Espacios afines y proyectivos.

El espacio proyectivo real.

El *espacio proyectivo real* RP^3 se obtiene añadiéndole al espacio afin R^3 un punto al infinito en cada direccion Las lineas y planos de RP^3 son las lineas y planos afines extendidos con sus puntos al infinito, mas las lineas al infinito correspondientes a todos los planos y el plano formado por todos los puntos al infinito.

Ejercicio. Las lineas de RP^3 son círculos, y los planos de RP^3 son copias del plano proyectivo real.

Observación En el espacio proyectivo real, las lineas y planos tienen las siguientes propiedades:

- Por 2 puntos distintos pasa una linea.
- Por 3 puntos no alineados pasa un plano.
- Dos lineas se intersectan a lo mas en un punto.
- Dos planos distintos se intersectan en una linea.
- Un plano y una linea no contenida e el se intersectan en un punto.

Lema. El espacio proyectivo real se puede identificar con el conjunto de rectas por el origen de R^4.

Demostración Si identificamos a R^3 con el hiperplano $\{(x,y,z,1)\}$ de R^4 , entonces cada recta no horizontal por el origen de R^4 (formada por los múltiplos de un vector (x,y,z,w) con $w\neq 0$) intersecta a H en un punto, y cada recta horizontal por el origen (formada por los múltiplos de un vector $(x,y,z,0)$) se identifica con una direccion en H, de modo que las rectas por el origen de R^4 se pueden identificar con los puntos y las direcciones en R^3. Las lineas proyectivas se identifican con los conjuntos de rectas contenidas en subespacios bidimensionales de R^4, y los planos proyectivos con los conjuntos de rectas contenidas en subespacios tridimensionales de R^4. ◄

Corolario. El espacio proyectivo es cerrado y homogéneo (todos sus puntos y todas sus lineas se ven iguales).

Coordenadas homogéneas

La identificación del los puntos del espacio proyectivo con las rectas por el origen en R4 permite darle coordenadas a los puntos de RP3: si la recta correspondiente al punto esta formada por los múltiplos de un vector no nulo (x,y,z,w) en R4, diremos que el punto tiene coordenadas *homogéneas* $[x,y,z,w]$, donde $[x,y,x,w]=[kx,ky,kz,kw]$ para cada $k\neq 0$.

Observar que los puntos al infinito corresponden a los puntos con coordenadas homogéneas $[a,b,c,0]$.

Ejemplos.

- Para ver si los puntos con coordenadas homogéneas [1,0,2,1], [1,2,0,1] y [1,1,1,1] están alineados en RP^3, hay que ver si los vectores (1,0,2,1), (1,2,0,1) y (1,1,1,1) están en un subespacio de dimensión 2 de R^4, es decir, si son linealmente dependientes en R^4.
- Para ver si los puntos con coordenadas homogéneas [2,0,1,1], [1,0,1,2], [0,3,1,0] y [2,2,2,2] son coplanares en RP^3, hay que ver si los vectores (2,0,1,1), (1,0,1,2), (0,3,1,0) y (2,2,2,2) estas en un subespacio de dimensión 3 de R^4, es decir, si los 4 son linealmente dependientes en R^4.

Ecuaciones homogéneas

Las ecuaciones polinomiales en 3 variables P(x,y,z)=0 definen, en general, superficies en R^3, aunque algunas definen curvas, puntos aislados, o el vacío Estas ecuaciones se pueden extender a RP^3, haciéndolas homogéneas, añadiéndole potencias de la variable w a cada monomio de P para que todos tengan el mismo grado. Las soluciones (en coordenadas homogéneas) de este polinomio homogéneo dan la completacionn proyectiva de la superficie o curva en RP3, es decir, la superficie o curva original mas sus puntos al infinito.

Ejemplos.

- El polinomio lineal $2x+3y-4z+5 = 0$ define un plano en R^3, el polinomio homogéneo $2x+3y-4z+5w = 0$ define al plano proyectivo correspondiente en RP^3.
- El polinomio $x^2 + y^2 - z = 0$ corresponde a un paraboloide elíptico en R^3, el polinomio homogéneo correspondiente es $x^2 + y^2 - zw = 0$, cuyas soluciones incluyen a todos los puntos del paraboloide elíptico, mas el punto al infinito con coordenadas homogéneas [0,0,1,0].
- El polinomio $x^2 + y^2 - z^2 = 1$ corresponde a un hiperboloide de una hoja en R^3, el polinomio homogéneo correspondiente es $x^2 + y^2 - z^2 = w^2$., cuyas soluciones son los puntos del hiperboloide, mas un circulo al infinito correspondiente a los puntos con coordenadas homogéneas $[a,b, a^2 + b^2,0]$.

Problemas.

1. Considera los puntos a,b,c,d de RP^3 cuyas coordenadas homogéneas son a=[1,0,1,0] b=[1,1,0,0] c=[0,0,1,1] y d=[0,1,0,1]. Muestra que tres de ellos son colineales y que los cuatro son coplanares.
2. ¿Cual es la ecuación homogénea del plano en RP^3 que pasa por los puntos con coordenadas homogéneas [1,0,1,1], [0,1,0,2] y [0,1,1,0]?
3. ¿En que punto de RP^3 se intersectan el plano que pasa por [1,0,0,1], [0,1,0,0] y [0,0,1,0] y la linea que pasa por [0,0,0,1] y [1,2,3,4]?
4. Encuentra los puntos al infinito de la completacion proyectiva del paraboloide hiperbólico $x^2 - y^2 - z = 0$.

Mas dimensiones

El *espacio proyectivo real de n dimensiones*, denotado por RP^n, se obtiene añadiéndole al espacio afin R^n un punto al infinito en cada dirección De manera análoga se ve que los puntos de RP^n se pueden identificar con las lineas por el origen de R^{n+1}, que las lineas de RP^n corresponden a los planos por el origen de R^{n+1}, y que los planos de RP^n corresponden a los subespacios tridimensionales por el origen de R^{n+1}.

Espacios afines y proyectivos sobre anillos con división

Para cada anillo con división A, y para cada n, podemos definir el espacio afin de n dimensiones

$A^n = \{ (a_1,a_2,\ldots,a_n) / a_i \in A \}$

Los puntos de A^n se pueden sumar coordenada a coordenada y también se pueden multiplicar por elementos de A, como vectores: $t(a_1,a_2,\ldots,a_n) = (ta_1,ta_2,\ldots,ta_n)$. Definimos las lineas afines de A^n como los conjuntos de puntos de la forma $L_{a,b}= \{ a+tb / t \in A \}$ para $a,b \in A^n$. Decimos que dos lineas $L_{a,b}$ y $L_{c,d}$ son *paralelas* si d=eb para algún $e \in A$ de modo que los múltiplos de b representan la *dirección* de la lineas. Es fácil ver que por cada par de puntos p y p' de A^n pasa una única linea $L_{p.p'-p}$ y que dada una linea L y un punto p que no este en ella existe una única paralela a L que pasa por p.

El espacio proyectivo de dimensión n sobre A, denotado por APn se obtiene añadiéndole a An un punto al infinito en cada dirección (es decir, por cada clase de paralelas).

Los puntos del espacio proyectivo PA^n se pueden identificar con las lineas por el origen de A^{n+1} enviando cada punto $(a_1,a_2,\ldots,a_n)$ a la linea $L_{0,(a_1,a_2,\ldots,a_n,1)}$ y enviando el punto al infinito correspondiente a la direccion $(b_1,b_2,\ldots,b_n)$ a la linea $L_{0,(b_1,b_2,\ldots,b_n,0)}$.

Así, los puntos del espacio proyectivo PA^n corresponden a los subespacios de dimensión 1 de A^{n+1} y las lineas corresponden a los subespacios de dimensión 2 .

Problemas.

Considera el espacio proyectivo AP^3 para $A= Z_5$.

5. Si L es la linea que pasa por los puntos con coordenadas homogéneas [0,3,1,2] y [1,0,2,1] ¿cuales son las coordenadas homogéneas de los otros puntos en L?
6. ¿Cuantos puntos de AP^3 hay en el plano x+2y+3z-w=0?
7. ¿Cual es la ecuación homogénea del plano en AP^3 que pasa por los puntos [1,0,0,2], [0,1,0,3] y [0,4,5,0]?

Espacios proyectivos abstractos.

Un *espacio proyectivo* consta de un conjunto P (los puntos) y una familia de subconjuntos de P (las lineas) que cumplen las siguientes propiedades:

1. Cada par de puntos esta contenido en una única linea.
2. (axioma de Veblen) Si a,b,c,d son 4 puntos distintos y las lineas ab y cd se intersectan, entonces las lineas ac y bd también se intersectan.
3. Cada linea tiene al menos 3 puntos.

Si E es un espacio proyectivo y S es un subconjunto de E, decimos que S es un *subespacio* de E si para cada par de puntos p y q en S, la linea en E que pasa por p y q esta contenida en S.

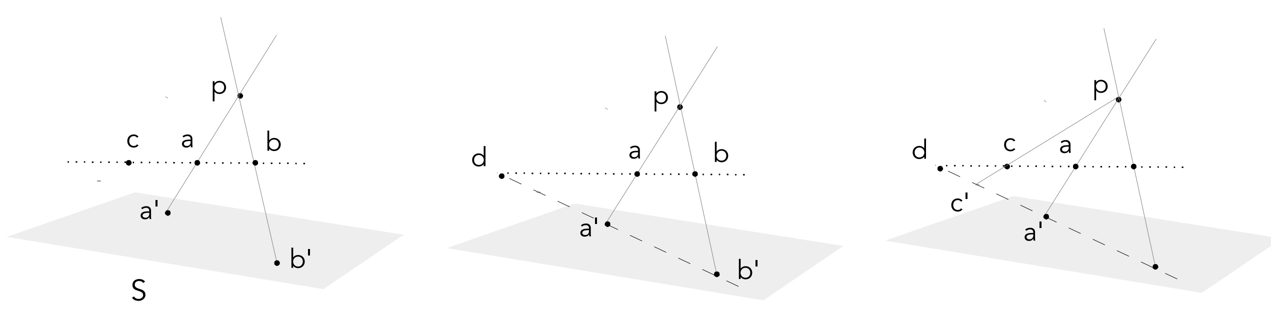
Observaciones.

- Los subespacios de un espacio proyectivo son espacios proyectivos.
- La intersección de subespacios de E es un subespacio de E.

Si C es un conjunto de puntos en E, el ***subespacio generado*** por C es el subespacio mas pequeño de E que contiene a C (y es la intersección de todos los subespacios que contienen a C)

Lema. Si S y T son subespacios de un espacio E, el subespacio SVT generado por la unión de S y T esta formado por los puntos en lineas que van de S a T.

Demostración. Veamos primero que el subespacio generado por un subespacio S y un punto p esta formado por las lineas de p a S. Como estas lineas deben estar en SVp, solo falta probar que los puntos en estas lineas ya forman un subespacio, y para esto hay ver que si tomamos dos puntos a y b en dos de lineas de p a S, entonces cada punto c en la linea ab esta en una linea de p a S.

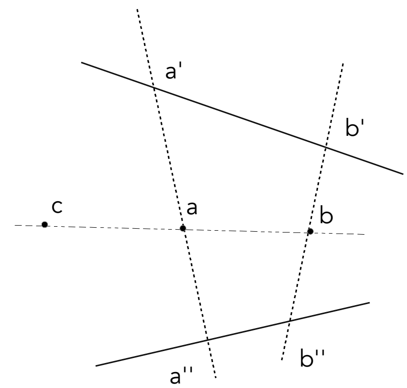


Sean a' y b' dos puntos en S tales que a esta en pa' y b esta en pb' (fig 1). Como aa' y bb' se intersectan en p, entonces por el segundo axioma de los espacios proyectivos ab y a'b' se intersectan en un punto d, que debe estar en S (fig 2). Ahora pa' y cd se intersectan en c, asi que por ese mismo axioma a'd y pc se intersectan en un punto c', que esta en S (fig 3). Por lo tanto c esta en una linea que va de p a S.

Veamos ahora que si S y T son subesapcios, entonces el subespacio SVT esta formado por las lineas de S a T.

Como las lineas que van de S a T deben estar en SVT, basta mostrar que los puntos en esas lineas forman un subespacio de E, y para esto hay que ver que si a y b son puntos en dos lineas L y L' de S a T, entonces cada punto c en la linea que va de a a b esta en una linea de S a T. Sean a' y b' puntos en S y a'' y b'' puntos en T tales que a esta en a'a'' y b esta en b'b''.

Si los puntos a', a'', b', b'' son coplanares, cada linea por c en ese plano cruza a a'b' y a a''b'' asi que c esta en una linea de S a T.



Si a', a'', b', b'' no son coplanares consideremos al subespacio R generado por esos 4 puntos. Observar que c esta en R, y que R tambien esta generado por a', b', a'' y c. Por el caso anterior, R esta formado por las lineas que van de a'' al plano a'b'c. En particular, b'' esta en una linea que va de a'' al plano a'b'c, y esto dice que la linea a''b'' cruza al plano a'b'c en un punto d. La linea cd cruza a la linea a'b' (ya que las dos estan en el plano a'b'c) y tambien cruza a la linea a''b''. Por lo tanto c esta en una linea que va de S a T. ◄

Decimos que un conjunto C de puntos en E es *independiente* si el subespacio generado por C no es generado por ningún subconjunto propio de C.

Una *base* de un subespacio S es un conjunto independiente de puntos que genera a S.

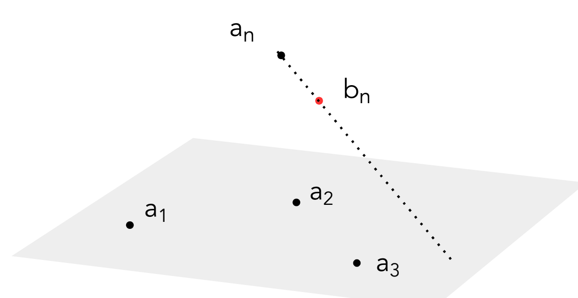
Lema. Si un subespacio S de un espacio proyectivo esta generado por un conjunto de n puntos, entonces cualquier conjunto independiente de n puntos en S lo genera.

Demostración. Por induccion sobre el numero minimo de puntos necesarios para generar a cada subespacio S.

El resultado es obvio si S consta de solo 1 o 2 puntos. Supongamos ahora que un subespacio S esta genarado por un conjunto independiente de puntos $\{a_1, a_2,..., a_n\}$ y sea $\{b_1, b_2, ..., b_n\}$ otro conjunto independiente en S.

Sea S' el subespacio generado por $\{a_1, a_2,..., a_{n-1}\}$. Entonces hay un b_i ,que no esta en S' ya que por hipotesis de induccion cualquier conjunto independiente de n-1 puntos en S' genera a S', asi que si $\{b_1, b_2, ..., b_n\}$ estuviera contenido en S' no podria ser independiente. Digamos que b_n no esta en S'.

Por el lema anterior todos los puntos en el espacio generado por $\{a_1, a_2,..., a_{n-1}\}$ estan en lineas que van de S' a a_n , asi que b_n esta en una de esas lineas y por lo tanto a_n esta en una linea que va de S' a b_n . , y por lo tanto a_n esta en el espacio generado por $\{a_1, a_2,..., a_{n-1},b_n\}$, y esto implica que $\{a_1, a_2,..., a_{n-1},b_n\}$ genera a S.



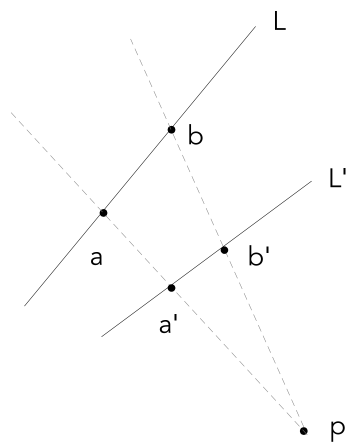
De este modo en la base $\{a_1, a_2,..., a_n\}$ podemos ir reemplazando a cada a_i por un b_j para generar al mismo espacio S, hasta que queden puros b_j's. ◄

Corolario. Todas las bases de un espacio proyectivo tienen la misma cardinalidad.

La *dimension* de un espacio proyectivo (o de un subespacio) es la cardinalidad de una base menos 1. Asi que la dimension de un punto es 0, la dimension de una linea es 1 y la dimension del conjunto vacio es -1. Los subespacios de dimension n-1 de un espacio de dimension n son llamados *hiperplanos*.

Lema. Los espacios proyectivos de dimension 2 son planos proyectivos.

Demostración Hay que ver que en un espacio proyectivo generado por 3 puntos no colineales cada par de lineas se intersectan. Sea S un espacio generado por 3 puntos, y sean L y L' dos lineas en S. Por el lema anterior, S esta generado por L y por cualquier punto p fuera de L, podemos elegir p ∉ LUL'.



Por un lema anterior a ese, todos los puntos de S estan en lineas que van de p a L. En particular, L' pasa por dos puntos a' y b' que estan en lineas pa y pb, con a,b ∈ L.

Como aa' y bb' se intersectan en p, entonces por el segundo axioma de los espacios proyectivos ab debe intersectar a a'b', es decir, L intersecta a L'. ◄

Lema. (Formula de la dimensión). Si S y T son subespacios de E y SVT es el subespacio generado por SUS' entonces Dim(SVT) = Dim(S) + Dim(T) - Dim(S∩..).

Demostración Tomemos una base A={a_1,a_2,...,a_k} de S∩T. Por un lema anterior, existen conjuntos B={b_1,b_2,...,b_m} de S y C={c_1,c_2,...,c_n} de T tales que AUB y AUC son bases de S y T respectivamente.

Afirmamos que D=AUBUC es una base de SVT. Como todos los puntos de D estan en S o en T, el subespacio generado por D esta contenido en el subespacio generado por SVT. Y como D contiene a AUB que genera a S y a AUC que genera a T, el subespacio generado por D debe contener a SVT.

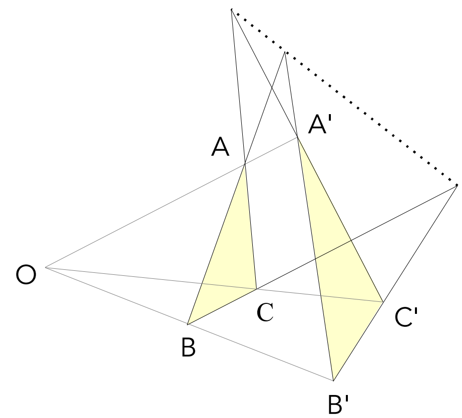
Falta ver que D es un conjunto independiente. Si no lo fuera, habria un subconjunto propio D' de D que genera el mismo subespacio, digamos que D'=AUBUC' donde C' JOPKOP∩UΛKZPKIΛ MEΛMEΛ ∫J C. Como AUC es una base de T, el subespacio generado por AUC' es un subespacio propio T' de T.

Tomemos un c_k en C-C', entonces como AUBUC' genera a SVT, entonces c_k esta en una linea que va de un punto b del subespacio generado por B a un punto c del subespacio generado por AUC'

Asi que b esta en una linea que une los puntos y c_k y c de T, por lo tanto b esta en T. Pero b tambien esta en S (porque esta en el subspacio generado por B) por lo tanto b esta en S∩T , que es el subespacio generado por A. Pero el subespacio generado por A y el subespacio generado por B no pueden intersectarse, el espacio generado por B tendria una base B' que contiene a un punto a de A∩B (ya que el conjunto independiente formado por {a} se puede extender a una base). B' tiene el mismo numero de elementos que B, y S estaria generado por AUB'- {a}, pero todas las bases de un subespacio tienen la misma cardinalidad. ◄

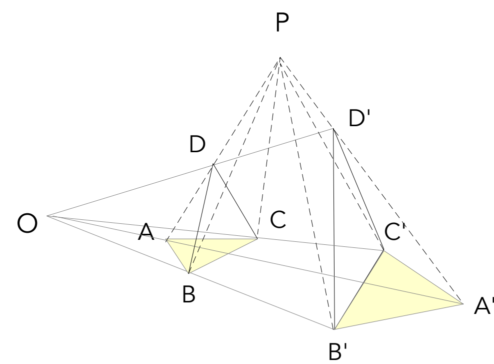
Teorema. En todos los espacios proyectivos de dimensión ≥3 se cumple el teorema de Desargues.

Demostración. Debemos ver que si dos triángulos ABC y A'B'C' están en perspectiva desde un desde un punto O (es decir, que OAA' y OBB' y OCC' son colineales) entonces los pares de lineas AB ΦA'B', AC ΦA'C' y BC y •'C' se intersectan en puntos colineales.



Estos pares de lineas se intersectan porque son coplanares: AB y A'B' estan en el plano OAB, AC y A'C' estan en el plano OAC y BC y B'C' estan en el plano OBC. Falta ver que los 3 puntos de interseccion estan alineados.

Supongamos primero que los dos triángulos no son coplanares. Entonces el subespacio generado por los planos ABC y A'B'C' tiene dimension 3, ya que los 4 puntos O,A,B,C lo generan. Asi que (por la formula de la dimension) los planos ABC y A'B'C' se intersectan en una linea. Como las lineas AB,AC y BC estan en el plano ABC y las lineas A'B', A'C' y B'C' estan en el plano A'B'C', entonces las intersecciones de las lineas estan en la linea donde se intersectan los planos.



Si los triángulos son coplanares, entonces existe un punto P fuera del plano y dos triángulos DBC y D'B'C' no coplanares, que se proyectan desde P a los triángulos ABC y A'B'C' y que están en perspectiva desde O. Por el caso anterior los puntos DB∩D'B', DC∩D'C' y BC∩B'C' están alineados y se proyectan a los puntos AB∩A'B', AC∩A'C' y BC∩B'C', así que estos estan alineados. ◄

Teorema. Todos los espacios proyectivos de dimensión n≥3 son isomorfos a espacios proyectivos sobre anillos con división.

Demostración. Sea P un espacio proyectivo de dimension n. Por el teormea anterior P y todos sus subespacios son desarguesianos.Elijamos una base $\{c_0,c_1.c_2,\ldots,c_0\}$ para P y para cada $0<i\leq n$ sea l_i la linea que va de c_0 a c_i

Sea S un hiperplano de P que no contenga a ningun c_i y sea E=P-S. Queremos ver que E es un “espacio afin” cuyos subespacios son las intersecciones de subespacios de P con E, y que E es isomorfo a A^n para algun anillo con division A. Para ver esto, observemos primero que E tiene la siguiente propiedad:

- Para cada hiperplano H de E y cada punto p en E fuera de H, existe un unico hiperplano “paralelo” H' que contiene a p y no intersecta a H. Cada linea en E que cruza a H tambien cruza a H'.

Los subespacios de E generados por c_0, c_i. y c_j para $i\neq j\neq 0$ son planos afines desarguesianos asi que podemos identificar a cada linea l_i con un anillo con division A, y es el mismo anillo para todas las lineas.

Ahora a cada punto p en E, le podemos asignar coordenadas $(x_1,x_2,\ldots x_n)$ en A^n como sigue:

Para cada $k\neq 0$ sea H_k el hiperplano de E generado por los c_i's distintos de c_k., el hiperplano paralelo a H_k que pasa por p intersecta a la linea l_k en un punto, y este corresponde a un elemento x_i del anillo A. Esto da una biyeccion entre los puntos de E y los de A^n . Falta ver que las lineas de E corresponden a las lineas de A^n (lo que dice que E es isomorfo a A^n) y checar que las completaciones proyectivas de E y de A^n (que son P y AP^n) son isomorfas. ◄

Ojo: Lo anterior *no vale* para los espacios proyectivos de dimensión 2, que pueden no ser desarguesianos.

Corolario. Un plano proyectivo es desarguesiano si y solamente si se puede encajar en un espacio proyectivo de dimensión mayor que 2.

Demostración $\Leftarrow$ Es inmediato ya que los subespacios de un espacio desarguesiano son desarguesianos.

$\Rightarrow$ Cada plano desarguesiano es isomorfo al plano proyectivo sobre un anillo con división A, cuyos puntos son las subespacios lineales de dimensión 1 de A^3 y cuyas lineas son los subespacios lineales de dimensión 2 de A^3, y este es un un subespacio del espacio proyectivo cuyos puntos son las subespacios lineales de dimensión 1 de A^4 y cuyas lineas son los subespacios lineales de dimensión 2 de A^4. ◄

Problemas.

8. Demuestra que si A es un anillo con division. el espacio AP^n obtenido al completar el espacio A^n con un punto al infinito en cada direccion es realmente un espacio proyectivo.

9. Encuentra axiomas para los espacios afines, de modo que al añadirle "puntos al infinito" en cada direccion a un espacio afin quede un espacio proyectivo, y que al quitarle un hiperplano a un espacio proyectivo quede un espacio afin.

10. Demuestra que cualquier conjunto independiente en un espacio proyectivo se puede extender a una base del espacio.

11. Muestra que en un espacio proyectivo finito, todos los subespacios de la misma dimensión tienen el mismo numero de puntos. ¿Cuantos puntos tiene un espacio proyectivo de orden o y dimensión n?

12. ¿En un espacio proyectivo de dimension 5, cuales son las posibles dimensiones de la interseccion de un subespacio de dimension 4 y otro de dimension 3?