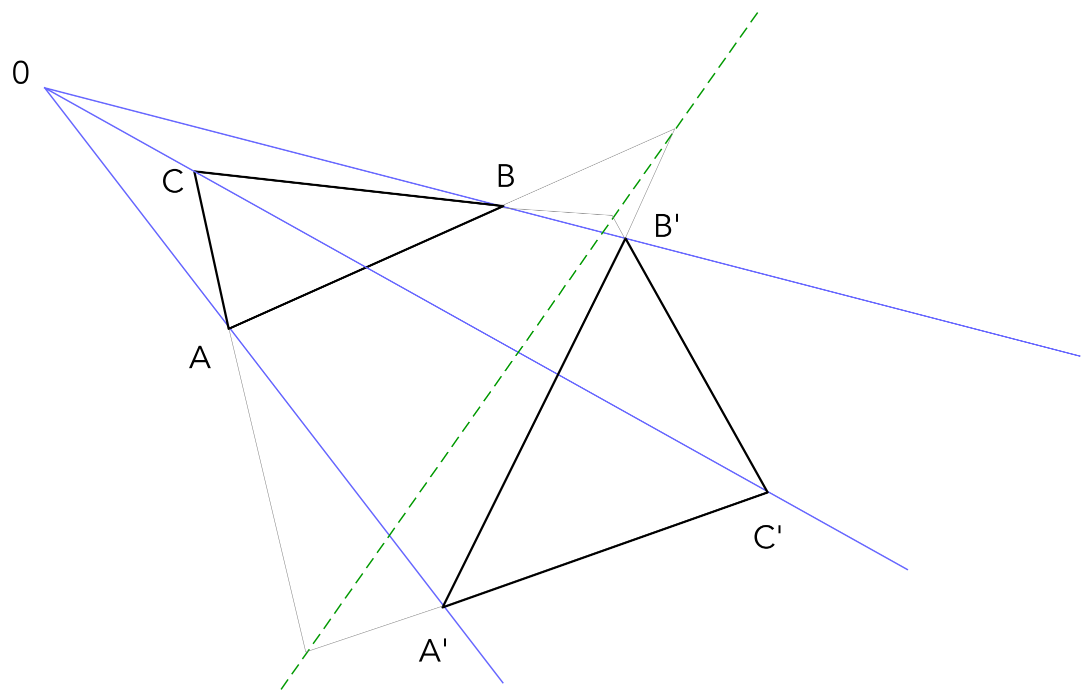
Los teoremas de Desargues y de Pappus.

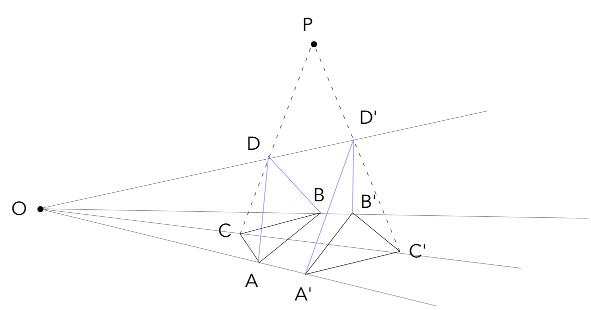
Teorema de Desargues. Si AA', BB' y CC' son lineas concurrentes en el plano o en el espacio, entonces los puntos AB∩A'B', BC∩B'C' y AC∩A'C' están alineados.



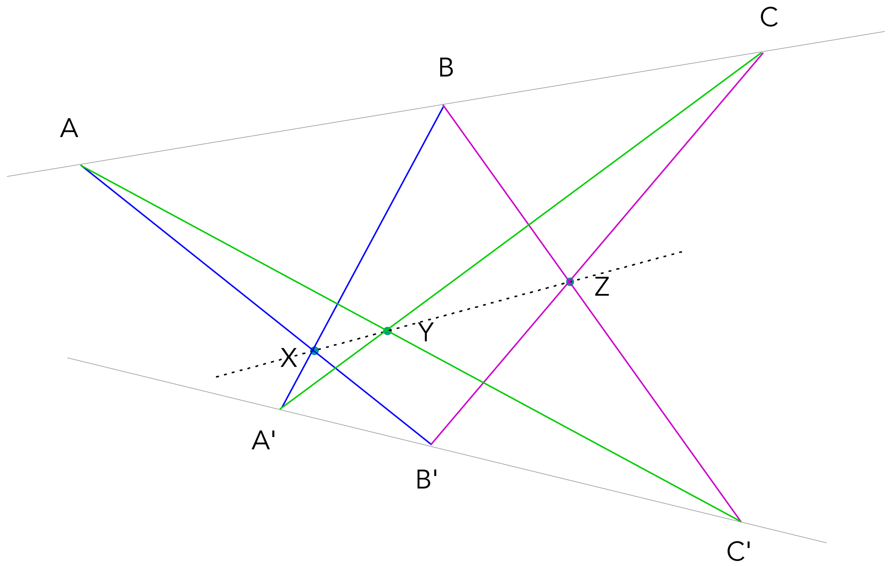
Demostración Supongamos primero que los puntos no están en un plano, de modo que los planos ABC y A'B'C' son distintos. En este caso no es obvio es que las lineas se intersecten.

Como AA' y BB' son concurrentes, los 4 puntos están en el mismo plano AOB, así que la lineas AB y A'B' deben intersectarse en un punto del plano (que puede ser un punto al infinito). Ademas, AB∩A'B' esta en la intersección de los planos ABC y A'B'C'. Por la misma razón, la lineas AC y A'C' deben intersectarse en un punto del plano AOC que esta en la intersección de los planos ABC y A'B'C', y la lineas BC y B'C' deben intersectarse en un punto del plano BOC que esta en la intersección de los planos ABC y A'B'C'. Por lo tanto los puntos AB∩A'B', BC∩B'C' y AC∩A'C' están en la intersección de los planos ABC y A'B'C', que es una recta.

Supongamos ahora que los puntos están en un plano. Elegir un punto P fuera de ese plano, y considerar en el plano CC'P una linea que pase por 0 y que cruce a las lineas PC y PC' en los puntos D y D'. Ahora las lineas AA',BB' y DD' son concurrentes y no son coplanares, así que por el caso anterior los puntos AB∩A'B', BD∩B'D' y AD∩A'D' son colineales. Como la proyección desde P envía estos puntos a los puntos AB∩A'B', BC∩B'C' y AC∩A'C', estos deben ser colineales.



Teorema de Pappus. Si los puntos A, B y C son colineales y los puntos A', B' y C' son colineales, entonces los puntos AB'∩A'B, BC'∩B'C y AC'∩A'C son colineales.



Demostración El teorema puede demostrarse con geometría clásica, por ejemplo usando el teorema de Menelao, pero la prueba mas simple utiliza coordenadas homogéneas y ecuaciones:

Podemos elegir coordenadas homogéneas de modo que

A=[1,1,1] C=[1,0,0] C'=[0,1,0] X=[0,0,1]

Las lineas AC, AC' y AX están dadas por y=z , x=z , x=y así que

B=[r,1,1] B'=[1,1,s] Y=[1,t,1] para algunos reales r,s,t

Las lineas XB, CY y C'B' están dadas por x=ry, y=tz, z=sx. Como pasan por el mismo punto A' entonces rts=1.

Las lineas CB', C'B y XY están dadas por z=sy, x=rz, y=tx así que pasan por el mismo punto si y solo si str=1.

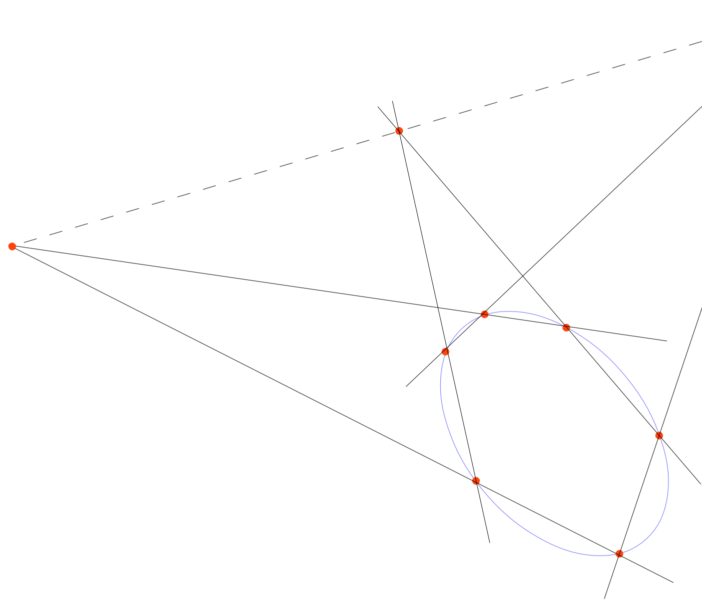
Como rts=1 entonces str=1 así que X,Y y Z son colineales. •

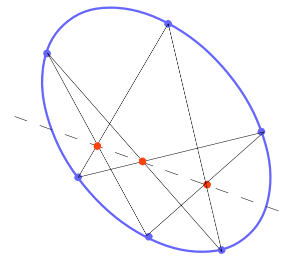
El teorema anterior también puede enunciarse así:

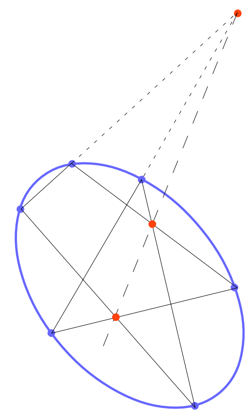
Teorema de Pappus. Si los vértices de un hexágono están alternadamente en dos rectas, entonces los puntos de intersección de los lados opuestos del hexágono están alineados.

Los teoremas de Desargues y Pappus muestran alineaciones que vienen de configuraciones de rectas. El Teorema de Pascal es una generalización del teorema de Pappus para hexágonos cuyos vértices están sobre una cónica

Teorema de Pascal. Si un hexágono tiene sus vértices en una cónica, entonces sus lados opuestos se intersectan en puntos alineados.







Ojo. El hexágono es cualquier figura con 6 lados rectos,

no tiene que ser convexa y los lados pueden cruzarse.

Demostración El caso en que la cónica es una circunferencia se puede hacer usando geometría clásica Como cualquier cónica se puede proyectar a un circulo y viceversa, el teorema se sigue para todas las cónicas La siguiente es una prueba moderna usando coordenadas homogéneas y ecuaciones.

La ecuación homogénea de la cónica es de la forma $Lx^2+My^2+Nz^2+Oxy+Pxz+Qyz=0$

Si los vértices del hexágono son A,B,C,D,E,F podemos elegir las coordenadas de modo que

$A=(1,0,0)$ $C=(0,1,0)$ $E=(0,0,1)$,

entonces $L=M=N=0$ y la ecuación queda $Oxy+Pxz+Qyz=0$ y dividiendo entre xyz, $O/z+P/y+Q/x=0$. *

Si $B=(x_1,y_1,z_1)$ $D=(x_2,y_2,z_2)$ $F=(x_3,y_3,z_3)$

entonces

AB es $z_1y = y_1z$ DE es $y_2x = x_2y$ así que $AB\cap DE = [x_2/y_2,1,z_1/y_1]$

BC es $z_1x = x_1z$ EF es $y_3x = x_3y$ así que $BC\cap EF = [1,y_3/x_3,z_1/x_1]$

CD es $z_2x = x_2z$ FA es $y_3z = z_3y$ así que $CD\cap FA = [x_2/z_2,y_3/z_3,1]$

Los 3 puntos están alineados si

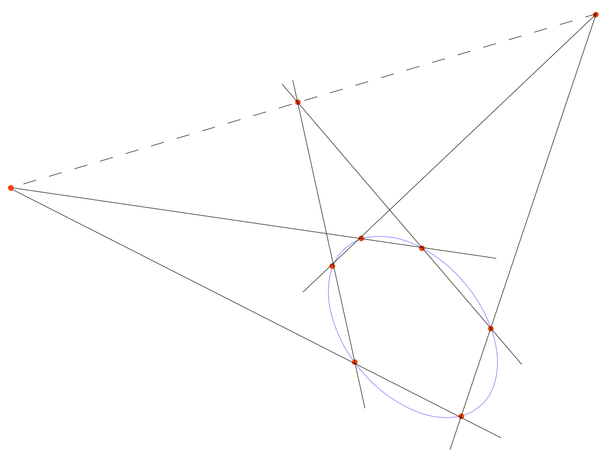
$$\text{Det} \begin{vmatrix} x_2/y_2 & 1 & z_1/y_1 \\ 1 & y_3/x_3 & z_1/x_1 \\ x_2/z_2 & y_3/z_3 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

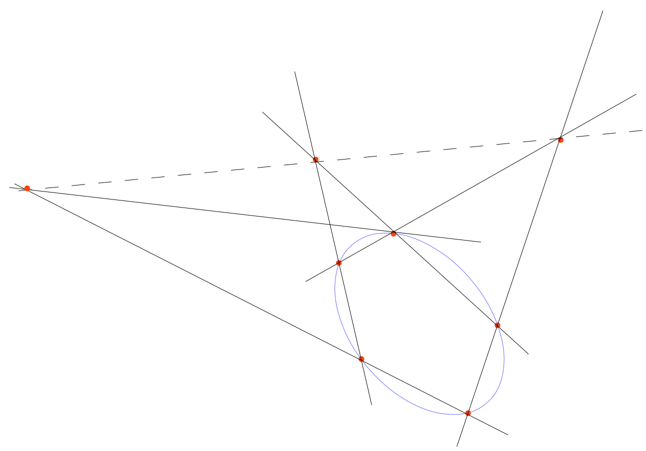
Si dividimos las columnas entre x_2 , y_3 , z_1 y multiplicamos los renglones por P, Q, O queda

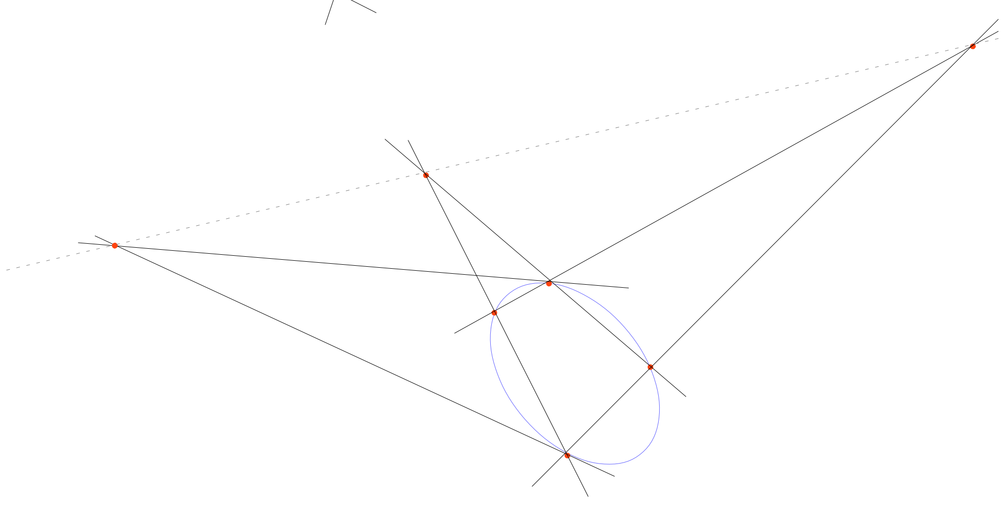
$$\mathrm{Det}\begin{vmatrix} x_2/y_2 & 1 & z_1/y_1 \\ 1 & y_3/x_3 & z_1/x_1 \\ x_2/z_2 & y_3/z_3 & 1 \end{vmatrix} = x_{2y3}z_1\mathrm{Det}\begin{vmatrix} 1/y_2 & 1/y_3 & 1/y_1 \\ 1/x_2 & 1/x_3 & 1/x_1 \\ 1/z_2 & 1/z_3 & 1/z_1 \end{vmatrix} = x_{2y3}z_1 / {}_{PQO}\ \mathrm{Det}\begin{vmatrix} P/y_2 & P/y_3 & P/y_1 \\ Q/x_2 & Q/x_3 & Q/x_1 \\ O/z_2 & O/z_3 & O/z_1 \end{vmatrix}$$

Y este determinante es 0 porque los 3 renglones son linealmente dependientes: su suma es 0,0,0 ya que los puntos B,D,F cumplen con la ecuación de la cónica $O/z+P/y+Q/x=0$. •

El teorema de Pascal tiene varios casos degenerados interesantes: si dos de los vértices del hexágono se aproximan hasta tocarse, ese lado se vuelve un solo punto, y la recta que los contiene se vuelve la tangente a la cónica en el punto doble. Si se pegan otros dos vértices se obtiene otra tangente



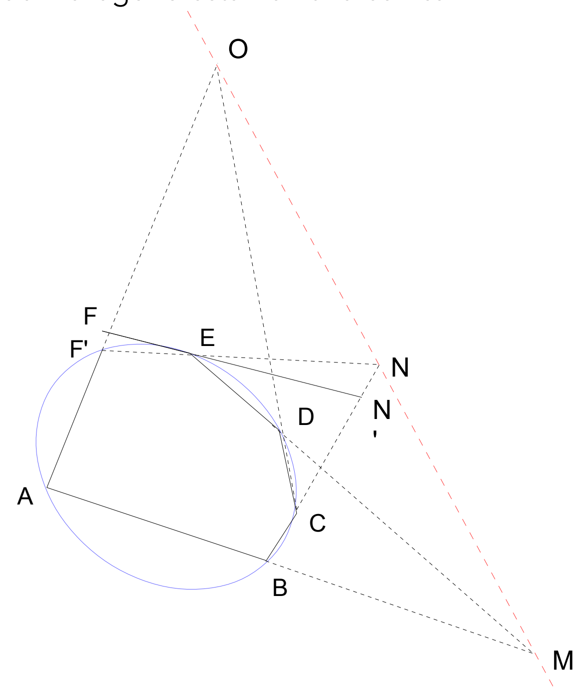




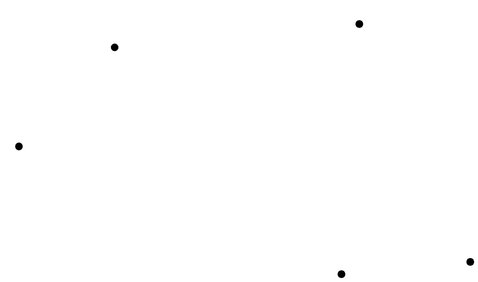
El reciproco del teorema de Pascal también es cierto: Si los lados opuestos de un hexágono se intersectan en puntos alineados, entonces los vértices del hexágono están en una cónica

Demostración

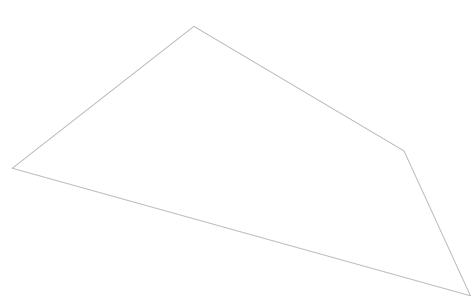
Si A,B,C,D,E,F son los vértices de un hexágono (y suponemos que no hay tres vértices alineados) entonces existe una cónica que pasa por A,B,C,D y E. Hay que ver que la hipótesis implica que F también esta en el hexágono Considerar un punto F' en la linea AF que si este en la cónica Como el hexágono A,B,C,D,E,F' esta inscrito en ;a cónica, el Teorema de Pascal, dice que los puntos de intersección de sus lados opuestos M, N y O están alineados. Pero por hipótesis los puntos de intersección de los lados opuestos de A,B,C,D,E,F que son M, N' y O también están alineados. Esto solo es posible si N=N'.



El teorema de Pascal puede usarse para dibujar los puntos de la cónica que pasa por 5 puntos dados.



También puede usarse para trazar la tangente en cualquier punto a una cónica de la que solo se conocen 5 puntos (sin dibujar la cónica), o para dibujar la (única) elipse tangente a un cuadrilátero convexo dado.



Problemas.

1. Da una demostración del teorema de Desargues usando coordenadas homogéneas.

   Hint: coloca las lineas que pasan por O sobre los ejes.

2. ¿Será valido el teorema de Pappus en 3 dimensiones, si las dos rectas no son coplanares?

3. ¿Como se puede usar el teorema de Pascal para dibujar una cónica de la que se conocen 5 puntos?

4. ¿Como se puede usar el teorema de Pascal para dibujar la imagen de un circulo bajo una proyección? ¿Si esta es la imagen de un cuadrado, como es la imagen del circulo inscrito?