Planos proyectivos finitos

Observacion. En un plano proyectivo finito

1. Todas las lineas tienen el mismo numero de puntos.
2. Todos los puntos estan en el mismo numero de lineas.
3. Hay el mismo numero de puntos y de lineas. (tarea)

El *orden* de un plano afin es el numero de puntos en cada linea. El orden de un plano proyectivo es el numero de puntos en cada linea menos 1. Una pregunta natural es:

¿Cuales son los posibles ordenes de los planos afines (y proyectivos) finitos?

Ya sabemos que cada plano afin pappiano es isomorfo a un K^2, donde K es un campo finito, y cada plano afin desarguesiano es isomorfo a A^2, donde A es un anillo con division finito.

Lema. Para cada primo p y cada natural n existe un campo con p^n elementos.

Demostracion. Ver el libro de algebra moderna de Herstein.

Corolario. Para cada primo p y cada natural n, existe un plano pappiano de orden p^n.

Teorema. El orden de un campo finito es p^n, donde p es un numero primo.

Demostracion. Ver el libro de algebra moderna de Herstein.

Corolario. Los planos finitos desarguesianos tienen orden p^n para algun primo p.

Teorema. Todos los campos finitos del mismo orden son isomorfos.

Demostracion. Ver el libro de algebra moderna de Herstein.

Eisten muchos anillos con division, como los cuaternios, que no son campos, asi que parece natural tratar de encontrar ejemplos finitos.

Teorema (Wedeburn). Todos los anillos con division finitos son campos.

Demostracion. Ver el libro de algebra moderna de Herstein.

Corolario. Todos los planos finitos desarguesianos son pappianos.

No se conoce ninguna demostracion geometrica de este resultado.

Cuadrados latinos y planos proyectivos

Un *cuadrado latino* de tamaño n es una matriz de nxn cuyas entradas son los numeros 1,2,...,n de modo que en cada renglon y en cada columna aparezca cada numero exactamente una vez. Dos cuadrados latinos de tamaño n son *ortogonales* si al superponer las 2 matrices aparecen todas las n^2 combinaciones de los numeros de 1 a n.

Ejemplo. Dos cuadrados latinos de orden 4 no ortogonales (las combinaciones (2,4), (3,3) y (4,1) se repiten)

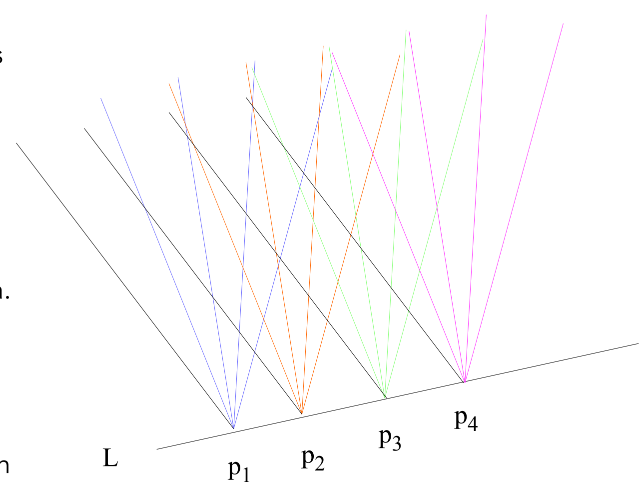
1	2	3	4
2	3	4	1
3	4	1	2
4	1	2	3

4	2	3	1
3	4	1	2
1	3	2	4
2	1	4	3

Lema. Si existe un plano afin de orden n entonces existen n-1 cuadrados latinos de orden n mutuamente ortogonales, y viceversa.

Demostracion. En un plano afin cuyas lineas tienen n puntos Hay n+1 familias de lineas paralelas, cuyas direcciones denotamos por D_0, D_1,..., D_n. Fijemos una linea L en la direccion D_0 y llamemos p_1,p_2,...,p_n a sus puntos. Las lineas en la direccion D_0 van a ser los renglones de la matriz y las lineas en la direccion D_1 van a ser las columnas, de modo que cada punto del plano esta en un renglon y una columna.

Para cada punto p_i de L dibujemos las lineas que pasan por p_i del color i. Ahora para cada direccion D_k distinta de D_0 y D_1 podemos definir un cuadrado latino, dandole a cada punto del plano el color de la linea que pasa por el punto en la direccion D_k.



Los cuadrados son latinos porque cada linea en las direcciones D_2, D_3,..., D_n intersecta a cada linea en las direcciones D_0 y D_1 en un solo punto.Los cuadrados son ortogonales porque cada linea en las direcciones D_2, D_3,..., D_n intersecta a cada linea en otra de esas direcciones en un solo punto.

Dados n-1 cuadrados latinos ortogonales de orden n, podemos definir un plano afin cuyos puntos corresponden a las casillas (i,j) y sus lineas corresponden a los renglones, las columnas y los conjuntos de casillas (i,j) que tienen el mismo numero en alguno de los cuadrados latinos.

Cada renglon intersecta a cada columna en un punto. Como los cuadrados son latinos, cada una de las otras lineas intersecta a cada renglon y a cada columna en un punto. Y como los cuadrados son ortogonales, dos lineas que no sean renglones ni columnas solo se pueden intersectar en un punto.

En 1782 Euler propuso el siguiente problema:

Hay 6 regimientos formados por 6 oficiales de distinto rango cada uno. ¿Es posible formarlos en un cuadrado de 6x6 de modo que en ninguna fila ni columna se repitan regimientos ni rangos?

Euler conjeturo que esto es imposible. El problema equivale a preguntarse si existen 2 cudrados latinos ortogonales de orden 6. En 1901 que se demostro que tales cuadrados no existen. Por el lema anterior esto implica que no existen planos afines de orden 6 (el primer numero no primo).

Fue hasta 1991 que se demostro que no existen planos afines de orden 10.

Hasta 2017 no se sabe si existen planos afines de orden 12.

Conjetura 1: Todos los planos finitos tienen orden p^n.

Conjetura2. Todos los planos de orden p son desarguesianos.

Problemas.

1. Demuestra que en un plano proyectivo finito hay el mismo numero de puntos y de lineas.

2. Encuentra tres cuadrados latinos ortogonales de orden 4.

3. ¿De que campo viene el plano proyectivo con 13 puntos y 13 lineas?

4. Muestra que si dos planos desarguesianos tienen el mismo numero de puntos entonces son isomorfos.