Coordenadas homogeneas y ecuaciones.

La identificacion entre los puntos del plano proyectivo y las rectas por el origen de R3 permite darles coordenadas a los puntos, ecuaciones a las curvas y expresiones algebraicas a las transformaciones proyectivas:

el punto (a,b) del plano afin se identifica con la recta formada por el vector (a,b,1) y sus multiplos positivos y negativos, y el punto al infinito en la direccion (c,d) se identifica con la recta formada por el vector (c,d,0) y sus multiplos.

Las *coordenadas homogeneas* del punto del plano proyectivo representado por los multiplos de un vector (a,b,c) son [a,b,c].

Al conjunto de todos los multiplos (positivos y negativos de un vector (a,b,c) se le denota por [a,b,c], estas son las *coordenadas homogeneas* del punto.

Ejemplos.

- El punto (1,2) del plano afin tiene coordenadas homogeneas [1,2,1] en el plano proyectivo.
- El punto al infinito en la direccion del vector (3,4) tiene coordenadas homogeneas [3,4,0].
- [1,2,3]=[2,4,6]=[-3,-6,-9]

A cada curva representada por una ecaucion en el plano afin le podemos asignar una *ecuacion homogenea*, que es satisfecha por todos los puntos de las lineas por el origen de R^3 que corresponden a la curva. Los polinomios homogeneos tienen todos sus terminos del mismo grado.

Podemos ver a cada polinomio P(x,y)=0 como la restriccion de un polinomio homogeneo en x,y,z al plano z=1, obtenido al completar los monomios de P con las potencias de z necesarias para que odos tengan el mismo grado.

Ejemplos.

- La recta 2x+3y+4=0 del plano afin tiene ecuacion homogenea 2x+3y+4z=0 en el plano proyectivo.
- La conica $x^2+2xy+3y^2+4x+5y+6=0$ tiene ecuacion homogenea $x^2+2xy+3y^2+4xz+5yz+6z^2=0$.

En la seccion anterior probamos que si identificamos a los puntos del plano proyectivo con las rectas por el origen de R^3 entonces las transformaciones proyectivas corresponden a transformacions lineales de R^3 (salvo escala), y estas corresponden a matrices invertibles de 3x3 (salvo multiplicacion por constantes, que podemos elegir para que el determinante de la matriz sea 1).

Asi que podemos pensar en las transformaciones proyectivas como transformaciones lineales de las coordenadas homogeneas.

Ejemplo.

¿Como se transforman la linea $x+2y-3z=0$ y el circulo $x^2+y^2-z^2=0$ al hacer esta transformacion proyectiva?

$$T\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

Si escribimos $\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ podemos despejar $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}$ y sustituir en las ecuaciones

La linea $x+2y-3z=0$ se convierte en la linea $x'+2(y'-x')-3(z'-y')=0$ o sea $-x'+5y'-3z'=0$.

El circulo $x^2+y^2-z^2=0$ se convierte en $x'^2+(y'-x')^2-(z'-y')^2=0$ o sea $2x'^2+z'^2-2x'y'+2y'z'=0$.

Teorema. Las transformaciones proyectivas mandan conicas en conicas.

Demostracion. Las conicas son todas las curvas del plano que tienen ecuaciones de segundo grado

$Ax^2+Bxy+Cy^2+Dx+Ey+F=0$

y corresponden a las curvas en el plano proyectivo que tienen ecuaciones homogeneas de segundo grado

$Ax^2+Bxy+Cy^2+Dxz+Ezy+Fz^2=0$.

Al aplicar la transformacion $L(x,y,z)=(x',y',z')$, la curva dada por una ecuacion $P(x,y,z)=0$ se convierte en la curva cuya ecuacion $P'(x',y',z')=0$ se obtiene sustituyendo los valores de x,y,z en terminos de x',y',z' en la primera ecuacion. Como las transformaciones proyectivas del plano estan dadas por transformaciones lineales de R^3, el cambio de coordenadas es lineal, por lo tanto el grado de la ecuacion no cambia. •

Problemas

1. Da la ecuacion homogenea de la linea proyectiva que pasa por los puntos con coordenadas homogeneas [1,2,3] y [0,-1,1].
2. ¿Los puntos con coordenadas homogeneas [2,3,2], [3,2,1] y [1,4, 3] estan alineados o no?
3. ¿En que punto se intersectan las lineas proyectivas con ecuaciones homogeneas

   $x - y + z = 0$ y $x + 2y + 3z = 0$?
4. Para las curvas en el plano afin dadas por las siguientes ecuaciones, encuentra las ecuaciones homogeneas correspondientes en el plano proyectivo.
   a) $x + 2y + 3 = 0$
   b) $x^2 + 2y^2 = 1$
   c) $x^2 + 3y = 2$
   d) $xy = 1$
5. Si identificamos los puntos (x,y) del plano afin con los puntos [x,y,1] del plano proyectivo, ¿cuales matrices (de 3x3) corresponden a las siguientes transformaciones afines?
   a) $T(x,y) = (x+1,y-2)$
   b) $R(x,y) = (-y,x)$
   c) $L(x,y) = (x,x+y)$
6. Da la expresion (en las coordenadas usuales) para la proyeccion del plano x=0 al plano z=0 desde el punto (1,1,1). ¿en que curva se convierte el circulo $y^2+z^2=4$?