Planos afines y planos proyectivos abstractos.

El plano de Moulton

Las propiedades combinatorias esenciales del plano afin y el plano proyectivo son capturadas por las siguientes definiciones mas generales:

Un *plano afin* consiste de un conjunto de puntos y un conjunto de lineas tales que

1. Dos puntos distintos están contenidos en una linea.
2. Dos lineas distintas se intersectan a lo mas en un punto.
3. Dado un punto p y una linea L que no contenga a p, hay exactamente una linea que contiene a p y no intersecta a L.
4. Hay al menos 2 lineas, cada linea contiene al menos 2 puntos.

Un *plano proyectivo* consiste de un conjunto de puntos y un conjunto de lineas con las siguientes propiedades:

1. Dos puntos distintos están contenidos en una linea.
2. Dos lineas distintas se intersectan en un punto.
3. Hay al menos 3 lineas, y cada una contiene al menos 3 puntos.

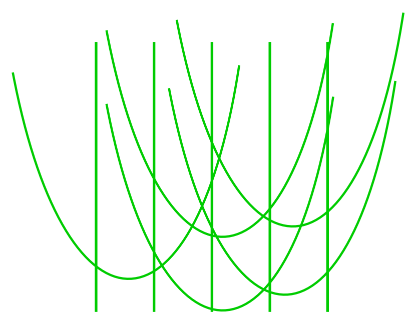
Lema. Cada plano afin determina un plano proyectivo, y viceversa.

Demostración Dado un plano afin A, le añadimos al conjunto de puntos un punto por cada clase de lineas que no se intersectan (los "puntos al infinito"), le añadimos a cada linea el punto al infinito correspondiente a su clase, y añadimos una linea formada por los puntos al infinito. El resultado es un plano proyectivo.

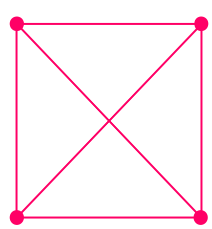
Recíprocamente, si P es un plano proyectivo y L es cualquier linea, entonces P-L es un plano afin.

Ejemplos de planos afines:

1. Si en R^2 se definen como lineas a todas las parábolas verticales que son trasladadas de $y=x^2$ y a todas las rectas verticales x=c, se obtiene un plano afin: por cada par de puntos (x_1,y_1) y (x_2,y_2) con $x_1 \neq x_2$ pasa exactamente una de esas parábolas, y cuando $x_1 \neq x_2$ los puntos están en una recta vertical.



2. Un plano afin con 4 puntos y 6 lineas.



Decimos que un plano proyectivo es *desarguesiano* si en el se cumple el teorema de Desargues, y que es *pappiano* si se cumple el teorema de Pappus. Decimos que un plano afin es desarguesiano o pappiano si su completacion proyectiva es desarguesiana o pappiana.

Teorema. Los planos proyectivos pappianos son desarguesianos.

Decimos que dos planos afines (o dos planos proyectivos) son *isomorfos* si existe una biyección entre sus puntos que manda lineas en lineas.

Ejemplo. El plano afin cuyas lineas son las parábolas $y-b=(x-a)^2$ y las rectas verticales $x=c$ es isomorfo a R^2 con las lineas rectas (tarea).

Planos definidos por campos y por anillos con división.

Lema. Para cada campo K, podemos construir un plano afin tomando a $K^2 = \{ (x,y) / x,y \text{ en } K\}$ como el conjunto de puntos y definiendo como lineas a los conjuntos de soluciones de las ecuaciones lineales $ax+by=c$ con a,b,c en K, con $a\neq0$ o $b\neq0$.

Demostración. Para ver que K^2 es un plano afin, hay que checar algebraicamente los axiomas. Observar que si una ecuación es multiplo de otra, entonces ambas definen la misma linea.

1. Dados dos puntos (a,b) y (c,d), la linea $(d-b)x+(a-c)y = (d.b)a+(a-c)b$

contiene a ambos (observar que $a-c\neq0$ o $b-e\neq0$, ya que los puntos son distintos).

2. Dos lineas $ax+by=c$ y $dx+ey=f$ se intersectan en el punto (x,y) con $x = ec-bf / ae-bd$ $y = af-dc / ae-bd$

siempre y cuando $ae\neq bd$. Si $ae=bd$ podemos multiplicar las dos ecuaciones por e y b para obtener

$aex+bey=ce$ y $bdx+bey=bf$ o sea $aex+bey=bf$

así que en este caso las dos ecuaciones tienen las mismas soluciones (representan la misma linea) si $ce=bf$ y no tienen soluciones comunes (representan lineas paralelas) si $ce\neq bf$.

3. Por lo anterior, las lineas paralelas a $ax+by=c$ tienen ecuaciones $ax+by=c'$ con $c'\neq c$. Si el punto (d,e) no esta en la linea $ax+by=c$ entonces $ad+be\neq c$ y la linea $ax+by=ad+be$ contiene a (d,e).

4. Cada anillo tiene al menos dos elementos (0 y 1), cada linea tiene tantos puntos como elementos del anillo y hay al menos tantas lineas como elementos del anillo.

Ejemplos.

- El plano afin con 4 puntos y 6 lineas viene del anillo de los enteros modulo 2.
- Si K es el campo de los números complejos, entonces K^2 es un plano afin de 4 dimensiones en el que las lineas tienen 2 dimensiones.
- Si K son los números racionales, las lineas de K^2 tienen una cantidad numerable de puntos.

En la construcción anterior en lugar de un campo: podemos tomar cualquier anillo con división A (que cumple con todos los axiomas de campo *excepto* la conmutatividad del producto). Definimos las lineas igual que antes, pero hay que tener mas cuidado al resolver las ecuaciones:

1. Dados dos puntos (a,b) y (c,d), la linea $(a-c)^{-1}x+(d-b)^{-1}y=(a-c)^{-1}a+(d-b)^{-1}b$ contiene a ambos (suponiendo que $a\neq c$ o $b\neq e$, de otro modo están contenidos en la linea $y=a$, o en $x=e$).

2. Dos lineas $ax+by=c$ y $dx+ey=f$ (con $a,b,c,d\neq 0$) se intersectan en el punto

$x = (b^{-1}a-e^{-1}d)^{-1}(b^{-1}c-e^{-1}f)$ $\quad$ $y = (a^{-1}b-d^{-1}e)^{-1}(a^{-1}c-d^{-1}f)$ $\quad$ siempre y cuando $a,b,d,e\neq 0$ y $b^{-1}a\neq e^{-1}d$.

Si $b^{-1}a = e^{-1}d$ entonces $ax+by=c$ $\Leftrightarrow$ $b^{-1}ax+y = b^{-1}c$ $\Leftrightarrow$ $e^{-1}dx+y = b^{-1}c$ $\Leftrightarrow$ $dx+ey = eb^{-1}c$ y esta linea es igual a $dx+ey=f$ si $b^{-1}c = e^{-1}d$, y es paralela si $b^{-1}c \neq e^{-1}d$.

3. y 4. son similares.

Lema. El teorema de Desargues vale en todos los planos construidos a partir de anillos con división. El teorema de Pappus vale si el producto es conmutativo (es decir, cuando el anillo es un campo).

Demostración.

Hay que ver que los teoremas valen en los planos proyectivos correspondientes a los planos afines A^2.

Podemos identificar a los puntos (a,b) de A^2 con los vectores de la forma [a,b,1] de A^3, y a las direcciones (l,m) de A^2 con los vectores [l,m,0] de A^3, asi que a todos los puntos del plano proyectivo podemos darles coordenadas homogeneas [a,b,c] donde [a,b,c]=[ak,bk,kck] para cada k en A.

Los teoremas de Desargues y Pappus pueden demostrarse algebraicamente usando coordenadas homogeneas igual que cuando A=R (sin usar la conmutatividad en el caso de Desargues, pero usandola en el caso de Pappus).

Anillos y Planos afines Desarguesianos.

El resultado anterior muestra que a partir de cada anillo con división podemos construir un un plano afin (y un plano proyectivo) donde se vale el teorema de Desargues.

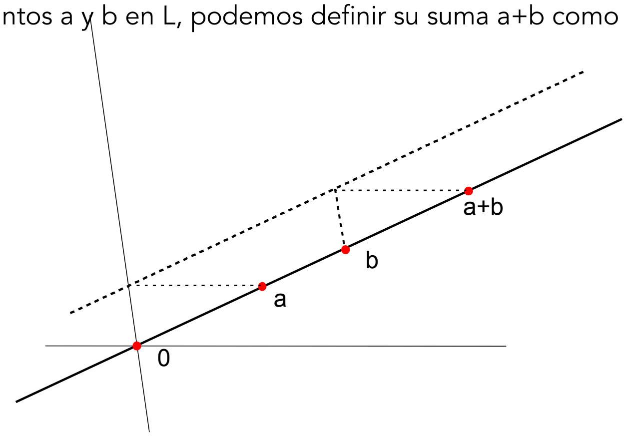
El siguiente resultado de Hilbert muestra que todos los planos afines y proyectivos donde se vale el teorema de Desagues vienen de anillos con división:

Teorema. Si P es un plano afin en el que vale el teorema de Desargues, entonces P es isomorfo a un plano afin A^2 construido a partir de un anillo con división A.

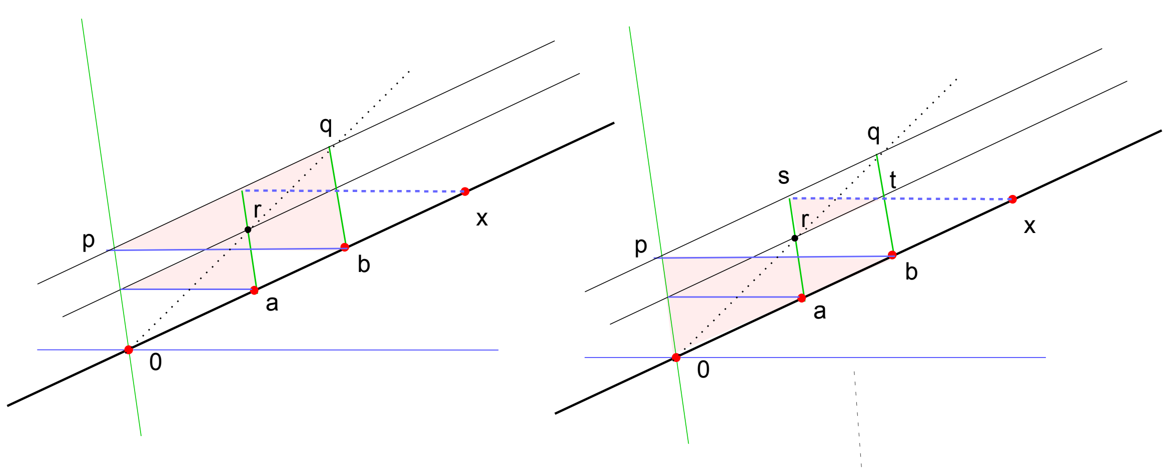
Demostración En un plano afin A^2 cada linea tiene la estructura del anillo A. Así que dado un plano afin desarguesiano P, lo primero hay que ver es como definir geométricamente una suma y una multiplicación entre los puntos de una linea de manera que formen un anillo. Las definiciones son muy simples, pero probar que tienen las propiedades requeridas es bastante laborioso.

La suma:

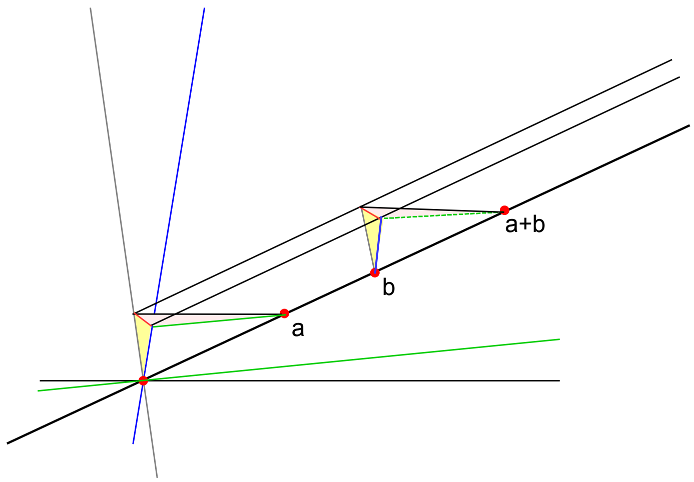
Tomemos una linea L y un punto en L que llamaremos 0. Si elegimos dos lineas auxiliares no paralelas por 0, entonces para cualquier par de puntos a y b en L, podemos definir su suma a+b como muestra el dibujo:



- Si el plano es desarguesiano, la suma es conmutativa:

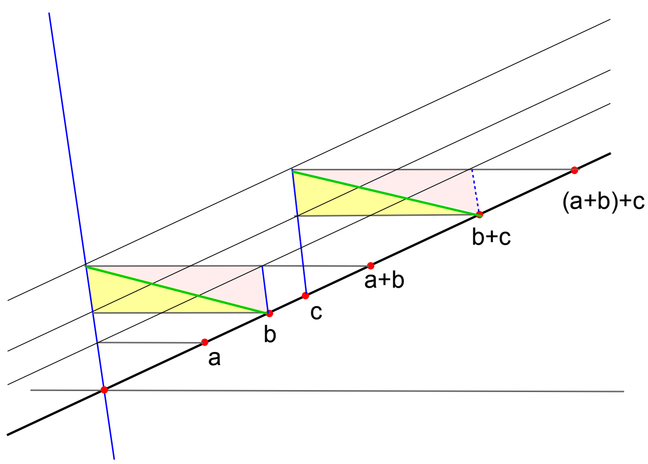


- Si el plano es desarguesiano, la suma no depende de las lineas auxiliares:



Las lineas negras, las grises, las azules y las verdes solidas son paralelas por construccion. Como los triangulos amarillos estan en perspectiva, y las lineas grises y azules son paralelas, entonces las lineas rojas deben ser paralelas. Como los triangulos rosas estan en perspectiva y las lineas negras y rojas son paralelas, la linea verde y la verde punteada deben ser paralelas, asi que la suma a+b es igual para las dos elecciones de lineas auxiliares.

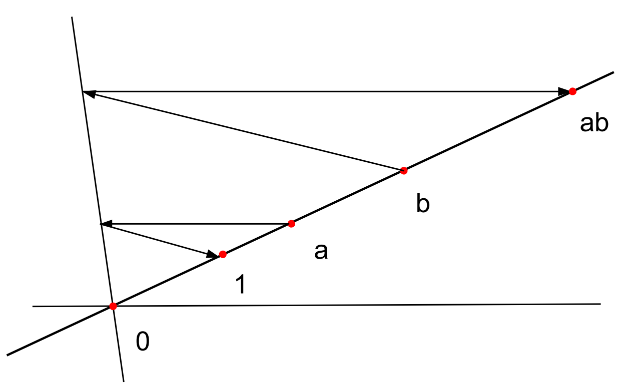
- Si el plano es desarguesiano, entonces la suma es asociativa:



Las lineas negras, las grises y las azules solidas son paralelas por construccion. (a+b)+c = a+(b+c) si y solo si la linea azul punteada es paralela a las lineas azules.
Esto ocurre porque los triangulos amarillos estan en prespectiva, y las lineas grises y azules solidas son paralelas, asi que las lineas verdes son paralelas. Como tambien los triangiulos rosas estan en perspectiva y las lineas grises y verdes son paralelas, entonces la linea azul y la linea azul punteada tambien son paralelas.

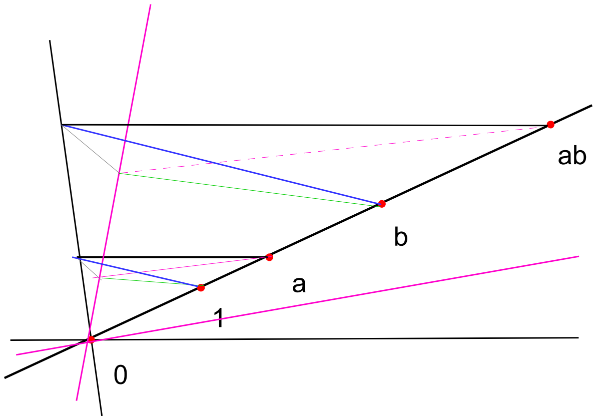
La multiplicación:

En la linea L tomemos dos puntos distintos que llamaremos 0 y 1. Si elegimos dos lineas auxiliares por 0, entonces para cualquier par de puntos a y b en L, podemos definir su producto ab como sigue:



Por construcción el 1 es neutro de este producto.

- Si el plano es desarguesiano, entonces el producto no depende de las lineas auxiliares:

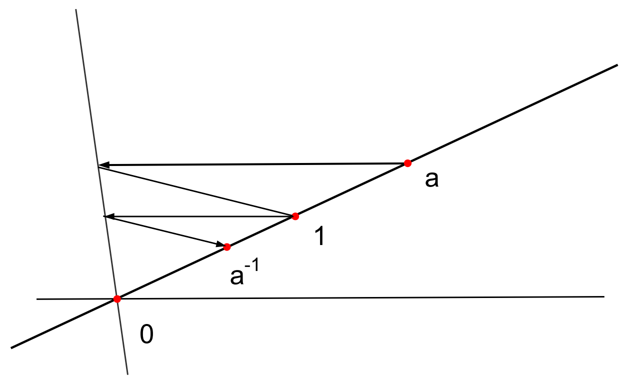


Las lineas verdes, las azules y la negras son paralelas por construccion.
El producto no depende de las lineas auxiliares si la linea rosa punteada es paralela a las otras lineas rosas.
Como los triangulos azul-verde-gris estan en perspectiva desde 0 y las lineas verdes y azules son paralelas, entonces las lineas grises son paralelas.
Como los triangiulos negro-rosa-gris estan en perspectiva desde 0 y las lineas negras y grises son paralelas, entonces las lineas rosa punteada y la linea rosa son paralelas.

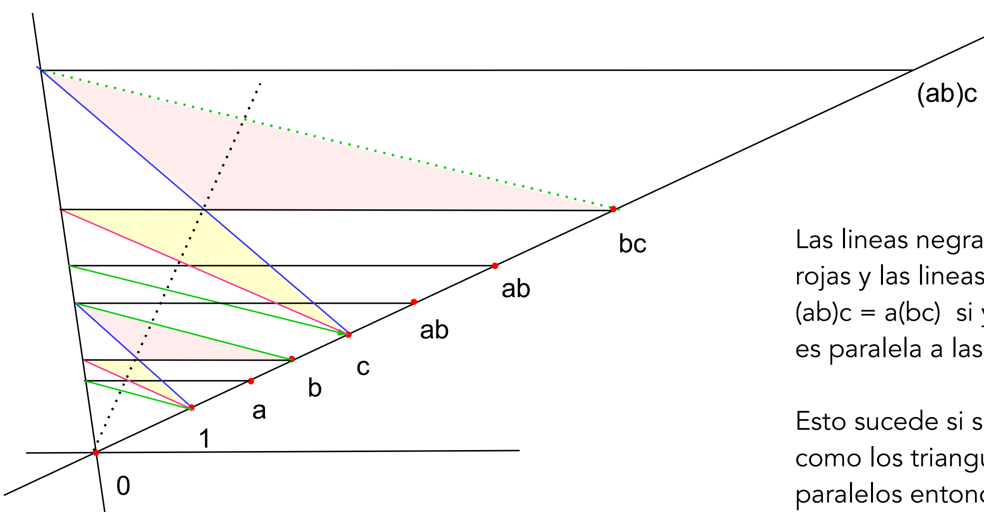
- Existen inversos multiplicativos:

Con esta definición es fácil ver que

$a^{-1} \cdot a = a \cdot a^{-1} = 1$



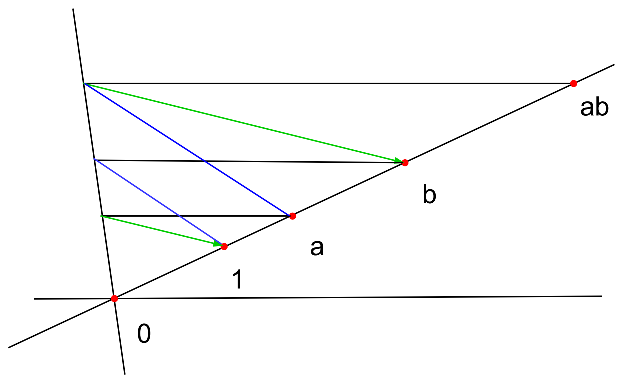
- Si el plano es desarguesiano, el producto es asociativo:



Las lineas negras, las lineas azules, las lineas rojas y las lineas verdes solidas son paralelas. (ab)c = a(bc) si y solo si la linea verde punteada es paralela a las lineas verdes.

Esto sucede si se vale el teorema de Desargues: como los triangulos amarillos tienen lados paralelos entonces estan en perspectiva desde 0. Asi que los triangulos rosas tambien estan en perspectiva desde 0, y como dos pares de lados son paralelos, el otro par de lados tambien son sparalelos.

- Si el plano es pappiano, el producto es conmutativo:



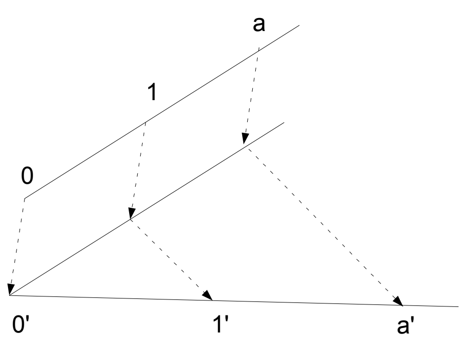
Las lineas negras y las lineas verdes son paralelas por construccion.

Las lineas verdes, las azules y dos de las negras forman un hexagono.

ab=ba si y solo si las lineas azules son paralelas, y esto ocurre si se vale el teorema de Pappus.

-

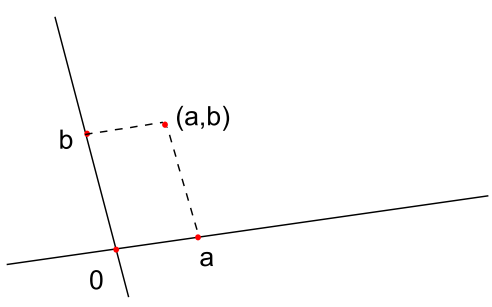
- Si el plano es desarguesiano, los anillos definidos en todas las lineas del plano son isomorfos.



Los isomorfismos están dados por composiciones de proyecciones paralelas que envíen el 0 al 0 y el 1 al 1. Dados 2 lineas afines y dos puntos en cada una, es fácil ver que existe una composición de proyecciones paralelas que envía una linea a la otra y envía los 2 puntos de una a los dos puntos de la otra.

Falta ver que una proyeccion paralela de una linea a otra que manda 0 a 0 y 1 a 1 preserva sumas y productos. Esto es consecuencia otra vez del teorema de Desargues: podemos usar como lineas auxiliares.

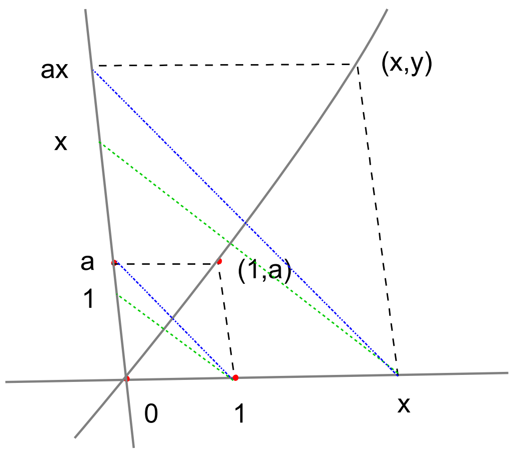
- Si P es un plano afin desarguesiano, sus puntos pueden identificarse con los elementos de A^2 para un anillo con division A.



Para darle coordenadas a todos los puntos de P, elegimos dos lineas no paralelas l y l'. Cada linea puede identificarse con el anillo A, y la proyeccion paralela que manda 1 a 1 es un isomorfismo que podemos suponer (renombrando los puntos de una de la lineas) que es la identidad. A cada punto p del plano le asignamos como coordenadas la pareja de elementos de A correspondientes a los puntos de l y l' donde cruzan as paralelas por p:

Esto da una identificación de los puntos del plano afin con los elementos de A^2.

- Si P es un plano afin desarguesiano, sus lineas son las mismas que las lineas en A^2, es decir, son las soluciones de ecuaciones lineales de la forma ax+by=c para a,b,c en A.



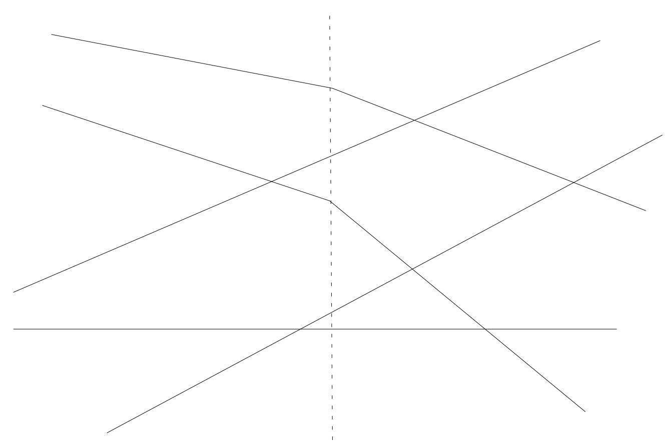
Primero hay que ver que los puntos de la linea que pasa por (0,0) y por (1,a) cumplen la ecuacion ax=y. Esto es consecuencia de la definicion del producto en l' (tomando como linea auxiliar a l) y del teorema de Desargues.

Las otras lineas son trasladadas de las lineas que pasan por (0,0) y tienen ecuaciones ax+b=y.

Los resultados anteriores muestran que cada anillo con division A da lugar a un plano proyectivo (la completacion del plano afin A^2) que es desarguesiano y todos los planos proyectivos desarguesianos pueden construirse de esa manera.

Pero existen planos proyectivos que no son desarguesianos, como el siguiente.

- Ejemplo: el plano de Moulton.

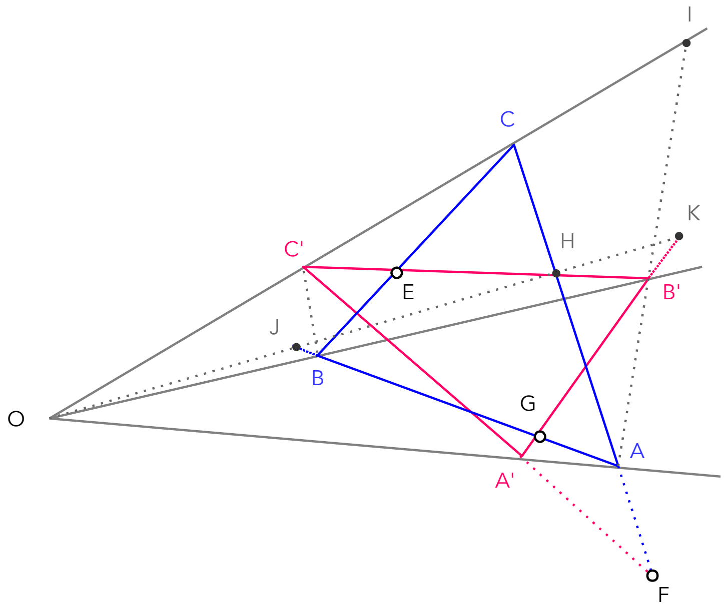


Los puntos del plano afin de Moulton son los puntos de R^2, las lineas "de subida" son las usuales pero las lineas "de bajada" estan dobladas, de modo que al cruzar el eje y sus pendientes se duplican. Es facil ver que por cada par de puntos del plano pasa una y solo una de estas lineas, y que por cada punto fuera de una linea pasa exactamente una linea paralela (tarea) asi que este es un plano afin.

El plano proyectivo de Moulton es la completacion de este plano afin.

Teorema. Los planos proyectivos pappianos son desarguesianos.

Demostracion. Veremos que se cumple el teorema de Desargues aplicando el teorema de Pappus 3 veces.



Supongamos que ABC y A'B'C' estan en perspectiva desde O. Debemos probar que ±=° •∩° +•+, F=AC∩° ≠+Φ ≥=BC∩B'C' son colineales.

Sean H=AC∩B'C' y J=AB∩¬μ

El hexagono ABCOHB' tiene sus vertices alternadamente en las lineas ACF y OBB' por lo tanto I, E y J son colineales.

Sea K=AB'∩OH

El hexagono B'AHOC'A' tiene sus vertices alternadamente en las lineas OAA' y B'C'H

por lo tanto F,K y I son colineales.

Finalmente, el hexagono AJIKB'H tiene sus vertices en las lineas AB'I y KHJ asi que D, E y F son colineales.

Para ver que existen planos desarguesianos que no son pappianos, basta ver que existe un anilo con division que no es un campo (es decir, donde la multiplicacion no es conmutativa)

- Ejemplo. Los cuaternios.

Son cuartetas de numeros reales (a,b,c,d) que tambien se pueden escribir como a+bi+cj+dk

donde 1=(1,0,0,0), i=(0,1,0,0), j=(0,0,1,0), k=(0,0,0,1).

Los cuaternios se suman coordenada a coordenada, y el producto • se define de modo que

i•i = j•j = k•k = -1

i•j = k , j•k = i , k•i = j

j•i = -k , k•j = -i , i•k = -j

este producto se extiende a todos los cuaternios distribuyendolo sobre la suma:

a+bi+cj+dk • a'+b'i+c'j+d'k =

= (aa'-bb'-cc'-dd')+(ab'+ba'+cd'-c'd)i+(ac'+ca'+db'-d'b)j+(ad'+da'+bc'-b'c)k

Cada cuaternio a+bi+cj+dk distinto de 0 tiene un inverso multiplicativo que es

$(a+bi+cj+dk)^{-1} = {}^{1}/_{a^2+b^2+c^2+d^2}\ (a-bi-cj-dk)$

Asi como los complejos pueden representarse con matrices reales de 2x2:

$$a+bi \quad ▯ \quad \begin{vmatrix} a & b \\ -b & a \end{vmatrix}$$

de modo que la suma y producto de complejos corresponden con la suma y multiplicacion de matrices, los cuaternios pueden representarse usando matrices complejas de 2x2:

$$a+bi+cj+dk \quad ▯ \quad \begin{vmatrix} a+bi & c+di \\ -c+di & a-bi \end{vmatrix}$$

y la suma y el producto de cuaternios corresponde a la suma y multiplicacion de estas matrices.

Es inmediato de la definicion que el producto de cuaternios no es conmutativo. Esto tiene consecuencias interesantes: un polinomio de grado n puede tener mas de n soluciones cuaternionicas. Hay por ejemplo una infinidad de cuaternios que cumplen $z^2+1=0$.

Observar que en el plano afin definido sobre los cuaternios las lneas tienen 4 dimensiones y que el plano tiene 8 dimensiones.

Problemas.

1. Dados cuatro puntos 0,1, a, b de una linea en un plano desarguesiano, di como hallar geométricamente el cociente a/b.

2. Si en una linea de un plano afin desarguesiano se define la suma y el producto como antes, puedes demostrar que el producto se distribuye sobre la suma?

3. Muestra que en un plano (afin o proyectivo) finito, todas las lineas tienen el mismo numero de puntos, y todos los puntos están contenidos en el mismo numero de lineas.

4. En el plano afin obtenido del campo Z_{17} cuantas lineas pasan por cada punto?

5. ¿Cuantos puntos tiene el plano proyectivo que se obtiene del campo Z_{17}? hint: problema anterior.

6. Muestra que el plano afin cuyas lineas son las parabolas $y-b=(x-a)^2$ y las rectas verticales $x=c$ es isomorfo al plano afin R^2 con las lineas usales. Hint: encuentra una transformacion de R^2 que envie las parabolas a lineas rectas.

7. Muestra que el plano de Moulton no es desarguesiano.