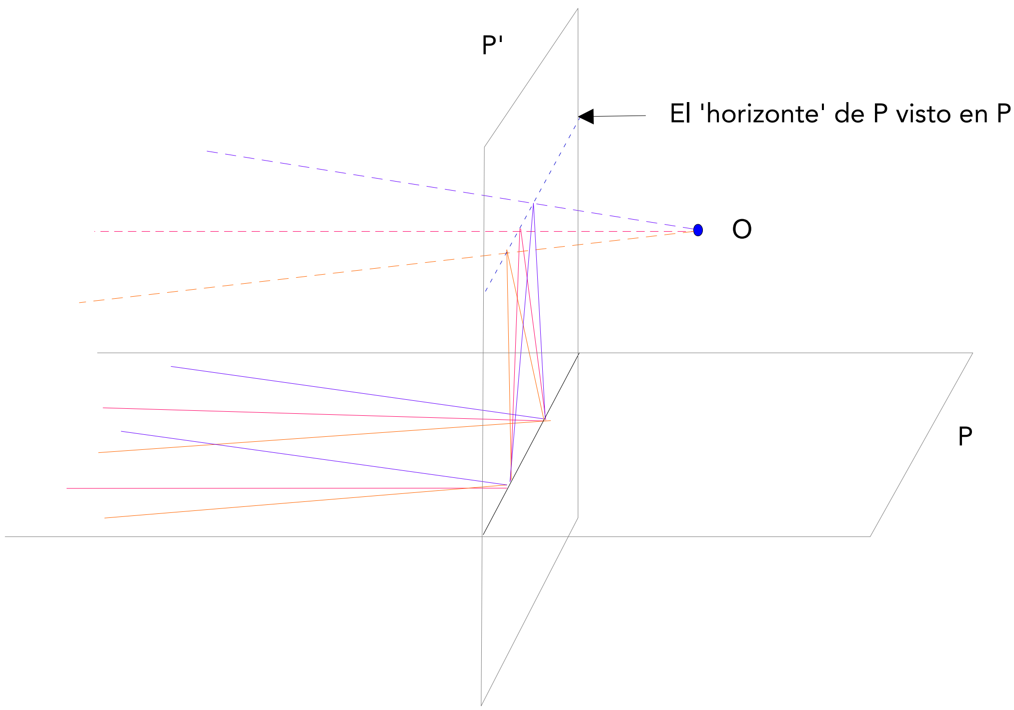
El plano afin y el plano proyectivo.

Aunque solo podemos ver las cosas que quedan frente a nosotros, las proyecciones centrales están definidas también para puntos que están atrás: basta prolongar la linea del centro de proyección al punto hasta que cruce al otro plano.

Observar que la proyección de un plano P a un plano P' desde un punto 0 no esta definida en los puntos p de P tales que op es paralela a P'. Estos puntos forman una linea en P paralela a P'.

Por otro lado, la imagen de la proyección de P a P' no es todo P', ya que no cubre a los puntos p' de P' tales que op' es paralela a P. Estos puntos forman una linea en P' que es paralela a P, que es el 'horizonte' de P visto en P'. Cada punto del horizonte corresponde a una dirección en P: es el punto donde las lineas paralelas en P parecen tocarse.



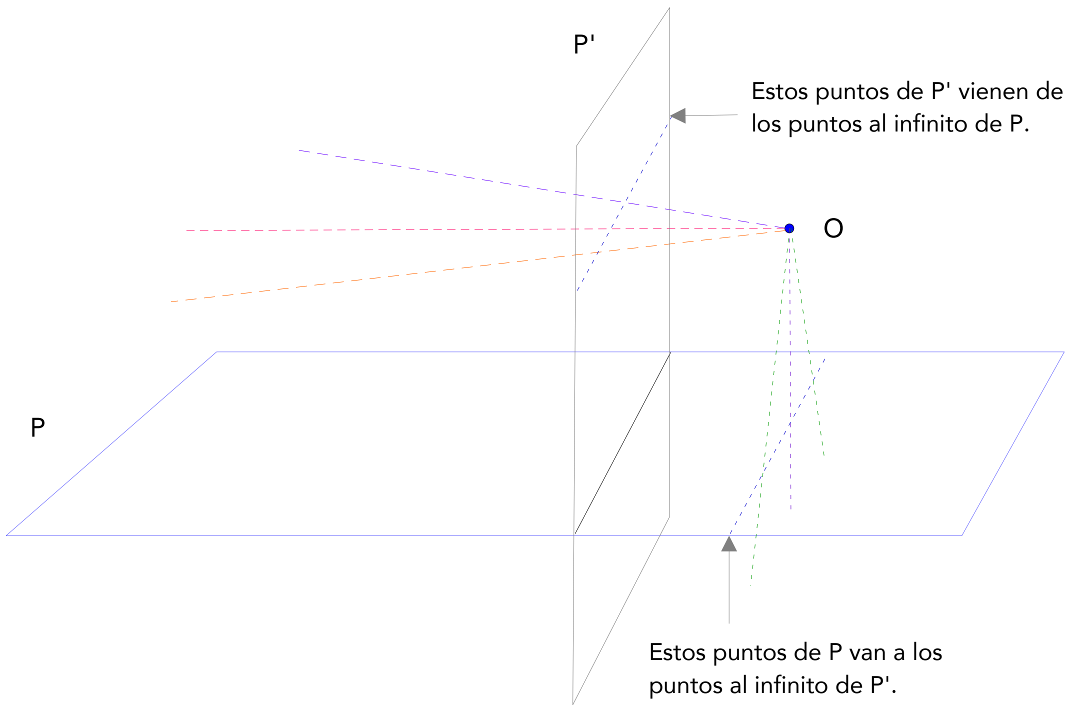
El *plano proyectivo* se obtiene añadiéndole al plano afin los puntos del horizonte (llamados puntos al infinito) de modo que haya uno por cada dirección (no orientada) en el plano, es decir, añadiendo un punto por cada familia de rectas paralelas. Al hacer esto, cada linea recta se cierra formando una *linea proyectiva*. El conjunto de puntos al infinito forma otra linea proyectiva, la *linea al infinito*.

Los puntos y lineas proyectivas así definidos satisfacen:

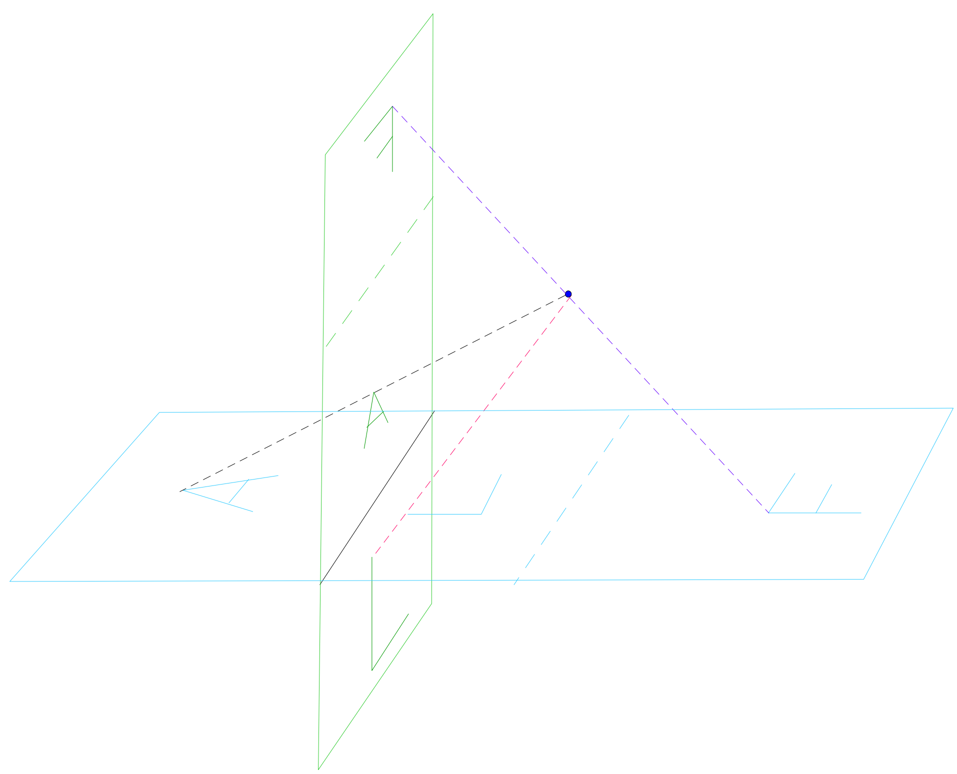
1. Por dos puntos pasa una linea proyectivas.
2. Dos lineas proyectivas se intersectan en un punto.

Lema. Las proyecciones de un plano a otro desde un punto se extienden naturalmente a transformaciones biyectivas entre los correspondientes planos proyectivos.

Demostración: ver la figura:



Observar que las proyecciones centrales definidas para todos los puntos de el planos proyectivos hacen algunas cosas extrañas:

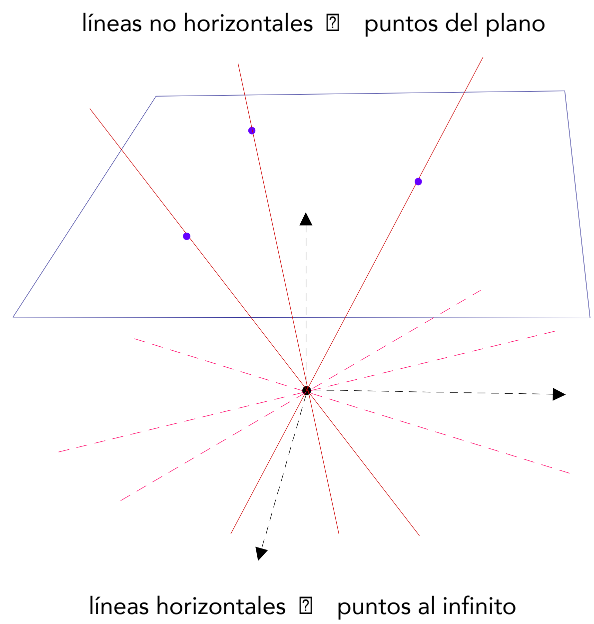


Un modelo homogéneo del plano proyectivo.

En la definición anterior del plano proyectivo los puntos al infinito parecen ser puntos especiales, y la linea al infinito parece formar un “borde” del plano, pero hay otras maneras de visualizarlo que muestran que en realidad es homogéneo (todos sus puntos son iguales) y que es cerrado (sin borde).

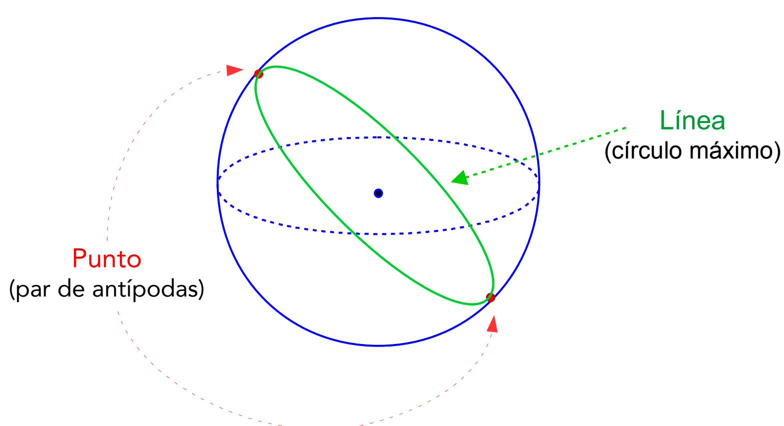
Lema. El plano proyectivo puede identificarse con el conjunto de todas las rectas por el origen en R^3.

Demostración Consideremos el plano P formado por los puntos (x,y,z) en R^3 con z=1. Las rectas por el origen de R^3 que no son horizontales intersectan a P en un punto cada una (así que el conjunto de todas estas rectas puede identificarse con el conjunto P). Las rectas horizontales por el origen de R^3 son paralelas a rectas en P, así que cada una determina una dirección en P (que pueden identificarse con los puntos al infinito de P).



Si identificamos a los puntos del plano proyectivo con lineas por el origen de R^3, entonces as lineas proyectivas corresponden a planos por el origen.

Corolario. El plano proyectivo tiene la forma de una esfera con puntos antípodas identificados. Las lineas proyectivas corresponden a los círculos máximos



Como podemos enviar cada punto de la esfera a cualquier otro punto de la esfera usando una rotación, y las rotaciones preservan antípodas, el plano proyectivo es homogéneo

Problemas

1. Muestra que el plano proyectivo no es orientable (contiene una banda de Moebius).

2. Demuestra que para cada linea proyectiva *l* hay una proyección que lleva *l* a la linea al infinito, y viceversa.

3. Si identificamos a los puntos del plano proyectivo con las rectas por el origen de R^3 ¿como se traducen las siguientes afirmaciones sobre el plano proyectivo a afirmaciones sobre R^3?
   a) Por dos puntos pasa una linea proyectiva.
   b) Dos lineas proyectivas se intersectan en un punto.

4. Al identificar pares de puntos antipodas en la esfera con puntos del plano proyectivo, las rotaciones de la esfera se identifican con proyecciones del plano.