Colineaciones

Una colineación entre espacios proyectivos P y P' es una transformación biyectiva $\varphi : P \to P'$ que preserva las lineas.

Una colineación entre espacios afines E y E' es una transformación biyectiva $\varphi : E \to E'$ que preserva lineas y preserva paralelas.

Observaciones.

1. Cada colineación entre espacios afines induce una colineación entre los espacios proyectivas correspondientes.
2. Si φ es una colineación entre los espacios proyectivos P y P' y si H es cualquier hiperplano de P entonces φ induce una colineación entre los espacios afines P-H y P'-φ(H).
3. Las colineaciones de un espacio proyectivo o afin forman un grupo.

Si P es un espacio proyectivo, podemos proyectar cualquier hiperplano H a otro hiperplano H' desde cualquier punto fuera de esos hiperplanos y obtener una colineación de H a H'. Las colineaciones que obtenidas como composición de estas proyecciones son llamadas *transformaciones proyectivas*. Las transformaciones proyectivas de un espacio proyectivo P forman un subgrupo del grupo de colineaciones de P.

La pregunta que queremos hacernos ahora es: ¿Que tantas colineaciones y que tantas transformaciones proyectivas admiten los espacios proyectivos?

Colineaciones centrales.

Sea P un espacio proyectivo. Decimos que una colineación μ de P (en si mismo) es central si existe un punto p y un hiperplano H de P tales que al aplicar μ todos los puntos de H quedan fijos y todas las lineas por p quedan invariantes. P es el centro y H es el eje de la colineación.

Ejemplo. Sea A un campo o un anillo con división

- Las traslaciones de A^n (transformaciones de la forma $(x,y) \to (x+a,y+b)$ dan colineaciones centrales de AP^n: el eje es el hiperplano al infinito y el centro es el punto al infinito correspondiente a la dirección de traslación
- Las dilataciones de A^n (transformaciones de la forma $(x,y) \to (ax,ay)$ dan colineaciones centrales de AP^n: el eje es el hiperplano al infinito y el centro es el origen.

Las colineaciones centrales de un espacio proyectivo P con eje H son las colineaciones del espacio afin P-H que dejan invariantes todas las direcciones, y que fijan un punto (si el centro esta en P-H) o dejan invariantes a todas las lineas en una dirección (si el centro esta en H).

Ahora podemos definir lo que son las traslaciones y dilataciones en cualquier espacio afin:

Una dilatación en un espacio afin E es una colineación que deja invariantes todas las direcciones y fija un punto. Una traslación en un espacio afin E es una colineación que deja invariantes todas las direcciones y no fija ningún punto.

Lema. En un plano afin E son equivalentes

1. En E vale el teorema chico de Desargues
2. Para cada par de puntos p y p' en E, existe una traslación τ : E → E que lleva p a p'.

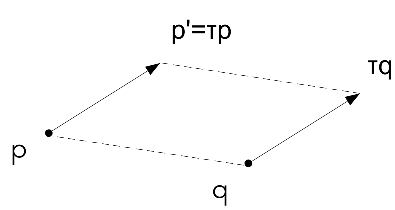
Demostración

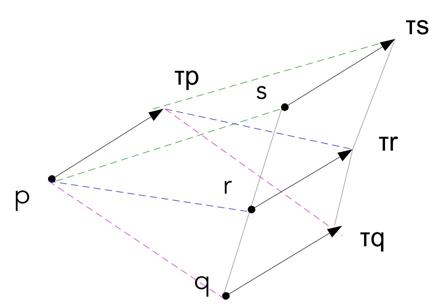
1→2. Para cada q en E definir τq como el punto de intersección de las paralelas a pq y pp' por p' y q respectivamente. Para ver que τ es una colineación, hay que ver que si q,r,s son puntos alineados de E entonces τq, τr y τs también están alineados.

Los triángulos pqr y τpτqτr tienen vértices correspondientes en 3 lineas paralelas, como por construcción pq // τpτq y pr // τpτr entonces por el teorema chico de Desargues qr // τqτr

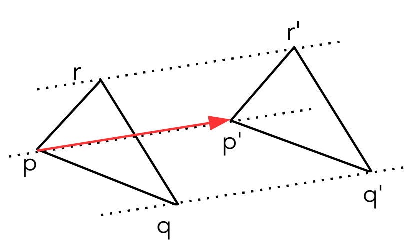
De manera análoga, como los triángulos prs y τpτrτs tienen vértices correspondientes en 3 lineas paralelas, y por construcción pr // τpτr y ps // τpτs entonces por el teorema chico de Desargues rs // τrτs.

Como q, r y s están alineados entonces qr // rs por lo anterior τqτr // τrτs así que τq, τr y τs están alineados





2←1. Si pqr y p'q'r' son dos triángulos con pp' // qq' //rr' y qp // q'q' y qr //q'r' y hay una traslación □ que lleva p a p' entonces □ lleva q a q' y lleva r a r' por lo tanto pr // p'r'.. ☻



Ejemplo. El plano de Moulton admite algunas traslaciones, pero no muchas.

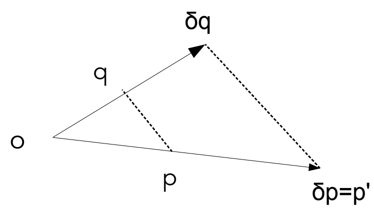
Lema. En un plano afin E son equivalentes

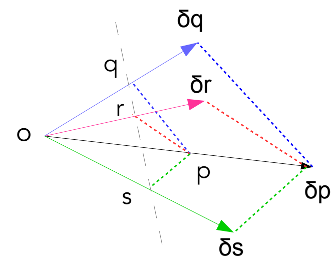
1. En E se vale el teorema grande de Desargues.
2. Dados 3 puntos alineados o,p,p' hay una dilatación $\delta : A \to A$ que fija a o y lleva p a p'.

Demostración

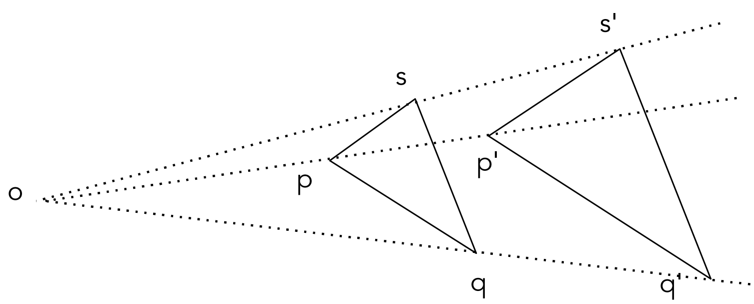
1⟶2. Para cada q en E definir δq como el punto de intersección de la linea oq con la paralela a pp' que pasa por q.

Para ver que δ define una colineación de E hay que ver que si q, r y s son 3 puntos alineados de E entonces δq, δr y δs también están alineados, esto se sigue aplicando el teorema grande de Desargues a los triángulos pqr y δp δq δr y a los triángulos prs y δpδrδs para decir que qr // δqδr y que rs y δrδs y por lo tanto δqδr // δrδs.





2⟵1. Si pqr y p'q'r' son triángulos tales que pp', qq' y rr' son concurrentes y pq // p'q' y qr // q'r' entonces la dilatación que fija el punto o donde concurren pp', qq' y rr' y que envía p a p' lleva q a q' y r a r'. .   ☻



Lema. Las dilataciones de un espacio afin E están determinadas por las imágenes de dos puntos.
Las traslaciones están determinadas por la imagen de un punto.

Demostración Tarea.

Lema. Si en E vale el teorema chico de Desargues entonces las traslaciones en E forman un grupo abeliano.

Demostración Tarea.

Colineaciones de espacios afines y proyectivos sobre anillos con división

Los espacios afines y proyectivos definidos por anillos con división tienen grupos de colineaciones muy grandes:

Si A es un anillo con división, entonces todas las traslaciones y las transformación lineales de A^n son colineaciones. De aquí se sigue que el grupo de colineaciones actúa de manera n+1 veces transitiva en A^n.

Todas las colineaciones de A^n se extienden a colineaciones de AP^n, pero AP^n tiene muchas mas colineaciones (que mueven el hiperplano al infinito).

Lema. El grupo de colineaciones de AP^n actúa de manera n+2 veces transitiva en AP^n.

Demostración Si vemos a APn como el conjunto de lineas por el origen de An+1 entonces todas las transformaciones lineales de An+1 dan colineaciones de APn y dos transformaciones dan la misma colineación si una es múltiplo escalar de la otra.

Dadas dos colecciones $\{u_1,u_2,...,u_{n+2}\}$ y $\{v_1,v_2,...,v_{n+2}\}$ de n+2 vectores en A^{n+1} tales que cualesquiera n+1 de ellos sean linealmente independientes, existe una transformación lineal $\varphi : A^{n+1} \to A^{n+1}$ que lleva los u_1's a algunos múltiplos de los v_1's. Esto dice que φ lleva las lineas generadas por los u_1's a las lineas generadas por los v_1's. ☻

Es natural preguntarse si todas las colineaciones de A^n son transformaciones afines (composición de una transformación lineal con una traslación (como es el caso en R^n) y si todas las colineaciones de AP^n vienen de transformaciones lineales de A^{n+1}.

Si A es un campo o un anillo con división, un *automorfismo* de A es una función biyectiva λ : A → A que preserva la suma y el producto, es decir que $\lambda(a+b) = \lambda(a)+\lambda(b)$ y $\lambda(ab) = \lambda(a)\,\lambda(b)$.

Observar que cada automorfismo de K fija al 0 y al 1 y manda inversos a inversos. Como la función inversa de un automorfismo es un automorfismo y la composición de automorfismos es un automorfismo, los automorfismos de K forman un grupo (llamado a veces el grupo de Galois de K).

Ejemplos.

- El único automorfismos de los numero reales es la identidad, lo mismo es cierto para los racionales.
- Los números complejos tienen un automorfismo no trivial: la conjugación compleja.
- Los cuaternios tienen muchos automorfismos no triviales: la función $a \to bab^{-1}$ es un automorfismo para cada cuaterno b.

Si A es un campo o un anillo con división, decimos que una transformación φ: A^n ⍰ A^n es *semilineal* respecto a un automorfismo λ : A ⍰ A si

1. $\varphi(U+V) = \varphi(U) + \varphi(V)$ para U,V en A^n
2. $\varphi(aU) = \lambda(a)\, \varphi(U)$ para a en A y U en A^n

Ejemplo. La transformación $\varphi: C^n \to C^n$ dada por $\varphi(z_1,z_2,\ldots,z_n)=(z_1,z_2,\ldots,z_n)$ es semilineal respecto a la conjugación compleja. Esta transformación no es lineal, pero si es una colineación.

Lema. Si A es un anillo con división, las transformaciones semilineales de A^n dan colineaciones de A^n.

Demostración Las lineas en A^n son conjuntos $L_{U,V} = \{ U+aV \ / \ a \in A \}$ para $U,V \in A^n$. Si φ es una transformación semilineal de A^n respecto al automorfismo λ, entonces la imagen del punto U+aV bajo φ es el punto

$\varphi(U+aV) = \varphi(U)+\varphi(aV) = \varphi(U)+\lambda(a)\, \varphi(V)$ lo que dice que los puntos en la linea $L_{U,V}$ van a caer a puntos en la linea $L_{\varphi(U)\,\varphi(V)}$. Como la función $a \to \lambda(a)$ es una biyección de A, la función φ es biyectiva.

Teorema. Si A es un anillo con división, las colineaciones de A^n que fijan el 0 son precisamente las transformaciones semilineales de A^n.

Demostración Sea φ una colineación de An con φ(0)=0. Tenemos que ver que existe un automorfismo $\lambda: A \to A$ tal que $\varphi(aU)= \lambda(a)\, \varphi(U)$ para cada $a \in A$ y $U \in A^n$.

Si U 0, entonces 0, U y aU están en una linea, y como φ es una colineación que fija a 0 entonces 0, φ(U) y φ(aU) están en una linea. Por lo tanto φ(aU) es un múltiplo escalar de φ(U), es decir que existe un elemento $\lambda_U(a)$ en A (que depende de a y de U) tal que $\varphi(aU) = \lambda_U(a)\varphi(U)$.

Veamos que $\lambda_U(a)=\lambda_V(a)$ para cada par de vectores $U,B \in A^n$.

Caso 1. O, U y V no son colineales.

Por un lado $\varphi(a(U+V)) = \varphi(aU) + \varphi(aV) = \lambda_U(a)\varphi(U) + \lambda_V\varphi(V)$

y por otro lado $\varphi(a(U+V)) = \lambda_{U+V}(a)\varphi(U+V) = \lambda_{U+V}(a)\varphi(U) + \lambda_{U+V}(a)\varphi(V)$

Así que $\lambda_U(a)\varphi(U) + \lambda_V(a)\varphi(V) = \lambda_{U+V}(a)\varphi(U) + \lambda_{U+V}(a)\varphi(V)$

Pero por hipótesis U y V son linealmente independientes, así que $\lambda_U(a) = \lambda_{U+V}(a) = \lambda_V(a)$

Caso 2. O, U y V son colineales.

Entonces existe un W que no esta en las lineas OU ni OV, y por el caso anterior $\lambda_U(a) = \lambda_W(a) = \lambda_V(a)$.

Como $\lambda_U(a)$ no depende de U podemos escribirlo como λ(a). Veamos que la asignación $a \to \lambda(a)$ da un automorfismo de A.

1. $\lambda(a+b) = \lambda(a) + \lambda(b)$ ya que

$\lambda(a+b)\varphi(U) = \varphi((a+b)U) = \varphi(aU) + \varphi(bU) = \lambda(a)\varphi(U) + \lambda(b)\varphi(U)$

2. $\lambda(ab) =\lambda(a)\lambda(b)$ porque

$\lambda(ab)\varphi(U) = \varphi(abU) = \lambda(a)\varphi(bU) + \lambda(a)\lambda(b)\varphi(U)$

3. a → $\lambda(a)$ da una biyección de A en A, ya que φ es biyectiva:

La linea por 0 y U, formada por los puntos de la forma aU para aA, va a dar a la linea por 0 y $\varphi(U)$, formada por los puntos de la forma $\lambda(a)\varphi(U)$.

Como φ suprayectiva los puntos de la forma $\lambda(a)\varphi(U)$ deben ser todos los de la linea por 0 y $\varphi(U)$ que son todos los múltiplos de $\varphi(U)$, así que λ es suprayectiva. Si $a \neq b$ entonces $aU \neq bU$ y como φ es inyectiva entonces $\varphi(aU) \neq \varphi(bU)$ y por lo tanto $\lambda(a)\varphi(U) \neq \lambda(b)\varphi(U)$, así que $\lambda(a) \neq \lambda(b)$, y esto muestra que λ es inyectiva.

Corolario. El grupo de colineaciones de AP^n es isomorfo al grupo de transformaciones semilineales de A^{n+1}, modulo constantes.

Problemas

1. Muestra que las colineaciones de R^2 que preservan las direcciones y no fijan ningún punto son traslaciones.

2. En cada espacio afin las traslaciones están determinadas por la imagen de un punto y las dilataciones están determinadas por las imágenes de 2 puntos.

3. Si E es cualquier espacio afin, el grupo de traslaciones de E es abeliano. (hay que ver que si τ y τ' son traslaciones, entonces $\tau \circ \tau' = \tau' \circ \tau$).

4. En un espacio afin desarguesiano, parametrizado por un anillo con división A, las dilataciones que fijan a un punto corresponden a los elementos de A y las traslaciones corresponden a los vectores en A^n.

5. En cada espacio proyectivo de dimensión mayor que 2 hay colineaciones que llevan cualquier hiperplano a cualquier otro.

6. ¿Cuales transformaciones lineales de A^{n+1} inducen colineaciones centrales de Ap^n?

7. Muestra que el único automorfismo de Q (los racionales) es la identidad. ¿Puedes demostrar que el único automorfismo de R (los reales) es la identidad? Ojo: hay muchos ejemplos de campos donde $Q \subset K \subset R$ y K si tiene automorfismos no triviales.