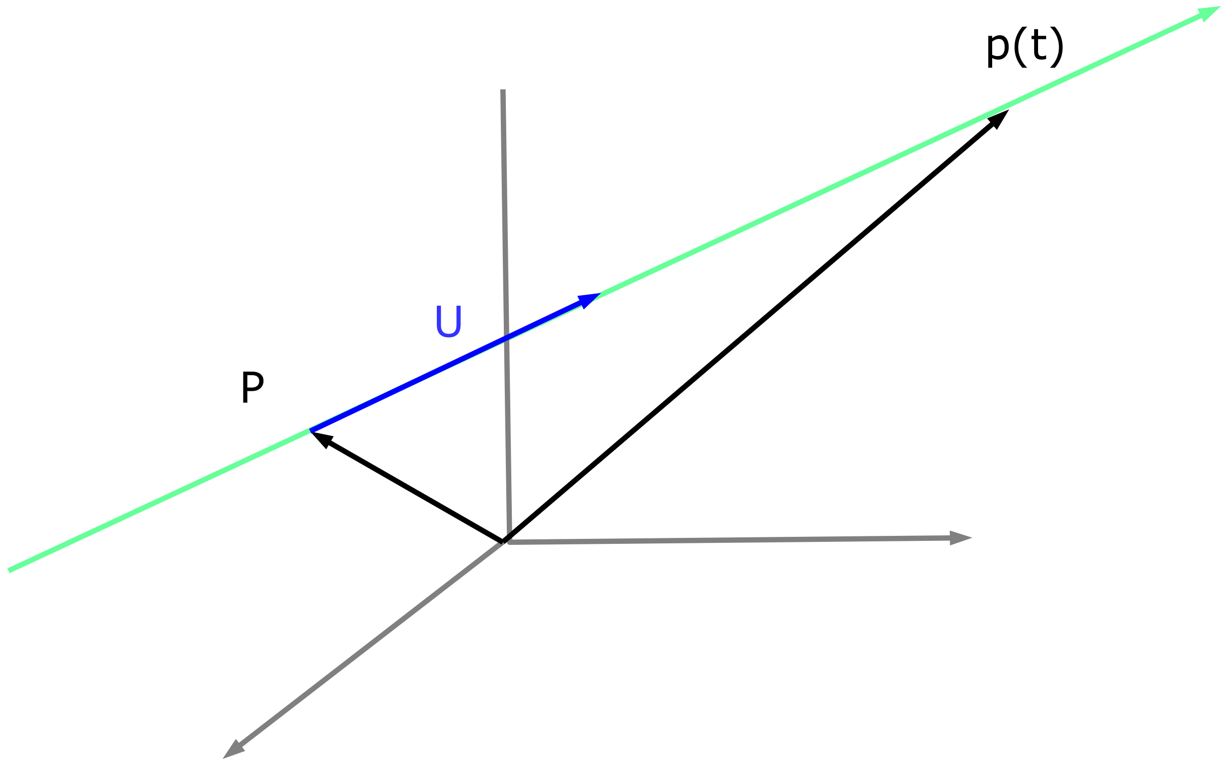
Rectas y planos en el espacio

Podemos describir a las rectas y planos en el espacio de distintas maneras.

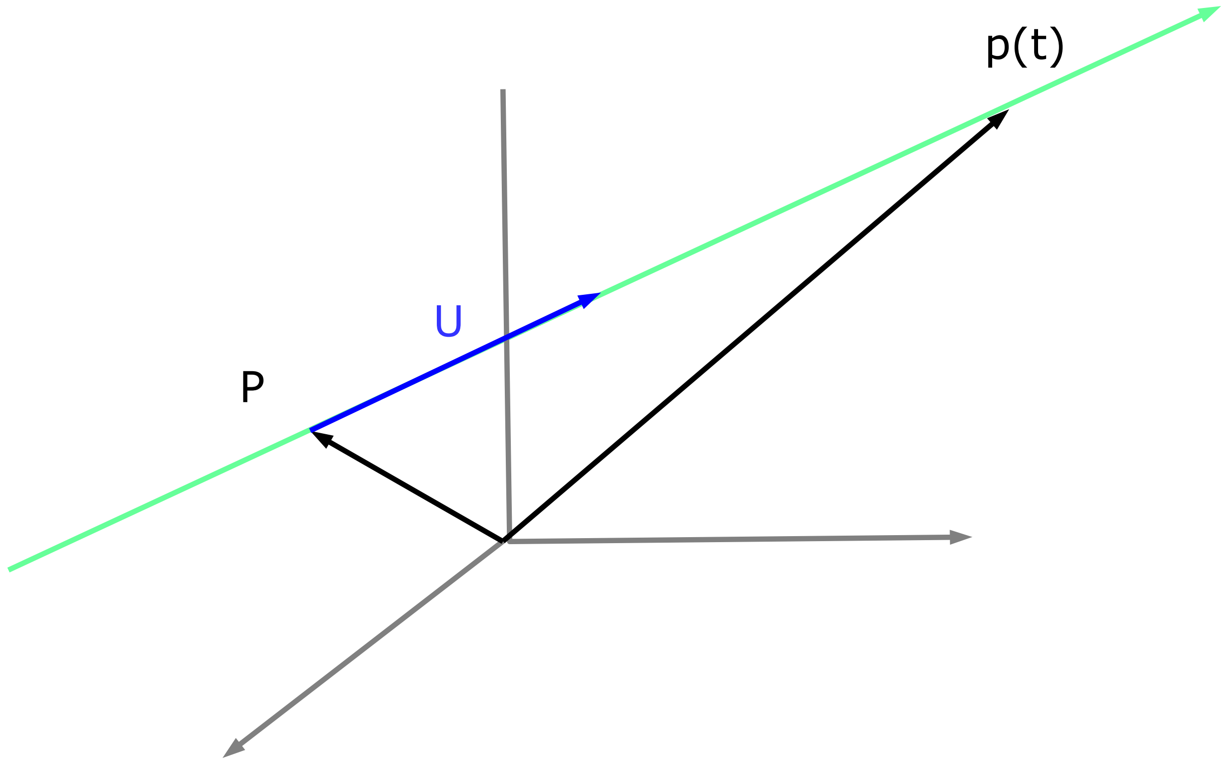
- Por medio de **parametrizaciones**, que dan los puntos explícitamente, en términos de algunos parámetros.

- Por medio de **ecuaciones**, que son las relaciones implícitas entre las coordenadas de los puntos.

Los puntos de cualquier recta en el espacio son de la forma
P(t)=P+tU   donde P es punto de la recta y U es un vector en la recta.



Los puntos de cualquier recta en el espacio son de la forma $P(t)=P+tU$ donde P es punto de la recta y U es un vector en la recta.



Esta es una **parametrización** de la recta: todos los puntos están dados en función del parámetro t..

Cada recta tiene una infinidad de parametrizaciones, ya que podemos empezar en cualquier punto de la recta y usar cualquier vector en la dirección de la recta.

Ejercicio. Da una parametrización de la recta que pasa por los puntos (1,4,2) y (3,0,5).

Ejercicio. Da una parametrización de la recta que pasa por los puntos (1,4,2) y (3,0,5).

La recta tiene la dirección del vector $(3,0,5)-(1,4,2)= (2,-4,3)$

así que puede parametrizarse como

$P(t) = (1,4,2) + t\,(2,-4,3) = (2t+1,-4t+4,3t+2)$

Ejercicio. Da una parametrización de la recta que pasa por los puntos (1,4,2) y (3,0,5).

La recta tiene la dirección del vector (3,0,5)-(1,4,2)= (2,-4,3)

así que puede parametrizarse como

$P(t) = (1,4,2) + t\,(2,-4,3) = (2t+1,-4t+4,3t+2)$

¿El punto (-3,12,-4) está o no está en la recta?

Ejercicio. Da una parametrización de la recta que pasa por los puntos (1,4,2) y (3,0,5).

La recta tiene la dirección del vector (3,0,5)-(1,4,2)= (2,-4,3)

así que puede parametrizarse como

$P(t) = (1,4,2) + t\,(2,-4,3) = (2t+1,-4t+4,3t+2)$

¿El punto (-3,12,-4) está o no está en la recta?

Hay que ver si hay algún valor del parámetro da ese punto.

Cuando $t=-2$, $(2t+1,-4t+4,3t+2)=(-3,12,-4)$ así que sí está.

Todos los conjuntos de la forma

$\{(at+b,ct+d,et+f) \,/\, t \in \mathbf{R}\}$

corresponden a rectas que tienen la dirección del vector (a,c,e).

Todos los conjuntos de la forma

$\{(at+b,ct+d,et+f) \ / \ t \in \mathbf{R}\}$

corresponden a rectas que tienen la dirección del vector (a,c,e).

Ejemplo.
Los puntos de la forma
(1+2t,4t+5,3-3t) forman una recta

que pasa por el punto...

y tiene la dirección del vector...

Todos los conjuntos de la forma

$\{(at+b,ct+d,et+f) \;/\; t \in \mathbf{R}\}$

corresponden a rectas que tienen la dirección del vector (a,c,e).

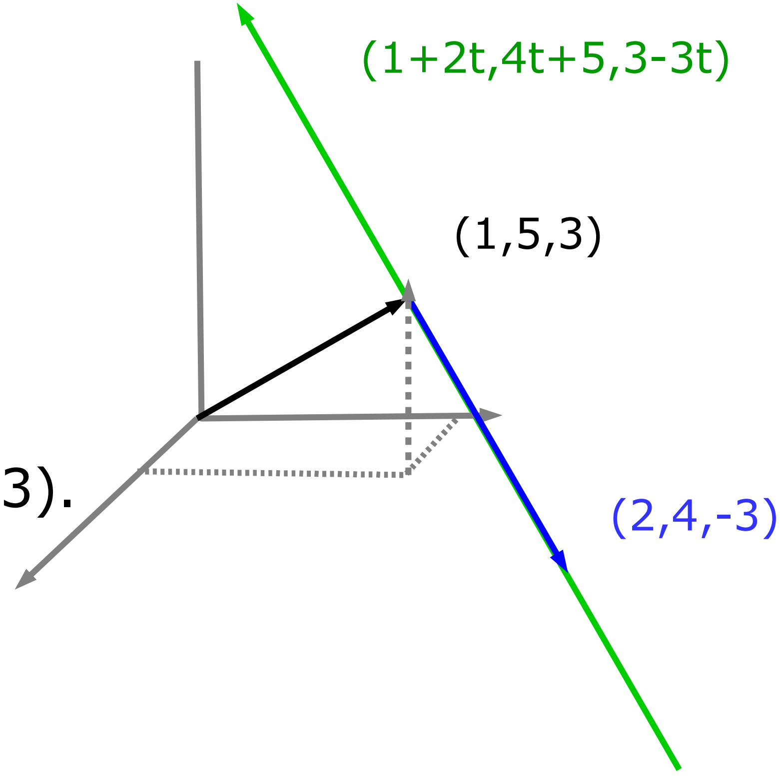
Ejemplo.

Los puntos de la forma

(1+2t,4t+5,3-3t) forman una recta

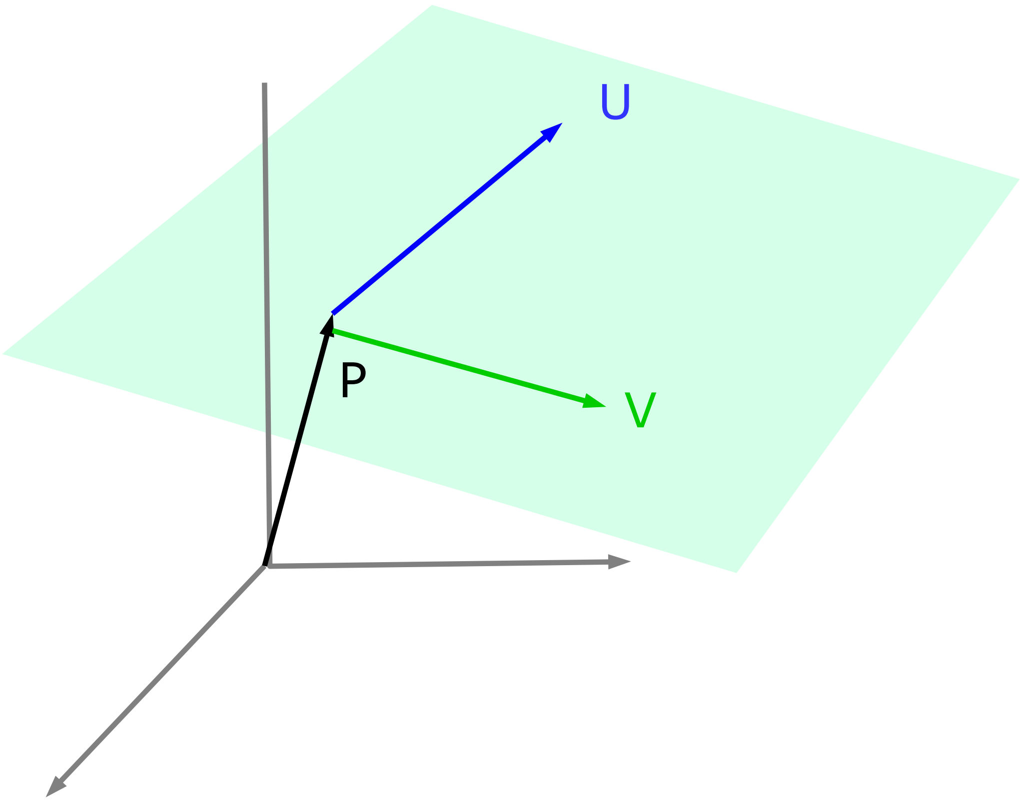
que pasa por el punto (1,5,3)

y tiene la dirección del vector (2,4,-3).



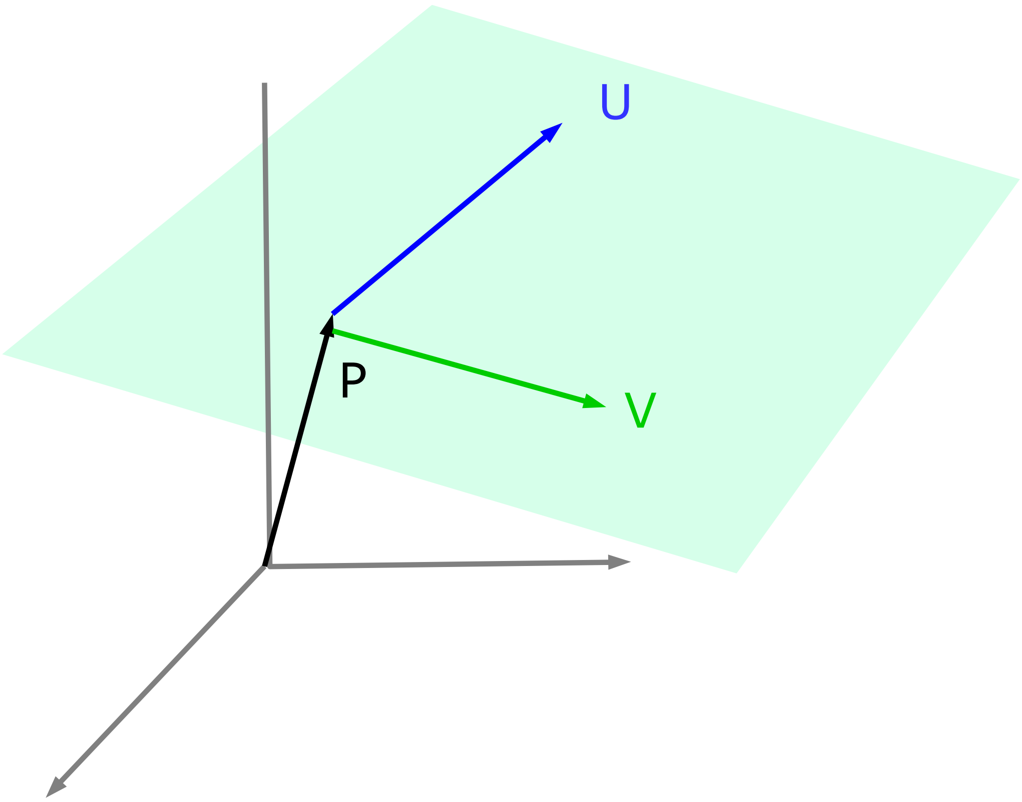
Los puntos de un plano en el espacio son de la forma

$p(t) = P + tU + sV$ donde P es un punto del plano y U y V son dos vectores no paralelos en el plano.



Los puntos de un plano en el espacio son de la forma

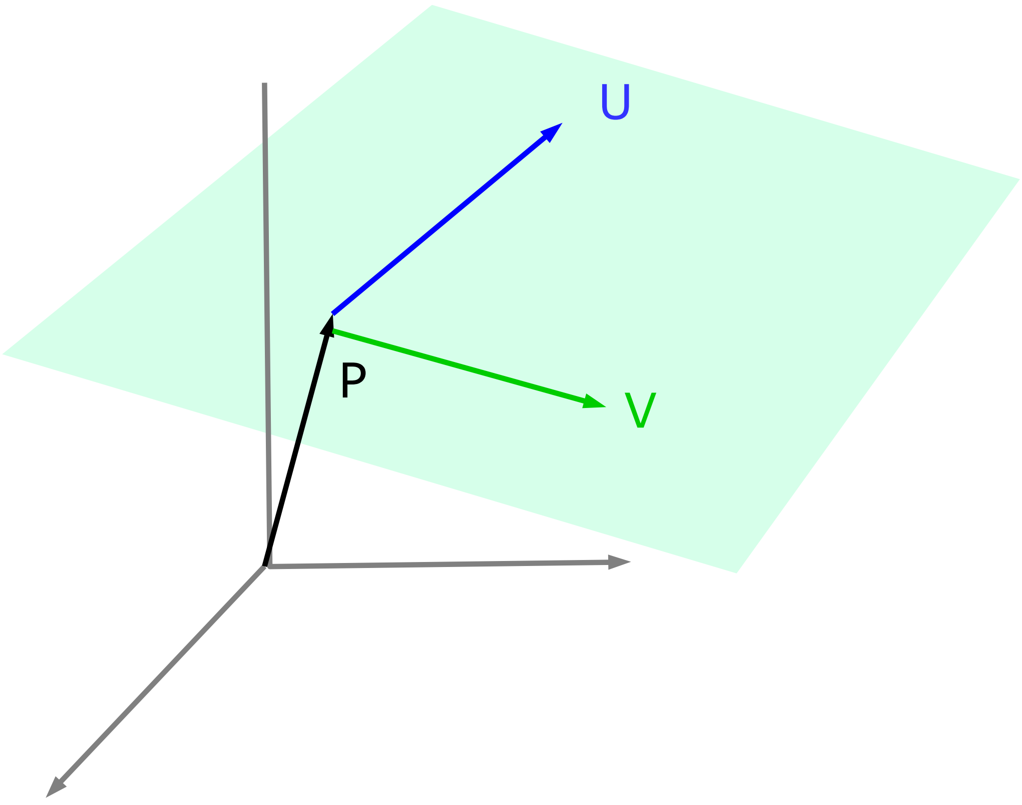
$p(t) = P + tU + sV$ donde P es un punto del plano y U y V son dos vectores no paralelos en el plano.



Esta es una **parametrización** del plano: todos sus puntos están dados en función de los parámetros s y t.

Los puntos de un plano en el espacio son de la forma

$p(t) = P + tU + sV$ donde P es un punto del plano y U y V son dos vectores no paralelos en el plano.



Cada plano tiene una infinidad de parametrizaciones, ya que podemos tomar a cualquier punto del plano y a cualquier par de vectores no paralelos.

Ejercicio. Hallar una parametrización del plano que pasa por los puntos (1,0,0) y (0,2,0) y (0,0,3)

Ejercicio. Hallar una parametrización del plano que pasa por los puntos (1,0,0) y (0,2,0) y (0,0,3).

Necesitamos dos vectores no paralelos en el plano. Podemos tomar

$(0,2,0)-(1,0,0) = (-1,2,0)$ y

$(0,0,3)-(1,0,0) = (-1,0,3)$

Una parametrización del plano es

$P(s,t) = (1,0,0) + s\,(-1,2,0) + t\,(-1,0,3) = (1-s-t,2s,3t)$

Otra parametrización es

$Q(u,v) = (0,2,0) + u\,(1,0,-3) + v\,(0,-2,3) = (u,2-2v,-3u+3v)$

Un mismo plano tiene parametrizaciones muy distintas.

¿Tendrán algo en común?

¿O como podemos saber si 2 parametrizaciones corresponden al mismo plano o no?

Ejemplo. ¿Las siguientes parametrizaciones corresponden o no al mismo plano?

$P(t,s) = (t,s,t+s)$

$Q(u,v) = (u+v,u-v,2u)$

$R(q,r) = (q+r,q,r)$

Ejemplo. ¿Las siguientes parametrizaciones corresponden o no al mismo plano?

$P(t,s) = (t,s,t+s)$

$Q(u,v) = (u+v,u-v,2u)$

$R(q,r) = (q+r,q,r)$

Hay relaciones entre las coordenadas (x,y,z) de los puntos de un plano que no dependen de los parámetros:

Ejemplo. ¿Las siguientes parametrizaciones corresponden o no al mismo plano?

$P(t,s) = (t,s,t+s)$

$Q(u,v) = (u+v,u-v,2u)$

$R(q,r) = (q+r,q,r)$

Hay relaciones entre las coordenadas (x,y,z) de los puntos de un plano que no dependen de los parámetros:

En las dos primeras $x+y=z$

Y en la tercera $y+z=x$

Estas relaciones son las **ecuaciones cartesianas** de los planos.

Ejemplo. ¿Las siguientes parametrizaciones corresponden o no al mismo plano?

$P(t,s) = (t,s,t+s)$

$Q(u,v) = (u+v,u-v,2u)$

$R(q,r) = (q+r,q,r)$

Hay relaciones entre las coordenadas (x,y,z) de los puntos de un plano que no dependen de los parámetros:

En las dos primeras $x+y=z$ así que las dos primeras corresponden al mismo plano.

Y en la tercera $y+z=x$ que es una relación distinta, así que corresponde a otro plano.

Estas relaciones son las **ecuaciones cartesianas** de los planos.

Ejercicio. ¿Que ecuación cumplen los puntos del plano que pasa por (1,0,0) y (0,2,0) y (0,0,3)?

Ejercicio. ¿Que ecuación cumplen los puntos del plano que pasa por (1,0,0) y (0,2,0) y (0,0,3)?

Los puntos del plano son de la forma $p(s,t)=(1-s-t,2s,3t)$

Ejercicio. ¿Que ecuación cumplen los puntos del plano que pasa por (1,0,0) y (0,2,0) y (0,0,3)?

Los puntos del plano son de la forma $p(s,t)=(1-s-t,2s,3t)$

$$\begin{array}{lll}
x = 1-s-t & \longrightarrow & x = 1 - y/2 - z/3 \\
y = 2s & \longrightarrow & s = y/2 \\
z = 3t & \longrightarrow & t = z/3
\end{array}$$

$$x + y/2 + z/3 = 1$$

Ejemplo. ¿El punto (0,-2,6) esta en el plano que pasa por (1,0,0), (0,2,0) y (0,0,3)?

.

Ejemplo. ¿El punto (0,-2,6) esta en el plano que pasa por (1,0,0), (0,2,0) y (0,0,3)?

- Podemos ver si existen s y t tales que

  $P(s,t)=(1-s-t,2s,3t)=(0,-2,6)$

  Para esto debe ocurrir que $0=1-s-t$ $\quad -2=2s$ $\quad 6=3t$

  de donde $s=-1$ y $t=2$

  Y se comprueba $P(-1,2) = (1-(-1)-(2),2(-1),3(2)) = (0,-2,3)$.

.

Ejemplo. ¿El punto (0,-2,6) esta en el plano que pasa por (1,0,0), (0,2,0) y (0,0,3)?

- Podemos ver si existen s y t tales que

  $P(s,t)=(1-s-t,2s,3t)=(0,-2,6)$

  Para esto debe ocurrir que $0=1-s-t$ $\quad -2=2s$ $\quad 6=3t$

  de donde $s=-1$ y $t=2$

  Y se comprueba $P(-1,2) = (1-(-1)-(2),2(-1),3(2)) = (0,-2,3)$.

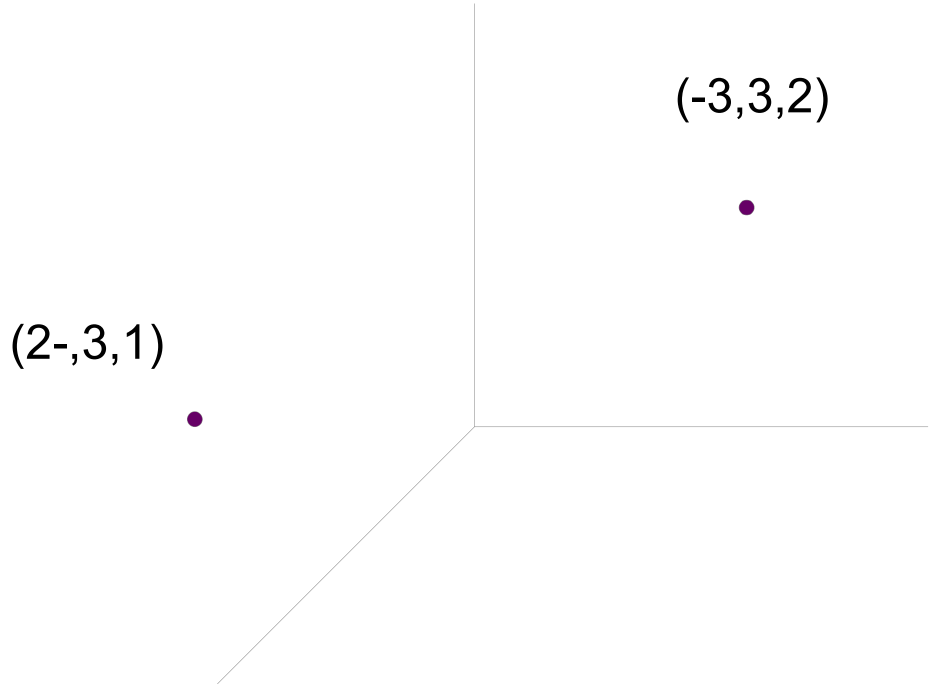
- Pero es mas sencillo es ver si (0,-2,6) cumple o no la ecuación $6x +3y + 2z = 6$.

  Como $6(0) +3(-2) + 2(6) = 6$ la ecuación se cumple y el punto sí esta en el plano.

16 junio

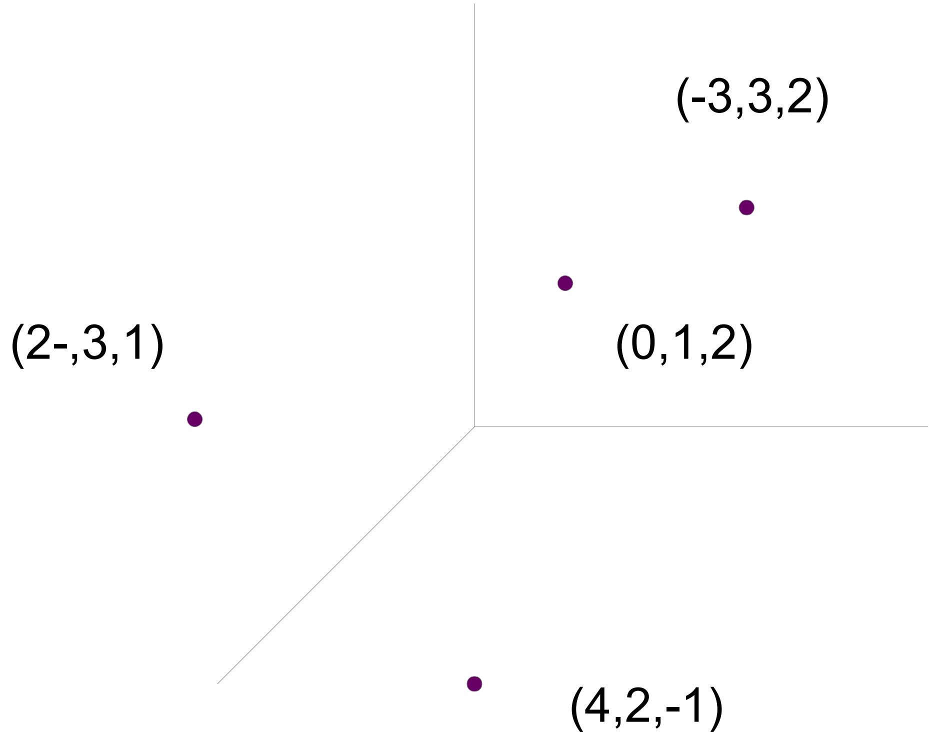
¿Como podemos describir a una recta o a un plano en el espacio R^3?

¿Como podemos describir a una recta o a un plano en el espacio R^3?



¿Como podemos describir a una recta o a un plano en el espacio R^3?

¿Como podemos describir a una recta o a un plano en el espacio R^3?



¿Como podemos describir a una recta o a un plano en el espacio R^3?

- Podemos dar sus puntos *explicitamente*, por medio de **parametrizaciones**.

¿Como podemos describir a una recta o a un plano en el espacio R^3?

- Podemos dar sus puntos *explicitamente*, por medio de **parametrizaciones**.

  Por ejemplo los puntos de la forma

  $(t+2,2t-3,-4t+5)$ con t en R forman una recta

  Y los puntos de la forma

  $(t+s,2t-s+5,3t+4s-1)$ con s, t en R forman un plano

¿Como podemos describir a una recta o a un plano en el espacio R^3?

- Podemos dar sus puntos *explicitamente*, por medio de **parametrizaciones**.

  Por ejemplo los puntos de la forma

  (t+2,2t-3,-4t+5) con t en R forman una recta

  Y los puntos de la forma

  (t+s,2t-s+5,3t+4s-1) con s, t en R forman un plano

- También podemos dar sus puntos *implicitamente*, por medio de **ecuaciones** que dicen que relaciones hay entre sus coordenadas

Ya sabemos dar parametrizaciones para rectas y planos

¿pero como son sus ecuaciones?

¿es posible hallarlas sin pasar por las parametrizaciones?

Lema. Las soluciones de cada ecuación lineal **Ax+By+Cz=D** forman un plano. Y cada plano en el espacio esta formado por las soluciones de una ecuación lineal.

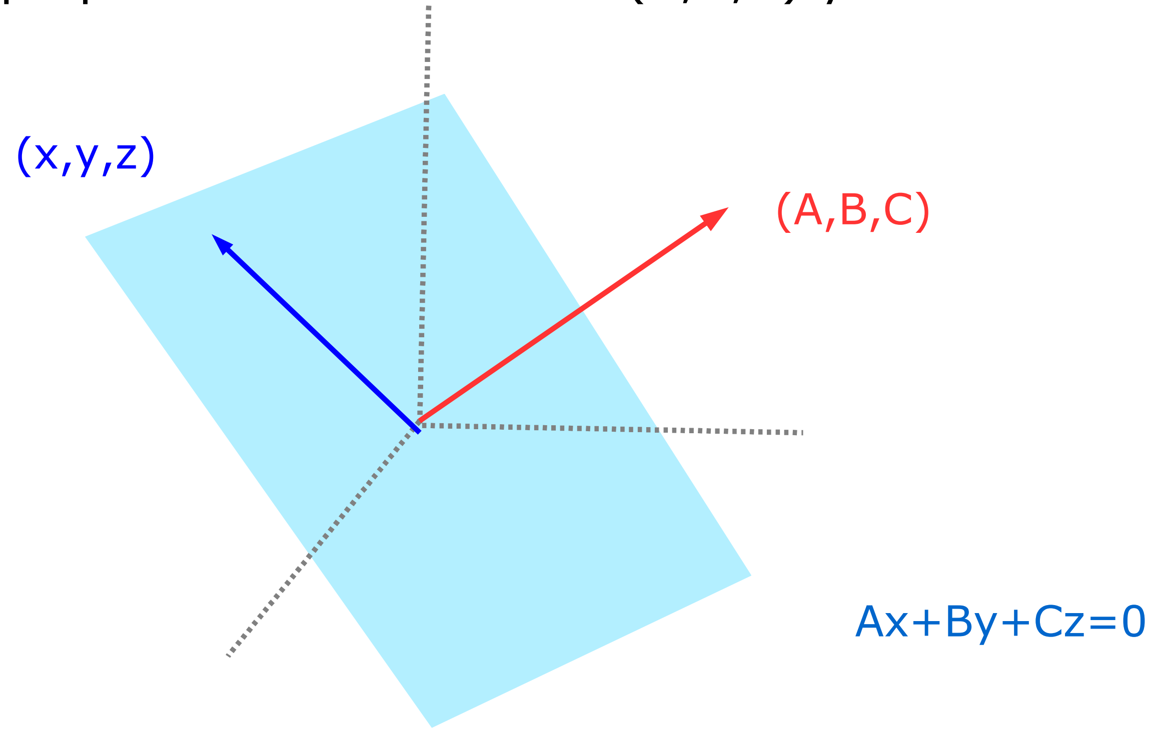
Lema. Las soluciones de cada ecuación lineal **Ax+By+Cz=D** forman un plano. Y cada plano en el espacio esta formado por las soluciones de una ecuación lineal.

Esto dice que cualquier ecuación lineal como 2x+3y+4z=5 corresponde a un plano, y que cada plano tiene una ecuación así.

Lema. Las soluciones de cada ecuación lineal **Ax+By+Cz=D** forman un plano. Y cada plano en el espacio esta formado por las soluciones de una ecuación lineal.

Demostración.

Si D= O, la ecuación Ax+By+Cz = 0 puede escribirse como (A,B,C)·(x,y,z)=0 , así que sus soluciones corresponden a los vectores (x,y,z) que son perpendiculares al vector (A,B,C) y estos vectores forman un plano.



Lema. Las soluciones de cada ecuación lineal **Ax+By+Cz=D** forman un plano. Y cada plano en el espacio esta formado por las soluciones de una ecuación lineal.

Demostración.

Consideremos ahora la ecuación $Ax+By+Cz = D$ con $D\neq 0$.

Si (x_o,y_o,z_o) es una solución de la ecuación, es decir si $Ax_o+By_o+Cz_o = D$ entonces para cualquier otra solución (x,y,z)

$$A(x-x_o)+B(y-y_o)+C(z-z_o) = 0$$

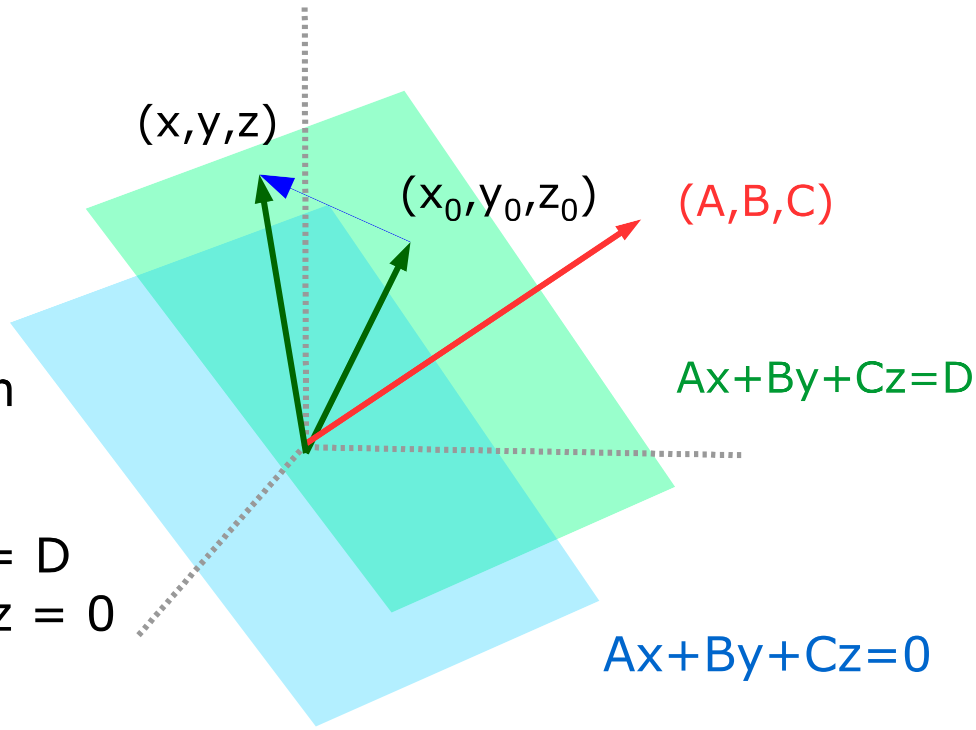
Lema. Las soluciones de cada ecuación lineal **Ax+By+Cz=D** forman un plano. Y cada plano en el espacio esta formado por las soluciones de una ecuación lineal.

Demostración.

Consideremos ahora la ecuación $Ax+By+Cz = D$ con $D \neq 0$.

Si (x_o,y_o,z_o) es una solución de la ecuación, es decir si $Ax_o+By_o+Cz_o = D$ entonces para cualquier otra solución (x,y,z)

$A(x-x_o)+B(y-y_o)+C(z-z_o) = 0$



En este caso ya sabemos que los vectores $(x-x_o,y-y_o,z-z_o)$ forman un plano, y los puntos (x,y,z) se obtienen sumándoles el vector fijo (x_o,y_o,z_o).

Así que las soluciones de $Ax+By+Cz = D$ forman un plano paralelo a $Ax+By+Cz = 0$

●

Ejemplos.

- Las soluciones de la ecuación $x+2y+3z=0$ forman un plano perpendicular al vector $(1,2,3)$ que pasa por el origen.

Ejemplos.

- Las soluciones de la ecuación $x+2y+3z=0$ forman un plano

- Las soluciones de la ecuación $x+2y+3z=4$ forman otro plano

Ejemplos.

- Las soluciones de la ecuación $x+2y+3z=0$ forman un plano perpendicular al vector $(1,2,3)$ que pasa por el origen.

- Las soluciones de la ecuación $x+2y+3z=4$ forman otro plano perpendicular al vector $(1,2,3)$ que no pasa por el origen.

  Pero pasa por $(4,0,0)$ y también por $(0,2,0)$ y por $(1,0,1)$.

Ejercicio. ¿Que ecuación tiene el plano que pasa por los puntos (1,3,2), (4,5,6) y (5,4,3)?

Ejercicio. ¿Que ecuación tiene el plano que pasa por los puntos (1,3,2), (4,5,6) y (5,4,3)?

Un punto del plano es (1,3,2).

Dos vectores del plano son

(4,5,6)-(1,3,2) = (3,2,4)

(5,4,3)-(1,3,2) = (4,1,1)

Ejercicio. ¿Que ecuación tiene el plano que pasa por los puntos (1,3,2), (4,5,6) y (5,4,3)?

Un punto del plano es (1,3,2).

Dos vectores del plano son

$(4,5,6)-(1,3,2) = (3,2,4)$

$(5,4,3)-(1,3,2) = (4,1,1)$

Un vector normal al plano es $(3,2,4)\times(4,1,1) = (-2,13,-5)$

Así que una ecuación del plano es $-2x+13y-5z=-2(1)+13(3)-5(2)=27$

Ejercicio. ¿El punto (-2.,1,-2) está el plano que pasa por los puntos (1,3,2), (4,5,6) y (5,4,3)?

Un plano tiene muchas parametrizaciones distintas.

¿También tiene distintas ecuaciones?

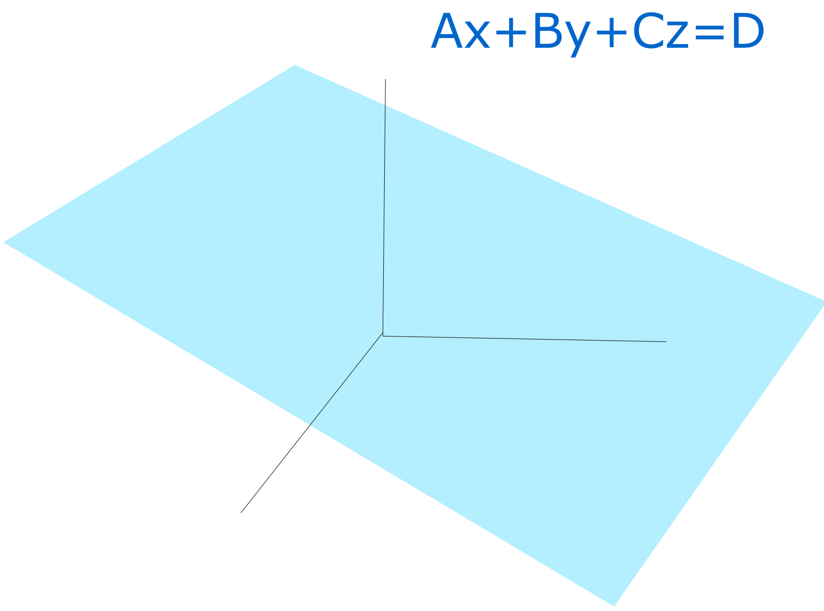
Un plano tiene muchas parametrizaciones distintas.

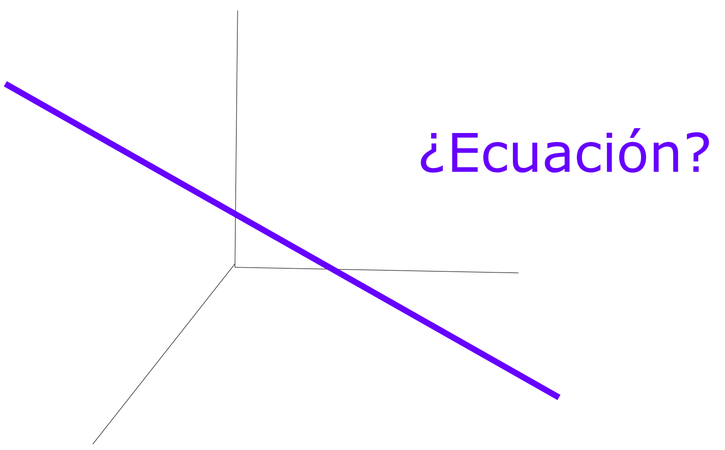
¿También tiene distintas ecuaciones?

Lema. Todas las ecuaciones lineales de un plano se obtienen multiplicando una ecuación sola por constantes.

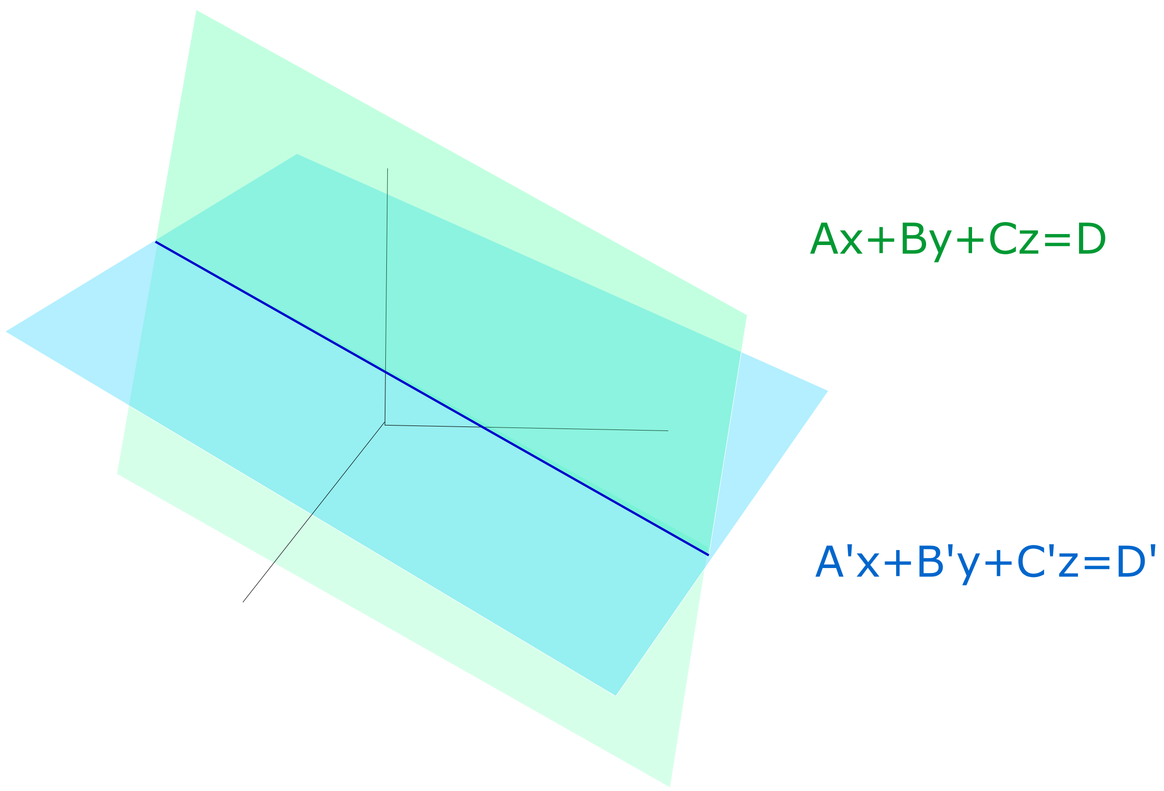
Demostración ?

Si las ecuaciones lineales en el espacio corresponden a planos, entonces ¿como son las ecuaciones de las rectas?





Como cada recta esta contenida en muchos planos, sus puntos deben satisfacer todas las ecuaciones de esos planos.



Y como cada recta es la intersección de dos planos, bastan dos ecuaciones lineales para determinar a una recta.

Ejemplo. Los puntos de la recta $(t+1,2t+4,-3t+2)$ satisfacen varias ecuaciones simultáneamente:

Ejemplo. Los puntos de la recta $(t+1,2t+4,-3t+2)$ satisfacen varias ecuaciones simultáneamente:

$2x-y=-2$ $\quad$ $3x+z=5$ $\quad$ $3y+2z=16$ $\quad$ $x+y+z=7$.

(Estas son ecuaciones de planos que contienen a la recta)

Los puntos del espacio que satisfacen cualquier par de estas ecuaciones son los puntos la recta.

Ejercicio. ¿Que ecuaciones satisfacen los puntos de la recta que pasa por (1,2,3) y (6,5,4)?

Ejercicio. ¿Que ecuaciones satisfacen los puntos de la recta que pasa por (1,2,3) y (6,5,4)?

Una manera:

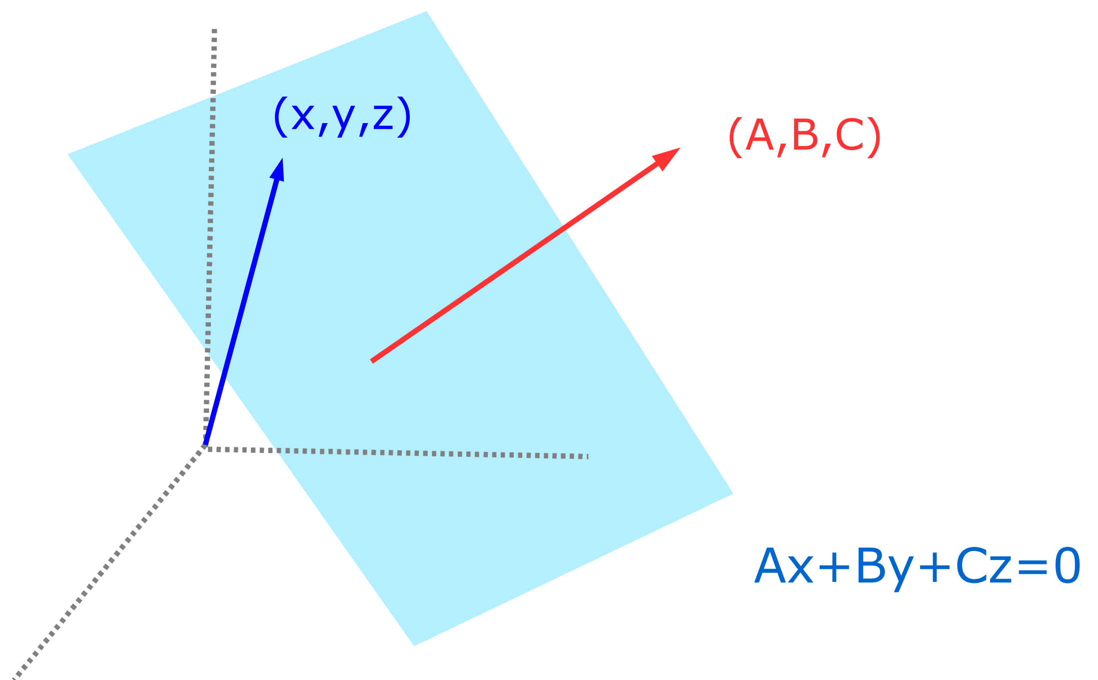
Una parametrización de la recta es

$$p(s) = (1,2,3)+s(5,4,3) = (1+5s,2+4s,3+3s)$$

Y los puntos de esta forma satisfacen varias ecuaciones, como

$$4x-5y = -6 \qquad 4z-3y = 6 \qquad 3x-5z = -12$$

Las soluciones de cada ecuación lineal **Ax+By+Cz=D** forman un plano, cuyo vector normal es /A,B,C).



Ejercicio. Dar las parametrizaciones de varias rectas en el plano

$$2x - 3y + 4z = 6$$

Ejercicio. Dar las parametrizaciones de varias rectas en el plano

$$2x - 3y + 4z = 6$$

Las rectas en el plano son perpendiculares al vector normal (2,-3,4).

Algunos vectores perpendiculares a (2,-3,4) son

(1,2,1) (3,2,0) (2,0,-1)

Algunos puntos en el plan son

(3,0,0) (1,0,1) (2,-2,-1)

Ejercicio. Dar las parametrizaciones de varias rectas en el plano

$$2x - 3y + 4z = 6$$

Las rectas en el plano son perpendiculares al vector normal (2,-3,4).

Algunos vectores perpendiculares a (2,-3,4) son

(1,2,1)   (3,2,0)   (2,0,-1)

Algunos puntos en el plan son

(3,0,0)   (1,0,1)   (2,-2,-1)

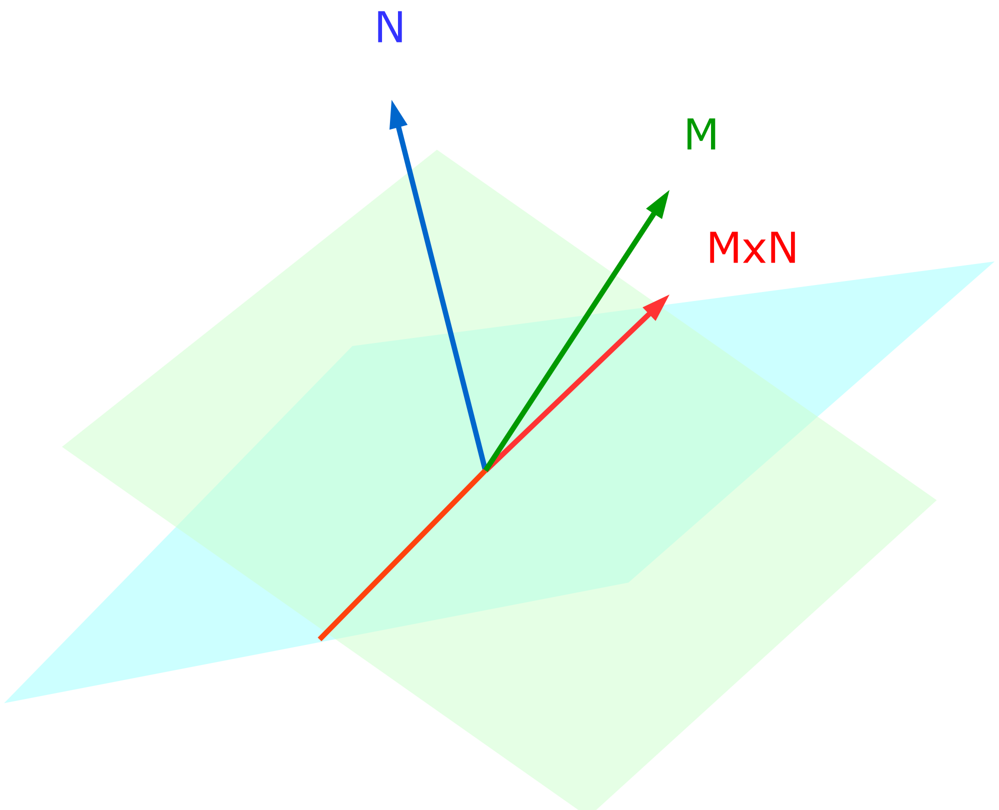
Así que algunas rectas en el plano son

$p(t)=(3,0,0)+t(1,2,1)$

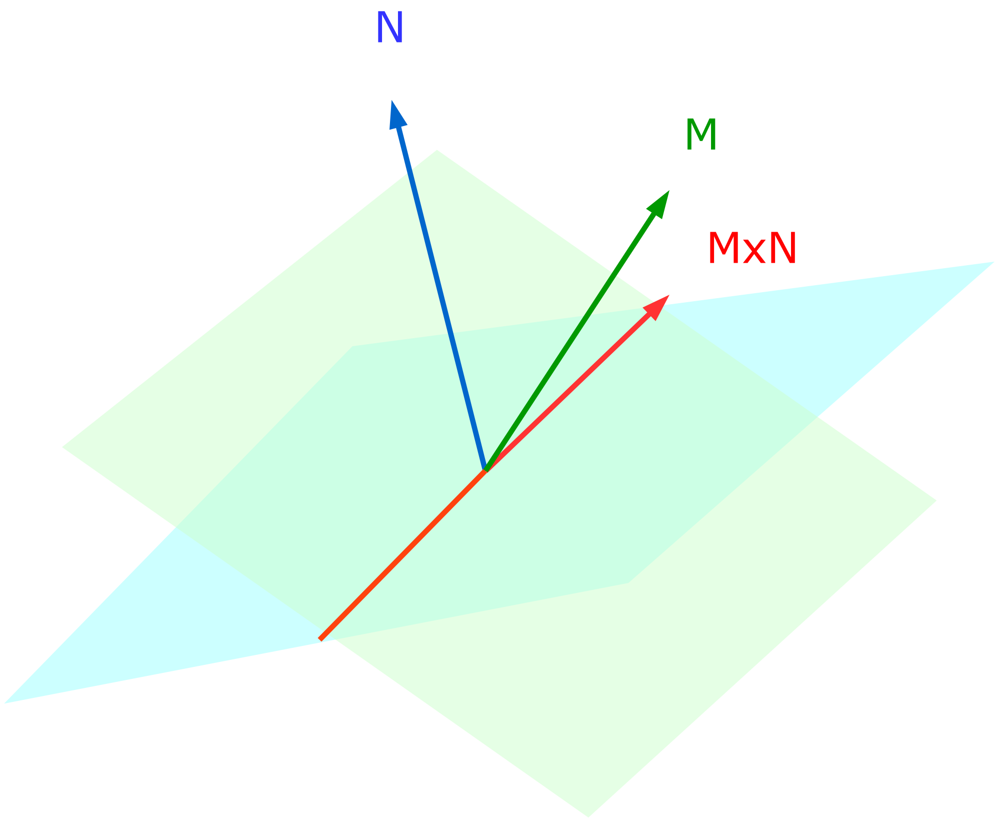
$p(r)=(1,0,1)+r(3,2,0)$

$p(s)=(2,-2-1)+s(2,0,-1)$

Lema. Si M y N son vectores normales a dos planos que se intersectan, entonces la recta de intersección tiene la dirección del vector MxN.



Lema. Si M y N son vectores normales a dos planos que se intersectan, entonces la recta de intersección tiene la dirección del vector MxN.



Demostración. Como la recta de intersección está en los dos planos entonces debe ser perpendicular a los vectores normales M y N.

La dirección perpendicular a M y N está dada por MxN. •

Ejercicio. Da una parametrización de la recta de intersección de los planos $x+2y-3z=4$ y $3x-y+4z=2$.

Ejercicio. Da una parametrización de la recta de intersección de los planos $x+2y-3z=4$ y $3x-y+4z=2$.

La recta debe ser perpendicular a los dos vectores normales a los planos, que son (1,2,-3) y (3,-1,4)

así que la recta debe tener la dirección del vector

$(1,2,-3) \times (3,-1,4) = (5,-13,-7)$.

Ejercicio. Da una parametrización de la recta de intersección de los planos $x+2y-3z=4$ y $3x-y+4z=2$.

La recta debe ser perpendicular a los dos vectores normales a los planos, que son (1,2,-3) y (3,-1,4)

así que la recta debe tener la dirección del vector

$(1,2,-3) \times (3,-1,4) = (5,-13,-7)$.

Ahora necesitamos un punto de la recta, que es una solución del sistema

$x+2y-3z=4 \qquad x+2y=1$

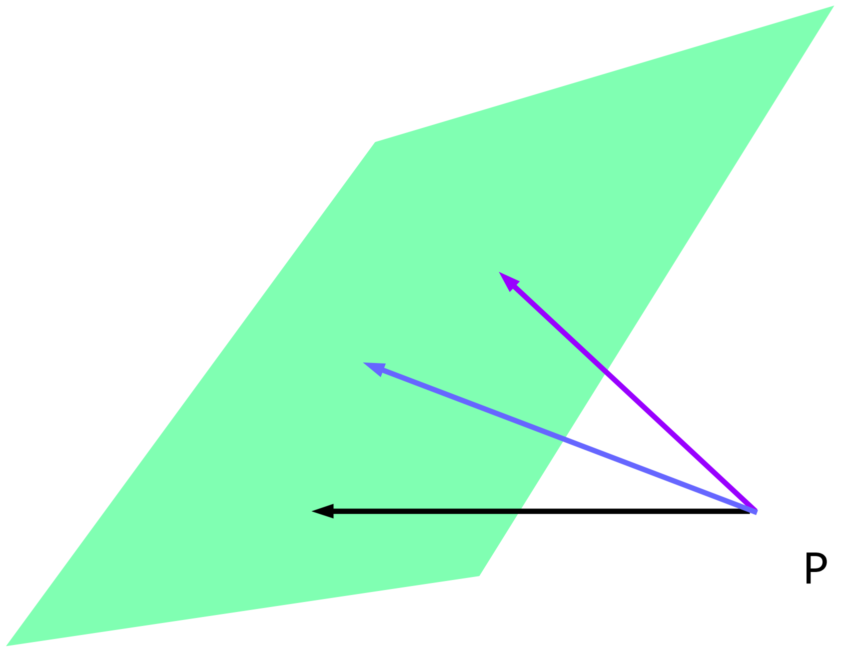
$3x-y+4z=2 \qquad 3x-y=6$

Una solución es ...

Y una parametrización de la recta es ...

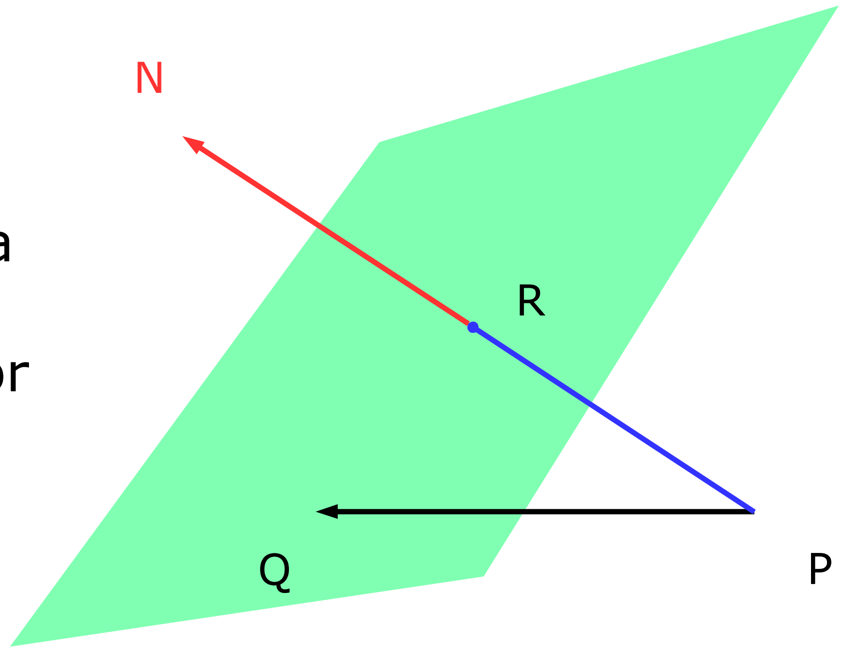
Distancias a planos y rectas en el espacio.

La distancia de un punto P a un plano es la mínima distancia que hay de P a algún punto del plano.

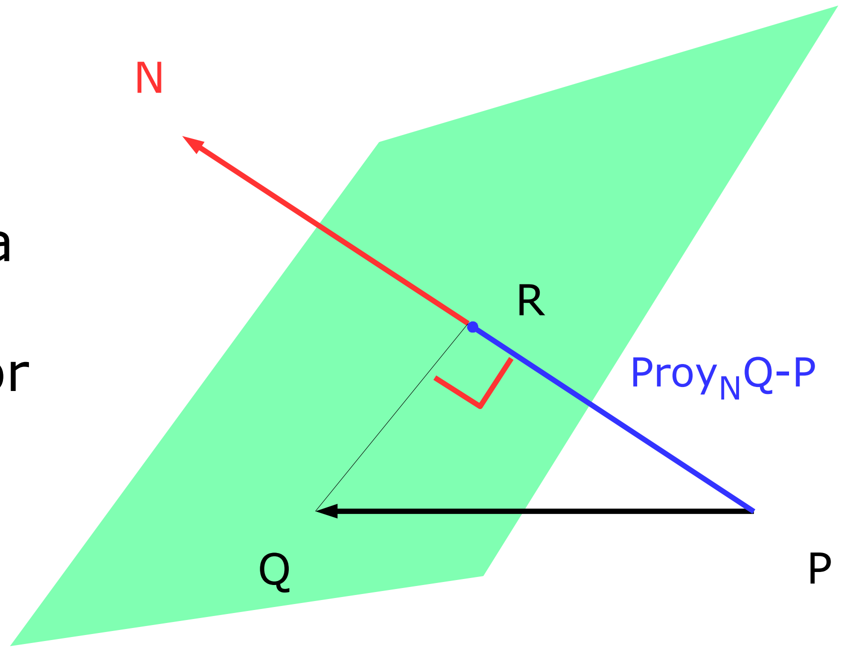


La distancia de un punto P a un plano es la mínima distancia que hay de P a algún punto del plano.

Si Q es cualquier punto del plano, la proyección del vector Q-P hacia el vector normal N normal es un vector que va de P a un punto R del plano.



La distancia de un punto P a un plano es la mínima distancia que hay de P a algún punto del plano.

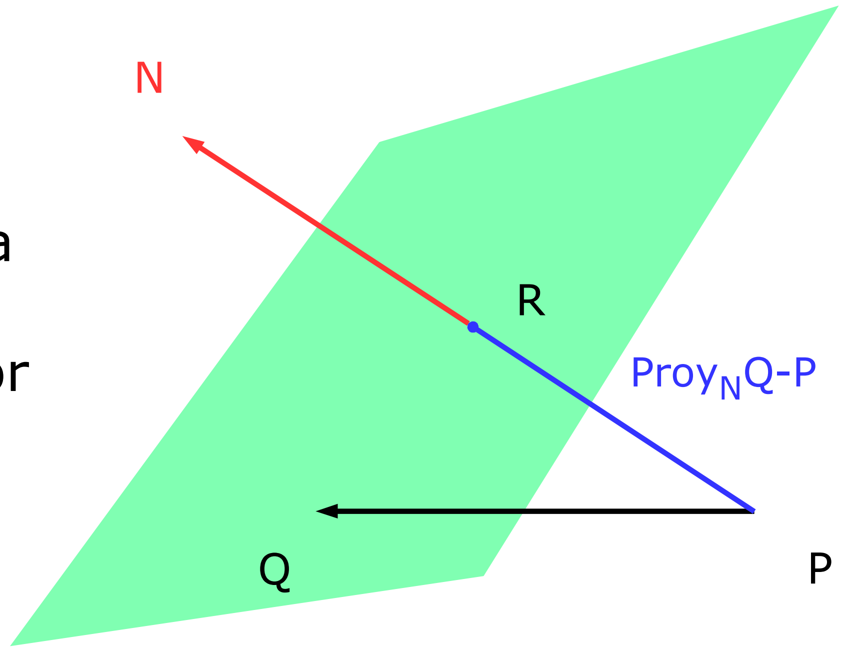


Si Q es cualquier punto del plano, la proyección del vector Q-P hacia el vector normal N normal es un vector que va de P a un punto R del plano.

Por lo tanto

Distancia PQ $\geq$ Dist PR = $|Proy_N Q\text{-}P|$

La distancia de un punto P a un plano es la mínima distancia que hay de P a algún punto del plano.



Si Q es cualquier punto del plano, la proyección del vector Q-P hacia el vector normal N normal es un vector que va de P a un punto R del plano.

Por lo tanto

Distancia PQ $\geq$ Dist PR = $|Proy_N Q\text{-}P|$

Y el punto del plano mas cercano a P es R = P + $Proy_N Q$-P.

Ejercicio.

¿Cual es la distancia del punto $P=(1,4,2)$ al plano $3x+2y-z=4$?

Ejercicio.

¿Cual es la distancia del punto P=(1,4,2) al plano 3x+2y-z=4?

Un punto del plano es Q=(1,1,1) y un vector normal al plano es N=(3,2,-1)

Distancia = $|\ Proy_N Q-P\ |$

$= |Proy_{(3,2,-1)}(1-1,1-4,1-2)|$

$= {}^{|(0,-3,-1)\cdot(3,2,-1)|}/_{|(3,2,-1)|} = {}^{|0-6+1|}/_{\sqrt{3^2+2^2+1^2}} = {}^{5}/_{\sqrt{14}}$

Ejercicio.

¿Cual es el punto del plano $3x+2y-z=4$ mas cercano a $(1,4,2)$?

Ejercicio.

¿Cual es el punto del plano $3x+2y-z=4$ mas cercano a $(1,4,2)$?

Un punto del plano es $Q=(1,1,1)$ y el vector $N=(3,2,-1)$ es normal al plano. El punto mas cercano es

$$R = P + \text{Proy}_N Q\text{-}P =$$

$$= (1,4,2) + \text{Proy}_{(3,2,-1)}(0,-3,-1)$$

$$= (1,4,2) - {}^{(3,2,-1)\cdot(0,-3,-1)}/_{(3,2,-1)\cdot(3,2,-1)}\ (3,2,-1)$$

$$= (1,4,2) - {}^{5}/_{14}\ (3,2,-1) \quad R = ({}^{-1}/_{14}, {}^{46}/_{14}, {}^{33}/_{14})$$

Hay otras maneras de obtener el punto del plano $3x+2y-z=4$ mas cercano a $(1,4,2)$:

La recta por P perpendicular al plano tiene parametrización

$$P(t) = P + tN = (1,4,2) + t\,(3,2,-1) = (3t+1,2t+4,-t+2)$$

Buscamos el punto donde la recta cruza al plano, que es el que cumple la ecuación $3x+2y-y=4$:

$3(3t+1)+2(2t+4)-1(-t+2)=4$

$9t+3+4t+8+t-2=4$, $14t=-5$

o sea $t=-\,{}^{5}/_{14}$ que da el punto

$$P({}^{-5}/_{14}) = (3({}^{-5}/_{14})+1,2({}^{-5}/_{14})+4,-({}^{-5}/_{14})+2) = ({}^{-1}/_{14},{}^{46}/_{14},{}^{33}/_{14})$$

Y hay una manera directa de obtener la distancia del punto (x_0,y_0,z_0) al plano $Ax+By+Cz+D = 0$

$|Proy_{(A,B,C)}(x_0-x,\ y_0-y,\ z_0-z)|$

$= |(x_0-x,\ y_0-y,\ z_0-z)\cdot(A,B,C)|\ /|(A,B,C)|$

$= |Ax_0+By_0+C_0-Ax-By-Cz|/|(A,B,C)|$

$= |Ax_0+By_0+C_0+D|\ /\ \sqrt{}A^2+B^2+C^2$

La distancia del punto (x_0,y_0,z_0) al plano $Ax+By+Cz+D = 0$ es

$|Proy_{(A,B,C)}(x_0-x,\ y_0-y,\ z_0-z)|$

$= |(x_0-x,\ y_0-y,\ z_0-z)\cdot(A,B,C)| / |(A,B,C)|$

$= |Ax_0+By_0+C_0-Ax-By-Cz|/|(A,B,C)|$

$= |Ax_0+By_0+C_0+D| / \sqrt{A^2+B^2+C^2}$

Ejercicio.

¿Cual es a distancia del punto (1,0,-2) al plano $2x+3y+4z=5$?

La distancia del punto (x_0,y_0,z_0) al plano $Ax+By+Cz+D = 0$ es

$|Proy_{(A,B,C)}(x_0-x,\ y_0-y,\ z_0-z)|$

$= |(x_0-x,\ y_0-y,\ z_0-z)\cdot(A,B,C)|\ /|(A,B,C)|$

$= |Ax_0+By_0+C_0-Ax-By-Cz|/|(A,B,C)|$

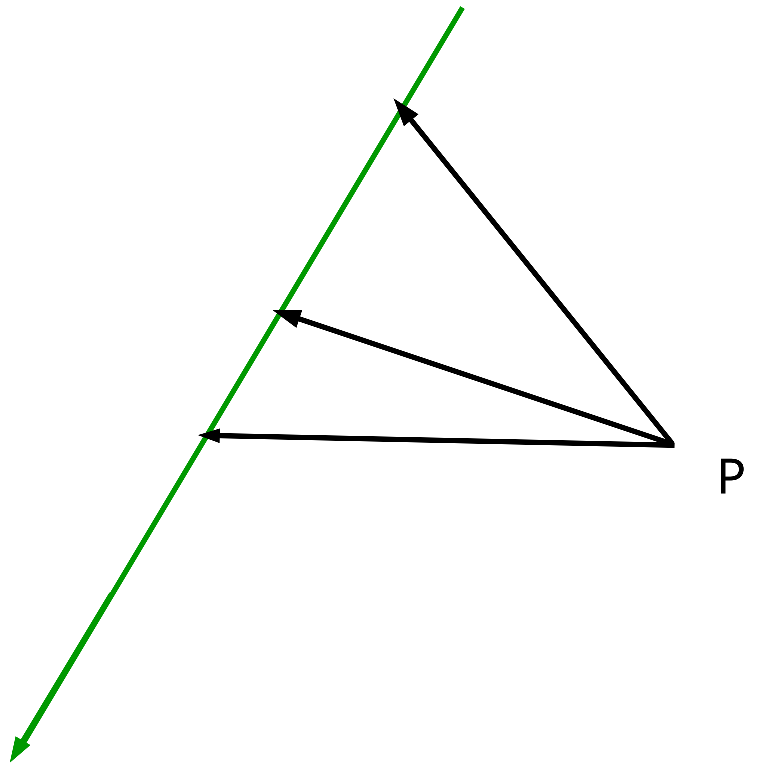
$= |Ax_0+By_0+C_0+D|\ /\ \sqrt{A^2+B^2+C^2}$

Ejercicio.

¿Cual es a distancia del punto (1,0,-2) al plano $2x+3y+4z=5$?

Distancia $= |2(1)+3(0)-4(-2)-5|\ /\ \sqrt{3^2+2^2+4^2} = {}^{5}/_{\sqrt{29}}$

La distancia de un punto P a una recta es la distancia mínima de P a un punto de la recta.

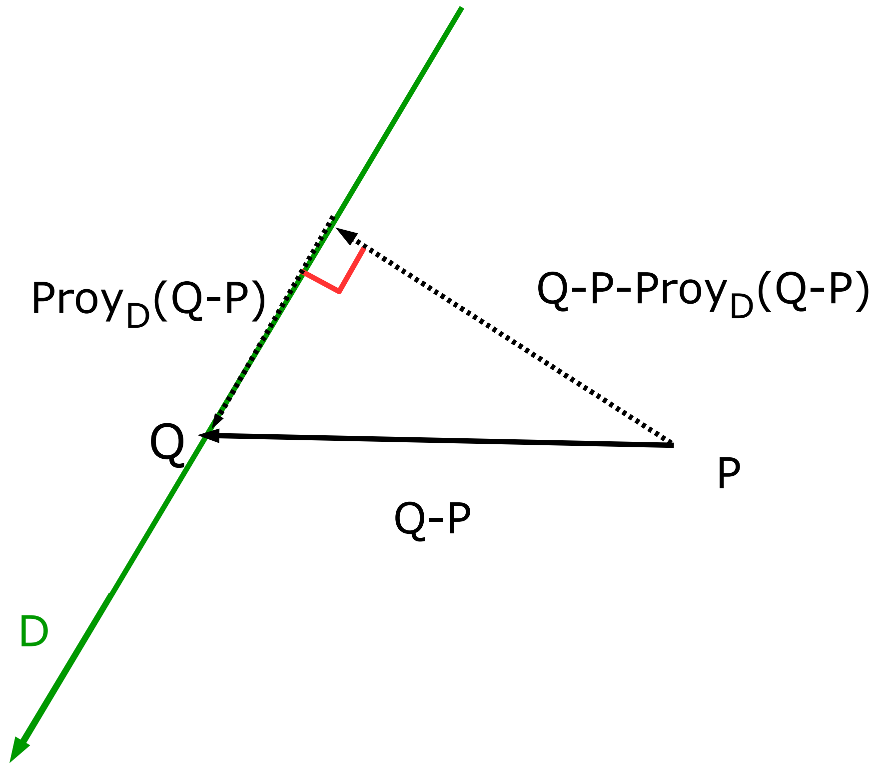


La distancia de un punto P a una recta es la distancia mínima de P a un punto de la recta.

Si la recta tiene dirección D y Q es cualquier punto de ella, entonces el vector

$V = (Q\text{-}P) - Proy_D(Q\text{-}P)$ es

perpendicular a la recta y por lo tanto da la distancia mas corta de P a la recta.

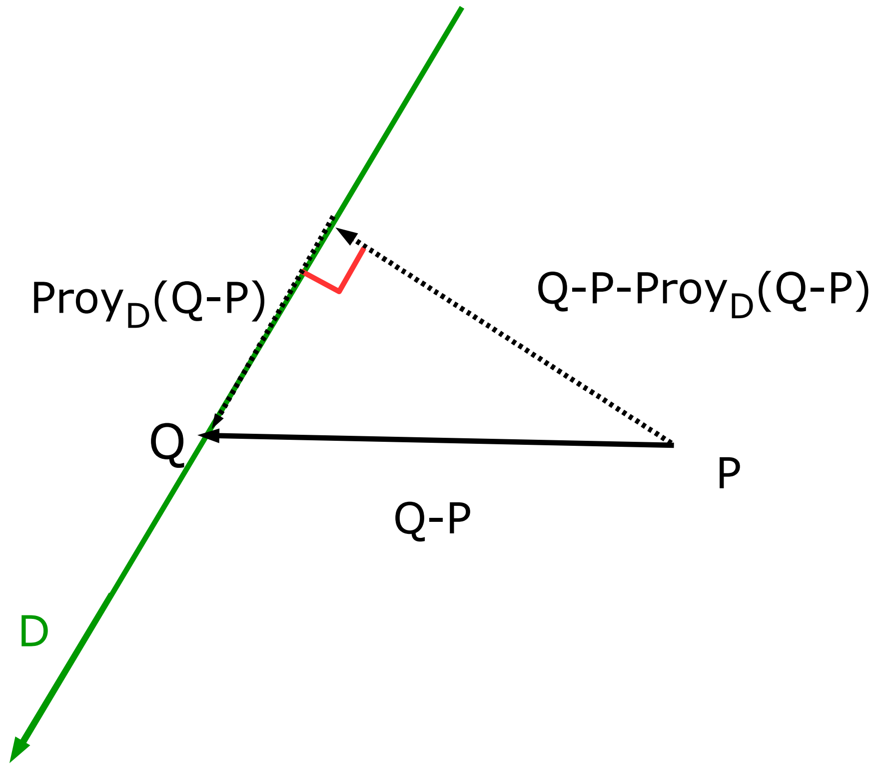


La distancia de un punto P a una recta es la distancia mínima de P a un punto de la recta.

Si la recta tiene dirección D y Q es cualquier punto de ella, entonces el vector

$V = (Q\text{-}P) - \text{Proy}_D(Q\text{-}P)$ es

perpendicular a la recta y por lo tanto da la distancia mas corta de P a la recta.



El punto de la recta mas cercano a P es $P+V = Q - \text{Proy}_D(Q\text{-}P)$

Ejercicio. ¿Cual es la distancia de la recta $p(t)=(1+2t,3-t,5+4t)$ al punto $P=(3,4,2)$?

Un punto de la recta es $Q=(1,3,5)$
La dirección de la recta es $(2,-1,4)$.

Un vector que va de P a la recta es $(1,3,5)-(3,4,2) = (-2,-1,3)$.

$\mathrm{Proy}_{(2,-1,4)}(-2,-1,3) = {}^{(-2,-1,3)\cdot(2,-1,4)}/_{(2,-1,4)\cdot(2,-1,4)}\,(2,-1,4) =$
$^{9}/_{21}\,(2,-1,4) = (^{6}/_{7},{}^{-3}/_{7},{}^{12}/_{7})$
El vector que va de P al punto mas cercano en la recta es
$V = (-2,-1,3) - \mathrm{Proy}_{(2,-1,4)}(-2,-1,3)$
$= (-2,-1,3) - (^{6}/_{7},{}^{-3}/_{7},{}^{12}/_{7})$
$= (^{-20}/_{7},{}^{-4}/_{7},{}^{9}/_{7})$.

La distancia de $(3,4,2)$ a la recta es $|V| = {}^{\sqrt{497}}/_{7}$

¿Cual es el punto de la recta mas cercano a $(3,4,2)$?

$(3,4,2) + (^{-20}/_{7},{}^{-4}/_{7},{}^{9}/_{7}) = (^{-1}/_{7},{}^{24}/_{7},{}^{23}/_{7})$

Ejercicio. ¿Cual es la distancia de la recta $p(t)=(1+2t,3-t,5+4t)$ al punto $P=(3,4,2)$?

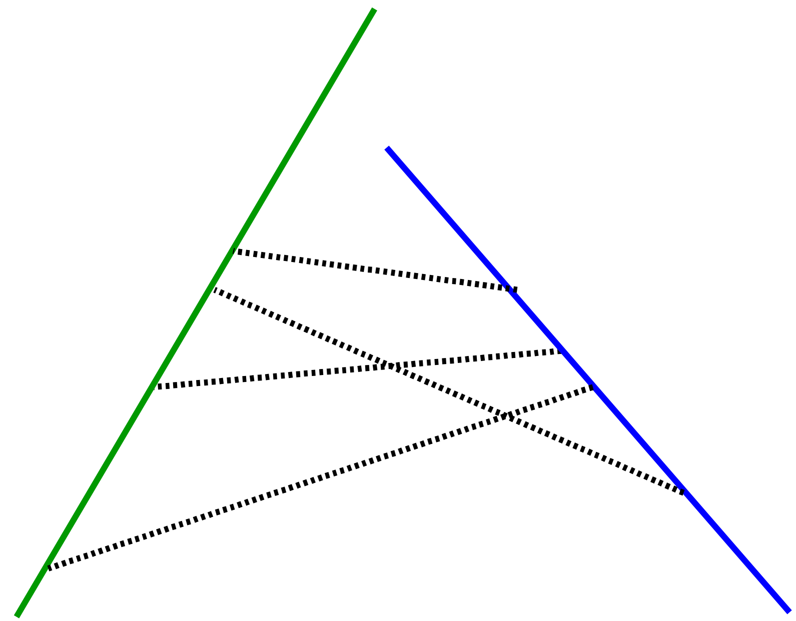
Otra manera de hallar el punto mas cercano en la recta:
En ese punto la diferencia $p(t)-(3,4,2)$ es perpendicular al vector de dirección de la recta, que es $(2,-1,4)$:

$$(p(t)-(3,4,2)) \cdot (2,-1,4) = 0$$

$$(-2+2t,-1-t,3+4t)\cdot(2,-1,4) = 0$$
$$-4+4t+1+t+12+16t = 0$$
$$21t+9 = 0$$
$$t=-3/7$$

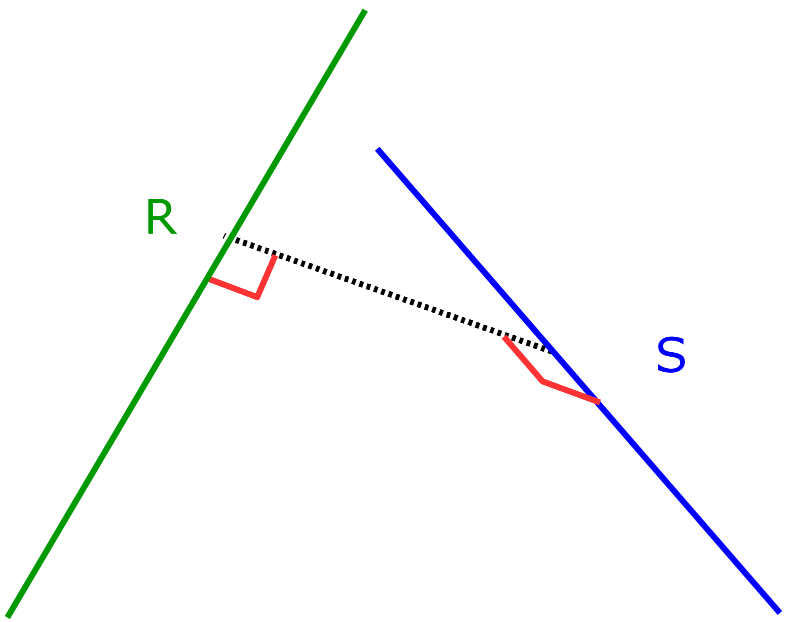
$$p(11/21) = (1+2(-3/7),\ 3-(-3/7),\ 5+4(-3/7)) = (1/7,\ 24/7,\ 23/7)$$

La **distancia** entre dos rectas en el espacio es la distancia mínima de un punto de una recta a un punto de la otra recta.

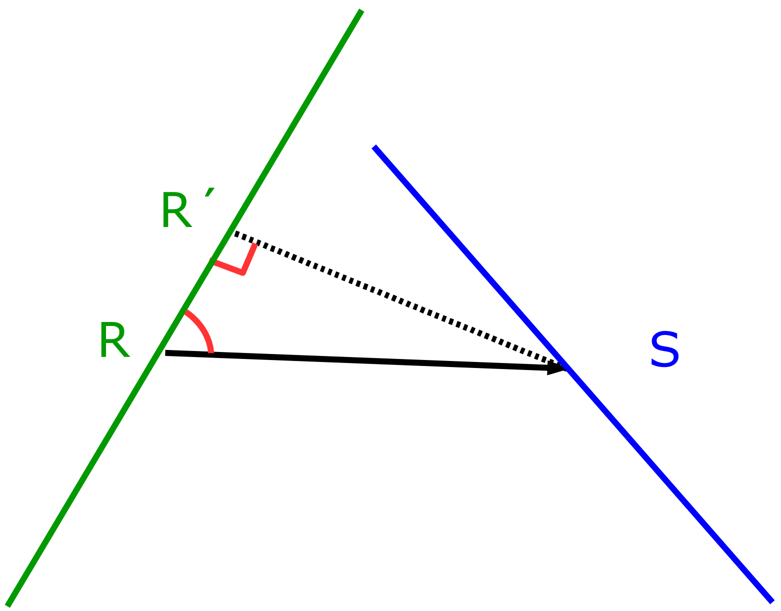


Es la distancia entre los 2 puntos mas cercanos de las rectas

Lema. Si R y S son los puntos mas cercanos de dos rectas entonces R-S es perpendicular a las dos rectas.



Lema. Si R y S son los puntos mas cercanos de dos rectas entonces R-S es perpendicular a las dos rectas.



Demostración. Si R-S no fuera perpendicular al vector D que da la dirección de la recta por R, entonces
R' = R + $Proy_D$(S-R) seria un punto en esa recta mas cercano S.
Un argumento similar muestra lo mismo para la otra recta. ●

Ejemplo. ¿Cuales son los puntos mas cercanos de las rectas

$$p(t)=(t+1,2t-2,-t) \text{ y } q(s)=(2s-3,-s+4,3s+2)?$$

Ejemplo. ¿Cuales son los puntos mas cercanos de las rectas

$$p(t)=(t+1,2t-2,-t) \text{ y } q(s)=(2s-3,-s+4,3s+2)?$$

El vector que une los puntos $p(t)$ y $q(s)$ es

$p(t)-q(s) = (t-2s+4,2t+s-7,-t-3s-2)$.

Ejemplo. ¿Cuales son los puntos mas cercanos de las rectas

$$p(t)=(t+1,2t-2,-t) \text{ y } q(s)=(2s-3,-s+4,3s+2)?$$

El vector que une los puntos p(t) y q(s) es

$p(t)-q(s) = (t-2s+4,2t+s-7,-t-3s-2)$.

Cuando p(t) esta mas cerca de q(s) el vector p(t)-q(s) es perpendicular a los vectores de dirección de las rectas, que son (1,2,-1) y (2,-1,3)

Así que el producto punto de p(t)-q(s) con (1,2,-1) y con (2,-1,3) es 0:

Ejemplo. ¿Como son las soluciones de este sistema de ecuaciones lineales?

$$\begin{aligned} 6x - 4y + 2z &= 3 \\ -9x + 6y - 3z &= 4 \end{aligned}$$

Las soluciones de cada ecuación forman un plano, pero los 2 planos son paralelos, así que el sistema no tiene soluciones.

Ejemplo. ¿Cuales son los puntos mas cercanos de las rectas

$$p(t)=(t+1,2t-2,-t) \text{ y } q(s)=(2s-3,-s+4,3s+2)?$$

El vector que une los puntos $p(t)$ y $q(s)$ es

$p(t)-q(s) = (t-2s+4,2t+s-7,-t-3s-2)$.

Cuando $p(t)$ esta mas cerca de $q(s)$ el vector $p(t)-q(s)$ es perpendicular a los vectores de dirección de las rectas, que son $(1,2,-1)$ y $(2,-1,3)$

Así que el producto punto de $p(t)-q(s)$ con $(1,2,-1)$ y con $(2,-1,3)$ es 0:

$$(t-2s+4,2t+s-6,-t-3s-2)\cdot(1,2,-1) = t-2s+4+4t+2s-12+t+3s+2 = 6t+3s-6 =0$$

$$(t-2s+4,2t+s-6,-t-3s-2)\cdot(2,-1,3) = 2t-4s+8-2t-s+6-3t-9s-6 = -3t-14s+8 = 0$$

Ejemplo. ¿Cuales son los puntos mas cercanos de las rectas

$$p(t)=(t+1,2t-2,-t) \text{ y } q(s)=(2s-3,-s+4,3s+2)?$$

El vector que une los puntos p(t) y q(s) es

$p(t)-q(s) = (t-2s+4,2t+s-7,-t-3s-2)$.

Cuando p(t) esta mas cerca de q(s) el vector p(t)-q(s) es perpendicular a los vectores de dirección de las rectas, que son (1,2,-1) y (2,-1,3)

Así que el producto punto de p(t)-q(s) con (1,2,-1) y con (2,-1,3) es 0:

$$(t-2s+4,2t+s-6,-t-3s-2)\cdot(1,2,-1) = t-2s+4+4t+2s-12+t+3s+2 = 6t+3s-6 =0$$

$$(t-2s+4,2t+s-6,-t-3s-2)\cdot(2,-1,3) = 2t-4s+8-2t-s+6-3t-9s-6 = -3t-14s+8 = 0$$

Podemos resolver el sistema de ecuaciones para hallar $s = {}^2/_5$ $\quad t = {}^4/_5$

Así que los puntos mas cercanos son

$p({}^4/_5)=({}^9/_5,{}^{-2}/_5,{}^{-4}/_5)$ y $q({}^2/_5)=({}^{-11}/_5,{}^{14}/_5,{}^{16}/_5)$.

¿Dadas dos rectas en el espacio, siempre hay una única recta que las intersecta y es perpendicular a ambas?

Lema. Para cada par de rectas no paralelas en el espacio, hay una única recta que las intersecta y es perpendicular a ambas.

Lema. Para cada par de rectas no paralelas en el espacio, hay una única recta que las intersecta y es perpendicular a ambas.

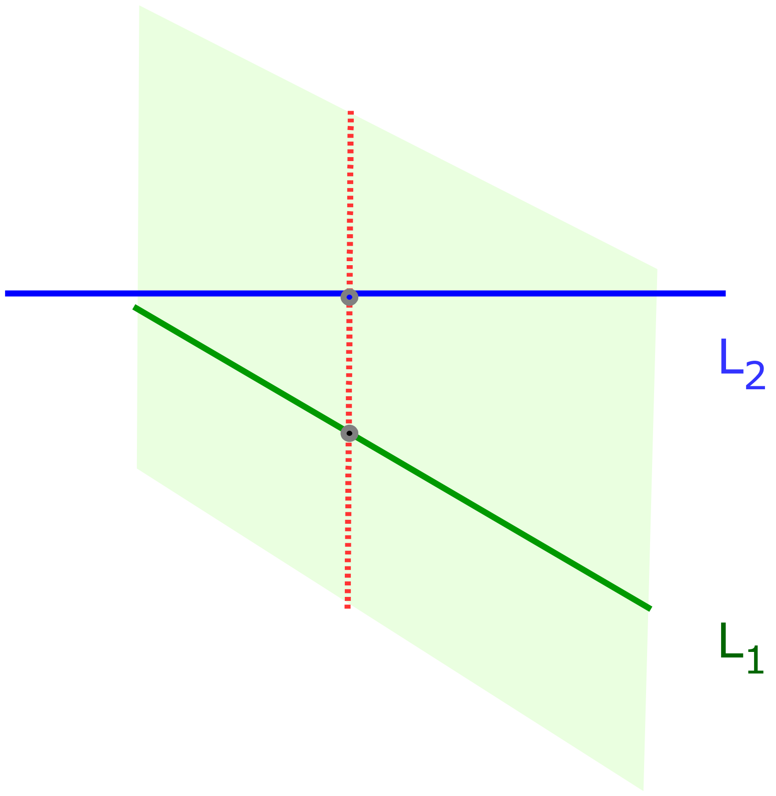
Demostración. Observar que dadas dos direcciones distintas en el espacio, solo existe una dirección perpendicular a ambas.

Lema. Para cada par de rectas no paralelas en el espacio, hay una única recta que las intersecta y es perpendicular a ambas.

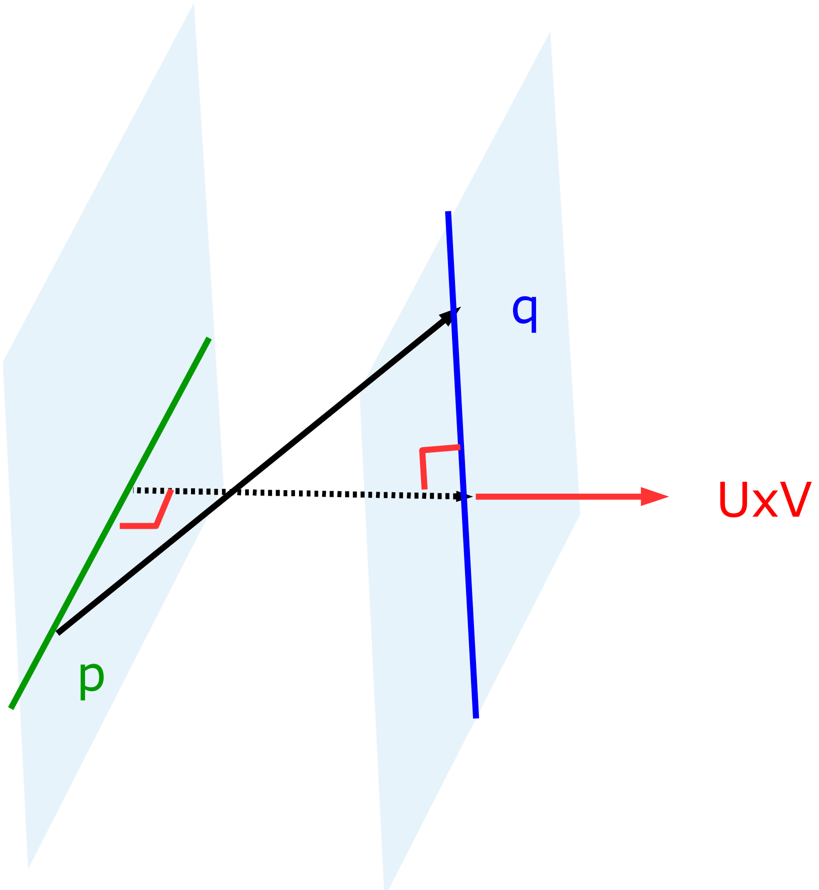
Demostración. Observar que dadas dos direcciones distintas en el espacio, solo existe una dirección perpendicular a ambas.

Si L_1 y L_2 son dos rectas no paralelas en el espacio, considerar al plano P que contiene a la recta L_1 y al vector N que es perpendicular a L_1 y L_2.

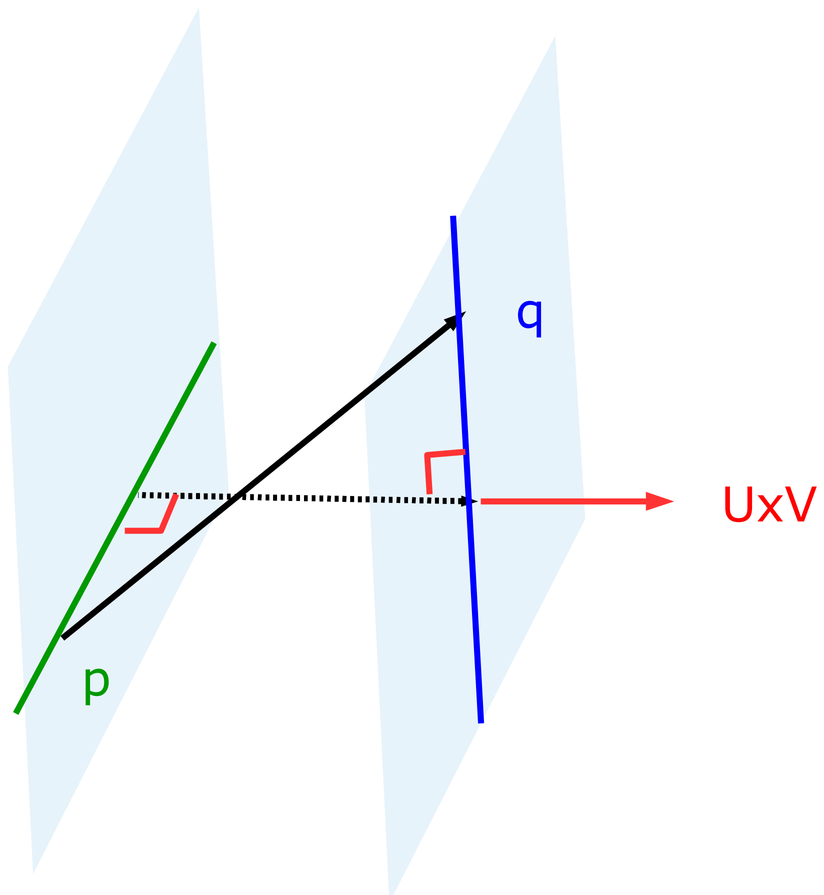
Entonces P intersecta a L_2 en un punto (de otro modo las rectas serian paralelas). La linea paralela a N que pasa por el punto de intersección cruza a las dos rectas perpendicularmente.



Lema. La distancia entre dos rectas que pasan por los puntos p y q con direcciones U y V es $|Proy_{UxV}(p-q)|$



Lema. La distancia entre dos rectas que pasan por los puntos p y q con direcciones U y V es $|Proy_{UxV}(p-q)|$



Demostración. La distancia es la norma de la proyección del vector p-q en la dirección normal a las dos rectas, es decir $|Proy_{UxV}(p-q)|$. •

Ejemplo. ¿Cual es la distancia entre las rectas

$p(t) = (2t+1, t+4, -t+2)$ y $q(s) = (-s+2, 3s-1, 2s)$?

$P = (1,4,2)$ $q = (2,-1,0)$

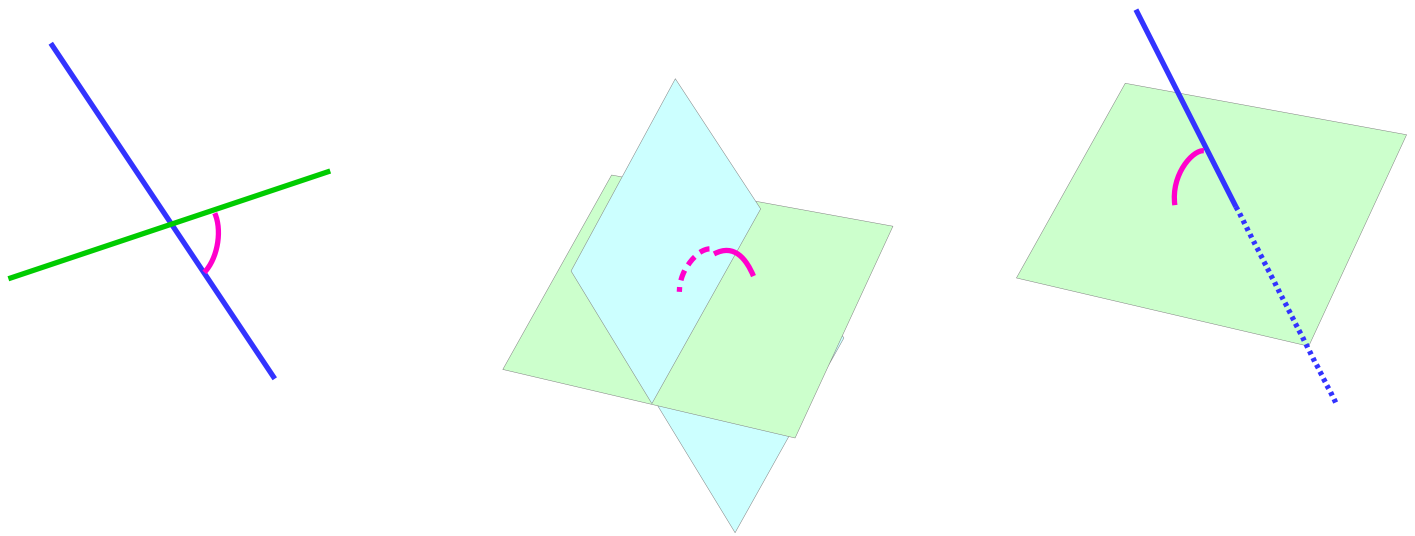
$U = (2,1,-1)$ $V = (-1,3,2)$ $UxV = (5,-3,7)$

$$\text{Distancia} = |\text{Proy}_{UxV}(p-q)| = {}^{|(5,-3,7)\cdot(-1,5,2)|}/_{|(5,3,-7)|}$$

$$= {}^{|-5\ 15+14|}/_{\sqrt{25+9+49}} = 6\ /_{\sqrt{83}}$$

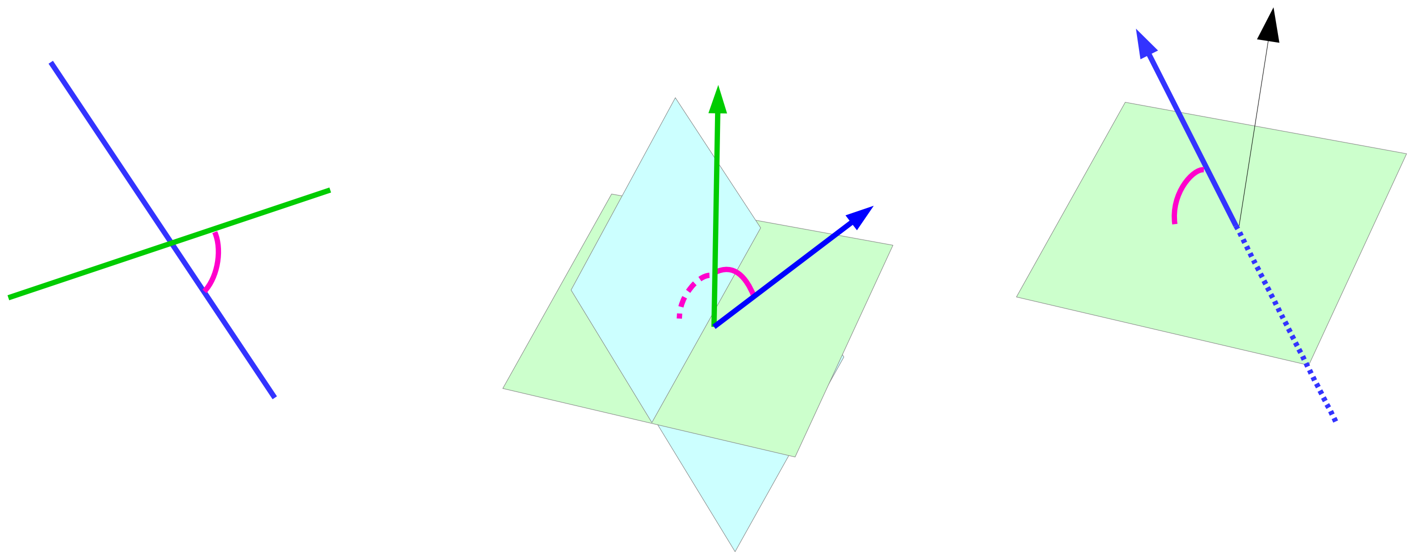
Para encontrar la recta que cruza y es perpendicular a las rectas $p(t) = (2t+1, t+4, -t+2)$ y $q(s) = (-s+2, 3s-1, 2s)$ podemos hallar los puntos mas cercanos entre las rectas y hallar la recta que pasa por ellos.

¿Como podemos calcular los ángulos formados por rectas y planos que se intersectan?



Para 2 rectas o 2 planos, hay dos ángulos posibles (suplementarios).

¿Como podemos calcular los ángulos formados por rectas y planos que se intersectan?

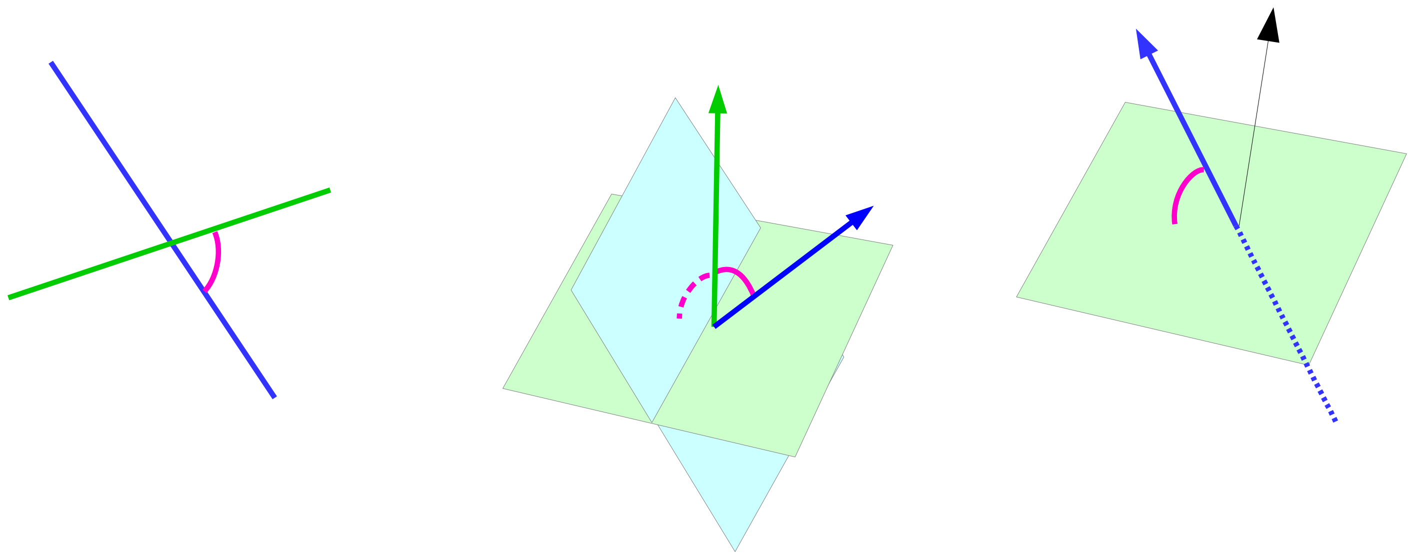


Para 2 rectas o 2 planos, hay dos ángulos posibles (suplementarios).

Los ángulos entre 2 rectas son los ángulos entre los vectores de dirección de las rectas. Los ángulos entre 2 planos son los ángulos entre vectores normales a los planos.

El ángulo entre una recta y un plano es el complemento del ángulo entre un vector de dirección de la recta y un vector normal al plano.

¿Como podemos calcular los ángulos formados por rectas y planos que se intersectan?



Para 2 rectas o 2 planos, hay dos ángulos posibles (suplementarios).

Los ángulos entre 2 rectas son los ángulos entre los vectores de dirección de las rectas. Los ángulos entre 2 planos son los ángulos entre vectores normales a los planos.

El ángulo entre una recta y un plano es el complemento del ángulo entre un vector de dirección de la recta y un vector normal al plano.

Ejercicio. ¿Con que ángulo se intersectan los planos $x+2y+3z=4$ y $5x+5y+7z=8$?

Ejercicio. ¿Con que ángulo intersecta la recta $p(t)=(3+t,2-t,1+t)$ al plano $x+2y+3z=4$?

Ejercicio. ¿Con que ángulo se intersectan los planos $x+2y+3z=4$ y $5x+5y+7z=8$?

El ángulo de intersección es igual al ángulo entre los vectores normales $M=(1,2,3)$ y $N=(5,6,7)$ que es

$\arccos(M\cdot N/|M||N|) = \arccos({}^{38}/\sqrt{14}\sqrt{110}) \approx \arccos(0.9386) \approx 14.46°$

Ejercicio. ¿Con que ángulo intersecta la recta $p(t)=(3+t,2-t,1+t)$ al plano $x+2y+3z=4$?

El ángulo de intersección es el complemento del ángulo entre el vector normal $N=(1,2,3)$ y el vector de dirección $D=(1,-1,1)$ que es

$\arccos(M\cdot N/|M||N|) = \arccos({}^{2}/\sqrt{14}\sqrt{3}) \approx \arccos(0.1543) \approx 81.12°$ asi que el ángulo es 18.88°

Sistemas de ecuaciones lineales

En distintas áreas de las matemáticas y en muchas aplicaciones aparecen sistemas de ecuaciones lineales, de los que necesitamos saber si tienen o no soluciones, y cuantas hay.

Ejemplos

$$\begin{aligned} 5x + 4y + 2z &= 3 \\ 9x + 7y + 3z &= 4 \end{aligned}$$

o

$$\begin{aligned} x + 2y + 3z &= 4 \\ 2x - 4y + z &= 5 \\ x + 2y - 7z &= 2 \end{aligned}$$

En distintas áreas de las matemáticas y en muchas aplicaciones aparecen sistemas de ecuaciones lineales, de los que necesitamos saber si tienen o no soluciones, y cuantas hay.

Ejemplos

$$\begin{aligned} 5x + 4y + 2z &= 3 \\ 9x + 7y + 3z &= 4 \end{aligned}$$

o

$$\begin{aligned} x + 2y + 3z &= 4 \\ 2x - 4y + z &= 5 \\ x + 2y - 7z &= 2 \end{aligned}$$

Al aumentar el número de variables y de ecuaciones esto se va haciendo mas difícil, y el punto de vista geométrico se vuelve muy útil.

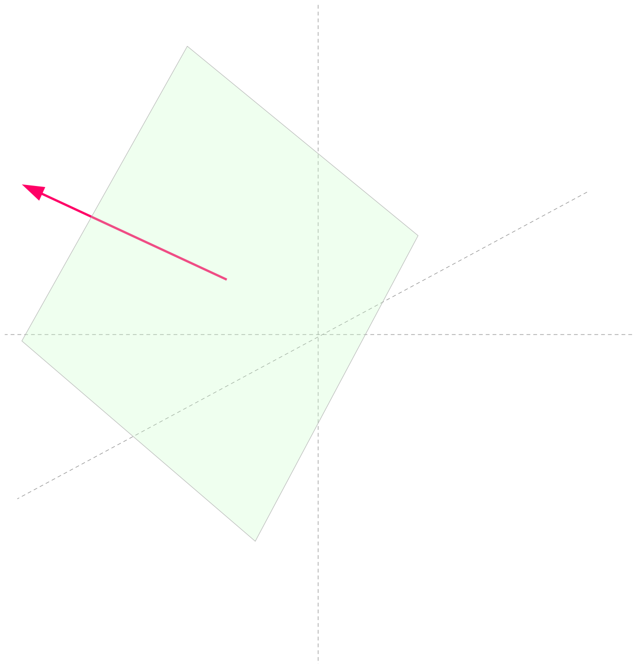
¿Como son las soluciones de una ecuación lineal?

$$Ax + By + Cz = D$$

¿Como son las soluciones de una ecuación lineal?

$Ax + By + Cz = D$ con $(A,B,C) \neq (0,0,0)$

Las soluciones son los puntos de un plano ortogonal al vector (A,B,C)



¿Como son las soluciones de un sistema de dos ecuaciones lineales?

$$Ax + By + Cz = D$$

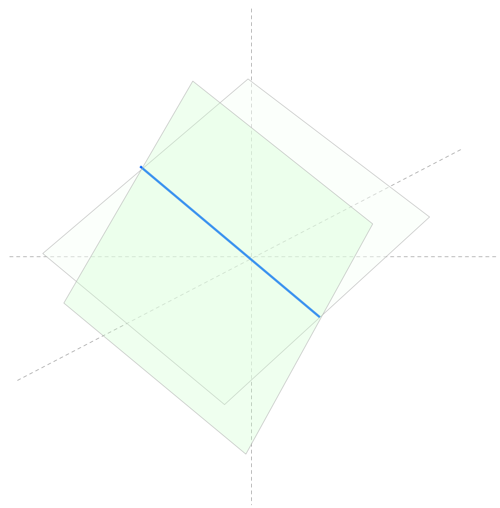
$$Ex + Fy + Gz = H$$

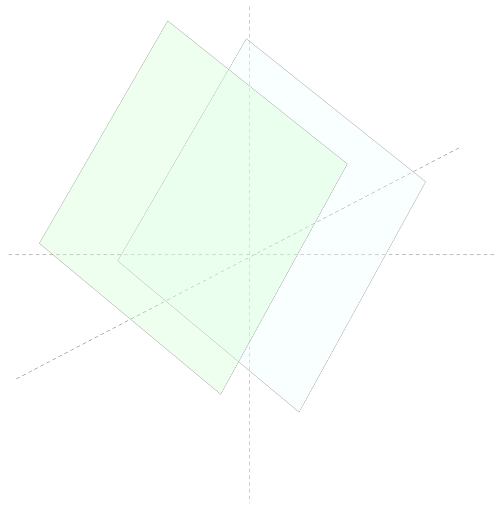
¿Como son las soluciones de un sistema de dos ecuaciones lineales?

$$Ax + By + Cz = D$$

$$Ex + Fy + Gz = H$$

Las soluciones del sistema son los puntos en la intersección de los planos, así que forman una linea (si los planos se cruzan) o el vacío (si los planos son paralelos) o todo un plano (si los planos son iguales).



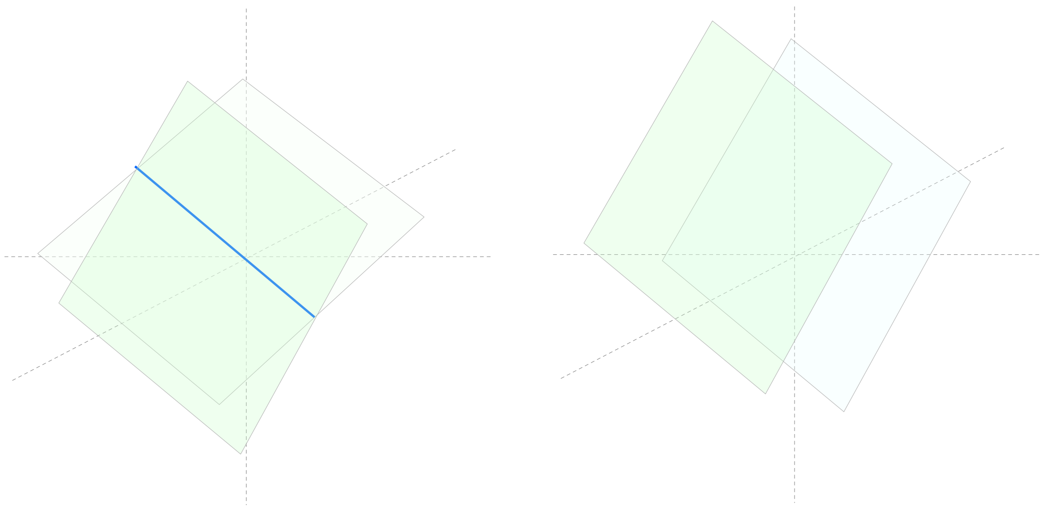


¿Como son las soluciones de un sistema de dos ecuaciones lineales?

$Ax + By + Cz = D$

$Ex + Fy + Gz = H$

Las soluciones del sistema son los puntos en la intersección de los planos, así que forman una linea (si los planos se cruzan) o el vacío (si los planos son paralelos) o todo un plano (si los planos son iguales).



Es fácil ver en que caso estamos viendo si los vectores normales (A,B,C) y (E,F,G) tienen direcciones distintas o iguales.

¿Como son las soluciones de un sistema de 3 ecuaciones lineales?

$Ax + By + Cz = D$

$Ex + Fy + Gz = H$

$Ix + Jy + Kz = L$

¿Como son las soluciones de un sistema de 3 ecuaciones lineales?

$Ax + By + Cz = D$

$Ex + Fy + Gz = H$

$Ix + Jy + Kz = L$

Las soluciones son los puntos en la intersección de 3 planos.

¿Como son las soluciones de un sistema de 3 ecuaciones lineales?

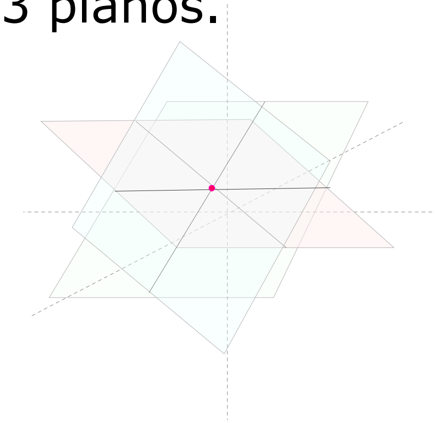
$Ax + By + Cz = D$

$Ex + Fy + Gz = H$

$Ix + Jy + Kz = L$

Las soluciones son los puntos en la intersección de 3 planos.

- Si los vectores normales (A,B,C) (E,F,G) y (I,J,K) no son coplanares entonces los 3 planos deben cruzarse y la intersección es un punto.



¿Como son las soluciones de un sistema de 3 ecuaciones lineales?

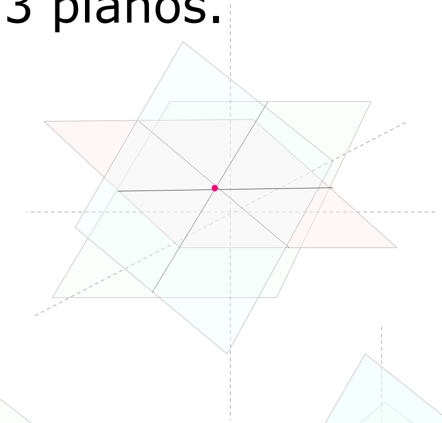
$Ax + By + Cz = D$

$Ex + Fy + Gz = H$

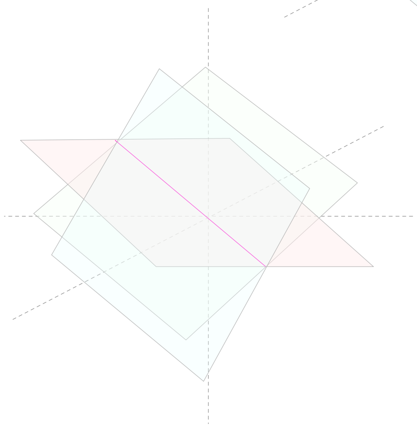
$Ix + Jy + Kz = L$

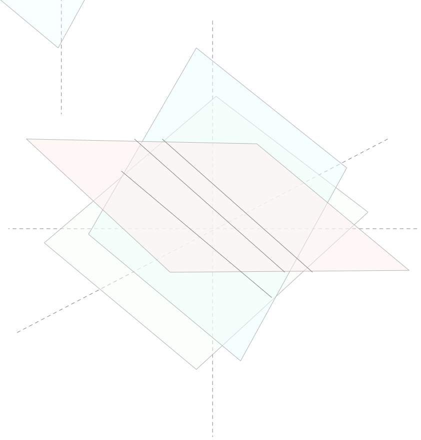
Las soluciones son los puntos en la intersección de 3 planos.

- Si los vectores normales (A,B,C) (E,F,G) y (I,J,K) no son coplanares entonces los 3 planos deben cruzarse y la intersección es un punto.



- Si los 3 vectores son coplanares pero no son colineales, hay una dirección perpendicular a los 3 y los planos son la union de lineas en esa dirección. La intersección puede ser una linea o el vacío.





¿Como son las soluciones de un sistema de 3 ecuaciones lineales?

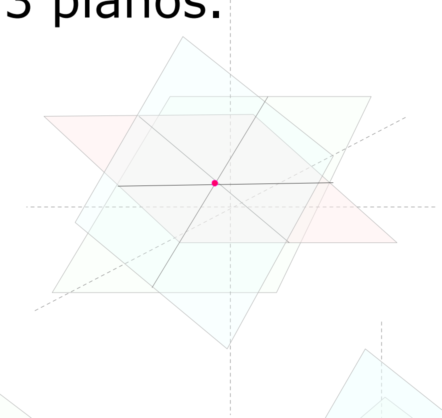
$Ax + By + Cz = D$

$Ex + Fy + Gz = H$

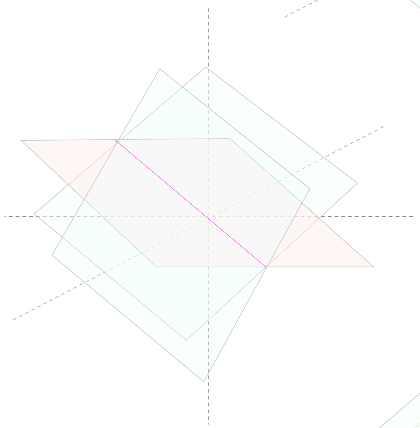
$Ix + Jy + Kz = L$

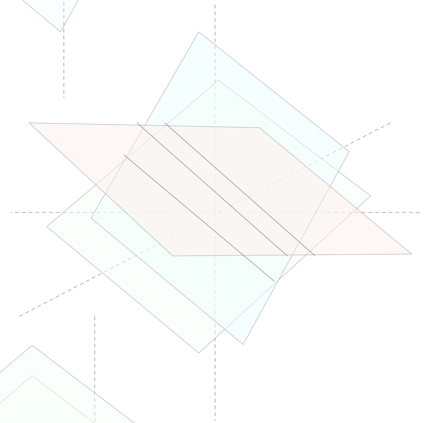
Las soluciones son los puntos en la intersección de 3 planos.

- Si los vectores normales (A,B,C) (E,F,G) y (I,J,K) no son coplanares entonces los 3 planos deben cruzarse y la intersección es un punto.

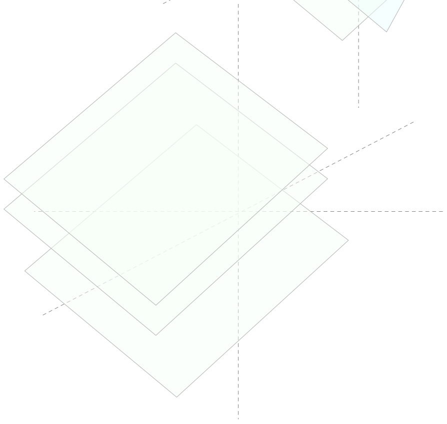


- Si los 3 vectores son coplanares pero no son colineales, hay una dirección perpendicular a los 3 y los planos son la union de lineas en esa dirección. La intersección puede ser una linea o el vacío.





- Si los 3 vectores son colineales entonces los 3 planos son iguales o son paralelos, de modo que la intersección es un plano o el vacío.

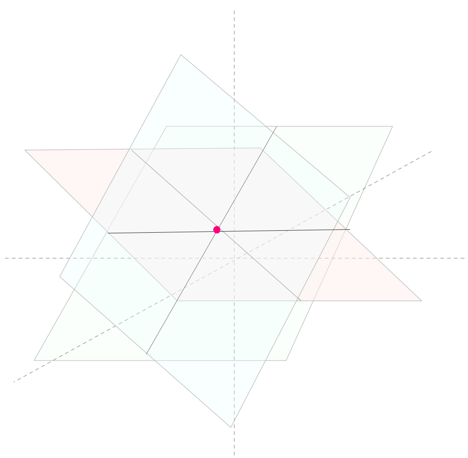


¿Como son las soluciones de un sistema de 3 ecuaciones lineales?

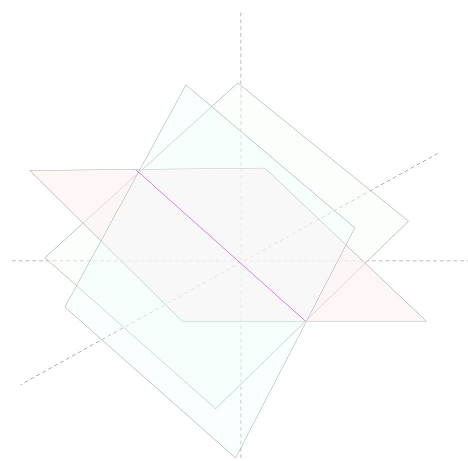
$$Ax + By + Cz = D$$

$$Ex + Fy + Gz = H$$

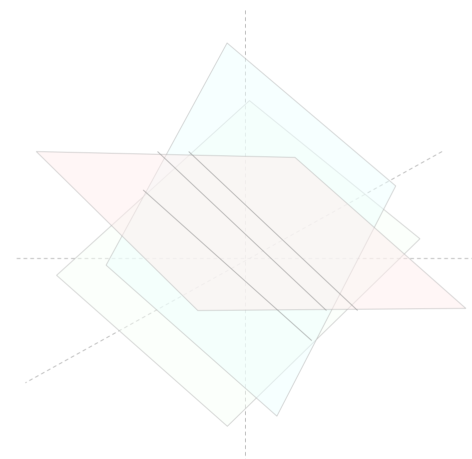
$$Ix + Jy + Kz = L$$



una solución



una infinidad de soluciones



ninguna solución

Ejemplo. ¿Como son las soluciones de este sistema de ecuaciones lineales?

$$\begin{aligned} x + 2y + 3z &= 4 \\ 2x - 4y + z &= 5 \end{aligned}$$

Ejemplo. ¿Como son las soluciones de este sistema de ecuaciones lineales?

$$x + 2y + 3z = 4$$
$$2x - 4y + z = 5$$

Las soluciones de cada ecuación forman un plano.

Los vectores normales a los planos son U=(1,2,3) y V=(2,-4,1).

Como no los vectores normales no tienen la misma dirección, los planos se intersectan en una recta en la dirección del vector UxV = (14,5,-8)

Ejemplo. ¿Como son las soluciones de este sistema de ecuaciones lineales?

$$x + 2y + 3z = 4$$
$$2x - 4y + z = 5$$

Las soluciones de cada ecuación forman un plano.

Los vectores normales a los planos son U=(1,2,3) y V=(2,-4,1).

Como no los vectores normales no tienen la misma dirección, los planos se intersectan en una recta en la dirección del vector UxV = (14,5,-8)

Podemos dar todas las soluciones hallando una, como $(^{13}/_4, ^3/_8, 0)$ y sumándole múltiplos del vector UxV=(14,5,-8).

Así que las soluciones son $s(t)=(^{13}/_4, ^3/_8, 0)+t(14,5,-8)$

o sea

$x = {}^{13}/_4+14t$ $\qquad$ $y = {}^3/_8+5t$ $\qquad$ $z = -8t$

Ejemplo. ¿Como son las soluciones de este sistema de ecuaciones lineales?

$$\begin{aligned} 6x - 4y + 2z &= 3 \\ -9x + 6y - 3z &= 4 \end{aligned}$$

Ejemplo. ¿Cuantas soluciones tiene este sistema de ecuaciones lineales?

$$
\begin{aligned}
x + 3y + 2z &= 4 \\
2x + 5y + z &= 7 \\
x + 4y - 7z &= 2
\end{aligned}
$$

Ejemplo. ¿Cuantas soluciones tiene este sistema de ecuaciones lineales?

$$
\begin{aligned}
x + 3y + 2z &= 4 \\
2x + 5y + z &= 7 \\
x + 4y - 7z &= 2
\end{aligned}
$$

Las soluciones son los puntos de intersección de 3 planos cuyos vectores normales son

U=(1,3,2), V=(2,5,1) y W=(1,4,-7).

Estos 3 vectores no son coplanares ya que el triple producto

$$U x V \cdot W = \begin{vmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 2 & 5 & 1 \\ 1 & 4 & -7 \end{vmatrix} = 12 \text{ es distinto de } 0.$$

Así que el sistema tiene exactamente una solución.

Ejemplo. ¿Cuantas soluciones tiene este sistema de ecuaciones lineales?

$$\begin{aligned} x + 2y + 3z &= 3 \\ 2x + 5y + z &= 5 \\ x + 4y - 7z &= 1 \end{aligned}$$

Ejemplo. ¿Cuantas soluciones tiene este sistema de ecuaciones lineales?

$$\begin{aligned} x + 2y + 3z &= 3 \\ 2x + 5y + z &= 5 \\ x + 4y - 7z &= 1 \end{aligned}$$

Las soluciones son los puntos de intersección de 3 planos con vectores normales U=(1,2,3), V=(2,5,1) y W=(1,4,-7).

Pero estos 3 vectores son coplanares ya que su triple producto

$$UxV \cdot W = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 5 & 1 \\ 1 & 4 & -7 \end{vmatrix} \quad \text{es } 0 \qquad .$$

Así que las soluciones forman una recta o no hay soluciones.

Podemos checar que las soluciones forman una recta, viendo que la tercera ecuación es combinación lineal de las dos primeras (es 2 veces la segunda menos 3 veces la primera) así que las soluciones de las 3 ecuaciones son las soluciones de las 2 primeras.

Ejemplo. ¿Cuantas soluciones tiene este sistema de ecuaciones lineales?

$$\begin{aligned} x + 2y + 3z &= 2 \\ 2x + 5y + z &= 4 \\ x + 4y - 7z &= 1 \end{aligned}$$

Ejemplo. ¿Cuantas soluciones tiene este sistema de ecuaciones lineales?

$$
\begin{aligned}
x + 2y + 3z &= 2 \\
2x + 5y + z &= 4 \\
x + 4y - 7z &= 1
\end{aligned}
$$

Estas ecuaciones son iguales a las del ejemplo anterior excepto por las constantes. Los vectores normales a los planos son coplanares.

Pero en este caso la tercera ecuación no es combinación lineal de las 2 primeras, así que el tercer plano no contiene a la recta de intersección de los dos primeros y el sistema no tiene soluciones.