

# El producto interno de vectores

La suma de vectores puede definirse algebraicamente

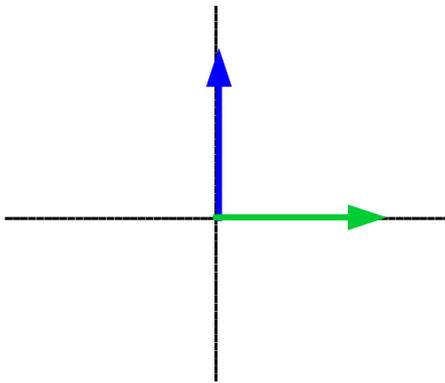
$$(a,b) + (c,d) = (a+c,b+d)$$

La suma coordenada a coordenada tiene un significado geométrico que es independiente de las coordenadas: Al girar los vectores su suma gira igual.

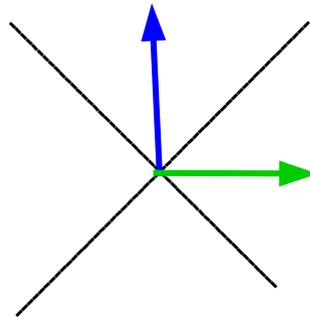
La suma de vectores puede definirse algebraicamente

$$(a,b) + (c,d) = (a+c,b+d)$$

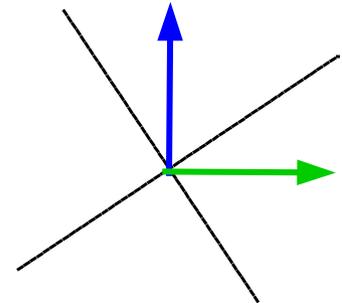
La suma coordenada a coordenada tiene un significado geométrico que es independiente de las coordenadas



$$(1,0) + (0,1) \\ = (1,1)$$



$$(1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{2}) + (-1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{2}) \\ = (0, \sqrt{2})$$



$$(4/5, -3/5) + (3/5, 4/5) \\ = (7/5, 1/5)$$

¿Se podrá definir un producto de vectores?

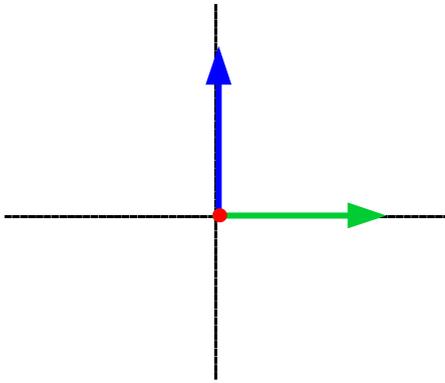
¿Se podrá definir un producto de vectores?

Parece natural definir el producto de vectores como

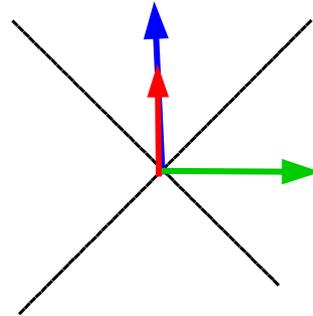
$$(a,b) \times (c,d) = (ac,bd).$$

Pero este producto por coordenadas **no** tiene un significado geométrico independiente de coordenadas:

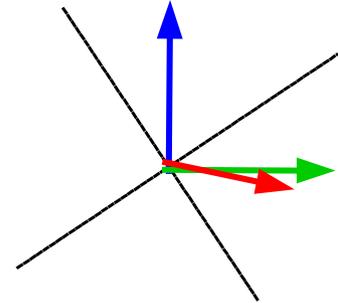
Ejemplo:



$$(1,0) \times (0,1) \\ = (0,0)$$



$$(1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{2}) \times (-1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{2}) \\ = (-1/2, 1/2)$$



$$(4/5, -3/5) \times (3/5, 4/5) \\ = (12/25, -12/25)$$

Pero aunque el producto por coordenadas de dos vectores  $(a,b)$  y  $(c,d)$  no tiene un significado geométrico, resulta que la suma de los productos,  $ac+bd$ , si lo tiene.

Pero aunque el producto por coordenadas de dos vectores  $(a,b)$  y  $(c,d)$  no tiene un significado geométrico, resulta que la suma de los productos,  $ac+bd$ , si lo tiene.

El *producto interno* o *producto punto* o *producto escalar* de dos vectores en el plano  $U=(a,b)$  y  $V=(c,d)$  es  $U \cdot V = ac+bd$

Pero aunque el producto por coordenadas de dos vectores  $(a,b)$  y  $(c,d)$  no tiene un significado geométrico, resulta que la suma de los productos,  $ac+bd$ , si lo tiene.

El *producto interno* o *producto punto* o *producto escalar* de dos vectores en el plano  $U=(a,b)$  y  $V=(c,d)$  es  $U \cdot V = ac+bd$

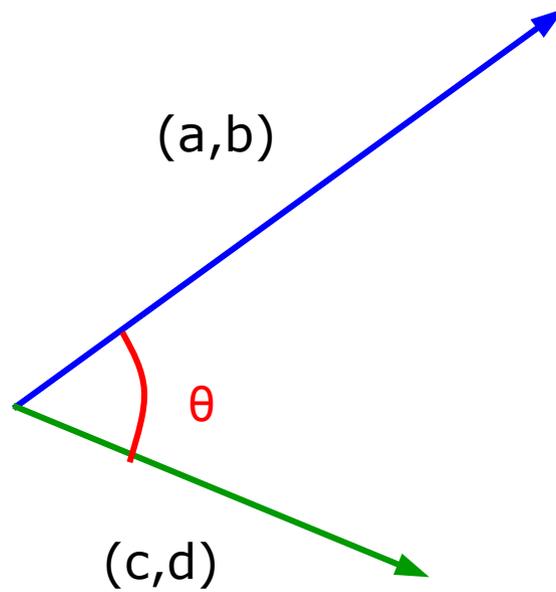
**Ejemplo:** Si  $U=(2,3)$  y  $V=(1,4)$  entonces

$$U \cdot V = 2 \cdot 1 + 3 \cdot 4 = 2 + 12 = 14$$

*El producto punto es un número real, no es un vector!*

Teorema.  $U \cdot V = |U| |V| \cos\theta$

donde  $\theta$  es el ángulo que forman los vectores.



**Teorema.**  $U \cdot V = |U| |V| \cos\theta$

donde  $\theta$  es el ángulo que forman los vectores.

**Demostración.** La ley de los cosenos aplicada a las normas de los vectores da

$$|U-V|^2 = |U|^2 + |V|^2 - 2|U||V| \cos\theta$$

en coordenadas esto es

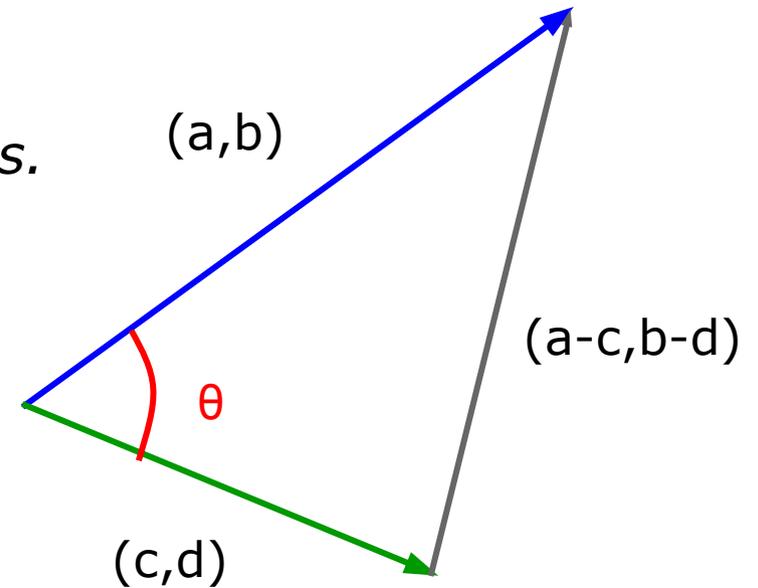
$$(a-c)^2 + (b-d)^2 = a^2+b^2+c^2+d^2 - 2\sqrt{a^2+b^2}\sqrt{c^2+d^2} \cos\theta$$

desarrollando y simplificando queda

$$-2ac - 2bd = -2\sqrt{a^2+b^2}\sqrt{c^2+d^2} \cos\theta$$

dividiendo entre -2 queda

$$ac + bd = \sqrt{a^2+b^2}\sqrt{c^2+d^2} \cos\theta = |U| |V| \cos\theta$$



El producto interno tiene las siguientes propiedades algebraicas:

1.  $U \cdot U = |U|^2$

2.  $U \cdot V = V \cdot U$

*es conmutativo*

3.  $U \cdot (V+W) = U \cdot V + U \cdot W$

*se distribuye con la suma*

4.  $r U \cdot V = U \cdot r V = r (U \cdot V)$

*saca escalares*

Como  $U \cdot V = |U| |V| \cos\theta$  , el producto interno tiene las siguientes propiedades geométricas:

1.  $U \cdot V \leq |U| |V|$  y la igualdad se da solo si  $U$  y  $V$  tienen la misma dirección y sentido.

2.  $U \cdot V = 0$  si y solo si  $U$  y  $V$  son ortogonales (perpendiculares).

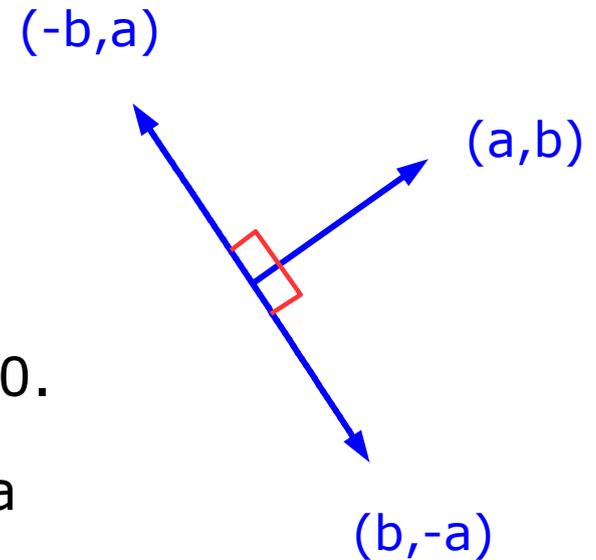
## Ejemplos:

1. Los vectores  $(2,3)$  y  $(9,-6)$  son ortogonales ya que

$$(2,3) \cdot (9,-6) = 2 \cdot 9 - 3 \cdot 6 = 0.$$

2. Los vectores  $(b,-a)$   $(-b,a)$  son ortogonales al vector  $(a,b)$  ya que  $(a,b) \cdot (b,-a) = ab - ba = 0$ .

$(-b,a)$  apunta a la izquierda y  $(b,-a)$  apunta a la derecha de  $(a,b)$ .



Corolario.  $U \cdot V > 0$  si  $\theta < 90^\circ$  y  $U \cdot V < 0$  si  $\theta > 90^\circ$

*Demostración-*  $\cos \theta > 0$  si  $0 < \theta < 90^\circ$  y  $\cos \theta < 0$  si  $90^\circ < \theta < 180^\circ$

Ejercicio:

¿Los vectores  $(6,7)$  y  $(-8,7)$  forman un ángulo mayor o menor a  $90^\circ$ ?

**Corolario.**  $U \cdot V > 0$  si  $\theta < 90^\circ$  y  $U \cdot V < 0$  si  $\theta > 90^\circ$

*Demostración-*  $\cos \theta > 0$  si  $0 < \theta < 90^\circ$  y  $\cos \theta < 0$  si  $90^\circ < \theta < 180^\circ$

**Ejercicio:**

¿Los vectores  $(6,7)$  y  $(-8,7)$  forman un ángulo mayor o menor a  $90^\circ$ ?

$(6,7) \cdot (-8,7) = 1 > 0$  así que  $(6,7)$  y  $(-8,7)$  forman un ángulo menor que  $90^\circ$ .

**Corolario.** El ángulo entre los vectores  $U$  y  $V$  está dado por

$$\cos \theta = \frac{U \cdot V}{|U| |V|}$$

**Ejercicio:** ¿Que ángulo forman los vectores  $(1,2)$  y  $(3,4)$ ?

**Corolario.** El ángulo entre los vectores U y V está dado por

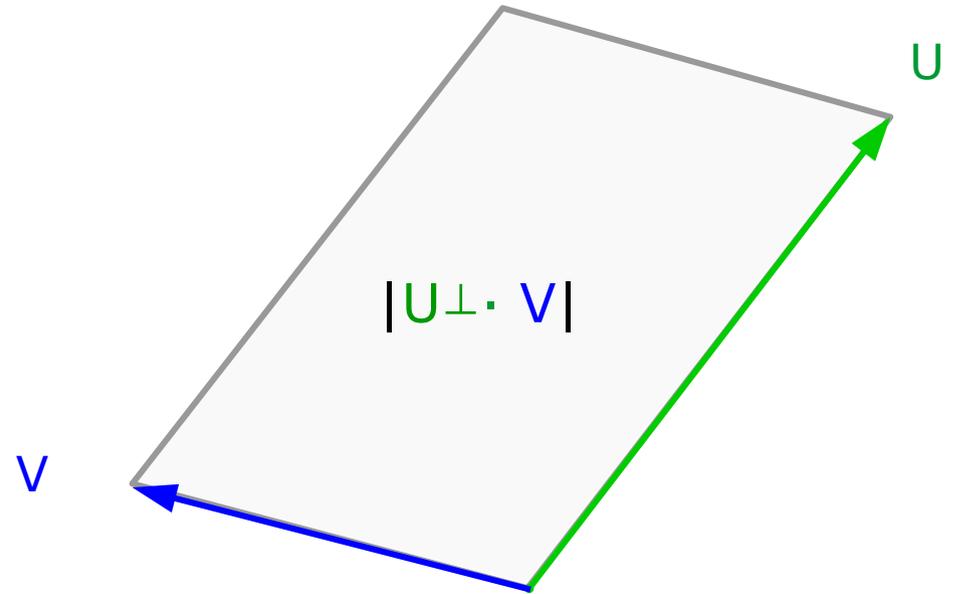
$$\cos \theta = \frac{U \cdot V}{|U| |V|}$$

**Ejercicio:** ¿Que ángulo forman los vectores (1,2) y (3,4)?

$$\begin{aligned} \cos \theta &= (1,2) \cdot (3,4) / |(1,2)| |(3,4)| = \\ &= 1 \cdot 3 + 2 \cdot 4 / \sqrt{1^2 + 2^2} \sqrt{3^2 + 4^2} \\ &= 11 / \sqrt{125} \approx 0.98387 \end{aligned}$$

Así que  $\theta \approx \arccos(0.98387) \approx 10.3^\circ$

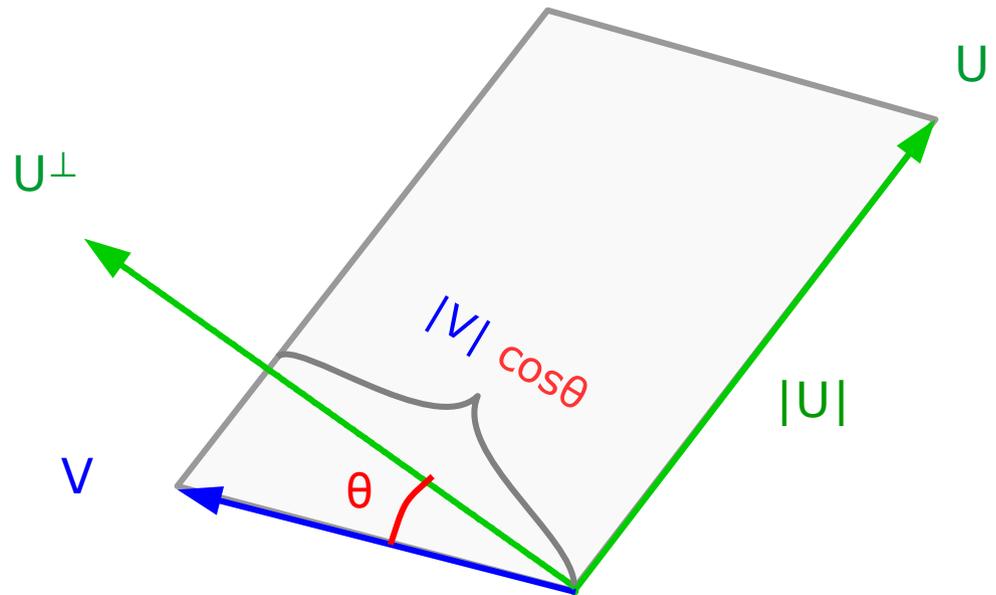
**Teorema.** El área del paralelogramo determinado por dos vectores  $U$  y  $V$  del plano es  $|U^\perp \cdot V|$  donde  $U^\perp$  es un vector perpendicular a  $U$  con la misma norma que  $U$ .



**Teorema.** El área del paralelogramo determinado por dos vectores  $U$  y  $V$  del plano es  $|U^\perp \cdot V|$  donde  $U^\perp$  es un vector perpendicular a  $U$  con la misma norma que  $U$ .

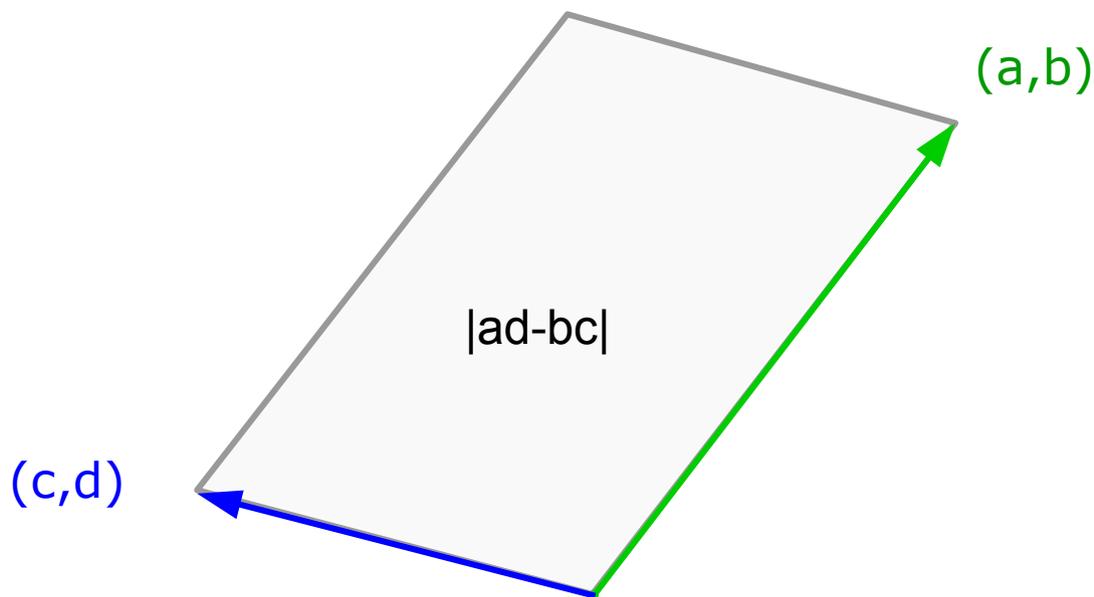
*Demostración.*

$$\begin{aligned} \text{Area} &= \text{base} \times \text{altura} = \\ &= |U| |V| \cos \theta = \\ &= |U^\perp| |V| \cos \theta = \\ &= U^\perp \cdot V \end{aligned}$$



**Corolario.** El área del paralelogramo determinado por los vectores  $(a,b)$  y  $(c,d)$  es el valor absoluto del determinante de la matriz formada por los vectores:

$$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}$$



*Demostración.*

$$\begin{aligned} \text{Area} &= |(\mathbf{a}, \mathbf{b})^\perp \cdot (\mathbf{c}, \mathbf{d})| \\ &= |(-b, a) \cdot (c, d)| \\ &= |-bc + ad| \end{aligned}$$

## Ejercicios:

¿Cual es el área del paralelogramo determinado por  $(1,2)$  y  $(3,4)$ ?

2. ¿Que área tiene el triángulo con vértices  $(1,2)$ ,  $(7,4)$  y  $(3,5)$ ?

## Ejercicios:

¿Cual es el área del paralelogramo determinado por  $(1,2)$  y  $(3,4)$ ?

$$\text{El área es } (1,2) \cdot (4,-3) = 1 \cdot 4 - 2 \cdot 3 = 10$$

2. ¿Que área tiene el triángulo con vértices  $(1,2)$ ,  $(7,4)$  y  $(3,5)$ ?

Los vectores  $(7,4)-(1,2)=(6,2)$  y  $(3,5)-(1,2)=(2,3)$

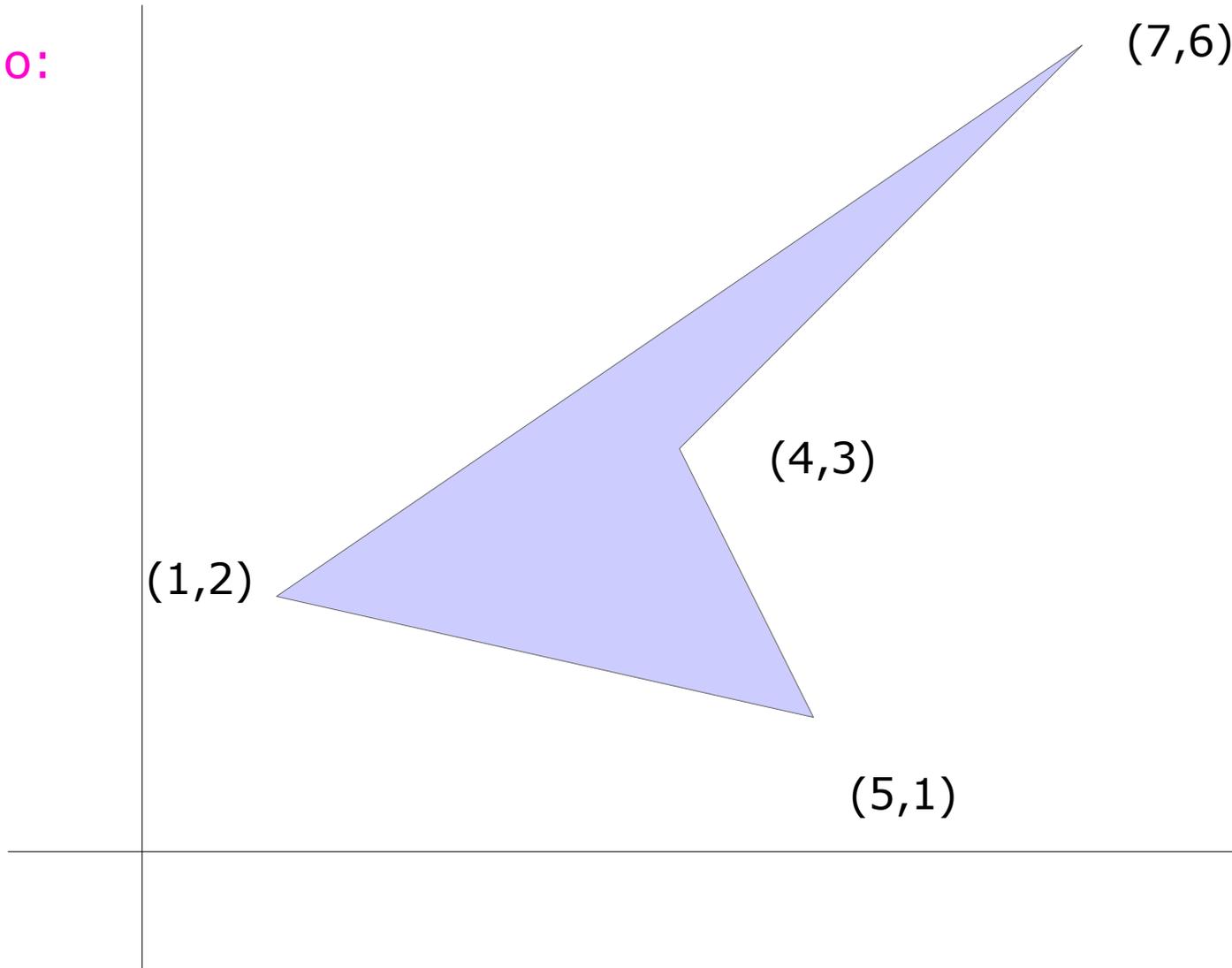
dan dos lados del triángulo.

El área del triángulo es la mitad del área del paralelogramo generado por los dos vectores:

$$\text{Area} = 1/2 (6,2) \cdot (3,-2) = 1/2 (18-4) = 7$$

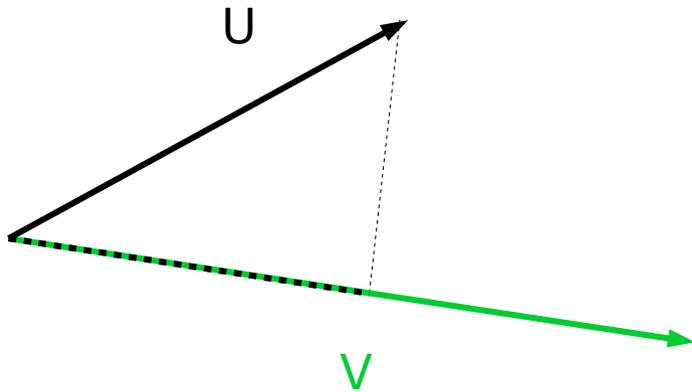
El área de cualquier polígono puede calcularse a partir de las coordenadas de sus vértices dividiendo al polígono en triángulos.

Ejercicio:

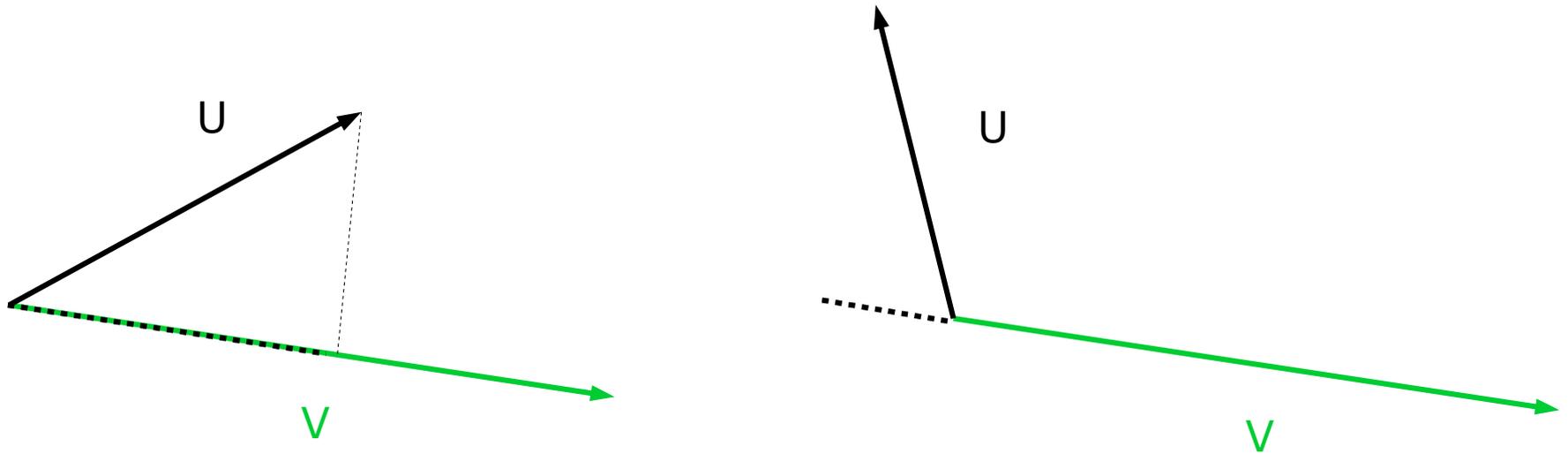


# Proyecciones y descomposición de vectores

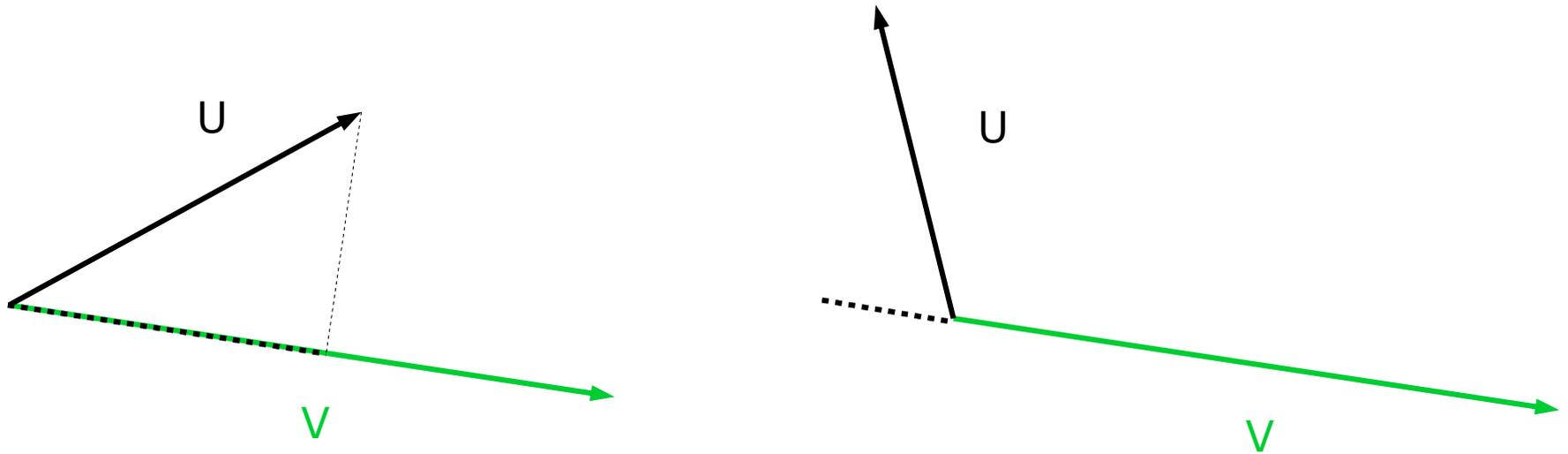
Si  $U$  y  $V$  son vectores en el plano, la **proyección escalar** de  $U$  hacia  $V$  mide la “sombra” de  $U$  en la línea determinada por  $V$  al iluminar  $U$  perpendicularmente a  $V$ .



Si  $U$  y  $V$  son vectores en el plano, la **proyección escalar** de  $U$  hacia  $V$  mide la “sombra” de  $U$  en la línea determinada por  $V$  al iluminar  $U$  perpendicularmente a  $V$ .

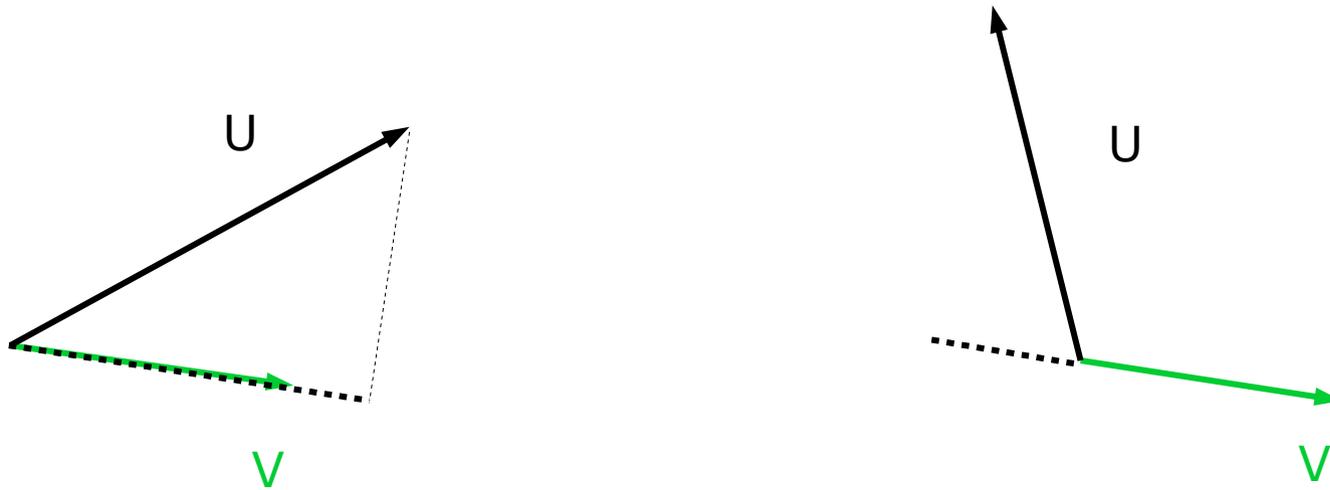


Si  $U$  y  $V$  son vectores en el plano, la **proyección escalar** de  $U$  hacia  $V$  mide la “sombra” de  $U$  en la línea determinada por  $V$  al iluminar  $U$  perpendicularmente a  $V$ .



La proyección escalar depende de la dirección de  $V$  pero no del tamaño de  $V$ , y su signo depende de a que lado de  $V$  apunte.

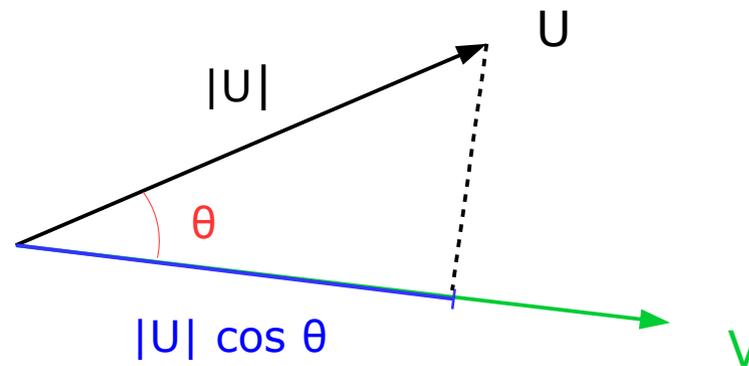
Si  $U$  y  $V$  son vectores en el plano, la **proyección escalar** de  $U$  hacia  $V$  mide la “sombra” de  $U$  en la línea determinada por  $V$  al iluminar  $U$  perpendicularmente a  $V$ .



La proyección escalar depende de la dirección de  $V$  pero no del tamaño de  $V$ , y su signo depende de a que lado de  $V$  apunte.

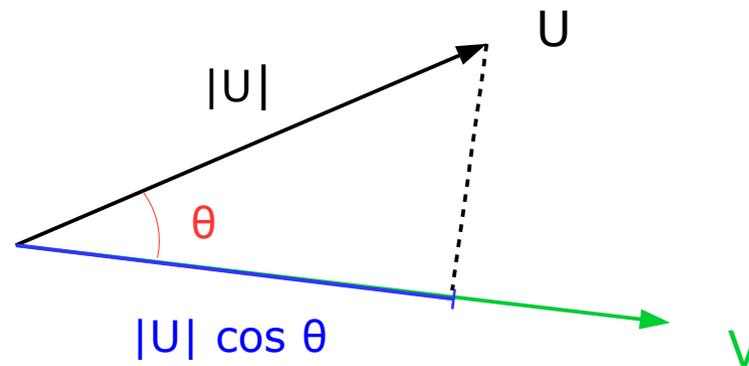
**Lema.** La proyección escalar de  $U$  hacia  $V$  es  $\frac{U \cdot V}{|V|}$

**Demostración.** La sombra de  $U$  en la línea de  $V$  mide  $|U| \cos \theta$



**Lema.** La proyección escalar de  $U$  hacia  $V$  es  $\frac{U \cdot V}{|V|}$

**Demostración.** La sombra de  $U$  en la línea de  $V$  mide  $|U| \cos \theta$



Como  $UV = |U||V| \cos \theta$

entonces

$$|U| \cos \theta = \frac{U \cdot V}{|V|}$$

**Ejemplo.** ¿Cual es la proyección escalar de  $U=(1,2)$  hacia  $V=(3,4)$ ?

$\text{Proy}_V U =$

**Ejemplo.** ¿Cual es la proyección escalar de  $U=(1,2)$  hacia  $V=(3,4)$ ?

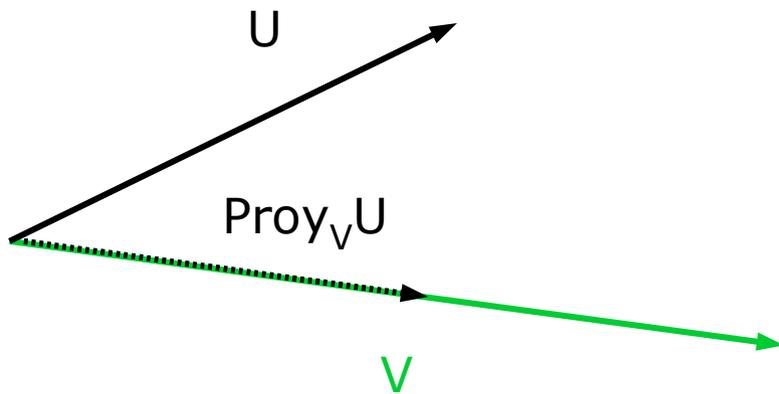
$$\text{Proy}_V U = \frac{U \cdot V}{|V|} = \frac{(1,2) \cdot (3,4)}{|(3,4)|} = \frac{1 \cdot 3 + 2 \cdot 4}{\sqrt{3^2 + 4^2}} = \frac{11}{5}$$

**Ejemplo.** ¿Cual es la proyección escalar de  $U=(1,2)$  hacia  $V=(3,4)$ ?

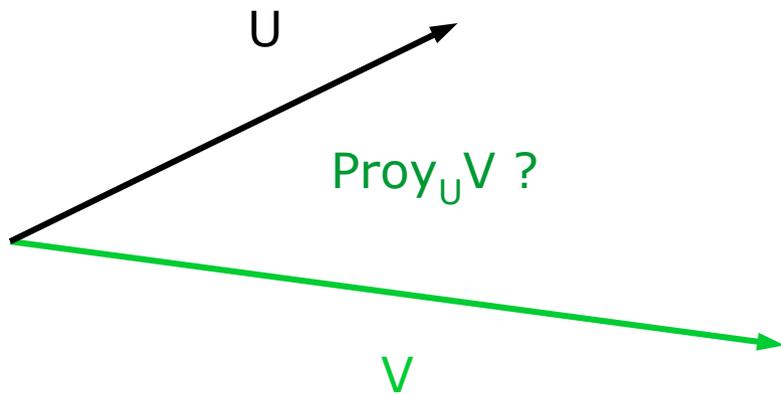
$$\text{Proy}_V U = \frac{U \cdot V}{|V|} = \frac{(1,2) \cdot (3,4)}{|(3,4)|} = \frac{1 \cdot 3 + 2 \cdot 4}{\sqrt{3^2 + 4^2}} = \frac{11}{5}$$

¿Y cual es la proyección escalar de  $U=(3,4)$  hacia  $V=(1,2)$ ?

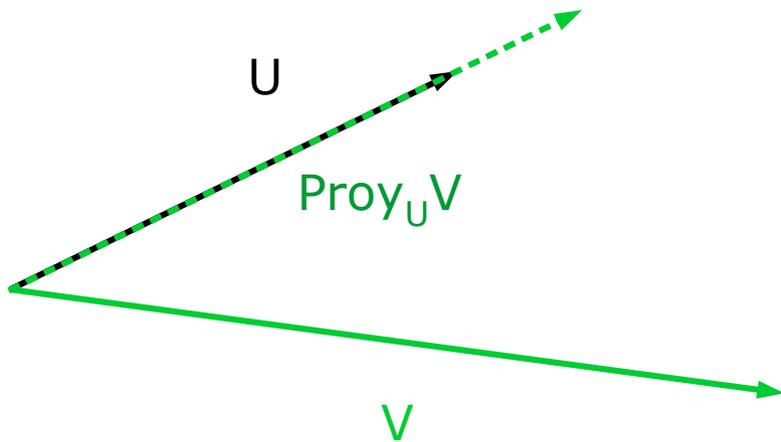
Si  $U$  y  $V$  son vectores en el plano, la **proyección vectorial** de  $U$  hacia  $V$  es el vector formado por la sombra de  $U$  en la línea de  $V$ .



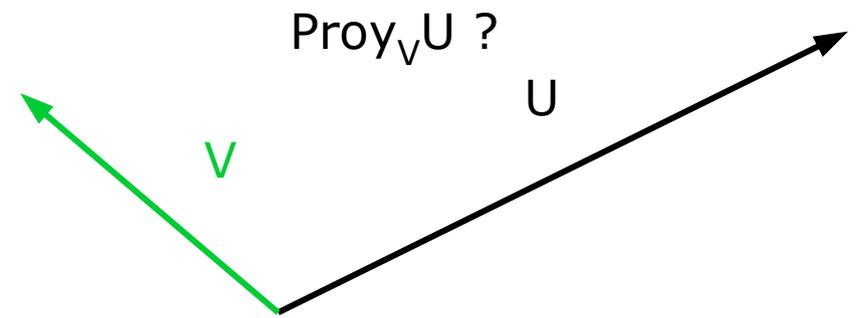
Si  $U$  y  $V$  son vectores en el plano, la **proyección vectorial** de  $U$  hacia  $V$  es el vector formado por la sombra de  $U$  en la línea de  $V$



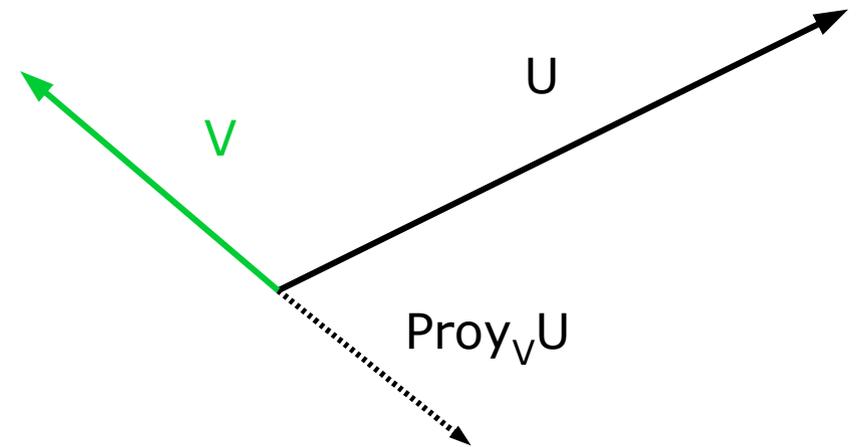
Si  $U$  y  $V$  son vectores en el plano, la **proyección vectorial** de  $U$  hacia  $V$  es el vector formado por la sombra de  $U$  en la línea de  $V$



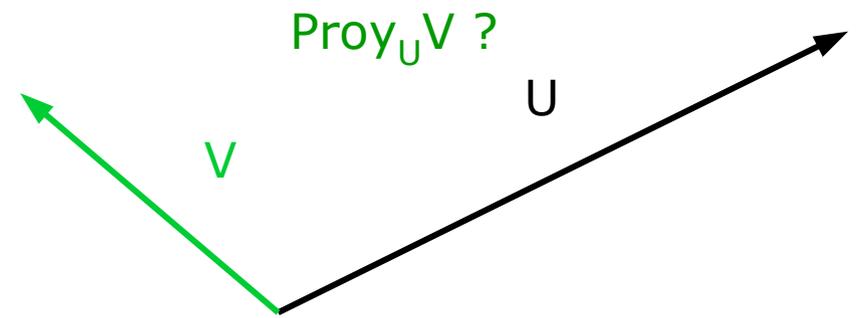
Si  $U$  y  $V$  son vectores en el plano, la **proyección vectorial** de  $U$  hacia  $V$  es el vector formado por la sombra de  $U$  en la línea de  $V$



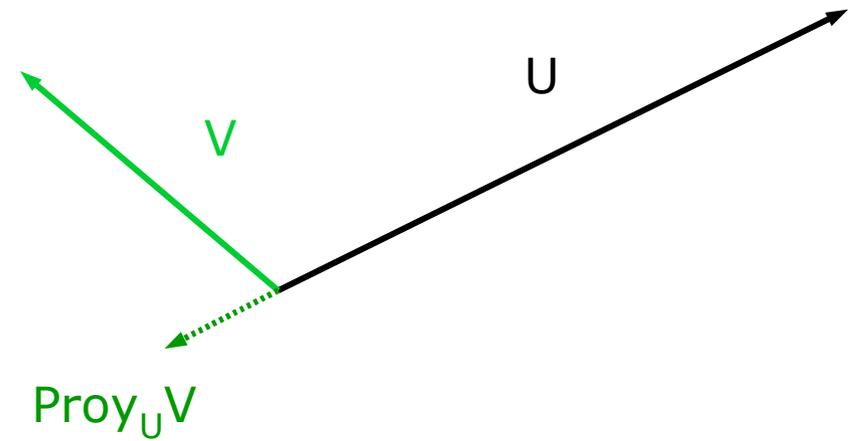
Si  $U$  y  $V$  son vectores en el plano, la **proyección vectorial** de  $U$  hacia  $V$  es el vector formado por la sombra de  $U$  en la línea de  $V$



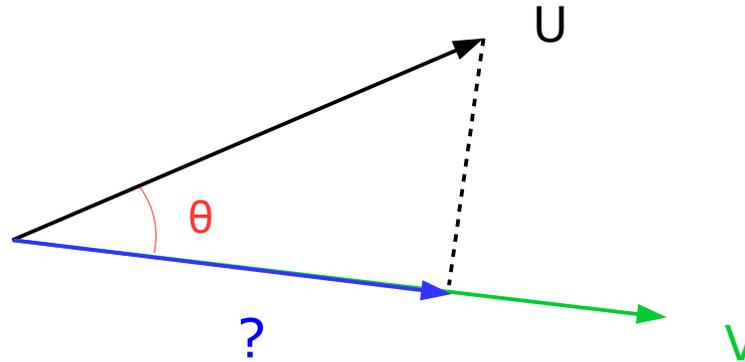
Si  $U$  y  $V$  son vectores en el plano, la **proyección vectorial** de  $V$  hacia  $U$  es el vector formado por la sombra de  $V$  en la línea de  $U$ .



Si  $U$  y  $V$  son vectores en el plano, la **proyección vectorial** de  $V$  hacia  $U$  es el vector formado por la sombra de  $V$  en la línea de  $U$ .

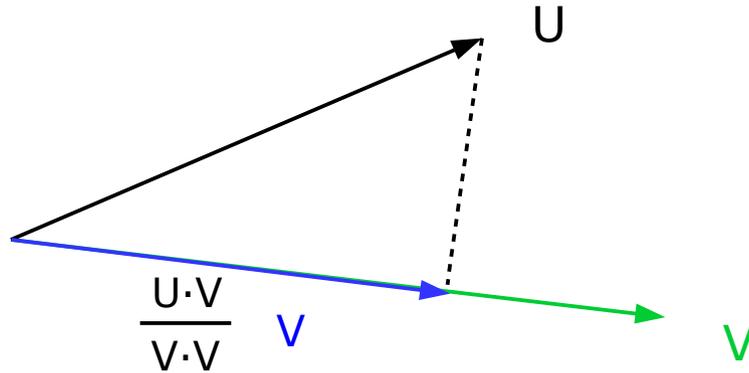


¿Podemos hallar la proyección de un vector hacia otro sin dibujar?



**Lema.** La proyección vectorial de  $U$  hacia  $V$  es

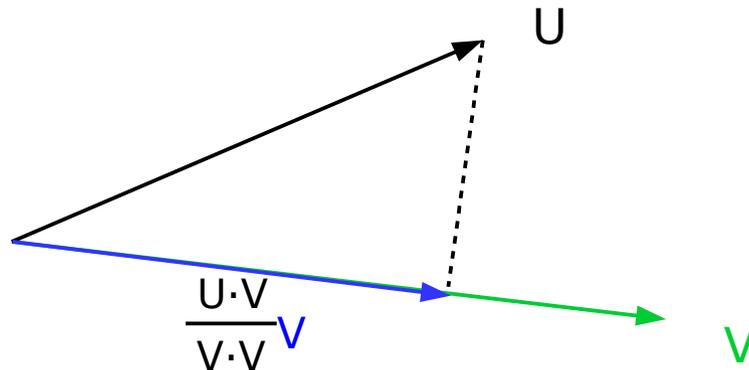
$$\text{Proy}_V U = \frac{U \cdot V}{V \cdot V} V$$



**Lema.** La proyección vectorial de U hacia V es

$$\text{Proy}_V U = \frac{U \cdot V}{V \cdot V} V$$

*Demostración.*



Para obtener la proyección vectorial de U hacia V, basta multiplicar el tamaño de la sombra por el vector unitario en la dirección de V:

$$\text{Proy}_V U = \frac{U \cdot V}{|V|} \frac{1}{|V|} V = \frac{U \cdot V}{V \cdot V} V \quad \bullet$$

**Ejemplo.** ¿Cual es la proyección vectorial de  $U=(1,2)$  hacia  $V=(3,4)$ ?

**Ejemplo.** ¿Cual es la proyección vectorial de  $U=(1,2)$  hacia  $V=(3,4)$ ?

$$\text{Proy}_V U = \frac{U \cdot V}{V \cdot V} V = \frac{(1,2) \cdot (3,4)}{(3,4) \cdot (3,4)} (3,4) = \frac{1 \cdot 3 + 2 \cdot 4}{3 \cdot 3 + 4 \cdot 4} (3,4) = \frac{11}{25} (3,4)$$

**Ejemplo.** ¿Cual es la proyección vectorial de  $U=(1,2)$  hacia  $V=(3,4)$ ?

$$\text{Proy}_V U = \frac{U \cdot V}{V \cdot V} V = \frac{(1,2) \cdot (3,4)}{(3,4) \cdot (3,4)} (3,4) = \frac{1 \cdot 3 + 2 \cdot 4}{3 \cdot 3 + 4 \cdot 4} (3,4) = \frac{11}{25} (3,4)$$

¿Y cual es la proyección de  $V=(3,4)$  en la dirección de  $U=(1,2)$ ?

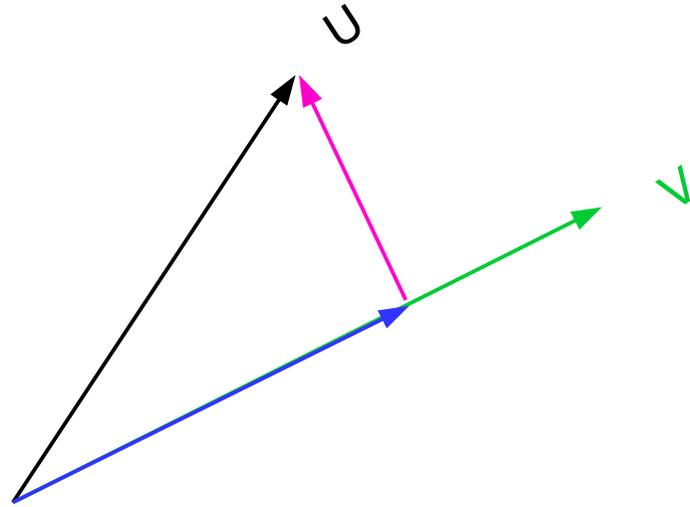
**Ejemplo.** ¿Cual es la proyección vectorial de  $U=(1,2)$  hacia  $V=(3,4)$ ?

$$\text{Proy}_V U = \frac{U \cdot V}{V \cdot V} V = \frac{(1,2) \cdot (3,4)}{(3,4) \cdot (3,4)} (3,4) = \frac{1 \cdot 3 + 2 \cdot 4}{3 \cdot 3 + 4 \cdot 4} (3,4) = \frac{11}{25} (3,4)$$

¿Y cual es la proyección de  $V=(3,4)$  en la dirección de  $U=(1,2)$ ?

$$\text{Proy}_U V = \frac{U \cdot V}{U \cdot U} U = \frac{(1,2) \cdot (3,4)}{(1,2) \cdot (1,2)} (1,2) = \frac{1 \cdot 3 + 2 \cdot 4}{1 \cdot 1 + 2 \cdot 2} (1,2) = \frac{11}{5} (1,2)$$

**Lema.** La proyección vectorial de  $U$  hacia  $V$  es el único vector paralelo a  $V$  que al restarlo a  $U$  da un vector ortogonal a  $V$ .



**Lema.** La proyección vectorial de  $U$  hacia  $V$  es el único vector paralelo a  $V$  que al restarlo a  $U$  da un vector ortogonal a  $V$ .

*Demostración.*

Primero hay que ver que  $\text{Proy}_V U$  tiene la propiedad deseada, es decir que

$U - \text{Proy}_V U$  es ortogonal a  $V$ .

Para esto hacemos producto punto con  $V$ :

$$(U - \text{Proy}_V U) \cdot V = (U - \frac{U \cdot V}{V \cdot V} V) \cdot V = U \cdot V - \frac{U \cdot V}{V \cdot V} V \cdot V = 0$$

**Lema.** La proyección vectorial de  $U$  hacia  $V$  es el único vector paralelo a  $V$  que al restarlo a  $U$  da un vector ortogonal a  $V$ .

### *Demostración*

Falta ver que si un vector paralelo a  $V$  tiene la propiedad entonces es la proyección de  $U$  en  $V$ .

**Lema.** La proyección vectorial de  $U$  hacia  $V$  es el único vector paralelo a  $V$  que al restarlo a  $U$  da un vector ortogonal a  $V$ .

### *Demostración*

Un vector paralelo a  $V$  es de la forma  $tV$  para algún número real  $t$ .

**Lema.** La proyección vectorial de  $U$  hacia  $V$  es el único vector paralelo a  $V$  que al restarlo a  $U$  da un vector ortogonal a  $V$ .

### *Demostración*

Un vector paralelo a  $V$  es de la forma  $tV$  para algún número real  $t$ .

$U-tV$  es ortogonal a  $V$  si y solo si su producto punto es 0:

$$(U-tV) \cdot V = 0 \text{ equivale a } U \cdot V - tV \cdot V = 0$$

**Lema.** La proyección vectorial de  $U$  hacia  $V$  es el único vector paralelo a  $V$  que al restarlo a  $U$  da un vector ortogonal a  $V$ .

### *Demostración*

Un vector paralelo a  $V$  es de la forma  $tV$  para algún número real  $t$ .

$U-tV$  es ortogonal a  $V$  si y solo si su producto punto es 0:

$$(U-tV) \cdot V = 0 \text{ equivale a } U \cdot V - tV \cdot V = 0$$

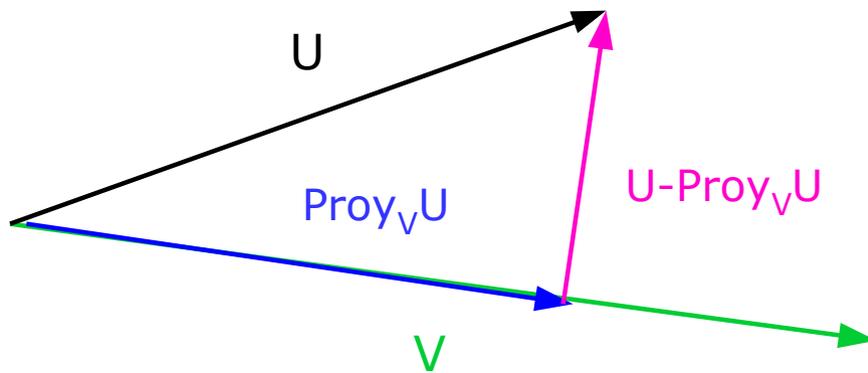
$$\text{o sea } U \cdot V = t V \cdot V$$

$$\text{así que } t = U \cdot V / V \cdot V \quad \text{así que } tV = U \cdot V / V \cdot V V = \text{Proy}_V U \quad \bullet$$

**Corolario.** Cada vector  $U$  puede descomponerse de manera única como la suma de un vector paralelo a  $V$  y otro ortogonal a  $V$

**Corolario.** Cada vector  $U$  puede descomponerse de manera única como la suma de un vector paralelo a  $V$  y otro ortogonal a  $V$ :

$$U = \text{Proy}_V U + (U - \text{Proy}_V U)$$



**Ejercicio.** Descomponer al vector  $(3,2)$  como la suma de un vector paralelo y otro perpendicular a  $(5,4)$ .

**Ejercicio.** Descomponer al vector  $(3,2)$  como la suma de un vector paralelo y otro perpendicular a  $(5,4)$ .

$$\text{Proy}_{(5,4)}(3,2) = \frac{(3,2) \cdot (5,4)}{(5,4) \cdot (5,4)} (5,4) = \frac{23}{41}(5,4) = \left(\frac{115}{41}, \frac{92}{41}\right)$$

*Este debe ser paralelo a  $(5,4)$*

**Ejercicio.** Descomponer al vector  $(3,2)$  como la suma de un vector paralelo y otro perpendicular a  $(5,4)$ .

$$\text{Proy}_{(5,4)}(3,2) = (3,2) \cdot (5,4) / ((5,4) \cdot (5,4)) (5,4) = 23/41(5,4) = (115/41, 92/41)$$

*Este debe ser paralelo a  $(5,4)$*

$$(3,2) - \text{Proy}_{(5,4)}(3,2) = (3,2) - (115/41, 92/41) = (8/41, -10/41)$$

*Este debe ser ortogonal a  $(5,4)$*

*Hay que comprobar que tengan las direcciones correctas y que la suma sí sea*

**Ejercicio.** Descomponer al vector  $(3,2)$  como la suma de un vector paralelo y otro perpendicular a  $(5,4)$ .

$$\text{Proy}_{(5,4)}(3,2) = (3,2) \cdot (5,4) / ((5,4) \cdot (5,4)) (5,4) = 23/41(5,4) = (115/41, 92/41)$$

*Este debe ser paralelo a  $(5,4)$*

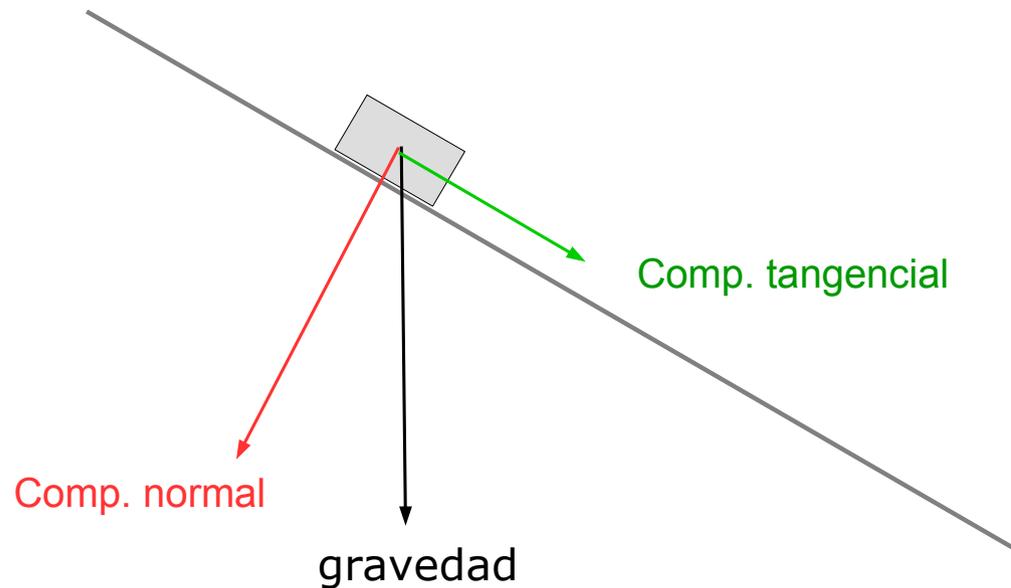
$$(3,2) - \text{Proy}_{(5,4)}(3,2) = (3,2) - (115/41, 92/41) = (8/41, -10/41)$$

*Este debe ser ortogonal a  $(5,4)$*

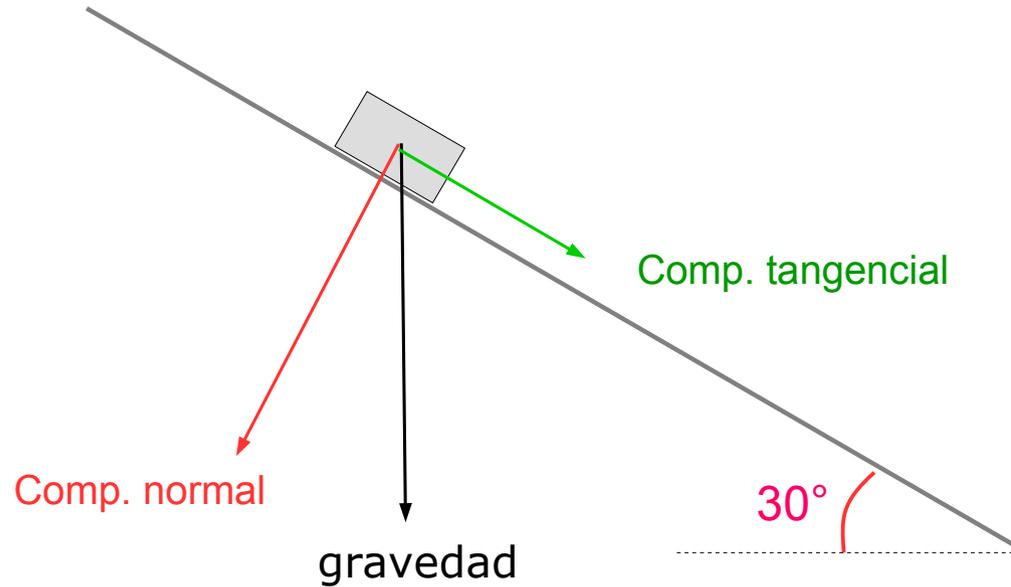
*Hay que comprobar que tengan las direcciones correctas y que la suma sí sea*

$$(3,2) = (115/41, 92/41) + (8/41, -10/41)$$

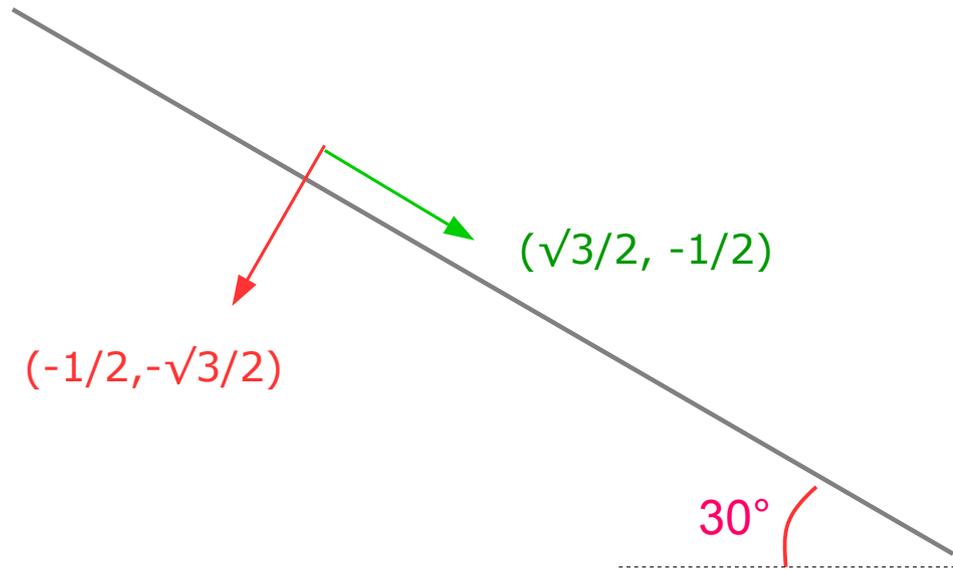
Para un objeto en un plano inclinado, la fuerza de gravedad se descompone como una fuerza paralela al plano (que empuja al objeto cuesta abajo) y una fuerza normal al plano (que lo empuja hacia el plano, la fricción es proporcional a esta fuerza).



**Ejemplo.** Si la fuerza de gravedad esta dada por el vector  $(0,-g)$  y el plano tiene una inclinación de  $30^\circ$ , ¿cuales son las componentes tangencial y normal de la fuerza?



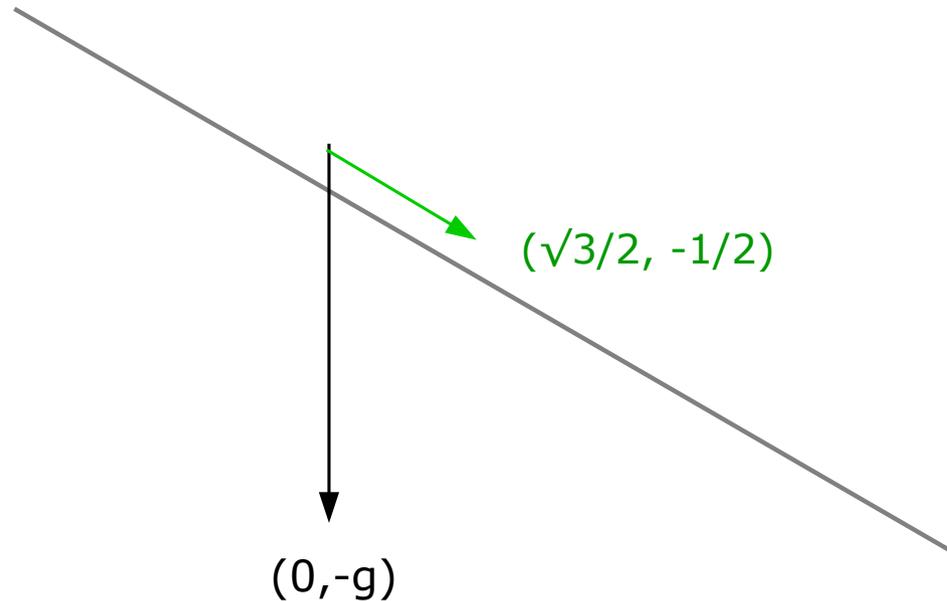
**Ejemplo.** Si la fuerza de gravedad esta dada por el vector  $(0,-g)$  y el plano tiene una inclinación de  $30^\circ$ .



Un vector tangencial al plano es  $(\cos -30^\circ, \text{sen} -30^\circ) = (\sqrt{3}/2, -1/2)$

Un vector perpendicular al plano es  $(\text{sen} -30^\circ, -\cos -30^\circ) = (-1/2, -\sqrt{3}/2)$

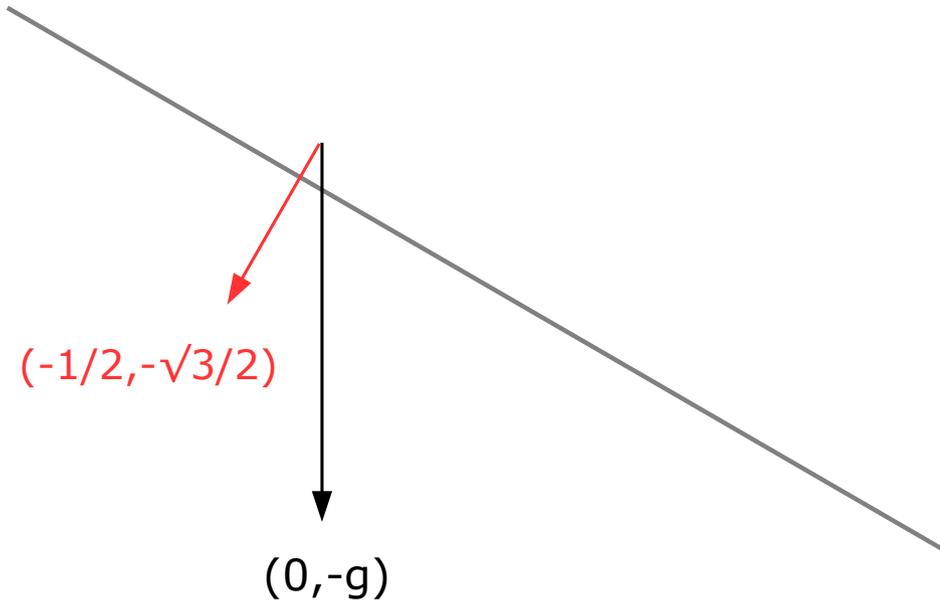
**Ejemplo.** Si la fuerza de gravedad esta dada por el vector  $(0, -g)$  y el plano tiene una inclinación de  $30^\circ$ .



La componente tangencial al plano es

$$\begin{aligned} \text{Proy}_{(\sqrt{3}/2, -1/2)}(0, -g) &= (0, -g) \cdot (\sqrt{3}/2, -1/2) / \sqrt{(\sqrt{3}/2)^2 + (-1/2)^2} \cdot (\sqrt{3}/2, -1/2) \\ &= 1/2 g (\sqrt{3}/2, -1/2) \\ &= (\sqrt{3}/4 g, -1/4 g) \end{aligned}$$

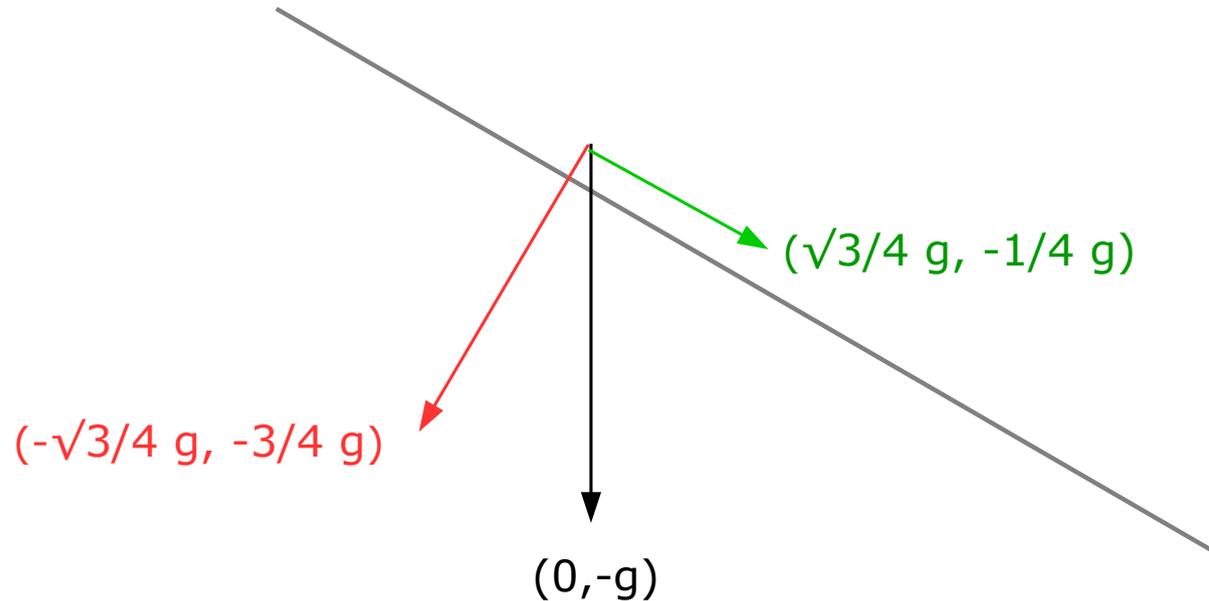
**Ejemplo.** Si la fuerza de gravedad esta dada por el vector  $(0,-g)$  y el plano tiene una inclinación de  $30^\circ$ .



La componente normal al plano es

$$\begin{aligned} \text{Proy}_{(-1/2, -\sqrt{3}/2)}(0, -g) &= (0, -g) \cdot (-1/2, -\sqrt{3}/2) / \sqrt{(-1/2)^2 + (-\sqrt{3}/2)^2} \cdot (-1/2, -\sqrt{3}/2) = \sqrt{3}/2 g \cdot (-1/2, -\sqrt{3}/2) = \\ &= (-\sqrt{3}/4 g, -3/4g) \end{aligned}$$

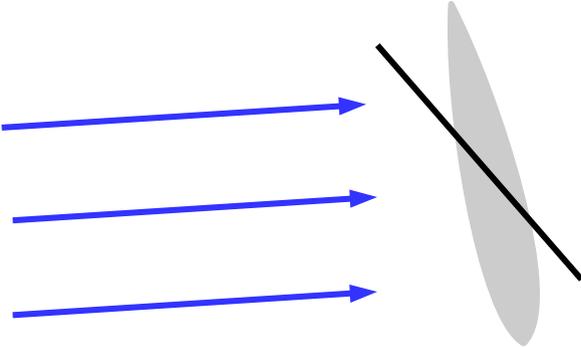
**Ejemplo.** Si la fuerza de gravedad esta dada por el vector  $(0,-g)$  y el plano tiene una inclinación de  $30^\circ$ .



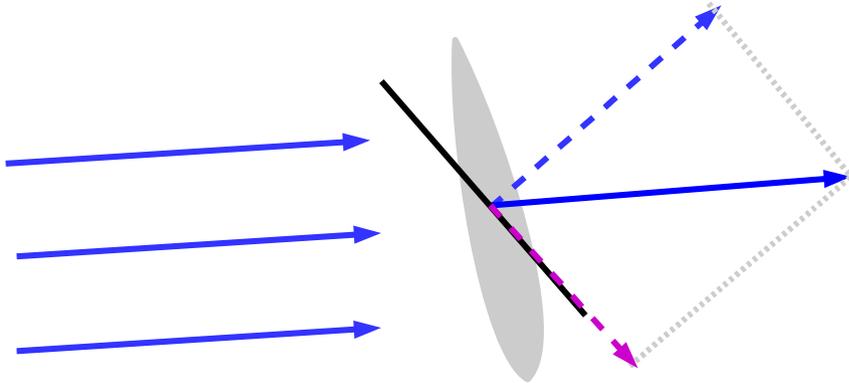
Y la suma de la componente tangencial y la componente normal es

$$(\sqrt{3}/4 g, -1/4 g) + (-\sqrt{3}/4 g, -3/4 g) = (0, -g)$$

Aplicación: Un modelo simplificado de un velero:

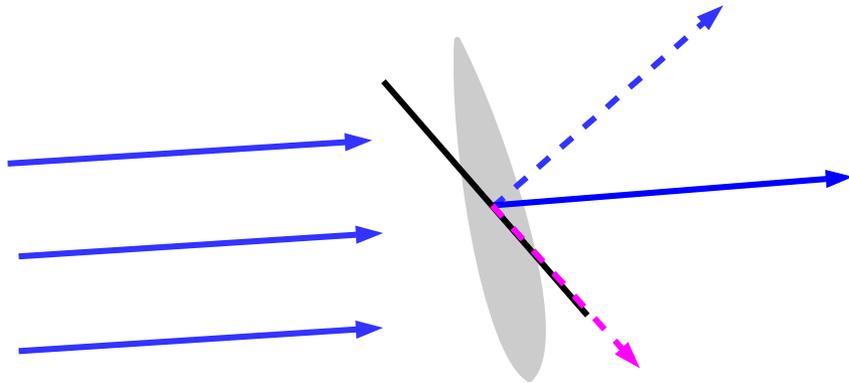


## Aplicación: Un modelo simplificado de un velero:

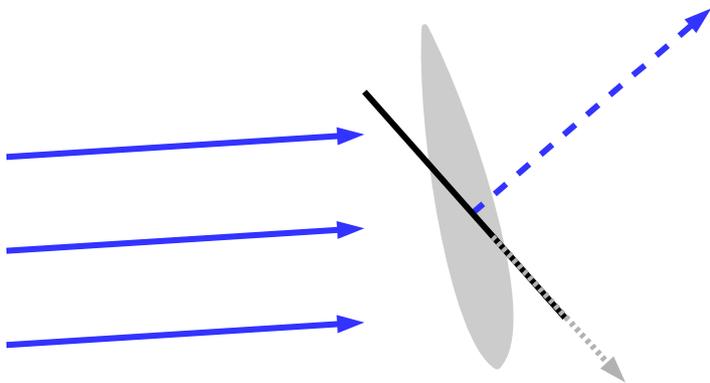


La fuerza del viento se descompone en una componente ortogonal a la vela, que empuja a la vela, y otra componente en la dirección de la vela, que se pierde.

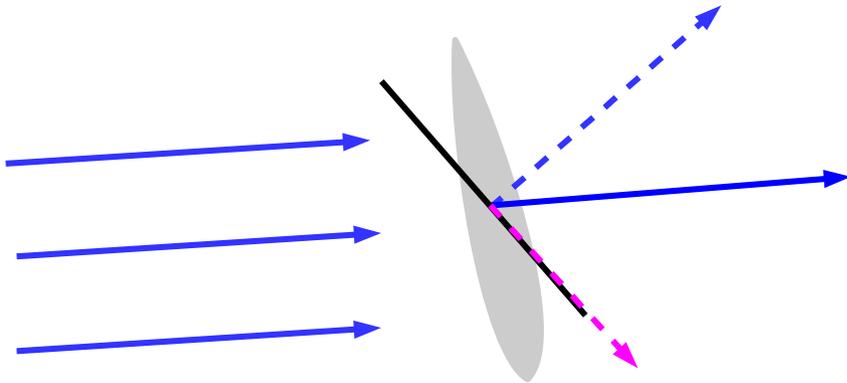
## Aplicación: Un modelo simplificado de un velero:



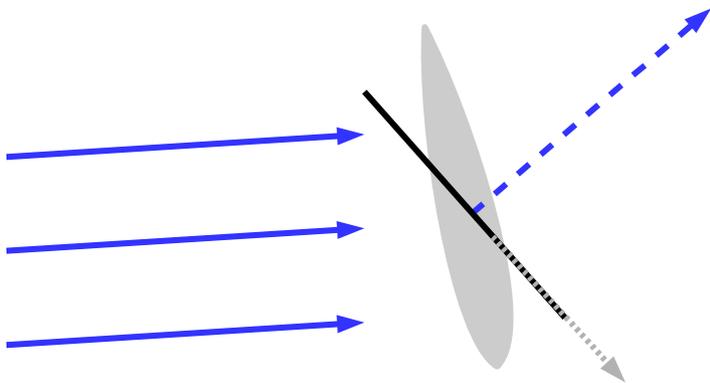
La fuerza del viento se descompone en una componente ortogonal a la vela, que empuja a la vela, y otra componente en la dirección de la vela, que se pierde.



## Aplicación: Un modelo simplificado de un velero:

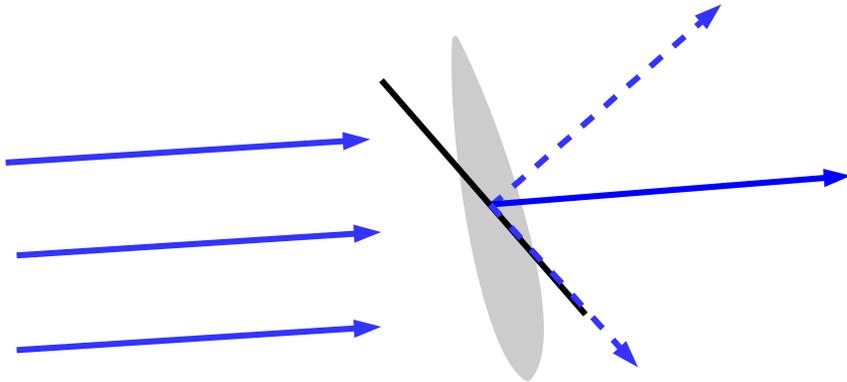


La fuerza del viento se descompone en una componente ortogonal a la vela, que empuja a la vela, y otra componente en la dirección de la vela, que se pierde.

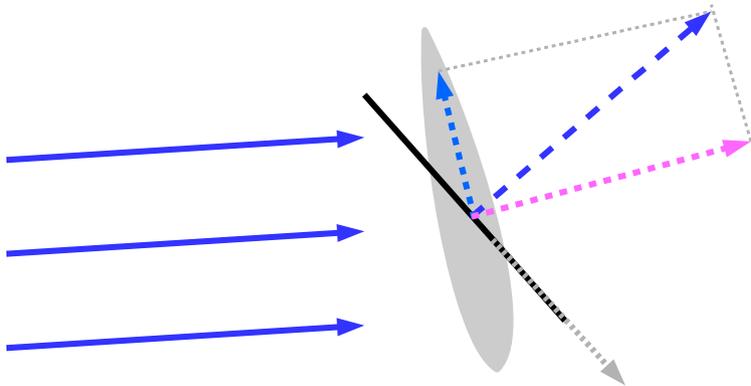


La fuerza que empuja a la vela se descompone a su vez en una componente en la dirección del barco, que impulsa al barco, y una componente ortogonal a la dirección del barco, que es absorbida por la quilla.

## Aplicación: Un modelo simplificado de un velero:

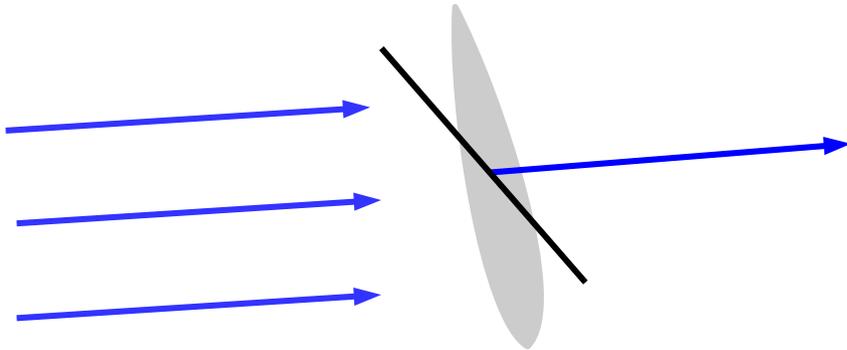


La fuerza del viento se descompone en una componente ortogonal a la vela, que empuja a la vela, y otra componente en la dirección de la vela, que se pierde.

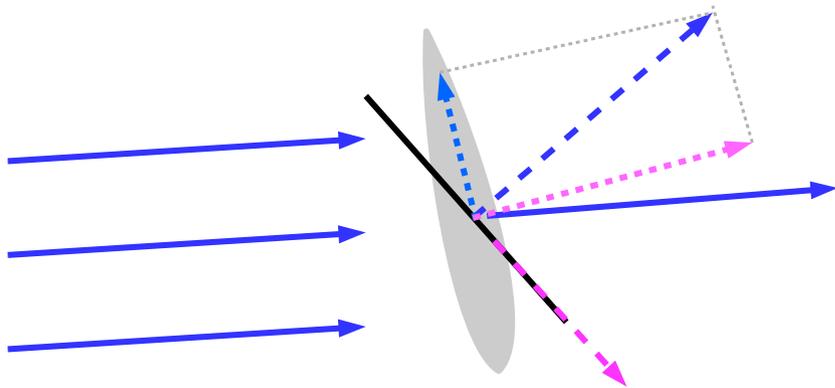


La fuerza que empuja a la vela se descompone a su vez en una componente en la dirección del barco, que impulsa al barco, y una componente ortogonal a la dirección del barco, que es absorbida por la quilla.

## Aplicación: Un modelo simplificado de un velero:



La fuerza del viento se descompone en una componente ortogonal a la vela, que empuja a la vela, y otra componente en la dirección de la vela, que se pierde.

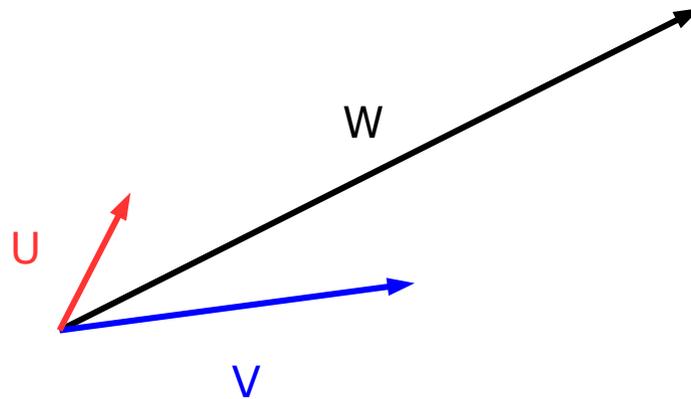


La fuerza que empuja a la vela se descompone a su vez en una componente en la dirección del barco, que impulsa al barco, y una componente ortogonal a la dirección del barco, que es absorbida por la quilla.

Con este modelo se puede mostrar que un velero puede avanzar casi en la dirección opuesta al viento, si se coloca la vela en una dirección apropiada.

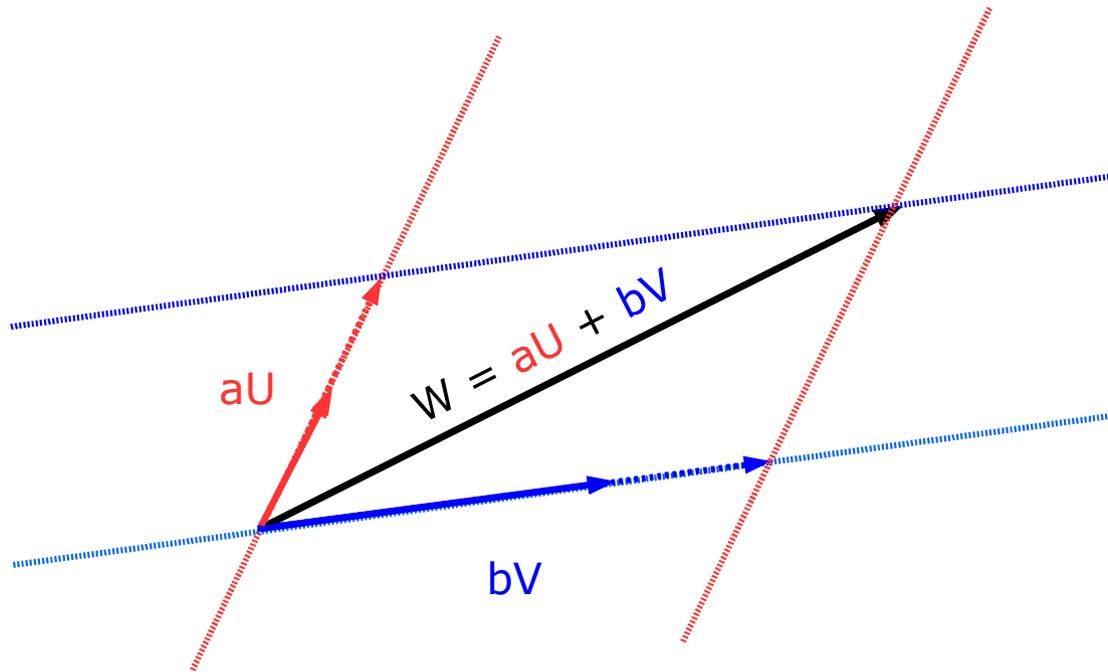
# Combinaciones lineales

Si  $U$  y  $V$  son dos vectores del plano en distintas direcciones entonces cualquier vector del plano puede descomponerse como suma de un múltiplo de  $U$  y un múltiplo de  $V$ .

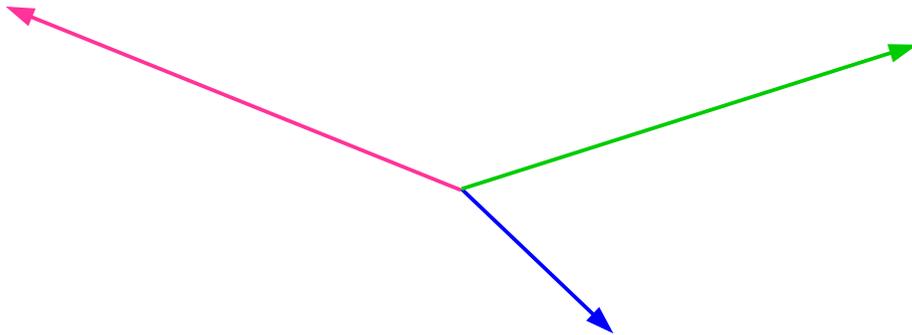


Si  $U$  y  $V$  son dos vectores del plano en distintas direcciones (perpendiculares o no) entonces cualquier vector  $W$  del plano puede descomponerse como suma de un múltiplo de  $U$  y un múltiplo de  $V$ .

Esto puede verse trazando líneas paralelas a los vectores  $U$  y  $V$  por el punto donde termina  $W$ :

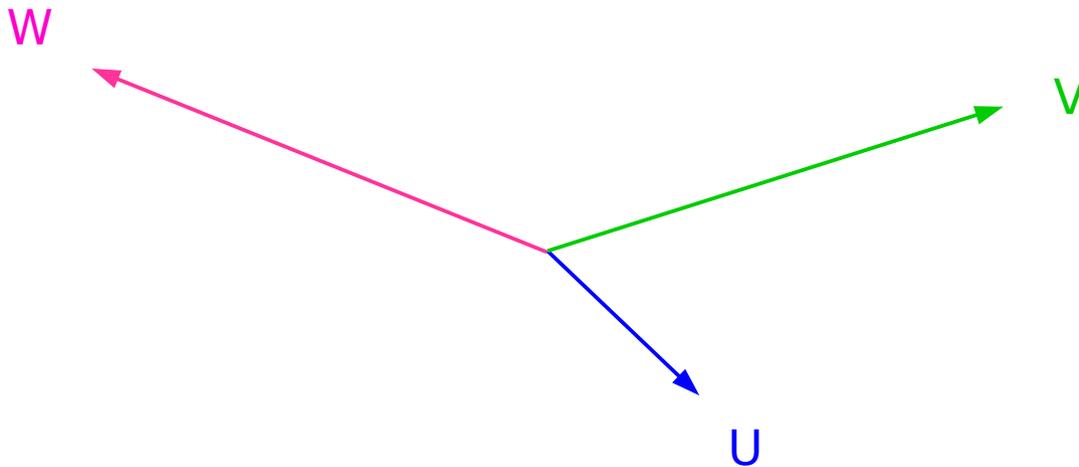


Cuando  $W$  se puede escribir como la suma de un múltiplo de  $U$  y un múltiplo de  $V$  decimos que  $W$  es una **combinación lineal** de  $U$  y  $V$ .

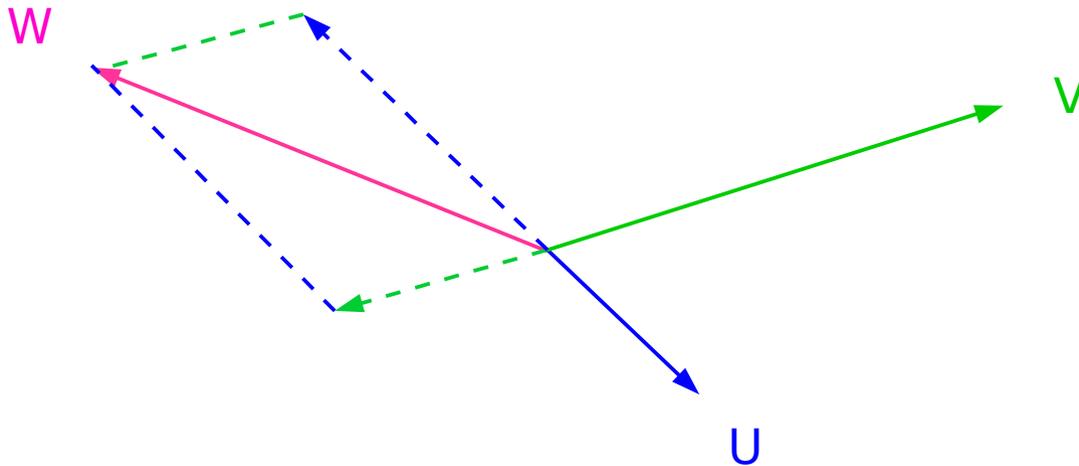


Cuando  $W$  se puede escribir como la suma de un múltiplo de  $U$  y un múltiplo de  $V$  decimos que  $W$  es una **combinación lineal** de  $U$  y  $V$ .

¿ $W$  es combinación lineal de  $U$  y  $V$ ?



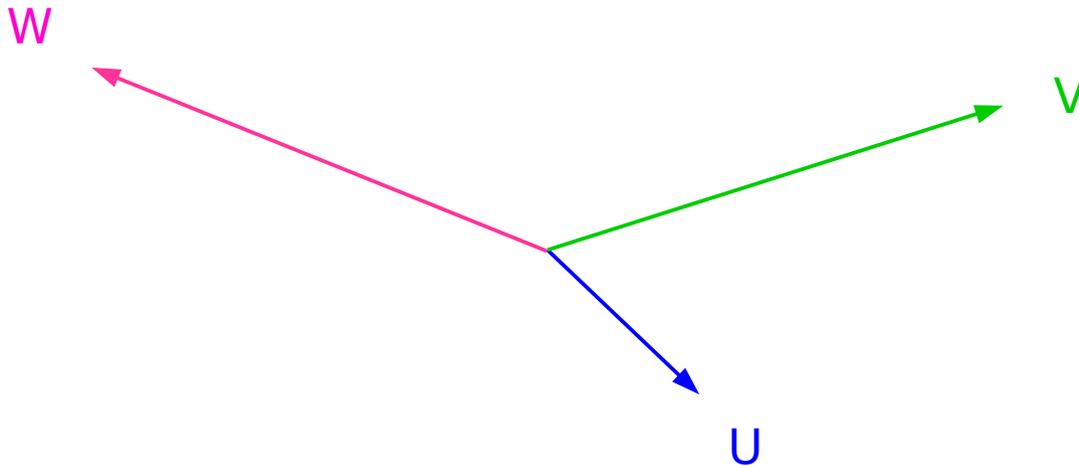
Cuando  $W$  se puede escribir como la suma de un múltiplo de  $U$  y un múltiplo de  $V$  decimos que  $W$  es una **combinación lineal** de  $U$  y  $V$ .



*Podemos hallar la combinación usando paralelas*

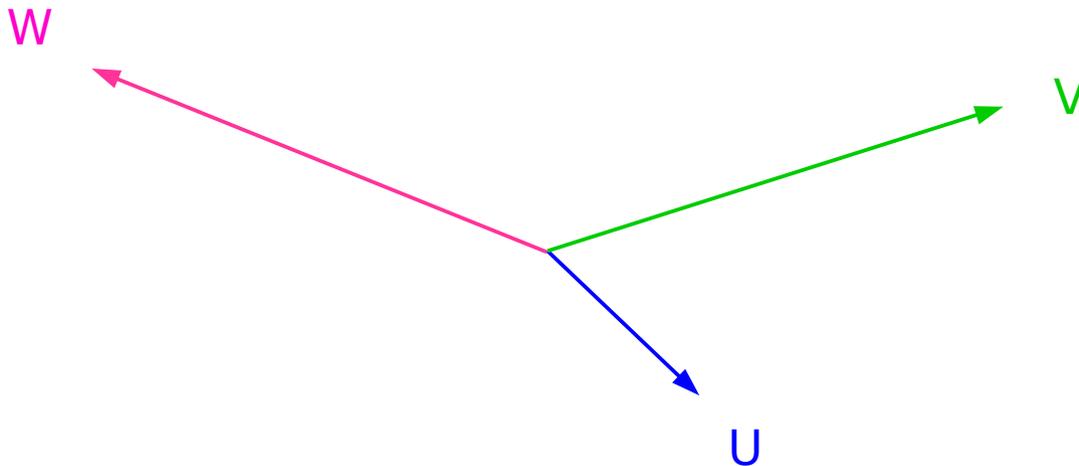
Cuando  $W$  se puede escribir como la suma de un múltiplo de  $U$  y un múltiplo de  $V$  decimos que  $W$  es una **combinación lineal** de  $U$  y  $V$ .

*¿Podremos hallar la combinación usando proyecciones?*



Cuando  $W$  se puede escribir como la suma de un múltiplo de  $U$  y un múltiplo de  $V$  decimos que  $W$  es una **combinación lineal** de  $U$  y  $V$ .

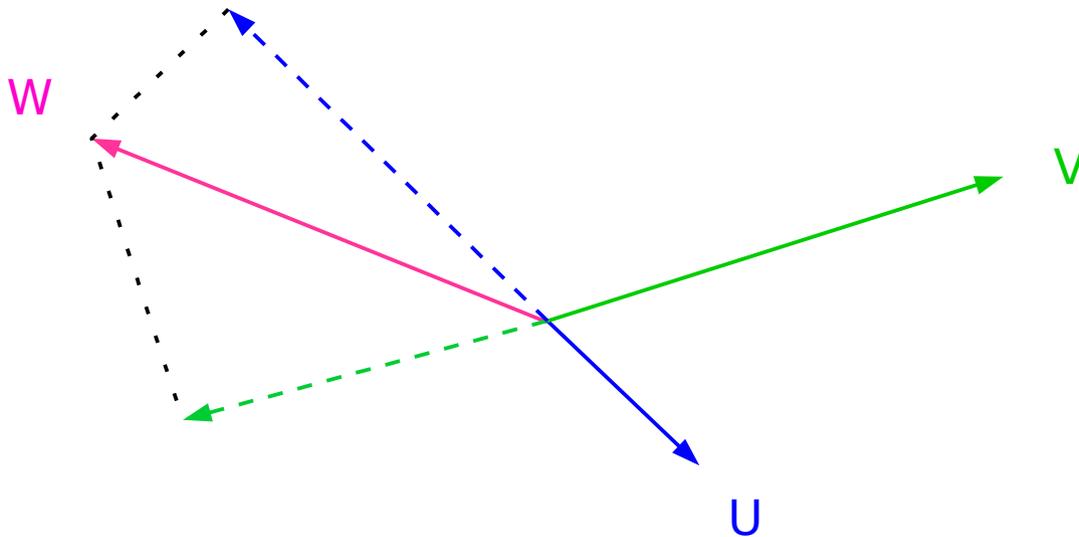
*¿Podremos hallar la combinación usando proyecciones?*



Si  $U$  y  $V$  son perpendiculares entonces  $W$  es la suma de sus proyecciones en las direcciones de  $U$  y  $V$ .

Cuando  $W$  se puede escribir como la suma de un múltiplo de  $U$  y un múltiplo de  $V$  decimos que  $W$  es una **combinación lineal** de  $U$  y  $V$ .

*¿Podremos hallar la combinación usando proyecciones?*



Si  $U$  y  $V$  no son perpendiculares entonces  $W$  **no** es la suma de sus proyecciones en las direcciones de  $U$  y  $V$  y hay que hallar la descomposición de otra forma.

**Ejercicio.** Descomponer al vector  $(6,7)$  como combinación lineal de  $(1,2)$  y  $(3,4)$ .

**Ejercicio.** Descomponer al vector  $(6,7)$  como combinación lineal de  $(1,2)$  y  $(3,4)$ .

Buscamos dos números reales  $a$  y  $b$  tales que  $(6,7) = a(1,2) + b(3,4)$ .

$$(a+3b, 2a+4b) = (6,7)$$

**Ejercicio.** Descomponer al vector  $(6,7)$  como combinación lineal de  $(1,2)$  y  $(3,4)$ .

Buscamos dos números reales  $a$  y  $b$  tales que  $(6,7) = a(1,2) + b(3,4)$ .

$$(a+3b, 2a+4b) = (6,7)$$

$$a+3b = 6 \quad \rightarrow \quad 2a+6b = 12 \quad \quad 4a+12b = 24$$

$$2a+4b = 7 \quad \rightarrow \quad 2a+4b = 7 \quad \quad 6a+12b = 21$$

$$2B = 5 \quad \quad 2a = -3$$

Así que  $b = 5/2$  y  $a = -3/2$

**Ejercicio.** Descomponer al vector  $(6,7)$  como combinación lineal de  $(1,2)$  y  $(3,4)$ .

Buscamos dos números reales  $a$  y  $b$  tales que  $(6,7) = a(1,2) + b(3,4)$ .

$$(a+3b, 2a+4b) = (6,7)$$

$$a+3b = 6 \quad \rightarrow \quad 2a+6b = 12 \quad \quad 4a+12b = 24$$

$$2a+4b = 7 \quad \rightarrow \quad 2a+4b = 7 \quad \quad 6a+12b = 21$$

$$2B = 5 \quad \quad 2a = -3$$

Así que  $b = 5/2$  y  $a = -3/2$

Podemos checar si el resultado es correcto calculando la suma:

$$-3/2(1,2) + 5/2(3,4) = (-3/2, -3) + (15/2, 10) = (6,7)$$

**Ejercicio.** ¿Que combinaciones de fuerzas en las direcciones de  $(1,4)$  y  $(1,5)$  dan por resultado fuerzas en la dirección de  $(1,0)$ ?

**Ejercicio.** ¿Que combinaciones de fuerzas en las direcciones de  $(1,4)$  y  $(1,5)$  dan por resultado fuerzas en la dirección de  $(1,0)$ ?

Buscamos números reales tales que  $a(1,4) + b(1,5) = c(1,0)$

**Ejercicio.** ¿Que combinaciones de fuerzas en las direcciones de  $(1,4)$  y  $(1,5)$  dan por resultado fuerzas en la dirección de  $(1,0)$ ?

Buscamos números reales tales que  $a(1,4) + b(1,5) = c(1,0)$

$$a + b = c \quad \rightarrow \quad a - 4/5 a = c \rightarrow 1/5 a = c \rightarrow a = 5c$$

$$4a + 5b = 0 \rightarrow b = -4/5 a \quad \rightarrow \quad b = -4c$$

Así que las combinaciones buscadas son de la forma

$$5c(1,4) - 4c(1,5) = c(1,0)$$

**Ejercicio.** ¿Que combinaciones de fuerzas en las direcciones de  $(1,4)$  y  $(1,5)$  dan por resultado fuerzas en la dirección de  $(1,0)$ ?

Buscamos números reales tales que  $a(1,4) + b(1,5) = c(1,0)$

$$\begin{aligned} a + b &= c && \rightarrow a - \frac{4}{5}a = c \rightarrow \frac{1}{5}a = c \rightarrow a = 5c \\ 4a + 5b &= 0 && \rightarrow b = -\frac{4}{5}a && \rightarrow b = -4c \end{aligned}$$

Así que las combinaciones buscadas son de la forma

$$5c(1,4) - 4c(1,5) = c(1,0)$$

Podemos comprobar el resultado sumando:

$$5c(1,4) - 4c(1,5) = (5c - 4c, 20c - 20c) = (c, 0)$$