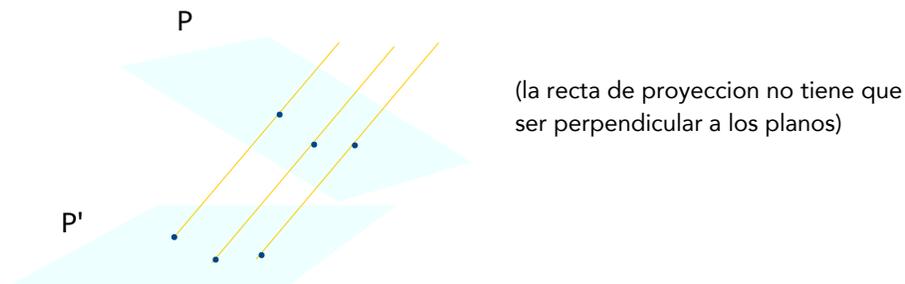


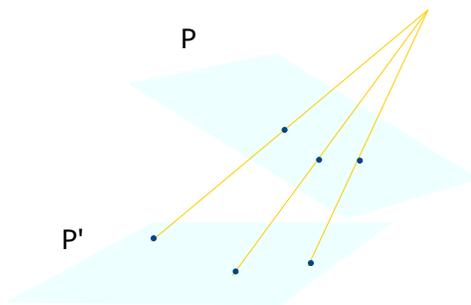
## Proyecciones

Lo que vemos, y lo que aparece en las fotografías, son proyecciones del espacio tridimensional a una superficie de dos dimensiones. Estas proyecciones pueden cambiar drásticamente las formas, para entenderlas conviene empezar por considerar las proyecciones de un plano a otro.

Proyecciones de un plano a otro en la dirección de una recta (llamadas también *proyecciones paralelas*):



Proyecciones de un plano a otro desde un punto (llamadas *proyecciones centrales*)::



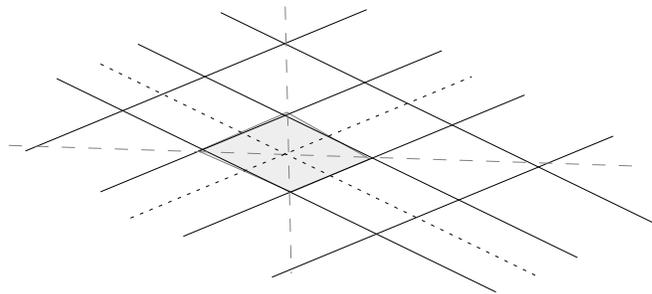
Las proyecciones paralelas son proyecciones desde puntos “en el infinito”

Las proyecciones paralelas, y las proyecciones centrales, envían líneas rectas en líneas rectas: Si  $l$  es una recta en el plano  $P$ , y  $H$  es el plano que contiene a  $l$  y a la dirección de la proyección (o a  $l$  y al punto de proyección), entonces la imagen de  $l$  es la recta  $P' \cap H$ .

Las proyecciones pueden transformar drásticamente las formas. Diremos que una transformación  $T$  *preserva* distancias (o que preserva proporciones, o ángulos, o áreas, o paralelas, o puntos medios, etc.) si  $T$  transforma a cada figura en otra con las mismas medidas (o con las mismas proporciones, o ángulos, o áreas, o paralelas, o puntos medios, etc.)

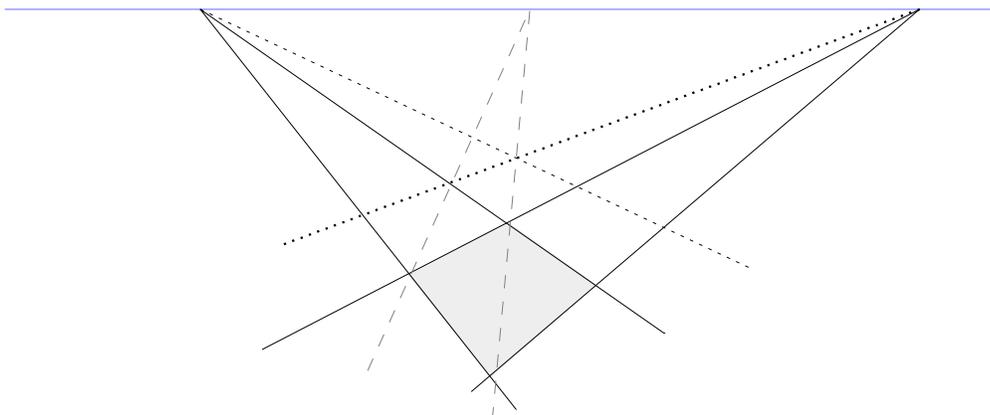
Las proyecciones paralelas	Las proyecciones centrales
<ul style="list-style-type: none"> <li>• Preservan lineas rectas</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Preservan lineas rectas</li> </ul>
<ul style="list-style-type: none"> <li>• Preservan paralelas</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>• No preservan paralelas</li> </ul>
<ul style="list-style-type: none"> <li>• No preservan distancias ni sus proporciones</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>• No preservan distancias ni sus proporciones</li> </ul>
<ul style="list-style-type: none"> <li>• No preservan angulos</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>• No preservan angulos</li> </ul>
<ul style="list-style-type: none"> <li>• No preservan areas, pero si sus proporciones</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>• No preservan areas ni sus proporciones</li> </ul>

La imagen de un cuadrado C determina a una proyeccion paralela: la imagen de C debe ser un paralelogramo D, y la imagen de la cuadrícula generada por C esta formada por paralelogramos congruentes a D. Podemos subdividir a C usando las diagonales para obtener cuadrículas cada vez mas finas, de las que conocemos sus imagenes.



La imagen de un cuadrado C tambien determina a una proyeccion central: la imagen de C es un cuadrilatero, cuyos lados opuestos convergen en un punto o son paralelos. Las lineas paralelas formadas por la cuadrícula tambien deben converger en esos puntos o ser paralelas, y las diagonales de la cuadrícula, asi que conociendo la imagen de C podemos hallar la imagen de toda la cuadrícula.

Ahora podemos subdividir a C usando las diagonales para obtener cuadrículas mas finas y ya sabemos como hallar sus imagenes.



## Problemas.

1. Dados dos paralelogramos A y B, muestra que existe una proyeccion paralela que transforma a A en un paralelogramo semejante a B.
2. Dados dos triangulos A y B muestra que hay una proyeccion desde un punto que transforma a A en un triangulo semejante a B.
3. Muestra que la imagen de un triangulo determina a una proyeccion paralela, pero no determina a una proyeccion central.
4. Muestra que al hacer una proyeccion paralela, las areas de todas las figuras cambian en la misma proporcion, pero que esto no ocurre al hacer una proyeccion desde un punto.
5. Encuentra una proyeccion paralela que preserve areas, pero no preserve distancias ni angulos.
6. Muestra que si P y P' son dos planos y d es una direccion perpendicular a P', entonces la proyeccion de P hacia P' en la direccion de d no aumenta las areas. ¿cQue ocurre si d no es perpendicular a P?
7. Muestra que si la proyeccion de un plano a otro desde un punto preserva angulos, entonces los planos son paralelos. ¿Es cierto esto para proyecciones paralelas?)
8. Si esta es la proyeccion desde un punto de un cuadrado D ¿como se ve la proyeccion de un circulo inscrito en D?

