Transformaciones afines.

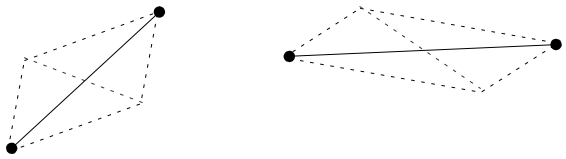
Una *transformación afin* es una función invertible del plano que preserva lineas rectas y preserva paralelas.

Ejemplos.

- Las transformaciones lineales (en el sentido del álgebra lineal) son transformaciones afines.
- La composición de cualquier numero de proyecciones paralelas es una transformación afin.

Lema. Las transformaciones afines preservan las proporciones entre intervalos alineados.

Demostración Las transformaciones afines deben preservar puntos medios ya que envían paralelogramos en paralelogramos y sus diagonales se cruzan en el punto medio. Repitiendo esto se ve que deben preservar cuartos, octavos, etc. y que deben respetar dobles, cuádruples, etc, por lo tanto deben preservar todos los múltiplos enteros y todas las fracciones con denominadores de la forma 2n.



Como cada numero real se puede aproximar por fracciones de este tipo, y las transformaciones afines son continuas, estas deben preservar todos los múltiplos reales en cada dirección •

Lema. Si A,B,C y A',B',C' son 2 ternas de puntos no alineados en el plano, entonces existe una única transformación afin del plano que manda A,B,C a A',B', C'.

Demostración Para ver que existe una transformación afin que lleva A,B,C a A',B', C', basta observar que existe una transformación lineal del plano que manda los vectores AB y AC (que son linealmente independientes ya que A,B, C no están alineados) a los vectores A'B' y A'C' (que también son linealmente independientes).

Ahora falta ver que si dos transformaciones afines llevan A,B,C a A',B', C' entonces las dos transformaciones llevan a todos los puntos del plano a los mismos lugares.

Dado un punto P, las paralelas a AC y AB que pasan por p cortan a las rectas AB y AC en dos puntos x y y. Las imágenes de x y y son los dos puntos en las rectas A'B' y A'C' que cortan a los segmentos A'B' y A'C' en la misma proporción en que x y y cortan a los segmentos AC y AC. Así que la imagen de P es el punto P' que esta en la intersección de las paralelas a A'C' y A'B' que pasan por x' y y'. •

Lema. Cada transformación afin del plano es composición de proyecciones paralelas.

Transformaciones proyectivas.

Una *transformación proyectiva* es una función invertible del plano proyectivo que preserva lineas proyectivas.

Ejemplos.

- La composición de cualquier numero de proyecciones centrales o paralelas es una transformación proyectiva.
- Cada transformación lineal de R^3 da lugar a una transformación proyectiva del plano, ya que podemos identificar a los puntos del plano proyectivo con las rectas por el origen de R^3 y a las lineas proyectivas con planos por el origen, y cada transformación lineal de R^3 manda lineas en lineas y planos en planos (por lo tanto manda lineas proyectivas en lineas proyectivas).

Lema. Cada transformación afin se extiende naturalmente a una transformación proyectiva.

Demostración Cada transformación afin preserva paralelas, así que determina una función biyectiva entre los puntos al infinito. •

Lema. Si una transformación proyectiva T deja a la linea al infinito invariante entonces T es la extensión de una transformación afin.

Demostración Como T es una función biyectiva del plano proyectivo y T envía puntos al infinito a puntos al infinito, debe enviar los puntos del plano afin a puntos del plano afin y debe enviar paralelas en paralelas, y esto dice que la restricción de T al plano afin es una transformación afin. •

Lema. Cada transformación proyectiva del plano es la composición de (a lo mas 3) proyecciones.

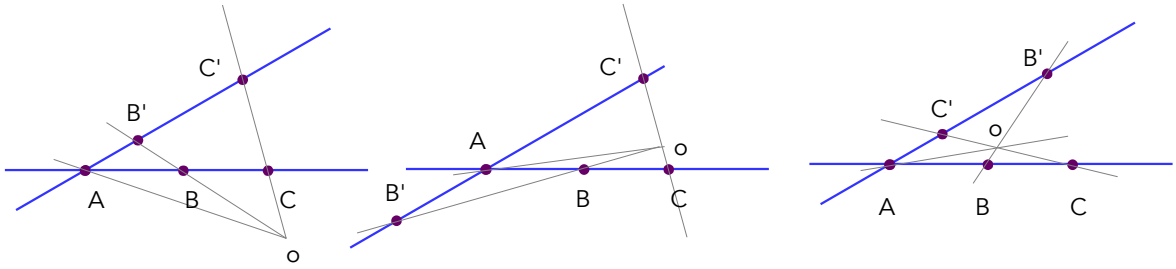
Demostración Si T es una transformación proyectiva y T deja la linea al infinito invariante, entonces la restricción de T al plano afin es una función biyectiva que envía rectas en rectas, y por lo tanto debe mandar paralelas en paralelas, así que es una transformación afin, que por un resultado anterior T es la composición de a lo mas dos) proyecciones paralelas. Estas se extienden a proyecciones del plano proyectivo, mostrando que T es composición de (a lo mas 2) proyecciones.

Si T' es una transformación proyectiva que envía la linea al infinito a otra linea l, tomemos una proyección P que envíe l a la linea al infinito, entonces la composición PT' es una transformación proyectiva que deja la linea al infinito invariante. Por el caso anterior $P \circ T'$ es composición de a lo mas 2 proyecciones, así que $T'=P^{-1} \circ (P \circ T)$ es la composición de a lo mas 3 proyecciones. •

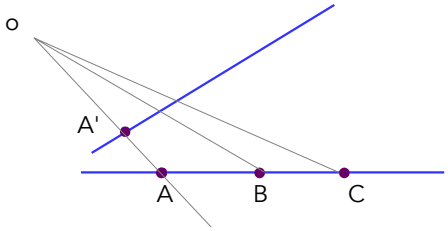
Para entender como actúan las transformaciones proyectivas, hay que comenzar por entender el efecto de una transformación proyectiva en cada linea. Las transformaciones proyectivas no preservan proporciones en una linea, de hecho pueden cambiar el orden en que se ven 3 puntos:

Lema. Si A,B,C y A',B',C' son 2 tercias de puntos alineados, entonces hay una transformación proyectiva que manda A,B,C a A',B',C'.

Demostración Si A=A' y las 2 lineas no son paralelas, entonces hay una proyección que envía A a A', B a B' y C a C':



Si A ≠ A', o las lineas son paralelas, entonces hay una proyección que manda A a A', y manda la linea a otra no paralela, y podemos componerla con la proyección para el caso anterior. •



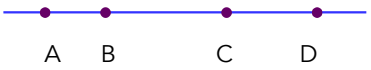
Ahora queremos ver que el efecto de una transformación proyectiva en una linea esta totalmente determinado por las imágenes de 3 puntos, para esto necesitamos la razón cruzada.

Las transformaciones rígidas preservan las longitudes: si A y B son dos puntos entonces la longitud del segmento AB no cambia al hacer transformaciones rígidas

Las transformaciones afines no preservan longitudes, pero preservan las proporciones entre las longitudes de los segmentos alineados: si A,B,C son 3 puntos alineados, entonces la razón AB/BC no cambia al hacer transformaciones afines.

Las transformaciones proyectivas no preservan las proporciones entre las longitudes de segmentos alineados, pero veremos que si preservan una razón entre proporciones: si A,B,C,D son 4 puntos alineados, entonces la razón AC/CB / AD/DB no cambia al hacer transformaciones proyectivas.

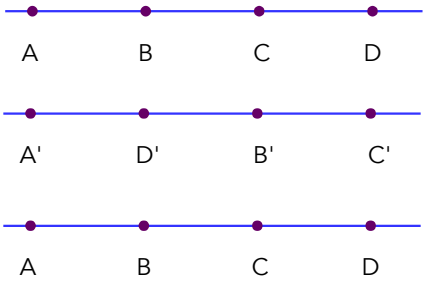
Si A,B,C,D son cuatro puntos alineados, su *razón cruzada* (o razón doble) es el numero real



$$R(A,B,C,D) = AC/CB \,/\, AD/DB = AC\ BD \,/\, AD\ BC$$

donde AB denota la longitud del segmento de A a B, con un signo + o - que se obtiene orientando a la recta y definiendo como positivas a las longitudes de los segmentos en esa dirección y como negativas a las longitudes en la dirección opuesta.

Ejemplos:



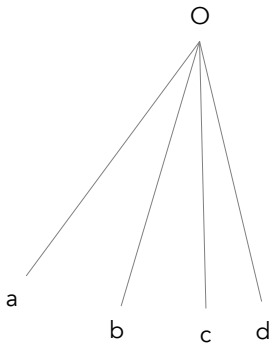
R(A,B,C,D)= (2)(2) / (3)(1) = 4/3

R(A',B',C',D')= (3)(-1) / (1)(1) = -3/1

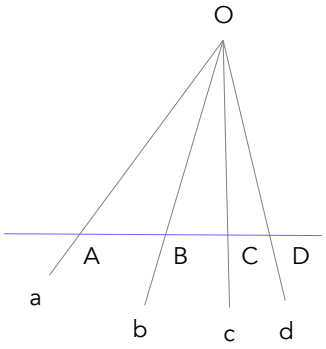
R(B,D,A,C)= (-1) (-1) / (1)(3) = 1/3

Para mostrar que la razón cruzada no cambia al hacer una proyección, veremos primero que puede expresarse en términos de ángulos en lugar de distancias.Dadas 4 rectas a,b,c,d que se cruzan en un punto o, consideramos la siguiente razón entre los senos de los ángulos que forman en o:

r(a,b,c,d) = sen(aoc) / sen(cob) / sen(aod) / sen(dob)



Lema. Si 4 lineas a,b,c,d se cruzan en O y A,B,C,D son 4 puntos alineados sobre las lineas a,b,c,d entonces R(A,B,C,D)=r(a,b,c,d)



Demostración Basta expresar las áreas de los triángulos determinados por O,A,B,C,D de 2 maneras distintas:

Area AOC = ½ h AC = ½ AO CO sen(aOc)

Area COB = ½ h CB = ½ BO CO sen(cOb)

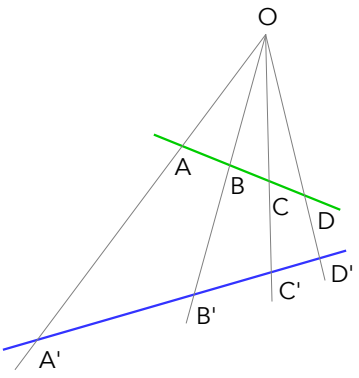
Area AOD = ½ h AD = ½ AO DO sen(aOd)

Area DOB = ½ h BD = ½ BO DO sen(dOb)

Al calcular AB CD / AC BD todos los términos que contienen a O se cancelan y solo quedan los senos. •

Corolario. Las proyecciones preservan la razón cruzada: si 4 puntos alineados A,B,C,D se proyectan a 4 puntos alineados A',B',C',D' entonces R(A,B,C,D)=R(A',B',C',D').

Demostración Por el lema anterior las razones cruzadas solo dependen de los ángulos que las rectas forman en O, así que las proyecciones de una linea a otra. •



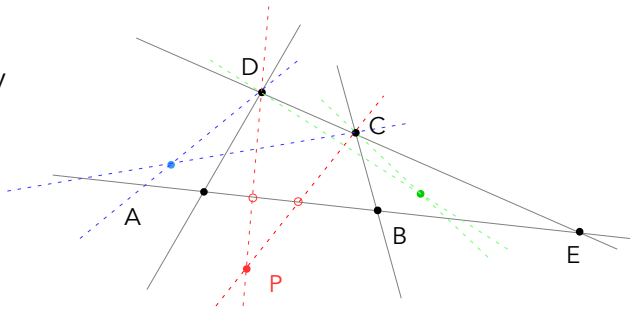
Corolario. El efecto de una transformación proyectiva en una linea esta determinado por las imágenes de 3 puntos.

Demostración. Por un resultado previo cada transformación proyectiva T es una composición de proyecciones, así que por el corolario anterior T debe preservar las razones cruzadas de los puntos alineados. Si T envía los puntos A,B,C de una linea l a los puntos A',B',C' de una linea l'. Si D es cualquier otro punto de l, su imagen bajo T debe ser el único punto D' en l' tal que R(A,B,C,D)=R(A',B',C',D'). •

Teorema. Si A,B,C,D y A',B',C', D' son puntos en posición general en el plano proyectivo, entonces existe una transformación proyectiva única que lleva A,B,C,D a A',B',C', D'.

Demostración. Para probar que hay una transformación proyectiva que lleva A,B,C,D a A',B',C', D', vemos al plano proyectivo como el conjunto de lineas por el origen de R^3, y mostramos que existen transformaciones lineales de R^3 que mandan 4 lineas dadas -en posición general- a otras 4 lineas dadas -en posición general-. Para esto basta ver que existen transformaciones lineales de R^3 que llevan 4 vectores dados -que por tercias son linealmente independientes- a múltiplos de otros 4 vectores dados -que por tercias son linealmente independientes- (Tarea).

Para mostrar que la transformación proyectiva que lleva A,B,C,D a A',B',C', D' es única, considerar los cuadriláteros ABCD y A'B'C'D'. Sea E el punto donde se intersectan AB y CD. Por un lema anterior las imágenes de todos los puntos de la linea AB están determinadas por las imágenes de A,B y E, que son A',B' y el punto E' donde se intersectan A'B' y C'D'. Si P es cualquier punto del plano, las lineas CP y DP intersectan a la linea AB en dos puntos P_1 y P_2, cuyas imágenes son dos puntos P_1' y P_2' ya determinados, y la imagen de P es el punto donde se intersectan las lineas $C'P_1'$ y $D'P_2'$.

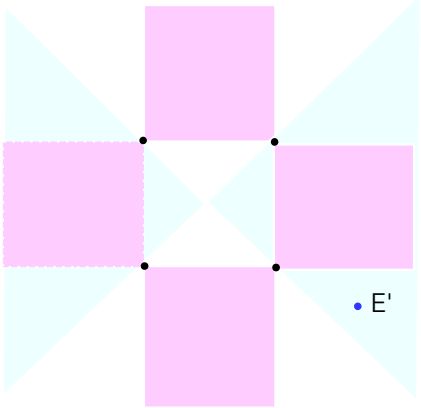


Teorema. Por cualesquiera 5 puntos en posicion general en el plano pasa una unica conica.

Demostracion. Dados 5 puntos del plano en posicion general, entonces existe una transformacion proyectiva T que envia los primeros 4 a los vertices A',B',C',D' de un cuadrado, y envia el quinto a otro punto E' no alineado con los otros.

Observar que si E' esta en las regiones rosas entonces hay una elipse o un circulo que pasa por A',B',C',D' y E'. Si E' esta en las regiones azules entonces hay una hiperbola que abre hacia los lados que pasa por A',B',C',D' y E'. Si E' esta en las regiones blancas entonces hay una hiperbola (vertical) que pasa por A',B',C',D' y E'. Asi que ren todos los casos en que E' no este alineado con un par de puntos A',B',C',D', hay una conica que pasa por A',B',C',D',E'.

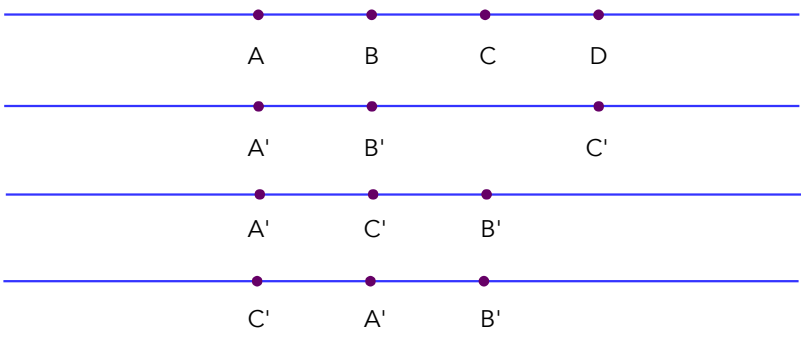
La transformacion inversa T^{-1} lleva la conica a una conica que pasa por A,B,C,D E. •



Problemas.

1. ¿Es verdad que cada transformación afin es del plano es composición de 2 proyecciones paralelas?

2. Demuestra que si a,b,c,d son 4 vectores en R^3 tales que no hay 3 coplanares y si a',b',c',d' son otros 4 vectores en R^3 tales que no hay 3 coplanares, entonces existe una transformación lineal T de R^3 tal que T(a)=ka', T(b)=lb', T(c)=mc' y T(d)=nd', para algunos reales k,l,m,n≠0.

3. Encuentra transformaciones lineales de R^3 que envíen las rectas generadas por los vectores (1,0,0), (0,1,0), (0,0,1) y (1,1,1) a las rectas generadas por los siguientes vectores:
   a) (1,0,0), (0,1,0), (0,0,1) y (1,2,-3)
   b) (0),1,0), (0,0,1), (1,0,0) y (1,2,-3)
   c) (1,0,0), (1,1,0), (1,1,1) y (0,-1,2)
   d)
4. Muestra que la razón cruzada de 4 puntos alineados no depende de la escala: si usamos otra regla para medir distancias, la razón cruzada no cambia.

5. Si A,B,C,D son 4 puntos igualmente espaciados en una linea, y una transformación proyectiva lleva los puntos A,B,C a los puntos A',B',C' ¿donde esta la imagen D' del punto D?