Dualidad

Un *plano proyectivo abstracto* consiste de dos conjuntos P y L, y una relación entre ellos, llamada *incidencia* tal que:

1. Cada elemento de P es incidente a al menos 3 elementos de L, y cada elemento de L es incidente a al menos 3 elementos de P.
2. Si p y p' están en P, existe un único l en L tal que p y p' son incidentes a l.
3. Si l y l' están en L, existe un único p en P tal que l y l' son incidentes a p.

Observar que cada plano proyectivo cumple con esta definición, si tomamos como P al conjunto de puntos, tomamos como L al conjunto de lineas y decimos que un punto p es incidente a una linea l si p esta en l y decimos que l es incidente a p si l contiene a p.
Recíprocamente, cualquier plano proyectivo abstracto determina un plano proyectivo, si definimos los puntos como los elementos de P y definimos las lineas como los subconjuntos de P formados por elementos incidentes al mismo elemento de L.

Esta definición de plano proyectivo $\mathcal{P}$ es simétrica: los papeles de P y L son intercambiables.
Así que si en un plano proyectivo abstracto cambiamos puntos por lineas y lineas por puntos obtenemos otro plano proyectivo abstracto, llamado el *plano dual* de $\mathcal{P}$.

El plano dual de P puede ser o no ser isomorfo a P.

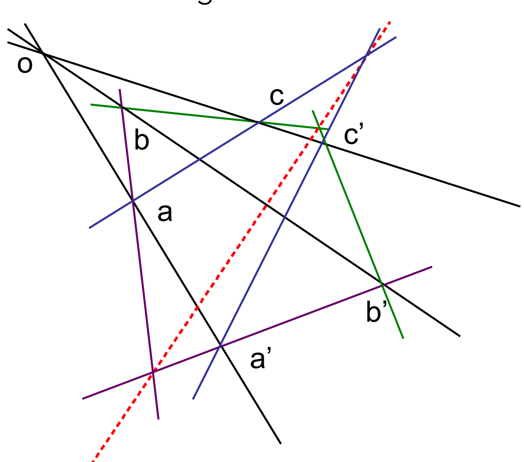
Principio de dualidad: Si una afirmación A es valida en un plano proyectivo entonces la afirmación dual, que se obtiene intercambiando:

punto ↔ *línea* *está en* ↔ *pasa por* *colineal* ↔ *concurrente*

es una afirmación válida en el plano dual.

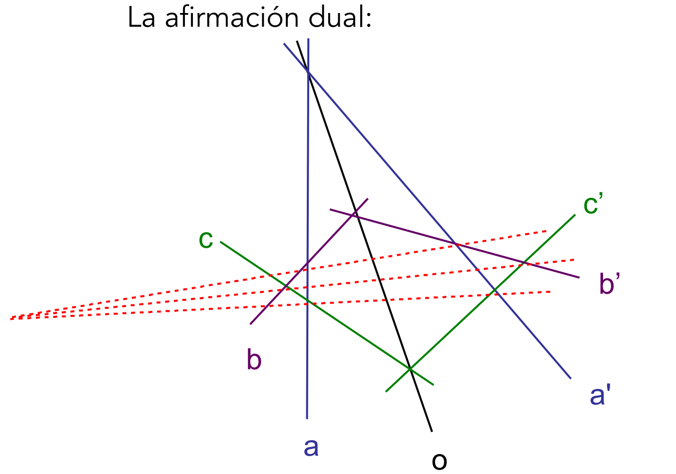
Ejemplos:

El Teorema de Desargues:



Si **o**,**a**,**a'**,**b**,**b'**,**c**,**c'** son siete puntos tales que **o**,**a**,**a'**; **o**,**b**,**b'**; y **o**,**c**,**c'** son colineales entonces los puntos (**ab**)(**a'b'**), (**ac**)(**a'c'**) y (**bc**)(**b'c'**) son colineales.

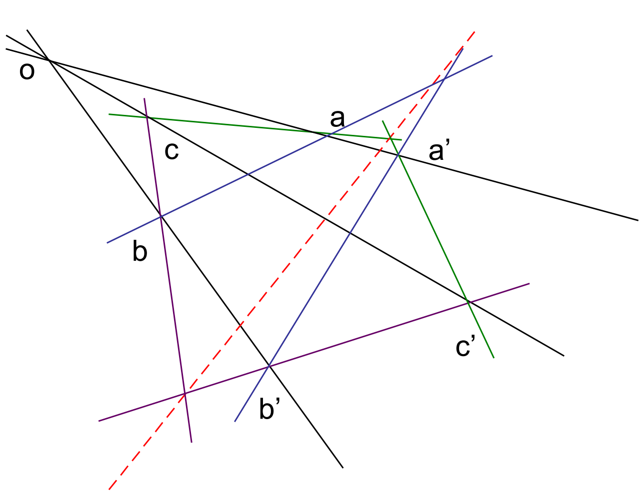
La afirmación dual:

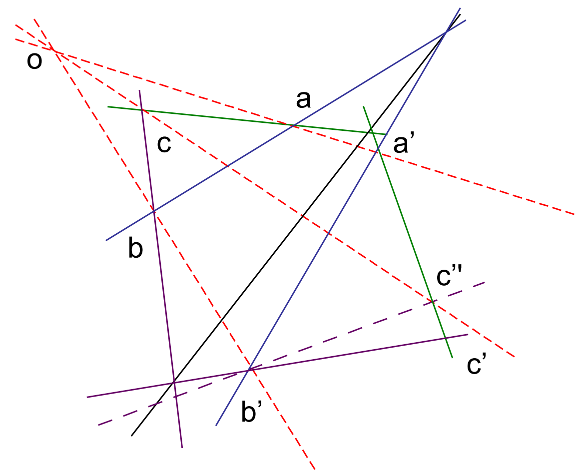


Si **o**,**a**,**a'**,**b**,**b'**,**c**,**c'** son siete líneas tales que **o**,**a**,**a'**; **o**,**b**,**b'**; y **o**,**c**,**c'** son concurrentes entonces las líneas (**ab**)(**a'b'**), (**ac**)(**a'c'**) y (**bc**)(**b'c'**) son concurrentes.

Teorema. Un plano proyectivo P es desarguesiano si y solo si el plano dual P´ lo es.

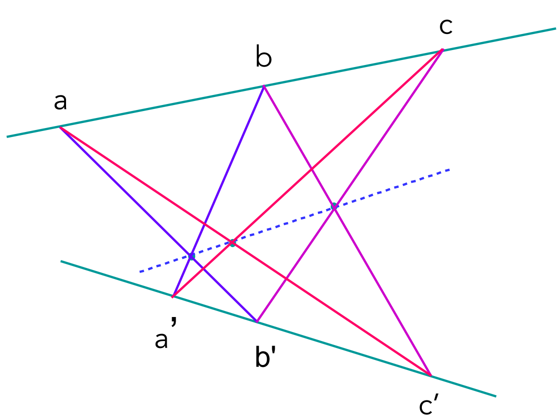
Demostración Observar que la afirmación dual del teorema de Desargues es su reciproco. Pero en cualquier plano proyectivo donde vale el teorema de Desargues también se vale su reciproco:





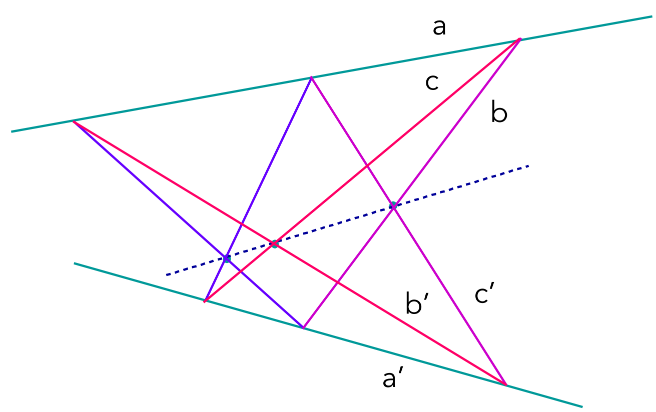
Hay que ver que si abc y a'b'c son dos triangulos y los puntos ab∩a'b', ac∩a'c' y bc∩b'c' estan alineados, entonces las lineas aa', bb' y cc' son concurrentes. Si aa', bb' y cc' no son concurrentes, sea o la interseccion de aa' y bb' y sea c'' la interseccion de oc con a'c'. El teorema de Desargues aplicado a los triangulos abc y a'b'' dice queab∩a'b', ac∩a'c' y bc∩b'c'' son colineales.

El Teorema de Pappus:



Si **a**,**b**,**c**,**a'**,**b'**,**c'** son seis puntos y **a**,**b**,**c** y **a'**,**b'**,**c'** son colineales, entonces (**ac'**)(**a'c**), (**ba'**)(**b'a**) y (**cb'**)(**c'b**) son colineales

La afirmacion dual:



Si **a**,**b**,**c**,**a'**,**b'**,**c'** son seis líneas y **a**,**b**,**c** y **a'**,**b'**,**c'** son concurrentes, entonces (**ac'**)(**a'c**), (**ba'**)(**b'a**) y (**cb'**)(**c'b**) son concurrentes

Las dos afirmaciones anteriores dicen realmente lo mismo: *el teorema de Pappus equivale a su dual.*

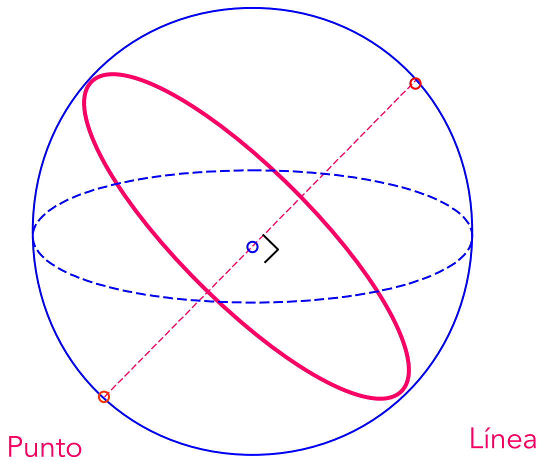
Corolario. Un plano es papiano si y solo si su dual lo es.

Lema. El plano dual a RP^2 es isomorfo a RP^2.

Demostracion. Dar un isomorfismo equivale a dar una biyeccion entre los puntos y las lineas de RP^2, de modo que puntos colineales vayan a dar a lineas concurrentes.

Veamos a RP^2 como el conjunto de lineas por el origen de R^3, y a cada recta por el origen asignemosle el plano ortogonal a ella por el origen. Esto le asigna a cada punto de RP^2 una linea.

3 puntos de RP^2 son colineales si las rectas correspondientes por el origen son coplanares, asi que los planos ortogonales a ellas comparten una linea (la linea perpendicular al plano que las contiene)



Pregunta: ¿Sera cierto que cada plano proyectivo P es isomorfo a su plano dual?

Si existe tal isomorfismo, debe enviar puntos de P en puntos de P', que son lineas de P, de modo que puntos alineados de P vayan a puntos alineados de P', es decir, a lineas concurrentes de P.

Una *correlacion* es una biyeccion entre los puntos y las lineas de un espacio proyectivo, de modo que puntos colineales van a lineas concurrentes. Cualquier correlacion da un isomorfismo entre un plano proyectivo y su plano dual.

Teorema. Cada plano proyectivo desarguesiano es isomorfo a su plano dual.

Demostracion. Cada plano proyectivo desarguesiano es isomorfo al plano AP^2 sobre algun anillo con division A. Los puntos y las lineas de AP^2 corresponden a las lineas por el origen y los planos por el origen de P^3. Las lineas por el origen de P^3 estan formadas por los multiplos de un vector (a,b,c), y los planos por el origen de P^3 estan formados por las soluciones de una ecuacion lineal homogenea ax+by+cz=0.

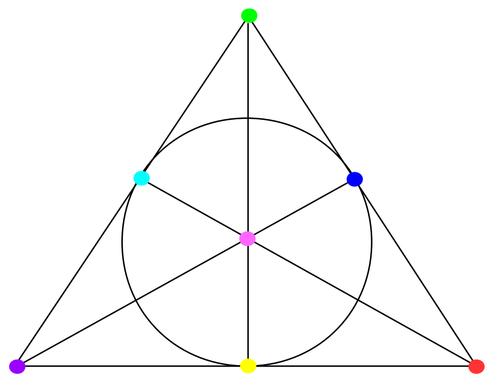
La correspondencia [a,b,c] ↔ { [[x,y,z] / ax+by+cz=0 } da una biyeccion entre los puntos y las lineas que envia puntos alineados a lineas concurrentes y envia lineas concurrentes a puntos alineados.

Pregunta ¿Cuantas correlaciones pueden existir entre los puntos y las lineas de un plano proyectivo?

Observar que en RP^2 cada conica C determina una correlacion, que envia a cada punto del plano a su polar respecto a C. La correlacion inversa envia cada linea en el plano a su polo respecto a C.

Problemas.

1. Dibuja el plano dual usando los colores para las lineas.



2. Muestra que una función biyectiva de los puntos a las lineas de un plano proyectivo que envía puntos colineales a lineas concurrentes debe enviar lineas concurrentes a puntos colineales.

3. Muestra que el dual del teorema de Pascal es el teorema de Brianchon.

4. ¿Como definirias dualidad para espacios proyectivos de dimension mayor que 2?