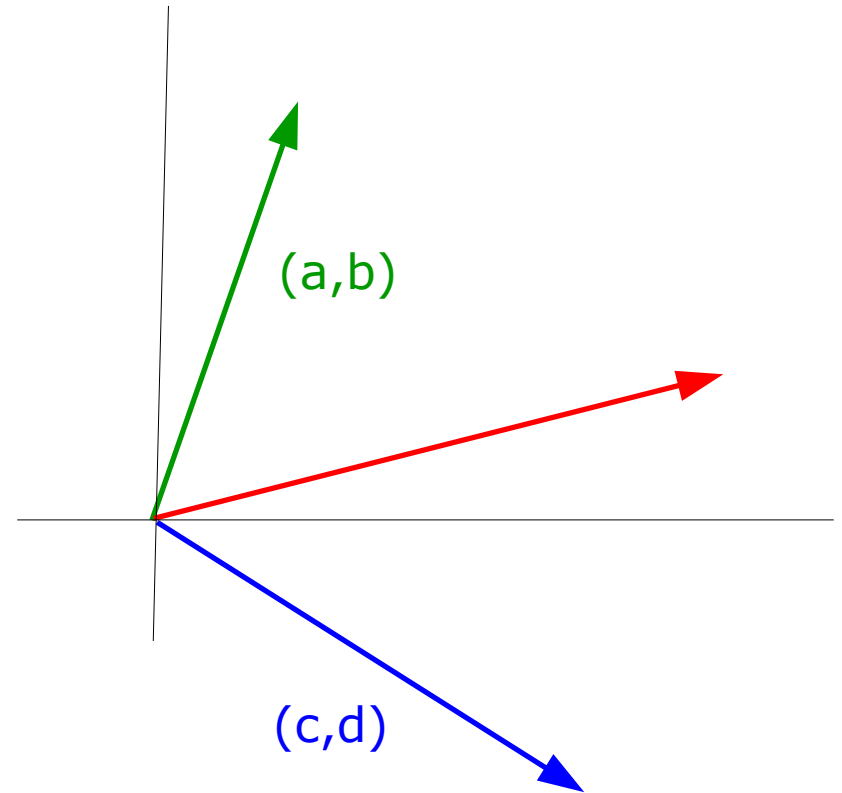
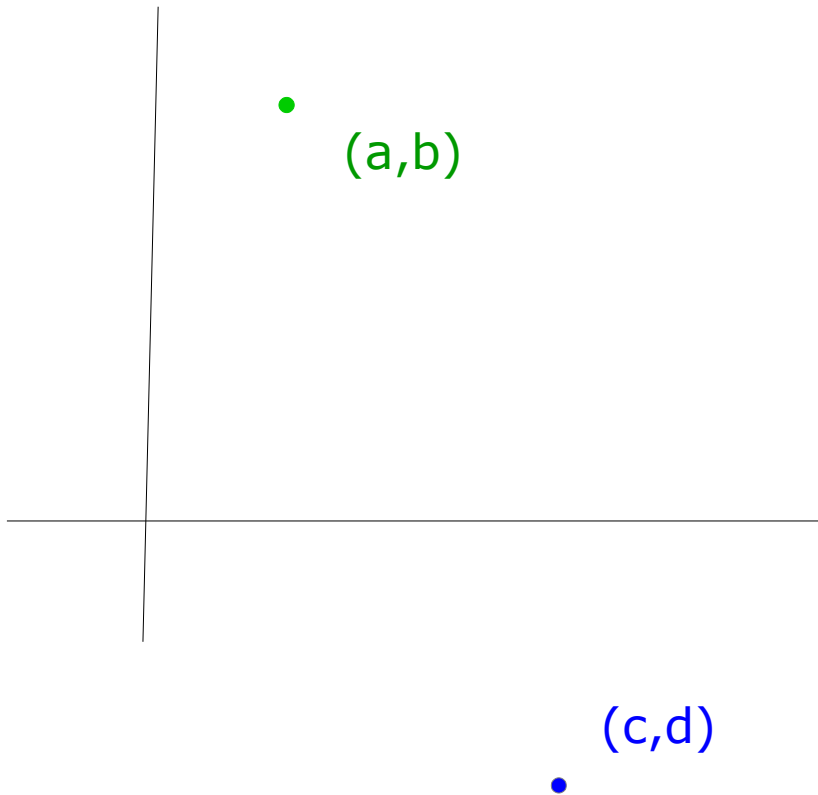
Sumar puntos no tiene sentido, pero sumar vectores sí.



Vectores y coordenadas

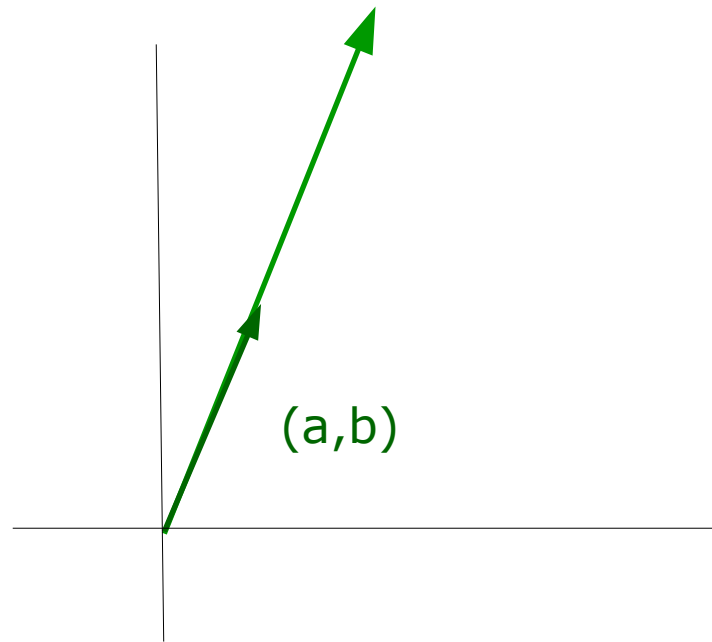
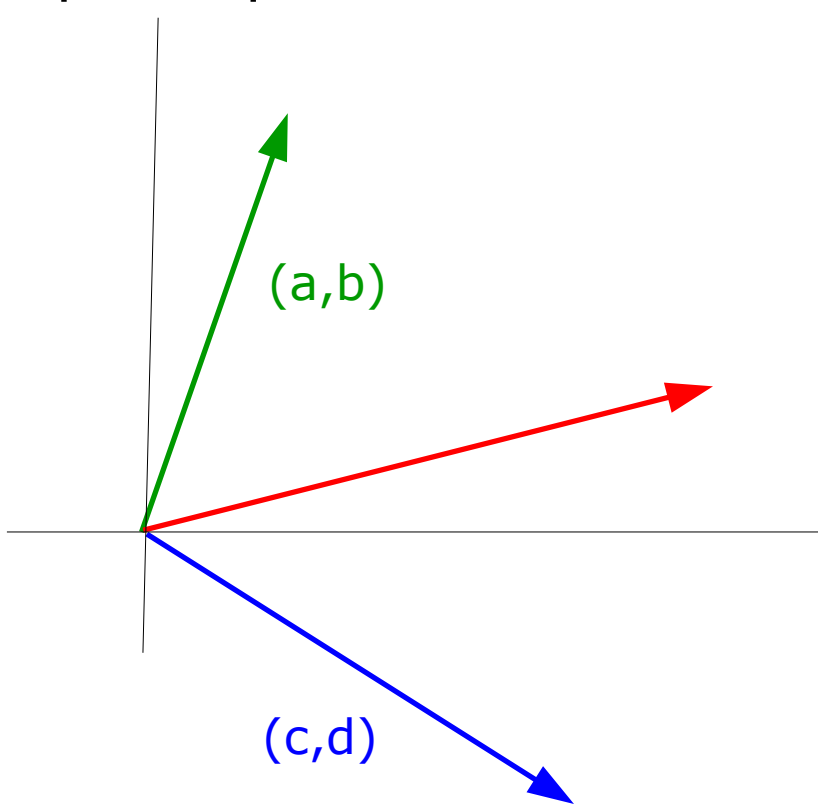
Aunque os puntos y los vectores se escriben igual, no son lo mismo:

Sumar puntos no tiene sentido, pero sumar vectores sí.



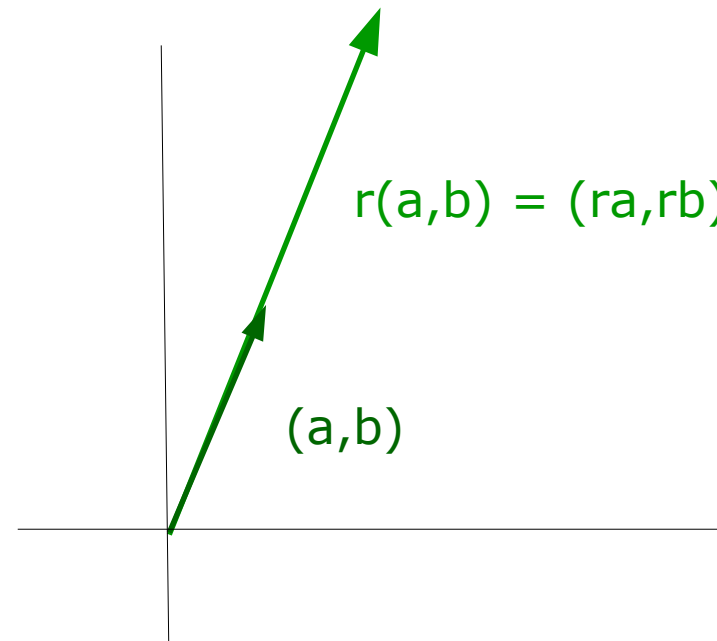
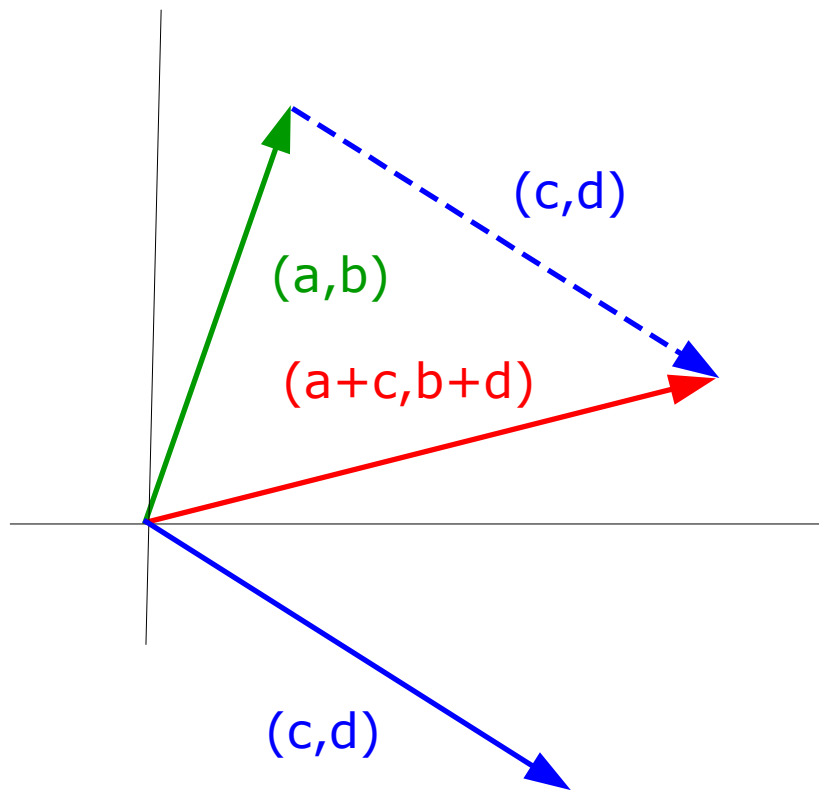
Vectores y coordenadas

La suma de vectores esta dada por la suma coordenada a coordenada, y el producto por escalares también esta dado por el producto en cada coordenada:



Vectores y coordenadas

La suma de vectores esta dada por la suma coordenada a coordenada, y el producto por escalares también esta dado por el producto en cada coordenada:



Vectores y coordenadas

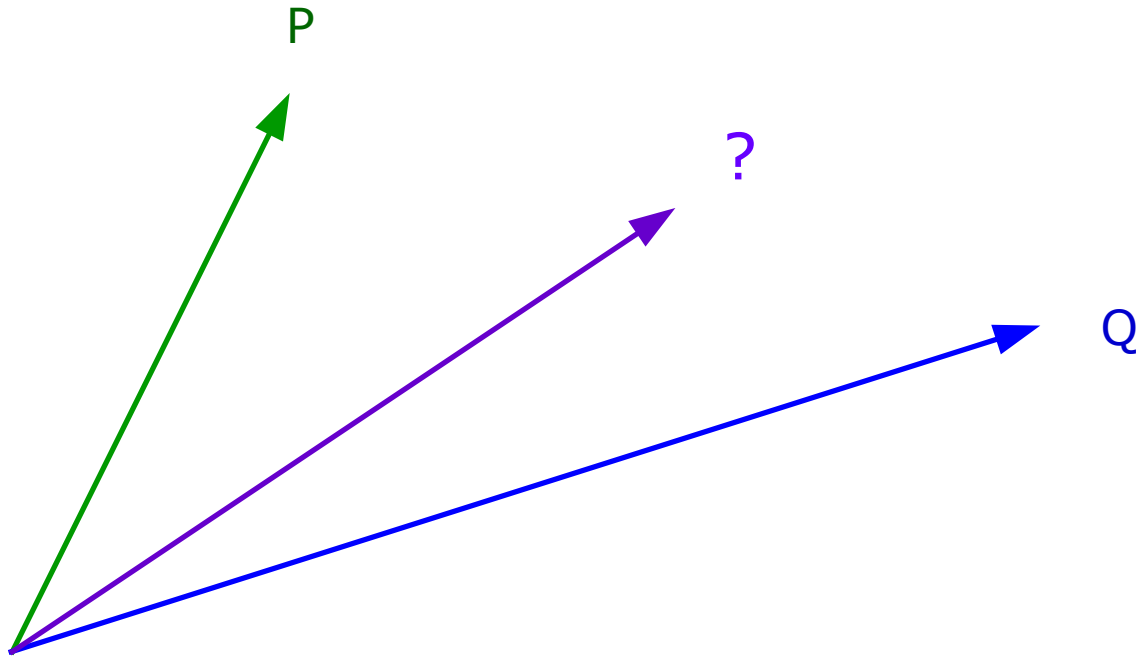
Las propiedades conmutativa, asociativa y distributiva de la suma de vectores y el producto por escalares son consecuencia de las propiedades de la suma y el producto de números reales:

Si $U=(a,b)$, $V=(c,d)$, $W=(e,f)$ entonces

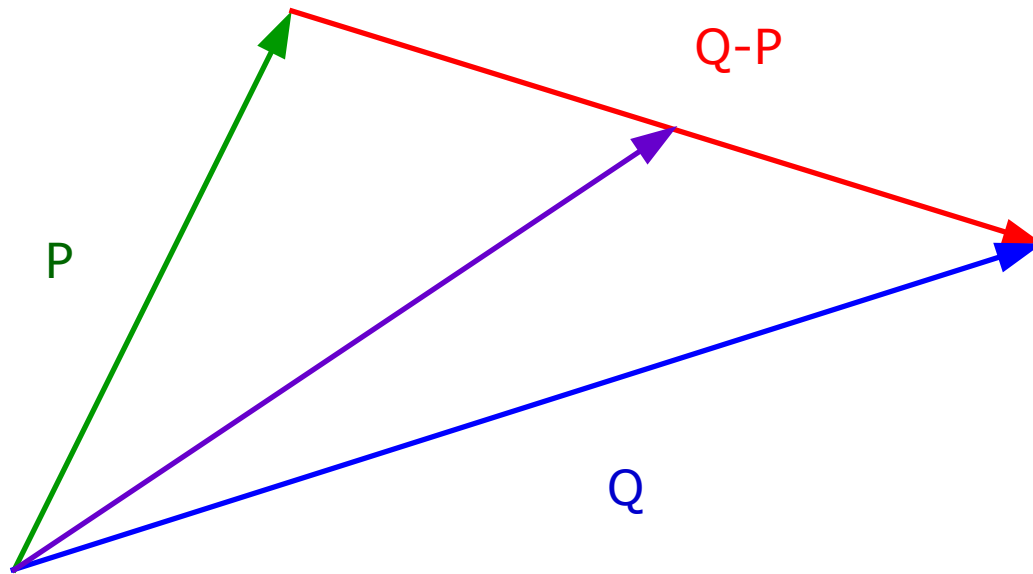
$$U+V = (a,b)+(c,d) = (a+c,b+d) = (c+a,d+b) = (c,d)+(a,b) = V+U$$

$$(U+V)+W \stackrel{?}{=} U+(V+W)$$

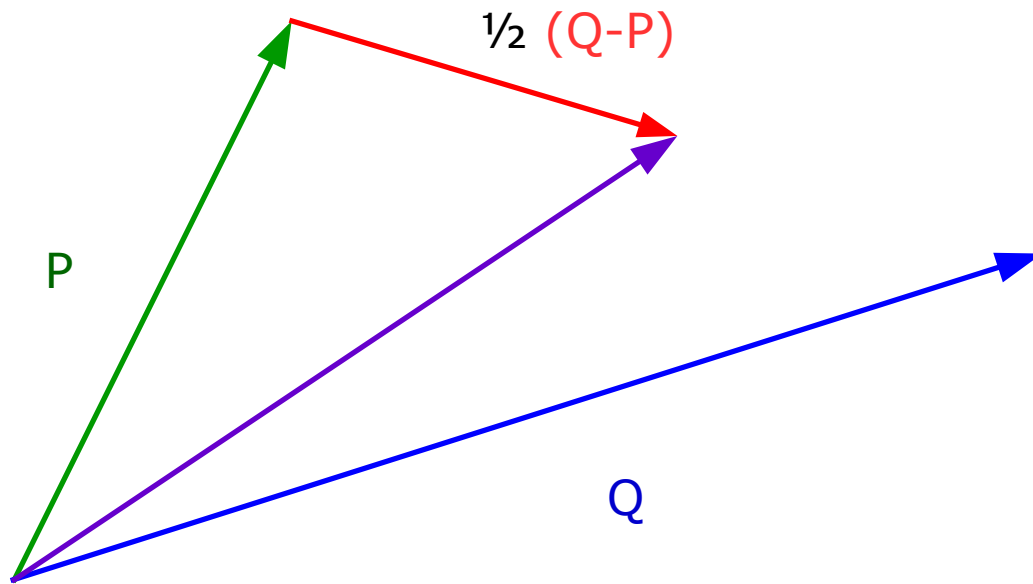
Si P y Q son dos puntos en el plano, el punto medio entre P y Q es...



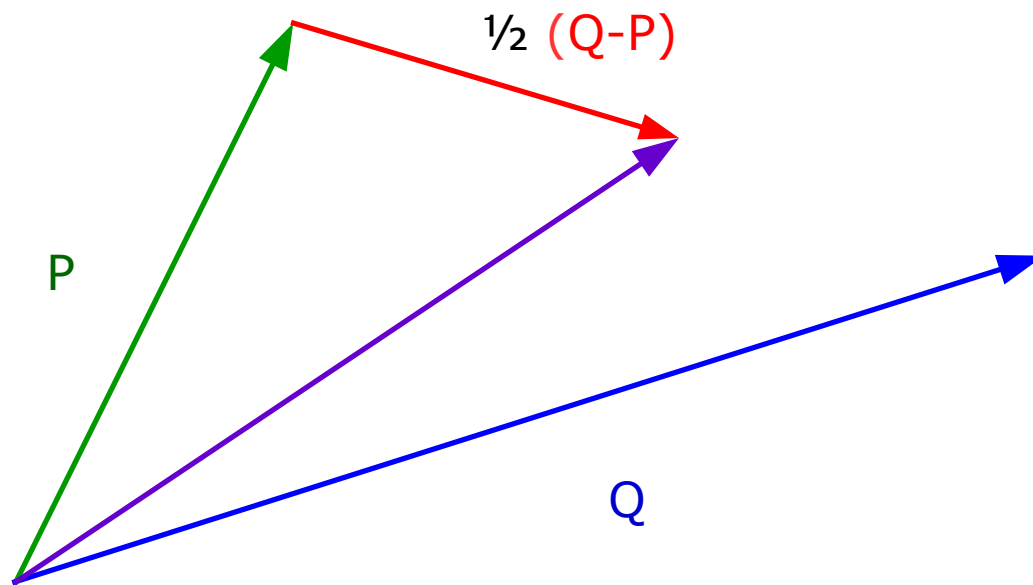
Si P y Q son dos puntos en el plano, el punto medio entre P y Q es



Si P y Q son dos puntos en el plano, el punto medio entre P y Q es

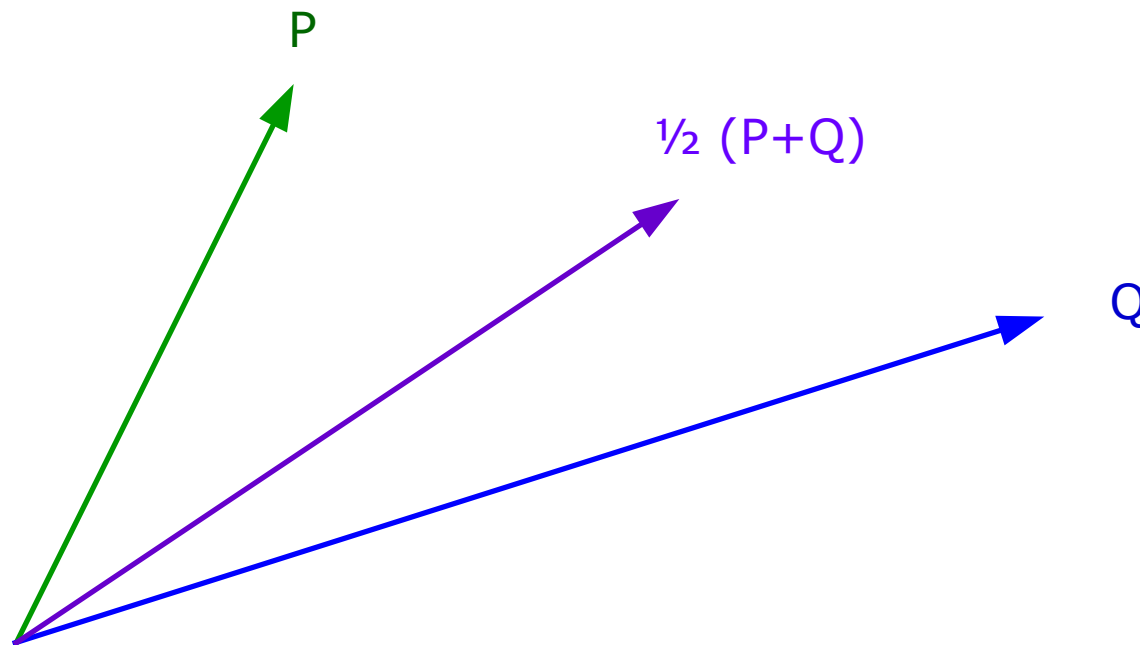


Si P y Q son dos puntos en el plano, el punto medio entre P y Q es



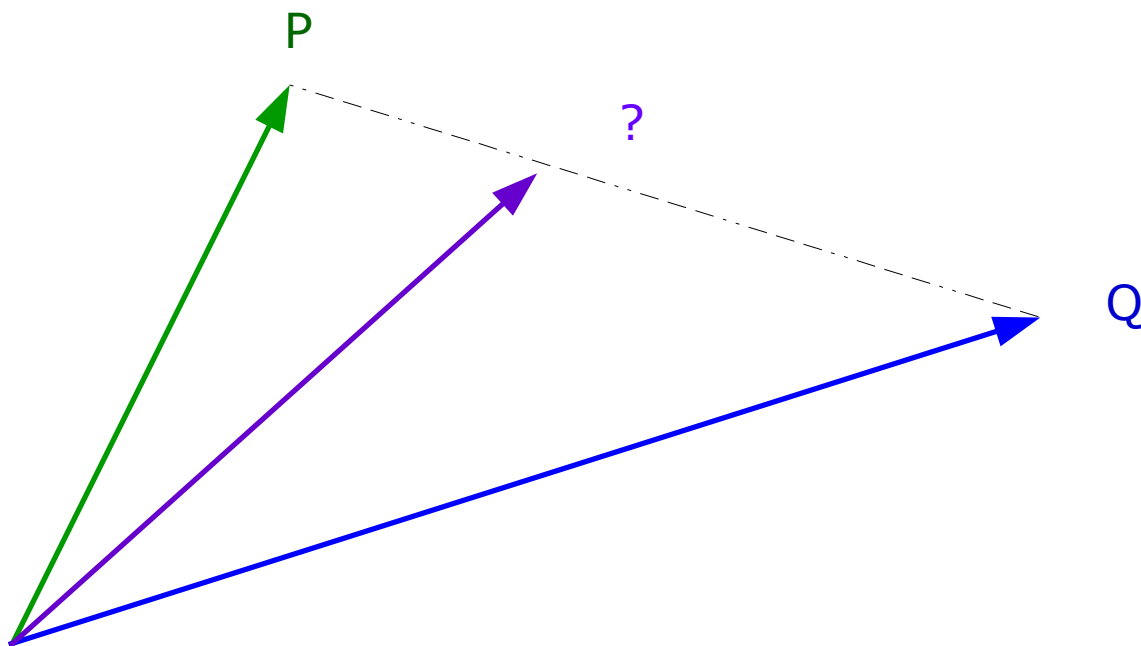
El vector morado es $P + \frac{1}{2}(Q-P) = \frac{1}{2}(P+Q)$

Si P y Q son dos puntos en el plano, el punto medio entre P y Q es $\frac{1}{2}(P+Q)$.

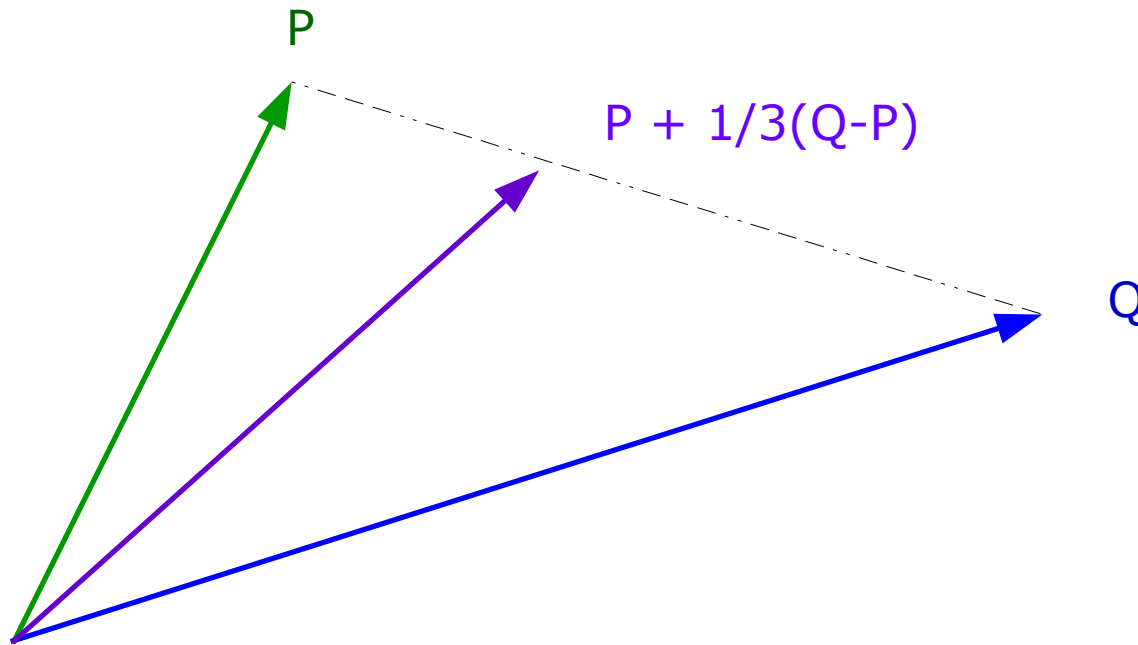


Ejemplo: El punto medio entre $(2,4)$ y $(6,1)$ es $\frac{1}{2}(2+6, 4+1) = (4, 2.5)$

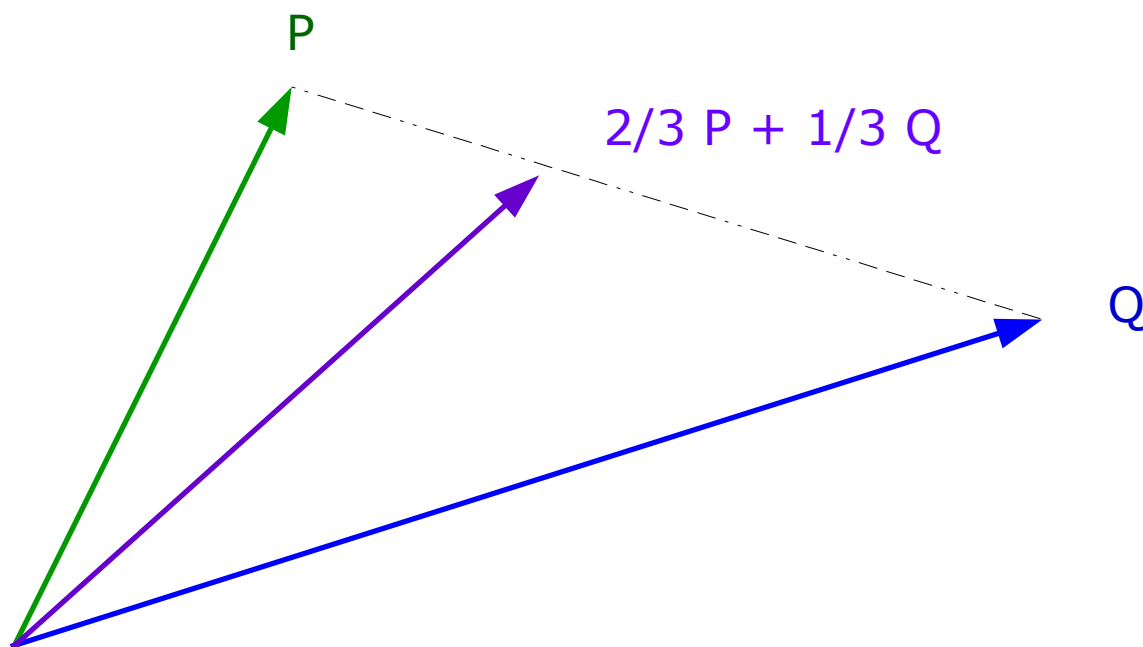
Ejercicio. El punto que está a un tercio del camino entre P y Q es...



Ejercicio. El punto que está a un tercio del camino entre P y Q es...

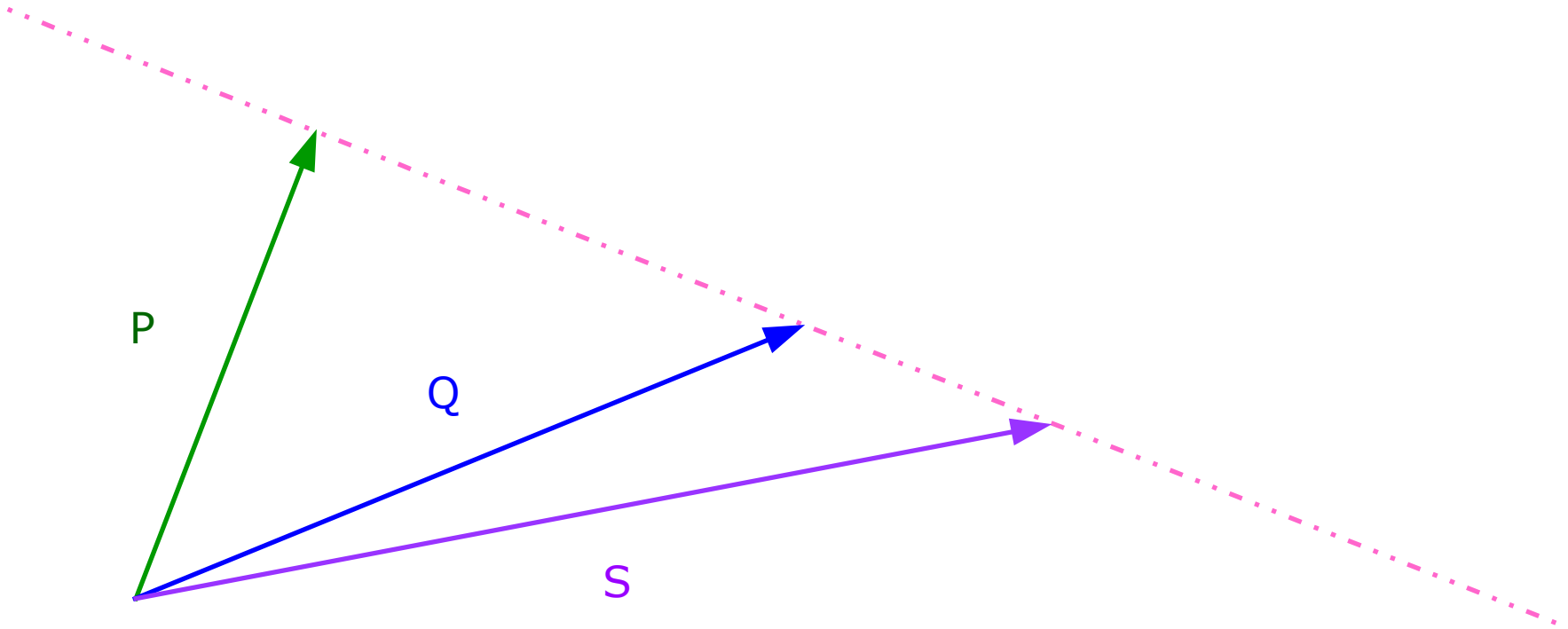


Ejercicio. El punto que está a un tercio del camino entre P y Q es...

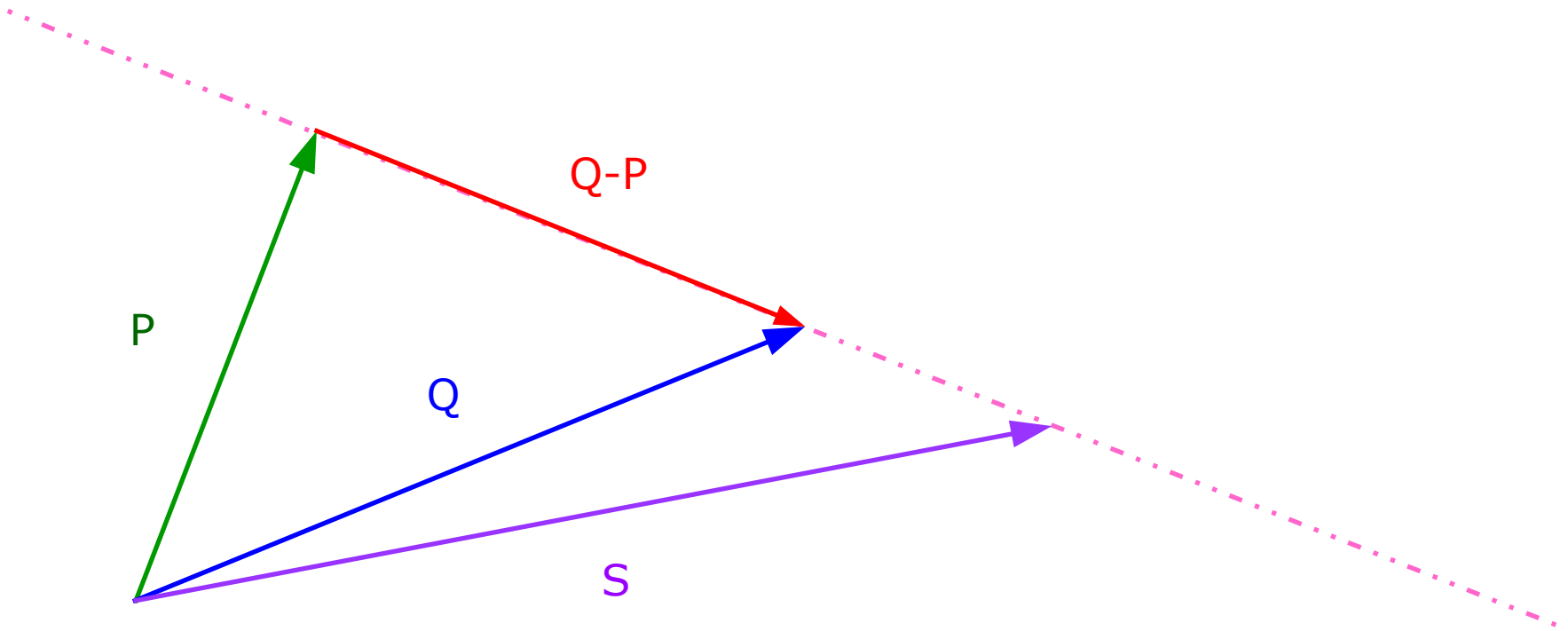


Los puntos alineados con P y Q pueden obtenerse sumándole a P un múltiplo de $Q-P$:

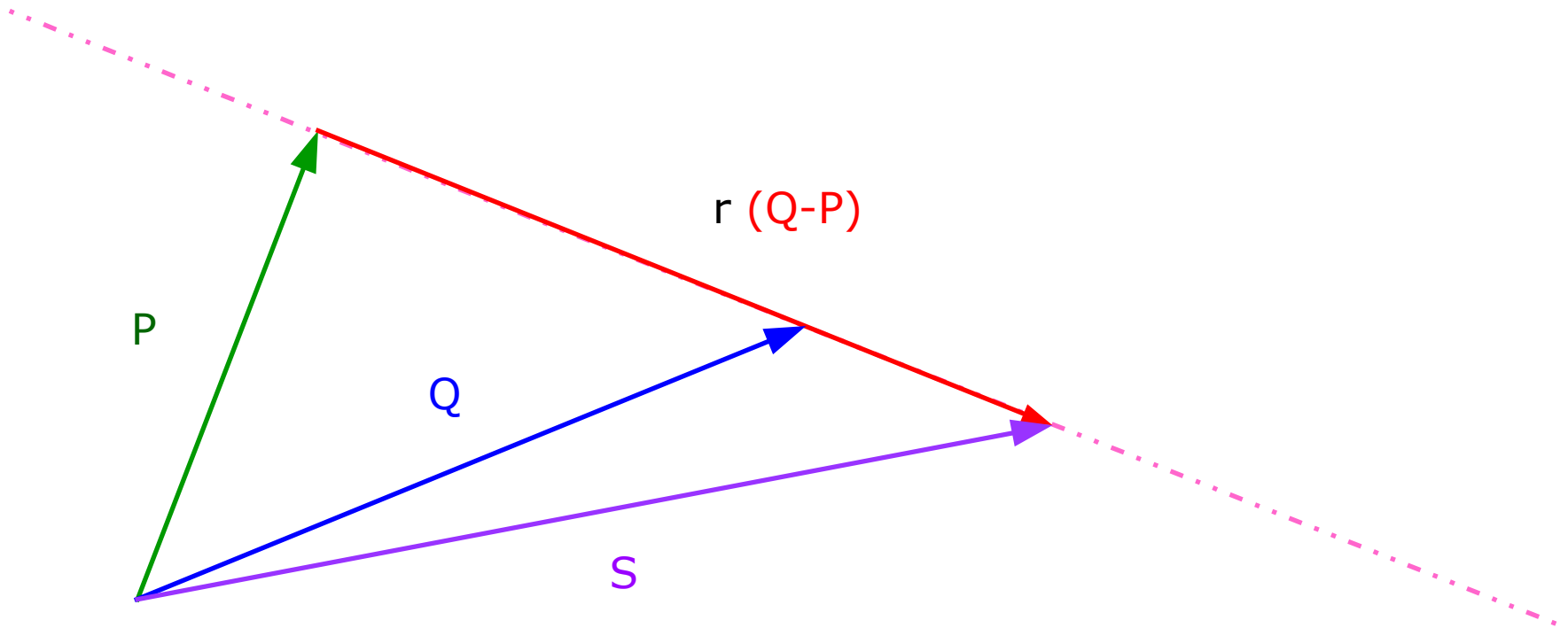
Los puntos alineados con P y Q pueden obtenerse sumándole a P un múltiplo de $Q-P$:



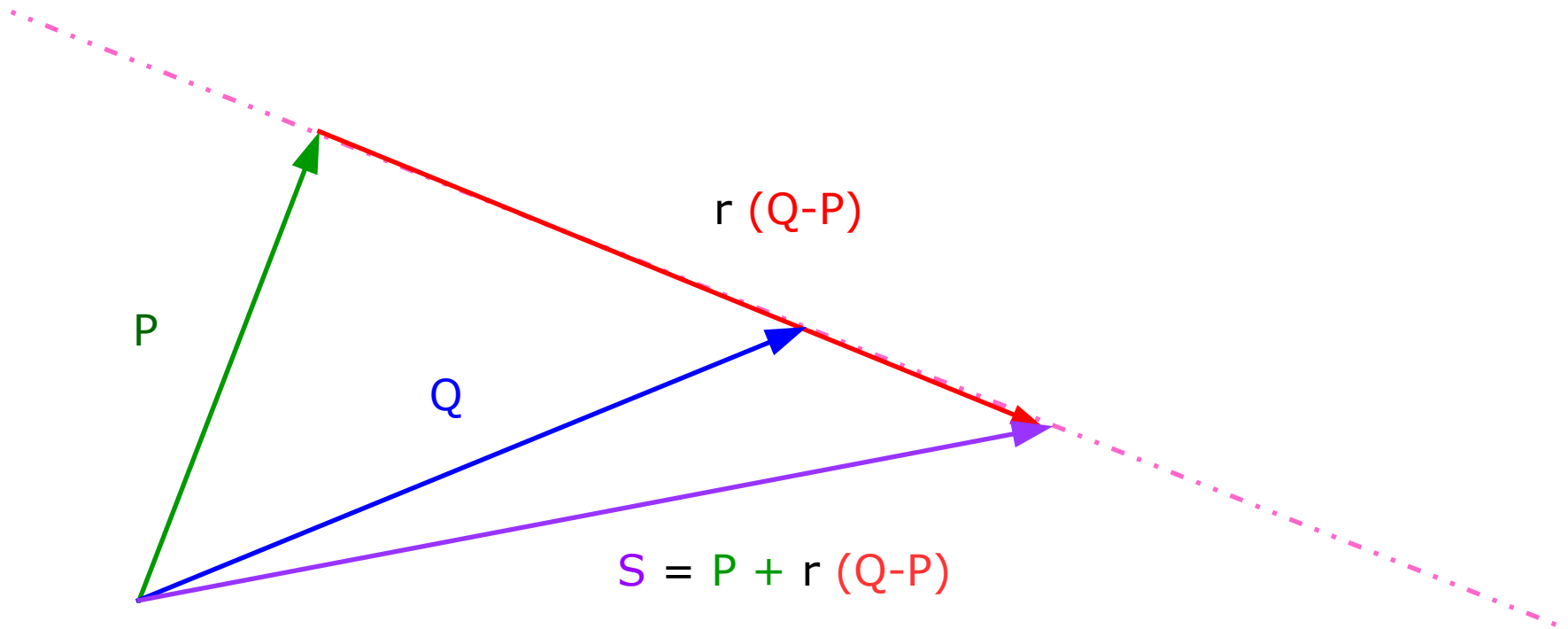
Los puntos alineados con P y Q pueden obtenerse sumándole a P un múltiplo de $Q-P$:



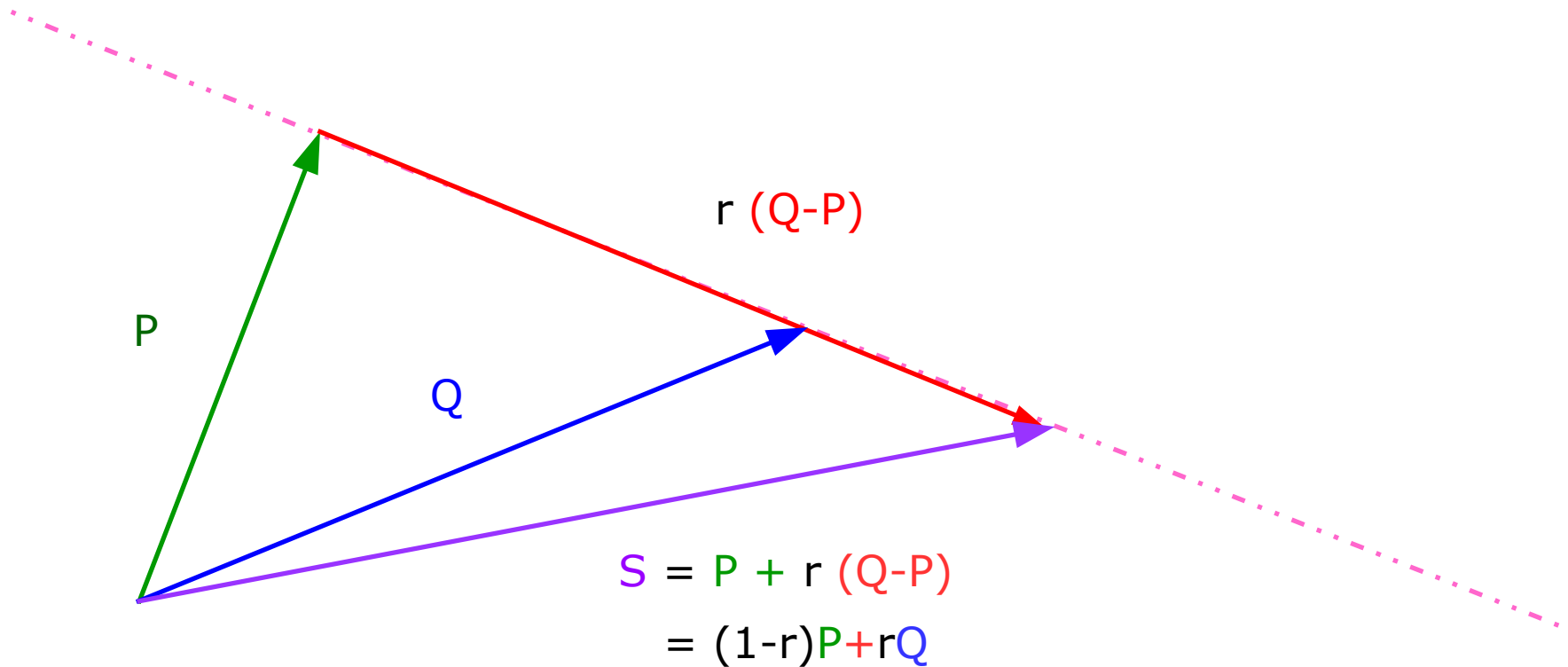
Los puntos alineados con P y Q pueden obtenerse sumándole a P un múltiplo de $Q-P$:



Los puntos alineados con P y Q pueden obtenerse sumándole a P un múltiplo de Q-P:

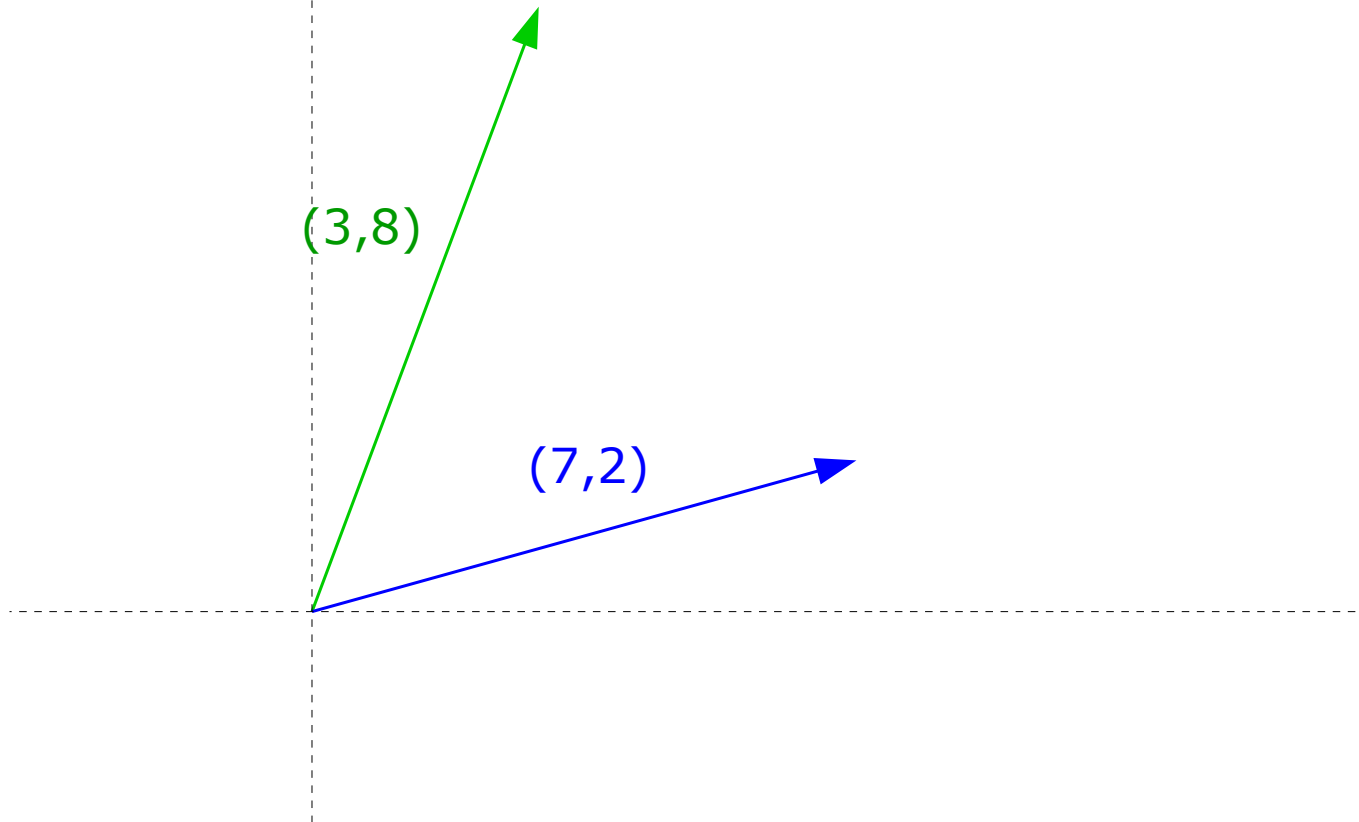


Los puntos alineados con P y Q pueden obtenerse sumándole a P un múltiplo de Q-P:

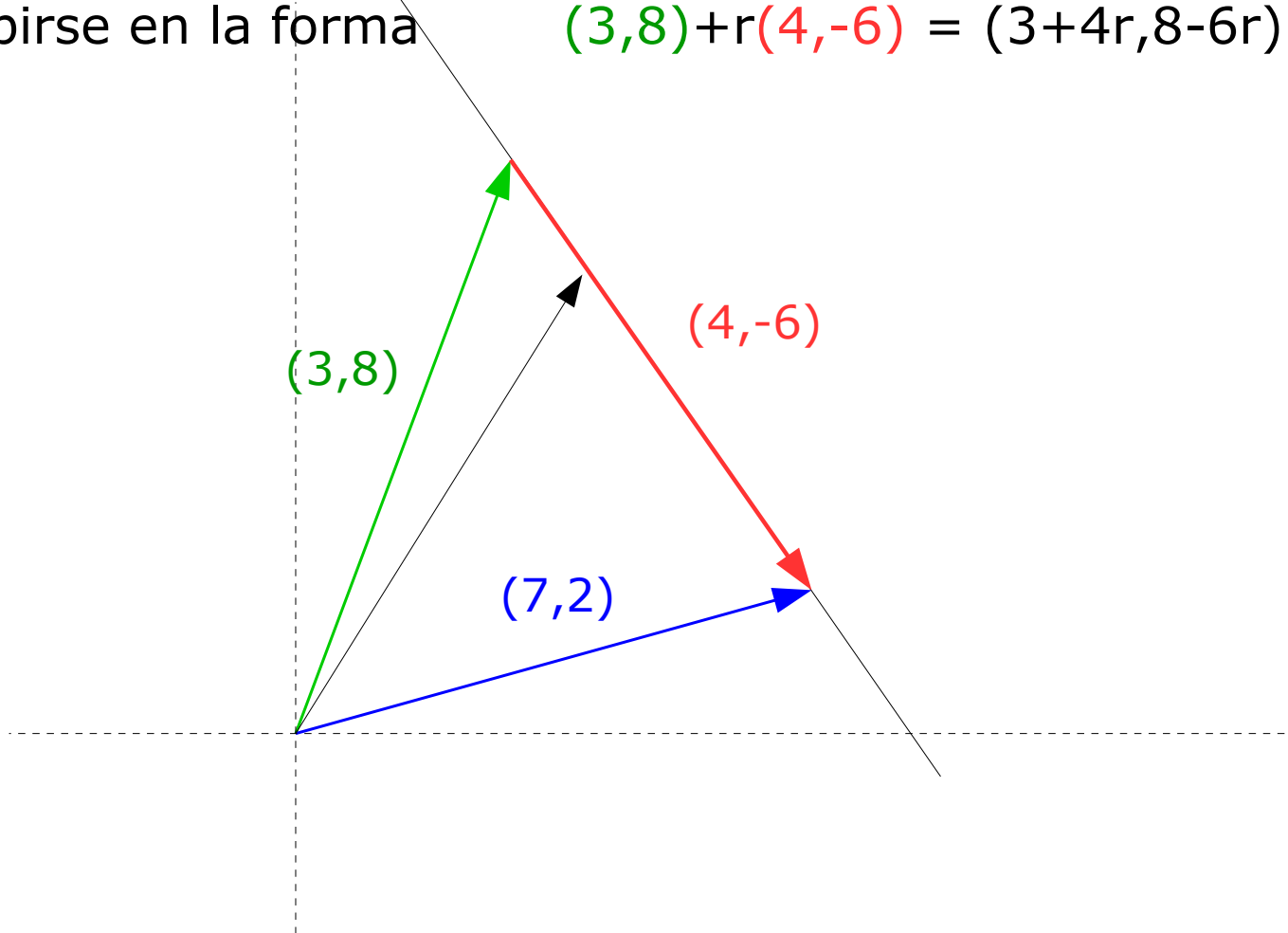


Los puntos alineados con P y Q son todos los puntos de la forma $sP + rQ$ donde $r+s=1$

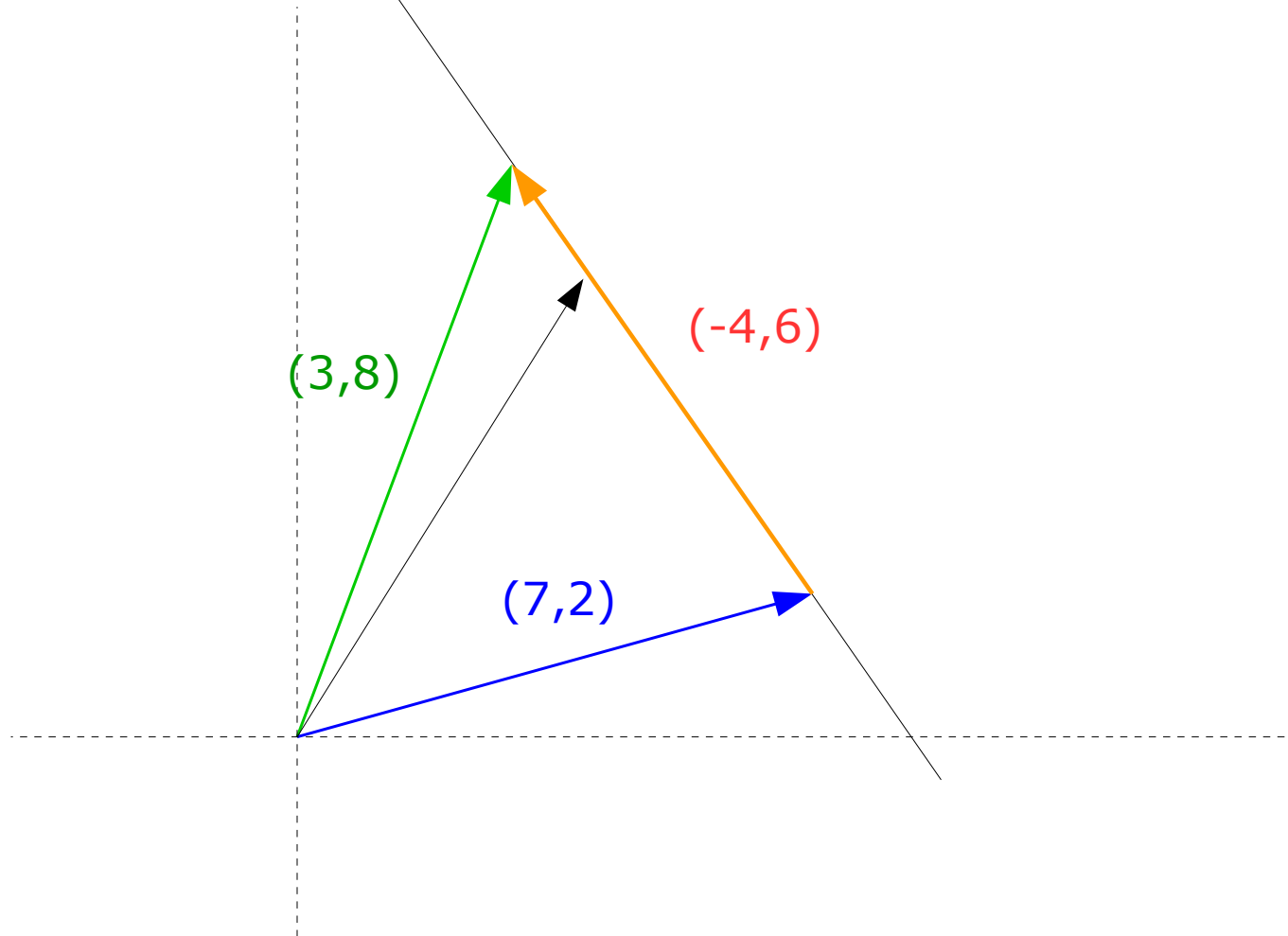
Ejemplo. Los puntos del plano alineados con $(3,8)$ y $(7,2)$ son los puntos de la forma...



Ejemplo. Los puntos del plano alineados con $(3,8)$ y $(7,2)$ pueden escribirse en la forma $(3,8)+r(4,-6) = (3+4r,8-6r)$



Ejemplo. Los puntos del plano alineados con $(3,8)$ y $(7,2)$



también pueden escribirse en la forma $(7,2)+s(-4,6) = (7-4s,2+6s)$

Ejemplo. Los puntos del plano alineados con $(3,8)$ y $(7,2)$ pueden escribirse en la forma $(3,8)+r(4,-6) = (3+4r,8-6r)$

¿El punto $(-29,62)$ está alineado con $(3,8)$ y $(7,2)$?

Ejemplo. Los puntos del plano alineados con $(3,8)$ y $(7,2)$ pueden escribirse en la forma $(3,8)+r(4,-6) = (3+4r,8-6r)$

¿El punto $(-29,62)$ está alineado con $(3,8)$ y $(7,2)$?

$$(3+4r,8-6r) = (-29,62) ?$$

$3+4r = -29$	$4r=-32$	$r=8$	
$8-6r = 62$	$-6r=54$	$r=9$	NO

Ejemplo. Los puntos del plano alineados con $(3,8)$ y $(7,2)$ pueden escribirse en la forma $(3,8)+r(4,-6) = (3+4r,8-6r)$

¿El punto $(-29,62)$ está alineado con $(3,8)$ y $(7,2)$?

$$(3+4r,8-6r) = (-29,62) ?$$

$$\begin{array}{llll} 3+4r = -29 & 4r=-32 & r=8 & \\ 8-6r = 62 & -6r=54 & r=9 & \text{NO} \end{array}$$

¿El punto $(27,-30)$ está alineado con $(3,8)$ y $(7,2)$?

Ejemplo. Los puntos del plano alineados con $(3,8)$ y $(7,2)$ pueden escribirse en la forma $(3,8)+r(4,-6) = (3+4r,8-6r)$

¿El punto $(-29,62)$ está alineado con $(3,8)$ y $(7,2)$?

$$(3+4r,8-6r) = (-29,62) ?$$

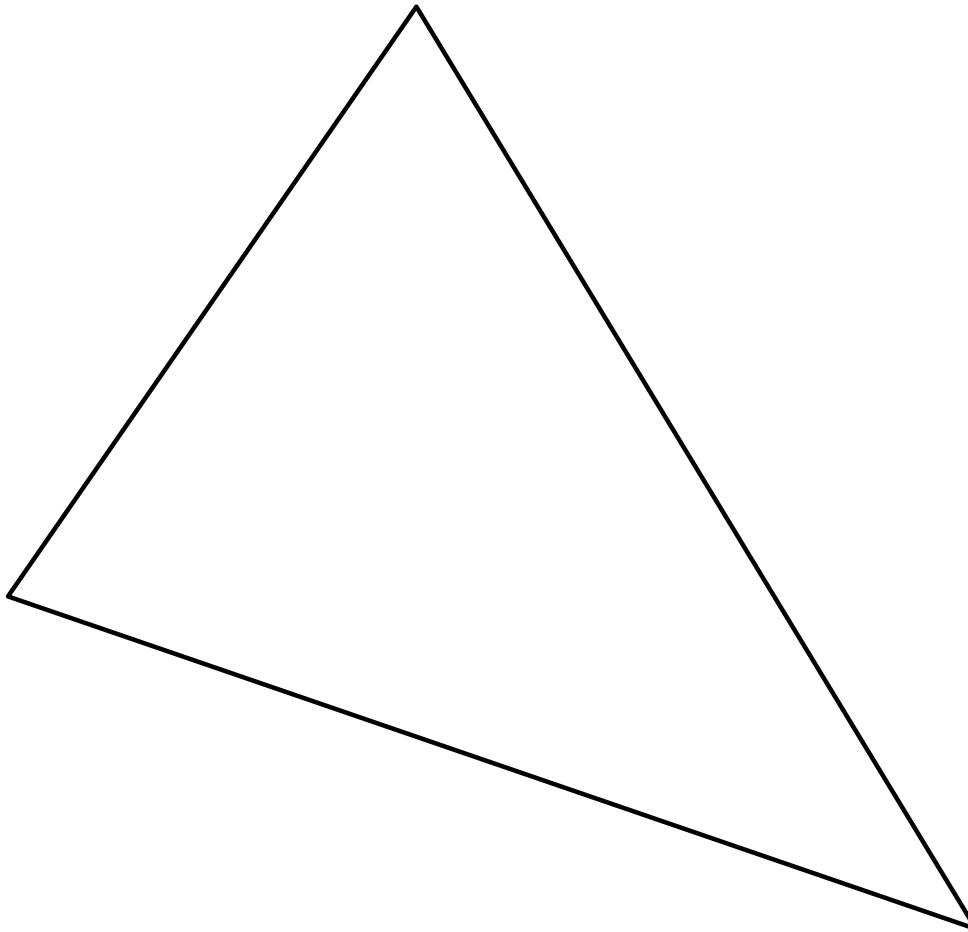
$$\begin{array}{llll} 3+4r = -29 & 4r=-32 & r=8 & \\ 8-6r = 62 & -6r=54 & r=9 & \text{NO} \end{array}$$

¿El punto $(27,-30)$ está alineado con $(3,8)$ y $(7,2)$?

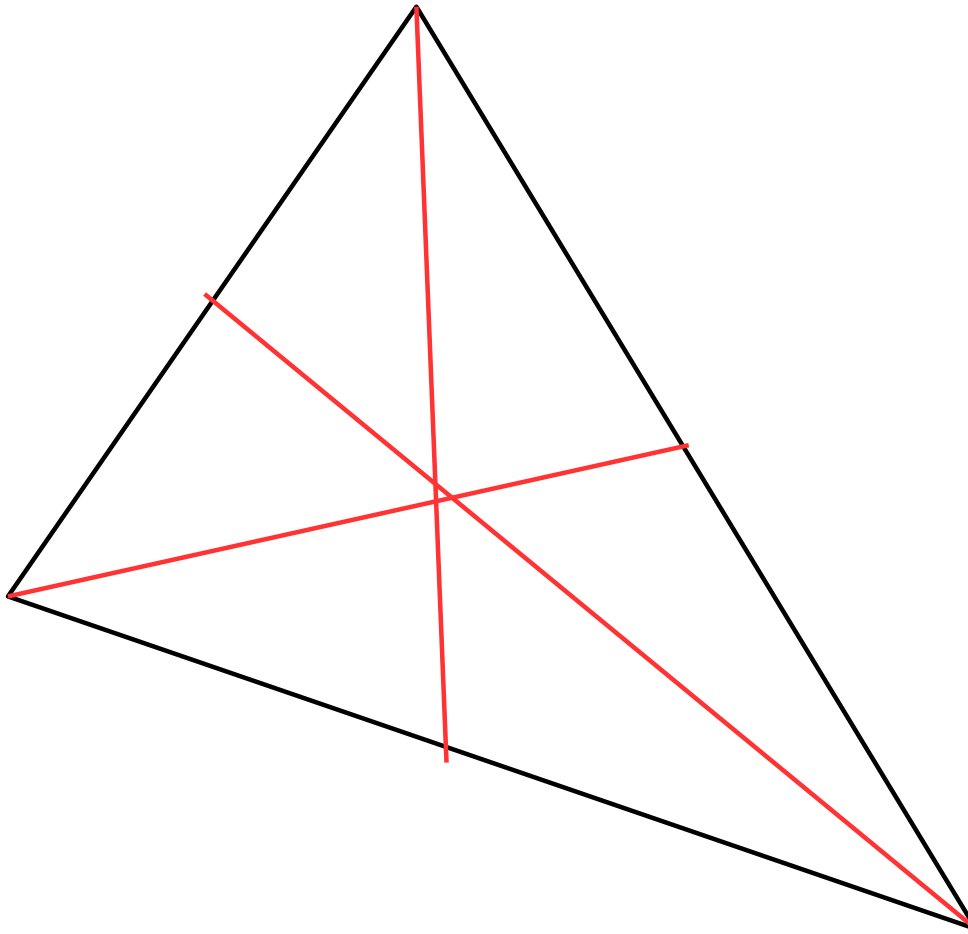
$$(3+4r,8-6r) = (27,-36) ?$$

$$\begin{array}{llll} 3+4r = 27 & 4r=24 & r=6 & \\ 8-6r = -36 & -6r=-36 & r=6 & \text{SI} \end{array}$$

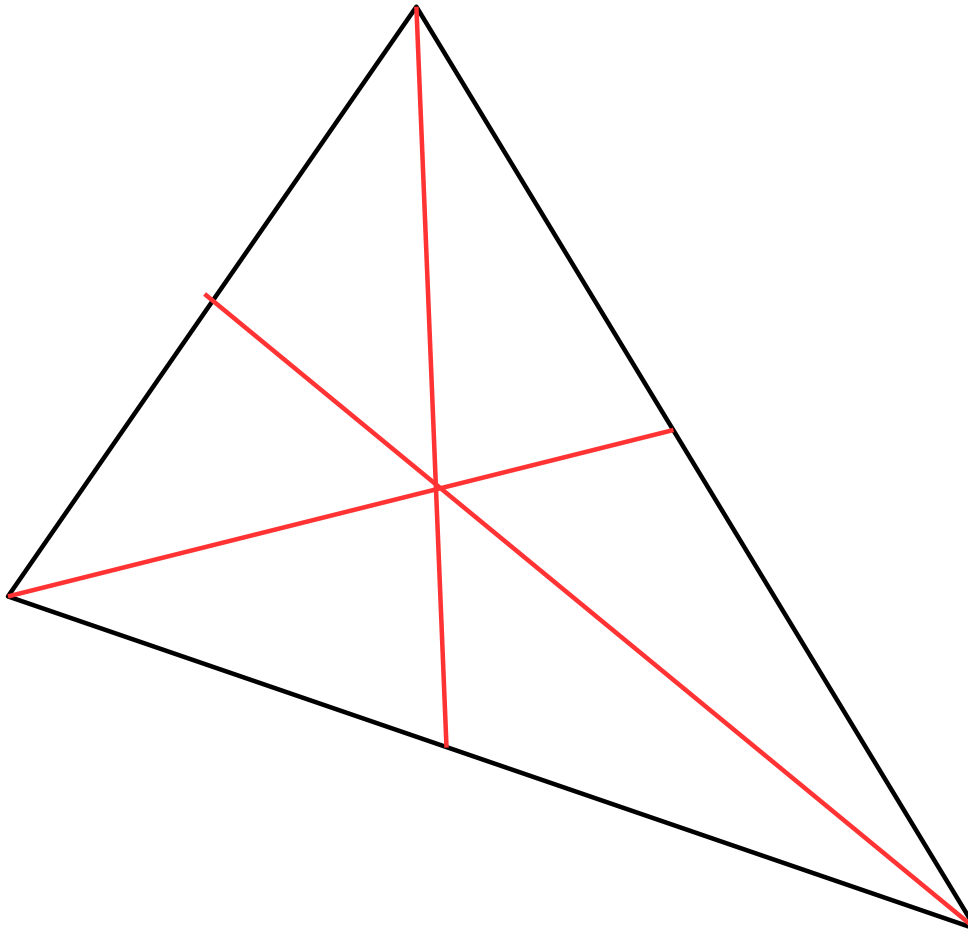
Las medianas de un triángulo son las líneas que van de los vértices a los puntos medios de los lados opuestos



Las medianas de un triángulo son las líneas que van de los vértices a los puntos medios de los lados opuestos

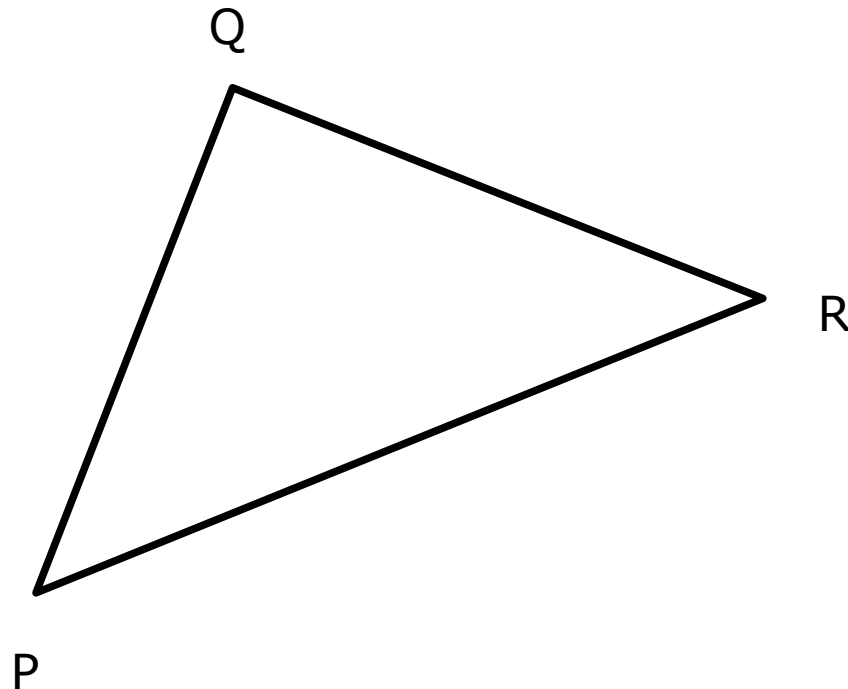


Teorema. Las medianas de un triángulo se intersectan en un punto que las divide en la razón 2:1



Teorema. Las medianas de un triángulo se intersectan en un punto que las divide en la razón 2:1

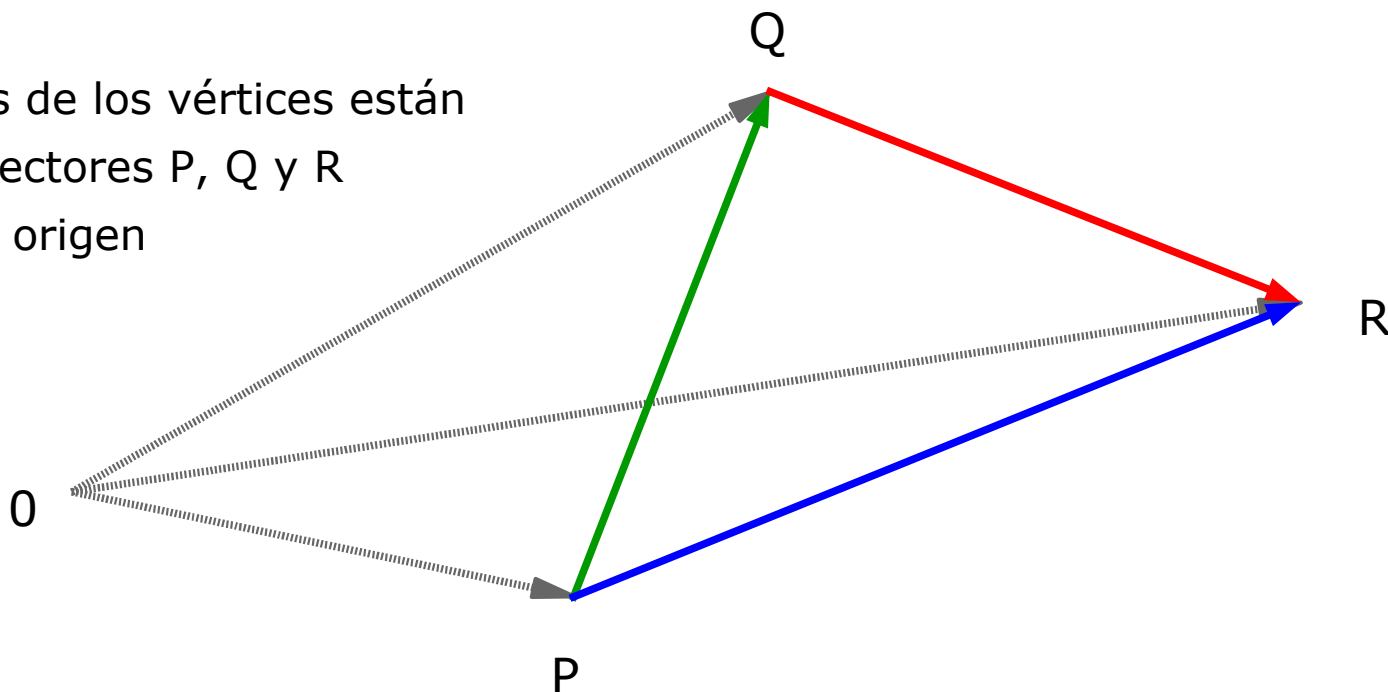
Demostración. Las medianas son las líneas que van de los vértices a los puntos medios de los lados opuestos. Para ver que las medianas concurren hay que ver que el punto que está a $\frac{2}{3}$ del recorrido de cada mediana es el mismo para las 3 medianas.



Teorema. Las medianas de un triángulo se intersectan en un punto que las divide en la razón 2:1

Demostración. Las medianas son las líneas que van de los vértices a los puntos medios de los lados opuestos. Para ver que las medianas concurren hay que ver que el punto que está a $\frac{2}{3}$ del recorrido de cada mediana es el mismo para las 3 medianas.

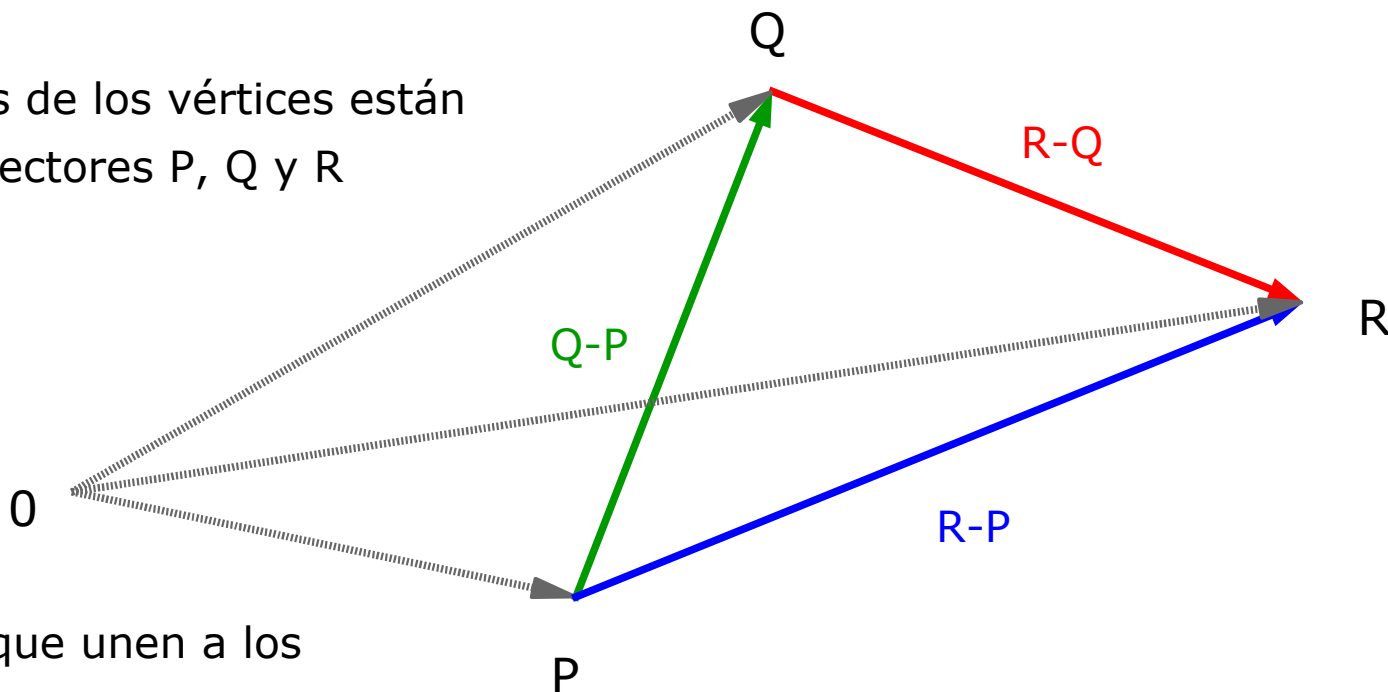
Las posiciones de los vértices están dadas por 3 vectores P , Q y R basados en el origen



Teorema. Las medianas de un triángulo se intersectan en un punto que las divide en la razón 2:1

Demostración. Las medianas son las líneas que van de los vértices a los puntos medios de los lados opuestos. Para ver que las medianas concurren hay que ver que el punto que esta a $\frac{2}{3}$ del recorrido de cada mediana es el mismo para las 3 medianas.

Las posiciones de los vértices están dadas por 3 vectores P , Q y R

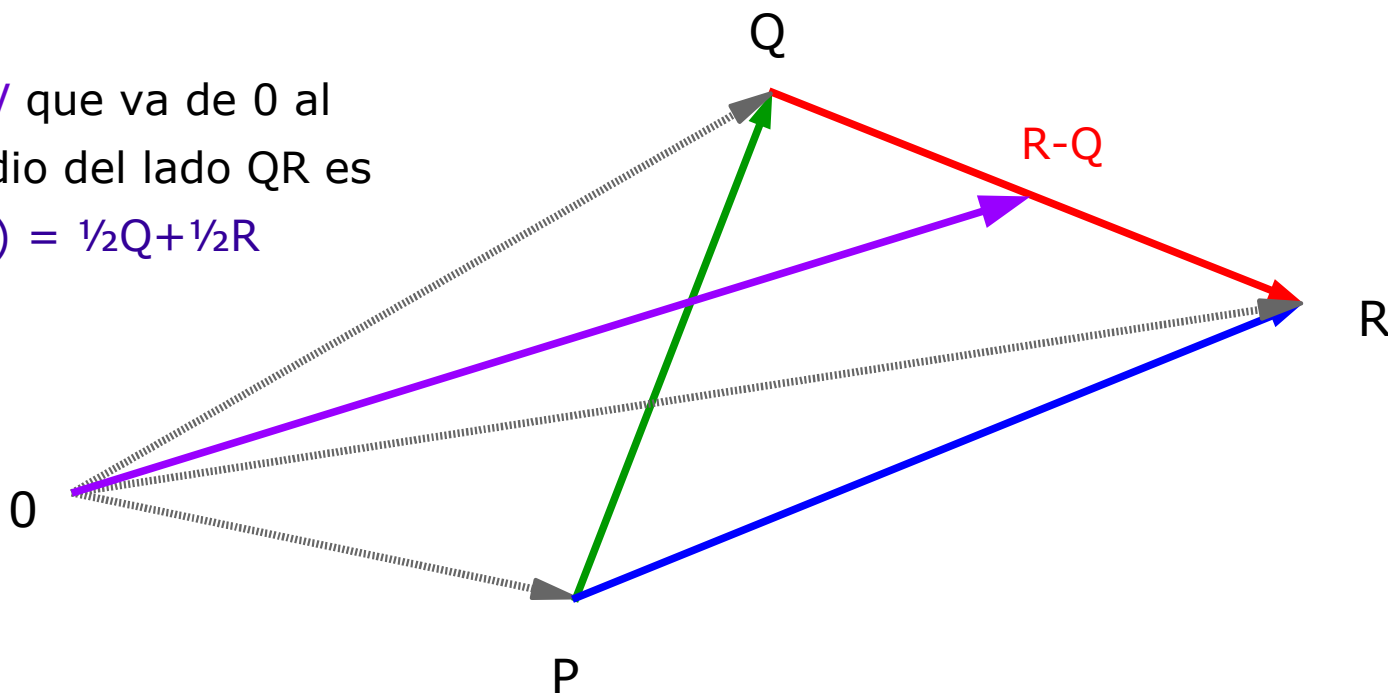


Los vectores que unen a los vértices son $Q-P$, $R-Q$ y $R-P$

Teorema. Las medianas de un triángulo se intersectan en un punto que las divide en la razón 2:1

Demostración. Las medianas son las líneas que van de los vértices a los puntos medios de los lados opuestos. Para ver que las medianas concurren hay que ver que el punto que está a $\frac{2}{3}$ del recorrido de cada mediana es el mismo para las 3 medianas.

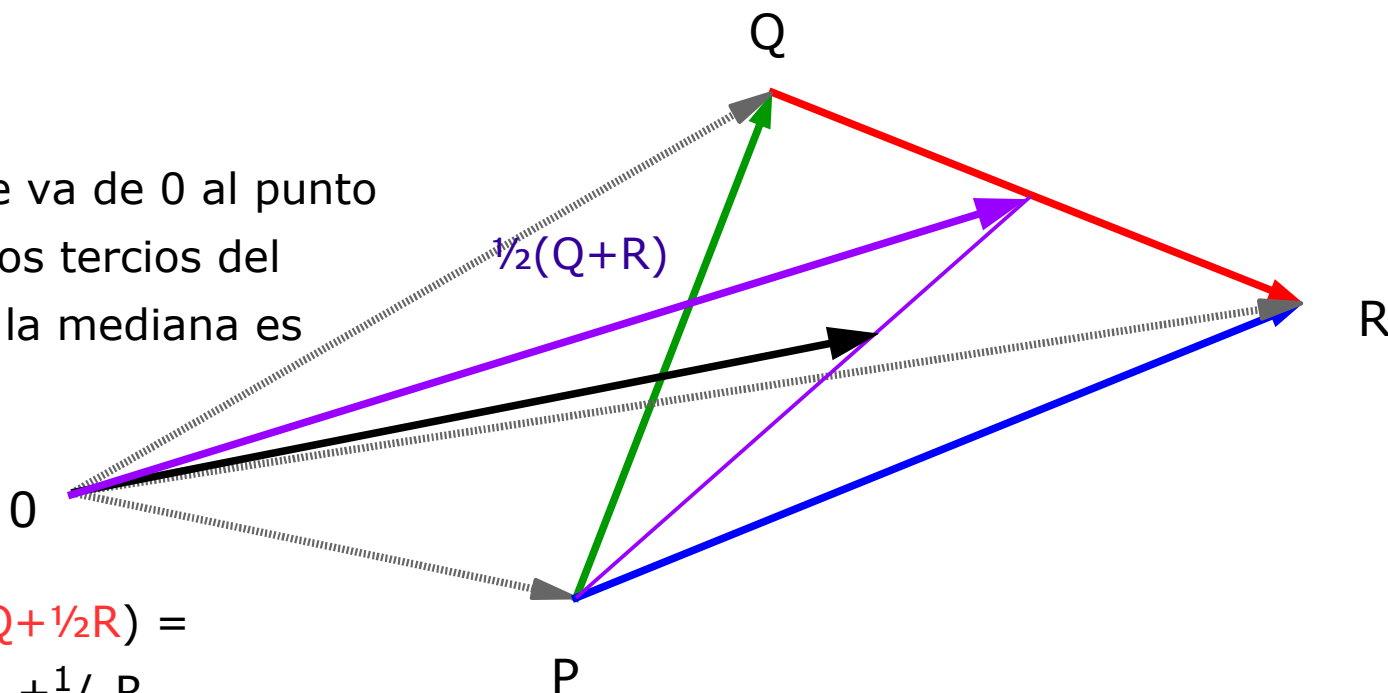
El vector $\mathbf{V}$ que va de 0 al punto medio del lado QR es $\mathbf{Q} + \frac{1}{2}(\mathbf{R} - \mathbf{Q}) = \frac{1}{2}\mathbf{Q} + \frac{1}{2}\mathbf{R}$



Teorema. Las medianas de un triángulo se intersectan en un punto que las divide en la razón 2:1

Demostración. Las medianas son las líneas que van de los vértices a los puntos medios de los lados opuestos. Para ver que las medianas concurren hay que ver que el punto que está a $2/3$ del recorrido de cada mediana es el mismo para las 3 medianas.

El vector que va de 0 al punto que está a dos tercios del recorrido de la mediana es

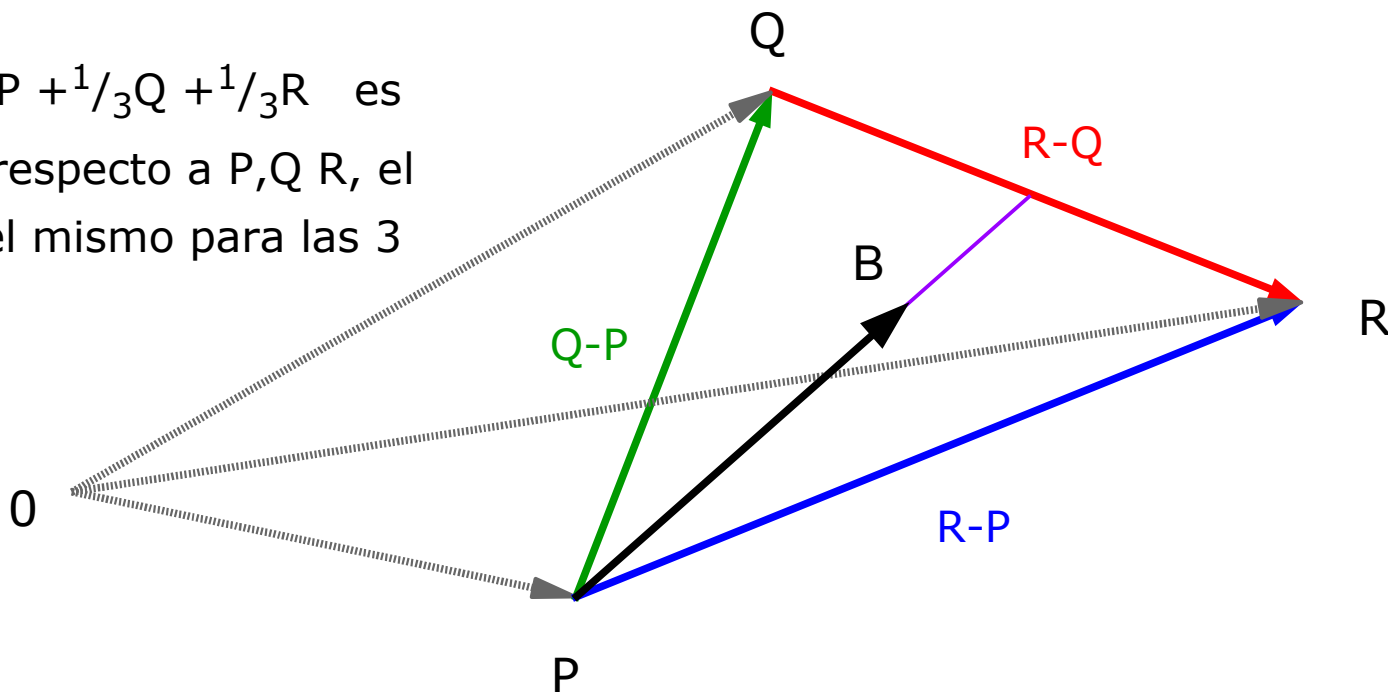


$$\begin{aligned} \frac{1}{3}P + \frac{2}{3}(\frac{1}{2}Q + \frac{1}{2}R) &= \\ &= \frac{1}{3}P + \frac{1}{3}Q + \frac{1}{3}R \end{aligned}$$

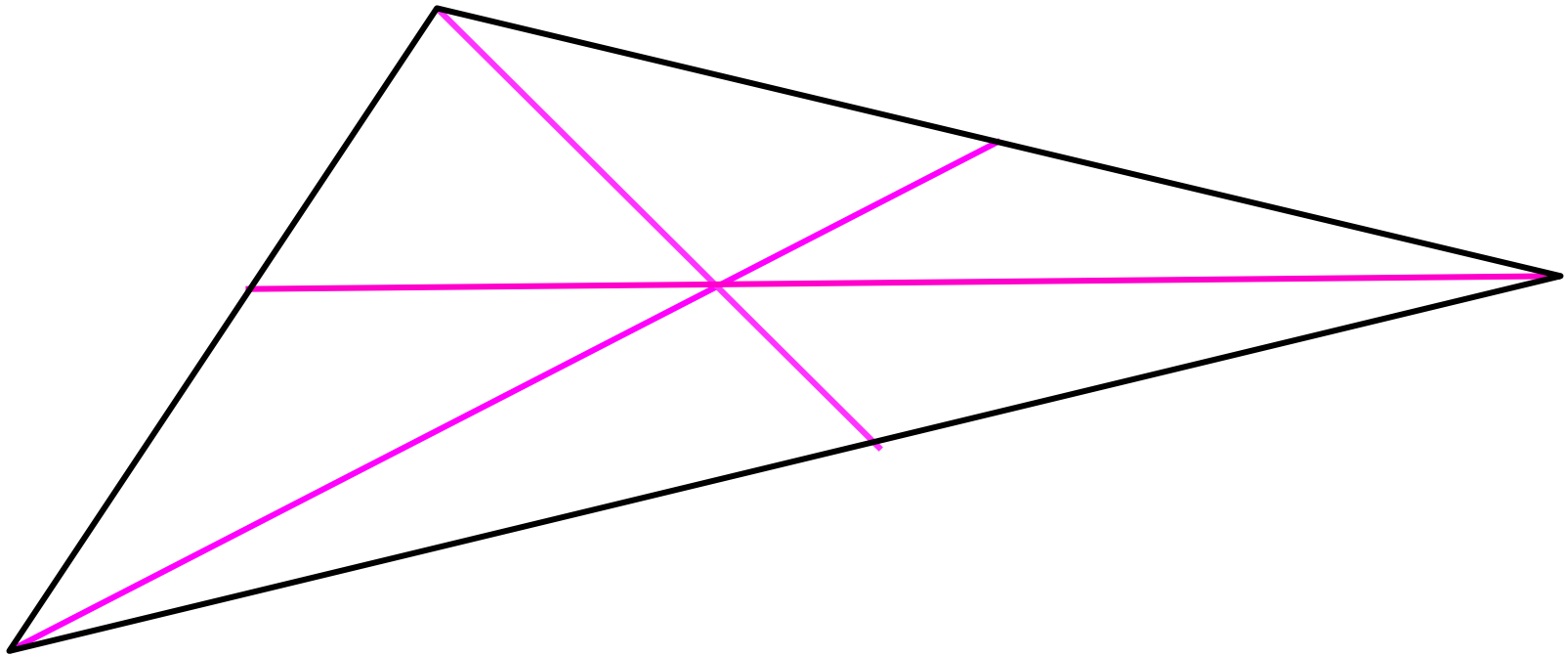
Teorema. Las medianas de un triángulo se intersectan en un punto que las divide en la razón 2:1

Demostración. Las medianas son las líneas que van de los vértices a los puntos medios de los lados opuestos. Para ver que las medianas concurren hay que ver que el punto que está a $2/3$ del recorrido de cada mediana es el mismo para las 3 medianas.

Como $\frac{1}{3}P + \frac{1}{3}Q + \frac{1}{3}R$ es simétrico respecto a P,Q R, el punto es el mismo para las 3 medianas.



El punto $B = \frac{1}{3}P + \frac{1}{3}Q + \frac{1}{3}R$ donde se juntan las medianas del triángulo PQR es el **baricentro** del triángulo (su centro de gravedad)



Norma o magnitud

Al tamaño de un vector V se le conoce como la ***magnitud*** o la ***norma*** de V y se le denota por $|V|$.

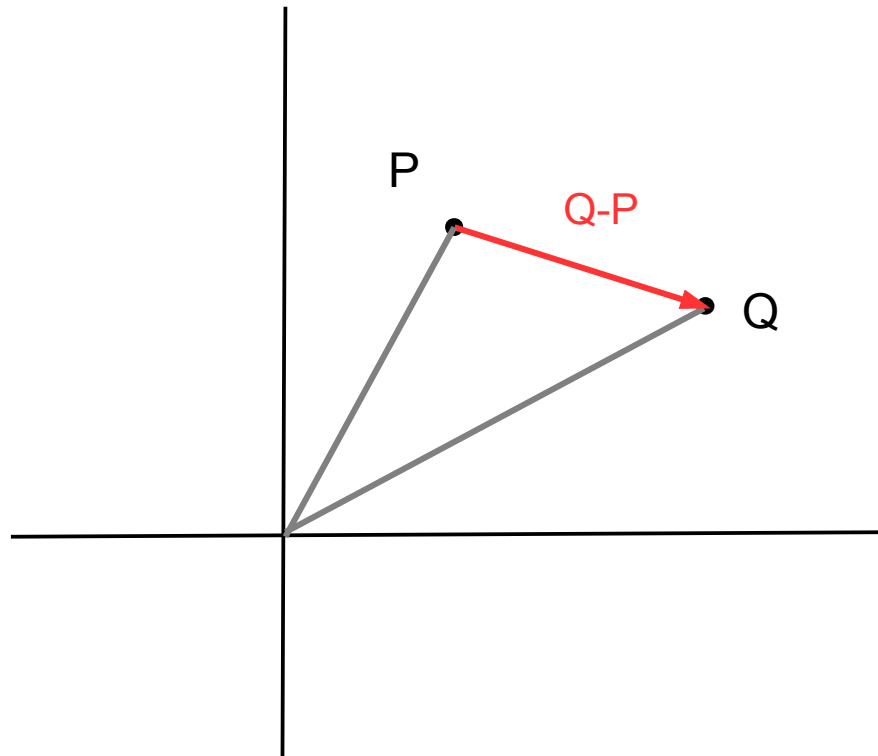
Los vectores de norma 1 se llaman ***unitarios***.

Por el Teorema de Pitágoras la norma del vector $V=(x,y)$ es
$$|V| = \sqrt{x^2+y^2}$$

Ejemplo:

$$|(4,-3)| = \sqrt{4^2+(-3)^2} = \sqrt{25} = 5$$

La distancia entre dos puntos P y Q del plano es la norma del vector Q-P



Ejemplo: Si $P=(4,1)$ y $Q=(7,0)$ entonces
 $\text{dist}(P,Q) = |(7-4, 0-1)| = \sqrt{3^2 + (-1)^2} = \sqrt{10}$

Al multiplicar un vector V por un numero r , se obtiene un vector paralelo a V cuya norma es $|r|$ veces la norma de V , ya que si $V=(x,y)$, $rV=(rx,ry)$

$$|rV| = \sqrt{(rx)^2 + (ry)^2} = \sqrt{r^2 (x^2 + y^2)} = |r| \sqrt{x^2 + y^2} = |r| |V|$$

Al multiplicar un vector V por un número r , se obtiene un vector paralelo a V cuya norma es $|r|$ veces la norma de V , ya que si $V=(x,y)$, $rV=(rx,ry)$

$$|rV| = \sqrt{(rx)^2 + (ry)^2} = \sqrt{r^2 (x^2 + y^2)} = |r| \sqrt{x^2 + y^2} = |r| |V|$$

Ejercicio.

Encuentra un vector unitario paralelo a $V=(4,-3)$

Al multiplicar un vector V por un número r , se obtiene un vector paralelo a V cuya norma es $|r|$ veces la norma de V , ya que si $V=(x,y)$, $rV=(rx,ry)$

$$|rV| = \sqrt{(rx)^2 + (ry)^2} = \sqrt{r^2 (x^2 + y^2)} = |r| \sqrt{x^2 + y^2} = |r| |V|$$

Ejercicio.

Encuentra un vector unitario paralelo a $V=(4,-3)$

El vector V tiene norma $|V| = \sqrt{4^2 + 3^2} = 5$

Así que el vector $1/|V|V = 1/5(4,-3) = (4/5, -3/5)$

tiene norma 1 y tiene la misma dirección y sentido que $(4,-3)$

Ejercicio.

¿Cual vector tiene mayor magnitud, $(12,5)$ o $(13,0)$?

Ejercicio.

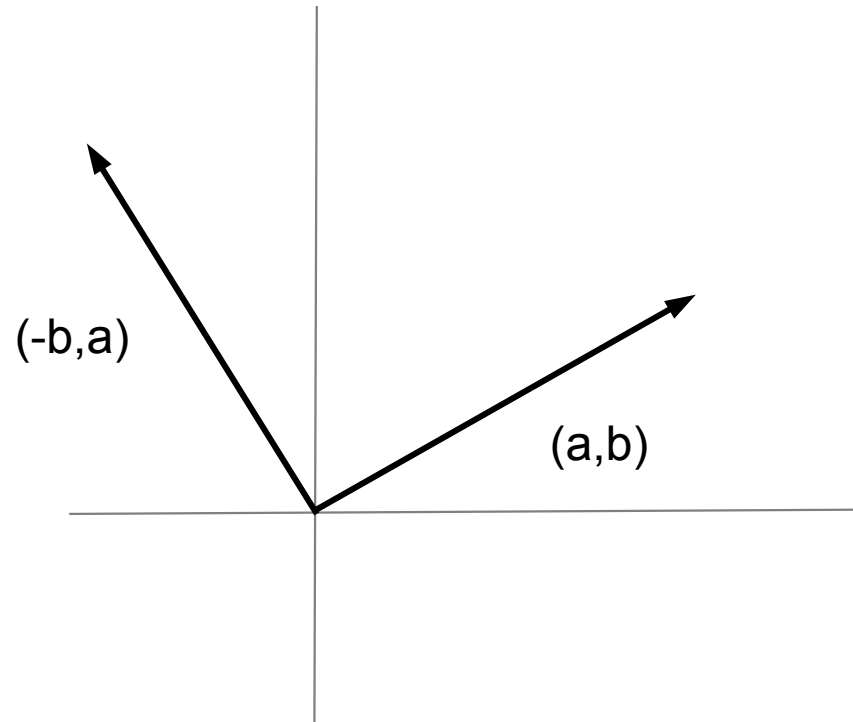
¿Cual vector tiene mayor magnitud, $(12,5)$ o $(13,0)$?

$$|(12,5)| = \sqrt{12^2 + 5^2} = \sqrt{144 + 25} = \sqrt{169} = 13$$

$$|(13,0)| = \sqrt{13^2 + 0^2} = \sqrt{169 + 0} = \sqrt{169} = 13$$

Así que tienen la misma magnitud.

Lema. Los vectores (a,b) y $(-b,a)$ tienen magnitudes iguales y son perpendiculares.

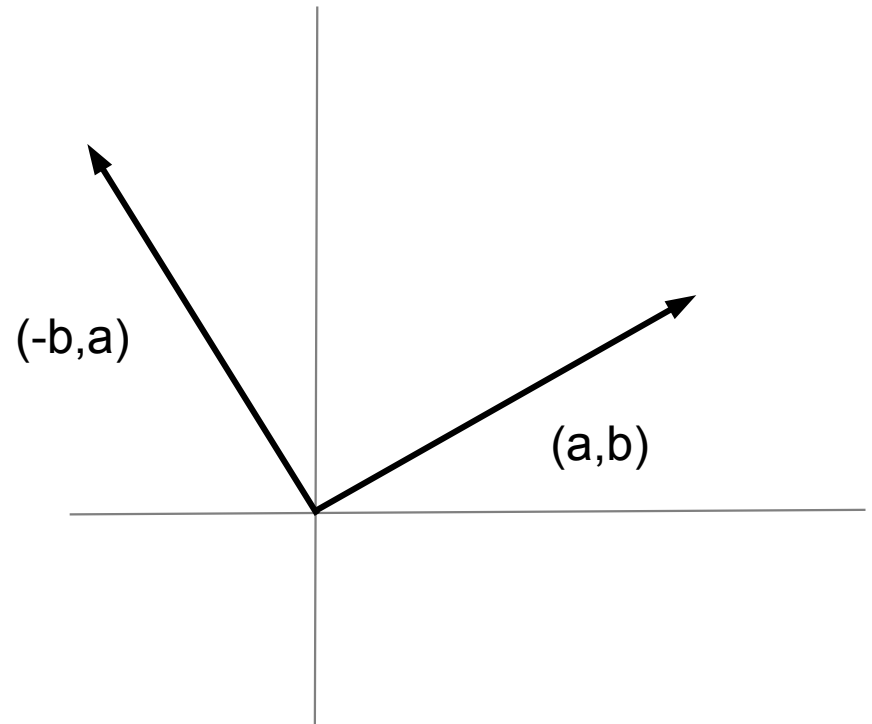


Lema. Los vectores (a,b) y $(-b,a)$ tienen magnitudes iguales y son perpendiculares.

Demostración.

$$|(a,b)|^2 = a^2 + b^2 = (-b)^2 + a^2 = |(-b,a)|^2$$

así que (a,b) y $(-b,a)$ tienen la misma norma.



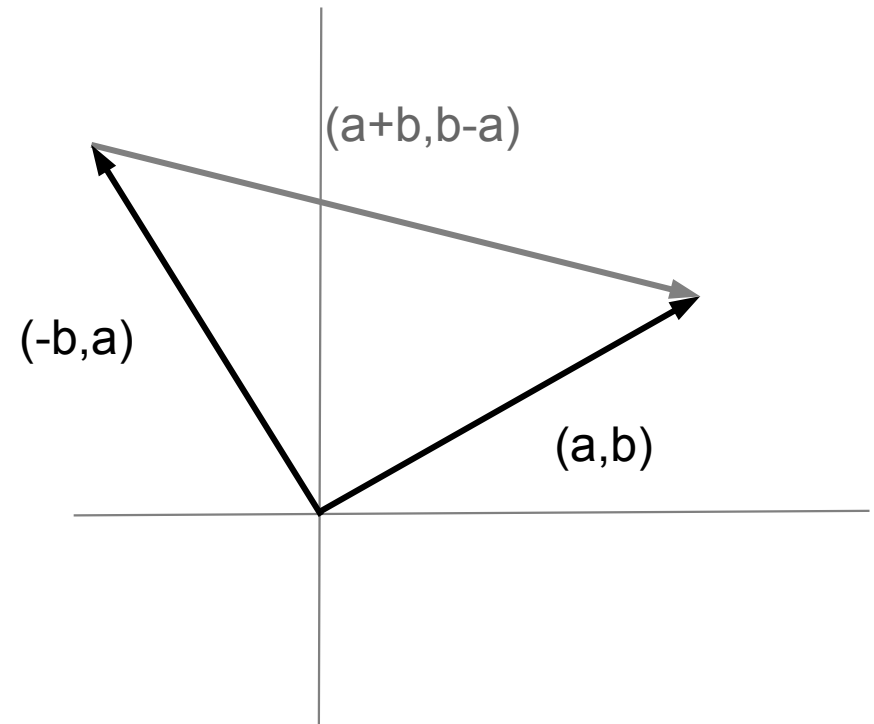
Lema. Los vectores (a,b) y $(-b,a)$ tienen magnitudes iguales y son perpendiculares.

Demostración.

$$|(a,b)|^2 = a^2 + b^2 = (-b)^2 + a^2 = |(-b,a)|^2$$

así que (a,b) y $(-b,a)$ tienen la misma norma.

Para ver que (a,b) y $(-b,a)$ son perpendiculares, basta que ver que el triángulo formado por (a,b) , $(-b,a)$ y su diferencia $(a+b,b-a)$ cumplen el T. de Pitágoras:



Lema. Los vectores (a,b) y $(-b,a)$ tienen magnitudes iguales y son perpendiculares.

Demostración.

$$|(a,b)|^2 = a^2 + b^2 = (-b)^2 + a^2 = |(-b,a)|^2$$

así que (a,b) y $(-b,a)$ tienen la misma norma.

Para ver que (a,b) y $(-b,a)$ son perpendiculares, basta que ver que el triángulo formado por (a,b) , $(-b,a)$ y su diferencia $(a+b,b-a)$ cumplen el T. de Pitágoras:

$$|(a+b,b-a)|^2 = a^2 + 2ab + b^2 + b^2 - 2ba + a^2$$

$$|(a,b)|^2 + |(-b,a)|^2 = a^2 + b^2 + b^2 + a^2$$

