Isometrías del plano euclidiano.

En la geometría euclidiana clásica hay nociones primitivas de puntos, rectas y círculos, que cumplen los postulados de Euclides, y en los que es posible medir longitudes, ángulos y áreas, y existen *movimientos rígidos*, que son transformaciones del plano que preservan rectas y círculos, conservando longitudes, ángulos y áreas. Las transformaciones rígidas se usan para demostrar muchas cosas, por ejemplo que dos tríangulos con lados iguales son congruentes y por lo tanto tienen angulos y áreas iguales.

Vamos a denotar al plano euclidiano por E^2 y a la distancia entre dos puntos p y q por d(p,q). La distancia entre puntos tiene 3 propiedades básicas:

1. $d(p,q) \geq 0$ y $d(p,q) = 0$ si y solo si $p = q$.
2. $d(p,q) = d(q,p)$ *simetría*
3, $d(p,q)+d(q,r) \geq d(p,r)$ *desigualdad del triángulo*

Una *isometría* del plano E^2 es una transformación $f: E^2 \to E^2$ que preserva distancias, es decir que para cada par de puntos p, q en E^2, $d(fp,fq) = d(p,q)$

Ejemplos: Las traslaciones, rotaciones y las reflexiones en rectas son isometrías.

Lema 1. Las isometrías de E^2 mandan rectas en rectas, y preservan ángulos y áreas.

Demostración. Para ver que una isometría f manda rectas en rectas basta ver que f manda puntos alineados en puntos alineados.

Observar que 3 puntos del plano estan alineados si y solo si la suma de las distancias de algun punto a los otros dos es igual a la distancia entre los otros dos puntos.

Si a, b, c estan alineados (en ese orden) entonces $d(a,b) + d(b,c) = d(a,c)$ y como f es una isometría entonces $d(fa,fb) + d(fb,fc) = d(fa,fc)$ y esto dice que fa, fb y fc también estan alineados.

Ahora si abc es un triángulo y f es una isometría entonces el triángulo y su imagen bajo f tienen lados iguales, asi que deben ser congruentes, por lo tanto tienen los mismos ángulos y la misma área. Por lo tanto f preserva los ángulos entre las lineas. Y como f preserva áreas de triángulos también preserva áreas de poligonos, y de todas las figuras que se pueden aproximar por poligonos. ■

Lo anterior muestra que las transformaciones rígidas de E^2 son lo mismo que las isometrías.

Lema 2. Las isometrías de E^2 son funciones continuas y biyectivas.

Demostración. Una funcion f: $E^2 \to E^2$ es continua si para cada punto p en E^2 y cada vi> 0, existe v > 0 tal que si q esta en E^2 y d(p,q') < δ entonces d(fp.fq) < ε. Si f es una isometría entonces d(fp.fq) = d(p,q) asi que d(p,q') < ε implica d(fp.fq) < ε.

Una isometría f debe ser inyectiva ya que fx = fq implica d(fp.fq) = 0 y como d(fp.fq) = d(p,q) entonces d(p,q) = 0 asi que p = q.

Para ver que una isometría f: $E^2 \to E^2$ debe ser suprayectiva hay que ver que la imagen de cada recta es una recta completa (Tarea). ∎

Lema 3. La composición de isometrías es una isometría y la inversa de una isometría es una isometría.

Demostración. Si f y g son isometrías entonces d(p,q) = d(fp,fq) = d(g∘fp,g∘fq) asi que g∘f es isometría. Si f es una isometría del plano entonces f es biyectiva y por lo tanto es invertible.

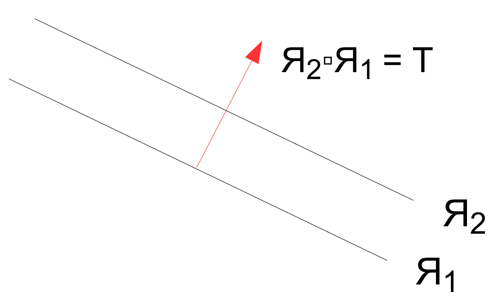
Ademas $d(f^{-1}p,f^{-1}q) = d(f\circ f^{-1}p,f\circ f^{-1}q) = d(p,q)$ asi que f^{-1} es una isometría ∎

Ya que f es isometria

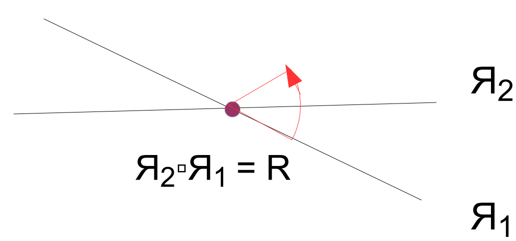
Como las traslaciones, rotaciones y reflexiones en rectas son isometrías del plano, también lo son sus composiciones.

Lema 4. La composición de dos reflexiones es una rotación o una traslación.

Demostración.



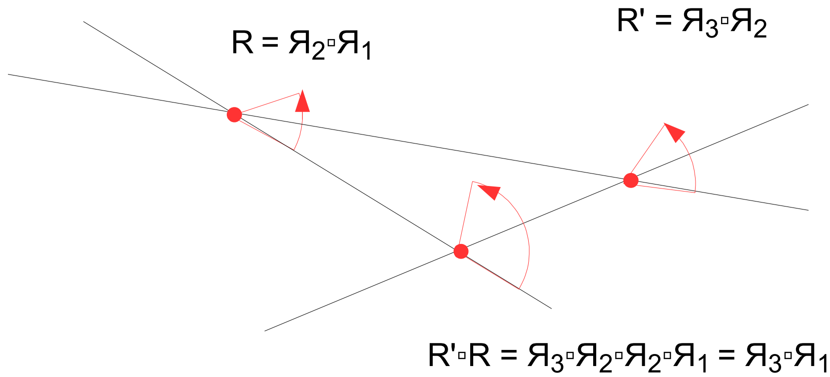
Si las lineas de reflexion no se cruzan, la composicion es una traslacion por el doble de distancia entre las lineas.



Si las lineas de reflexion se cruzan, la composicion es una rotacion por el doble del angulo entre las lineas.

Lema 5. La composición de dos rotaciones es una rotación o una traslación.

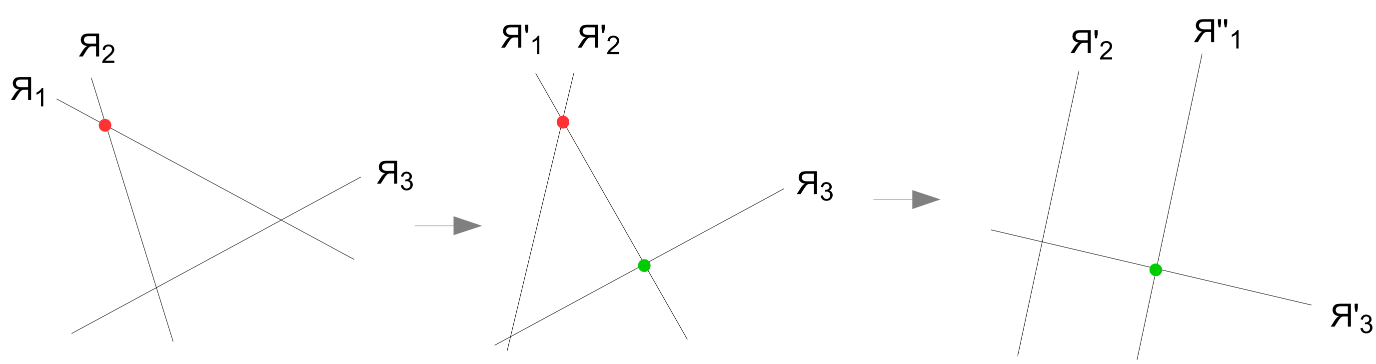
Demostración. Cada rotación es composición de dos reflexiones en rectas, y podemos elegir las rectas de distintas maneras (lo único que importa es que se crucen en el centro de rotación y que formen un ángulo de la mitad del ángulo de rotación). Elijámoslas para que la segunda recta de la primera rotación sea la primera recta de la segunda rotación:



Asi, la composición de las 2 rotaciones es la composición de 4 reflexiones, pero la segunda y la tercera son iguales asi que se cancelan, por lo que la composición de las 2 rotaciones es composición de 2 reflexiones, que por el lema anterior es una rotación o una traslación. ■

Lema 6. La composición de 3 reflexiones es una reflexión o un *paso* (una traslación seguida de una reflexión en la misma dirección).

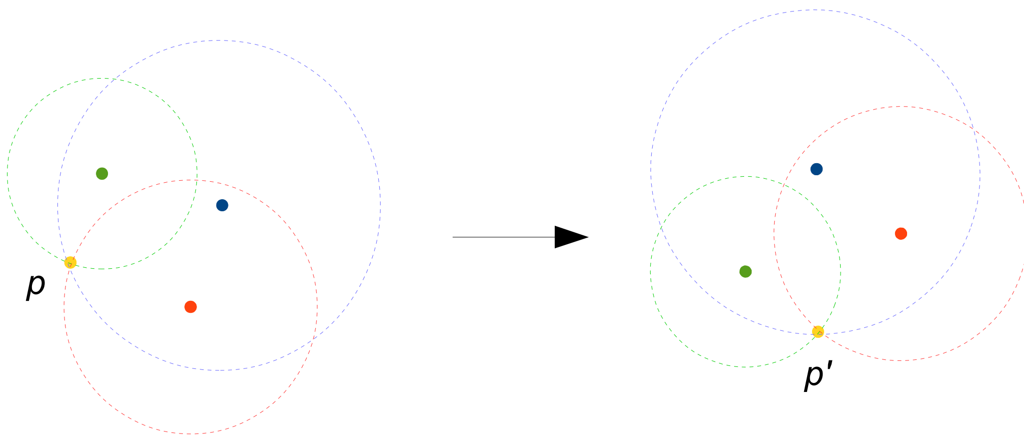
Demostración. Si las rectas de reflexion de Я_1 y Я_2 son perpendiculares a la recta de reflexion de Я_3, entonces $\text{Я}_2\, \text{Я}_1$ es una traslacion en la direccion de la reflexion Я_3 y ya acabamos.
Veamos que la composicion de cualesquiera 3 reflexiones Я_1 , Я_2 y Я_3 equivale a la composición de 3 reflexiones $\text{Я}''_1$, $\text{Я}'_2$ y $\text{Я}'_3$ donde las dos primeras son en rectas perpendiculares a la tercera.



Primero podemos girar las rectas de reflexion de Я_1 y Я_2 para que la de $\text{Я}'_1$ seo ortogonal a la de Я_3.
Luego podemos girar las rectas de reflexion de $\text{Я}'_1$ y Я_3 para que la de $\text{Я}'_3$ sea ortogonal a la de $\text{Я}'_2$. ■

Lema 7. Las isometrías del plano están determinadas por la imagen de 3 puntos no colineales.

Demostración. La posición de un punto en el plano queda determinada por su distancia a 3 puntos no colineales. Dados 3 puntos no colineales a, b, c y sus imágenes a', b', c' bajo la isometría, las distancias de cada punto del plano a a,b,c son iguales a las distancias de la imagen del punto a a',b',c' y estas distancias determinan la imagen del punto. ■



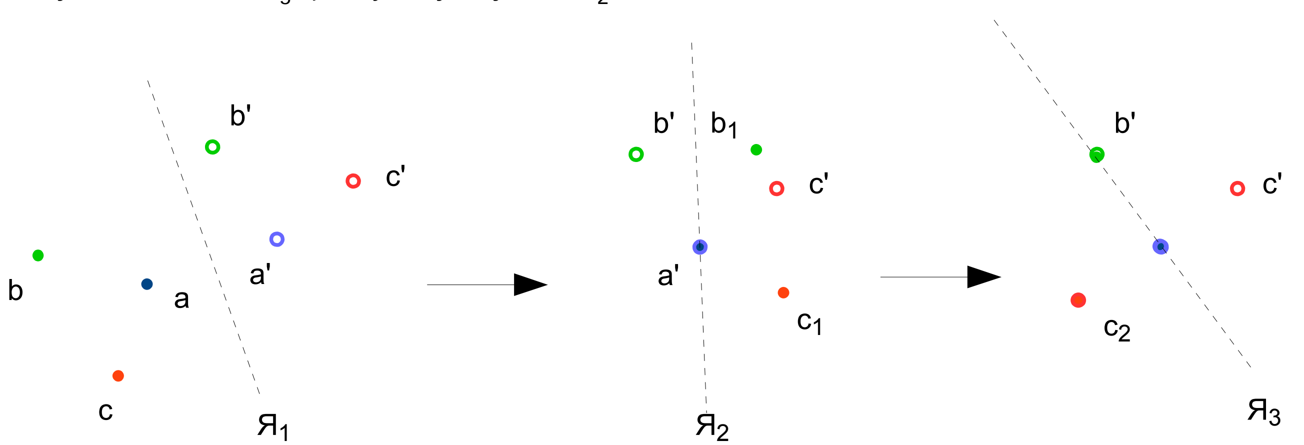
Teorema 8. Cada isometría del plano es la composición de a lo mas 3 reflexiones.

Demostración. Sea T una isometría y sean a, b, c 3 puntos no alineados y a', b' c' sus imágenes bajo T. Veamos que usando a lo mas 3 reflexiones podemos llevar los puntos a, b, c a los puntos a', b',c'.

1. Hay una reflexión $Я_1$ que lleva a a a'. Sean b_1 y c_1 las imágenes de b y c bajo $Я_1$.

2. Hay una reflexión $Я_2$ que fija a' y lleva b_1 a b'. Sea c_2 la imagen c_1 bajo $Я_2$.

3. Hay una reflexión $Я_3$ que fija a' y b' y lleva c_2 a c'.



Como T y la composición de las reflexiones hacen lo mismo a los 3 puntos tienen que ser iguales. ■

Clasificación de las isometrías del plano euclidiano.

Teorema 9. Las isometrías del plano son traslaciones, rotaciones, reflexiones y pasos.

Demostración. Las isometrías son composiciones de a lo mas 3 reflexiones (teorema 8). Las composición de 2 reflexiones es una traslación o una rotación (lema 5), y la composición de 3 reflexiones es una reflexión o un paso (lema 6). $\blacksquare$

Orientacion, puntos fijos y direcciones invariantes.

La cualidad mas importante de una transformación del plano es si preserva orientación (como las traslaciones y las rotaciones) o si invierte la orientación (como las reflexiones o pasos). Observar que una composición de transformaciones preserva orientación si y solo si el número de esas transformaciones que invierten la orientación es par.

Los distintos tipos de isometrías también pueden distinguirse por el número de puntos que dejan fijos y el número de direcciones que dejan invariantes:
(al hablar de dirección distinguimos direcciones opuestas $\nearrow \neq \swarrow$)

1. Las traslaciones distintas de la identidad no fijan ningún punto, pero dejan invariantes todas las direcciones.

2. Las rotaciones no triviales fijan un punto, no dejan direcciones invariantes.

3. Las reflexiones fijan una infinidad de puntos y dejan invariante una sola dirección.

4. Los pasos no fijan ningún punto y dejan invariante solo una dirección.

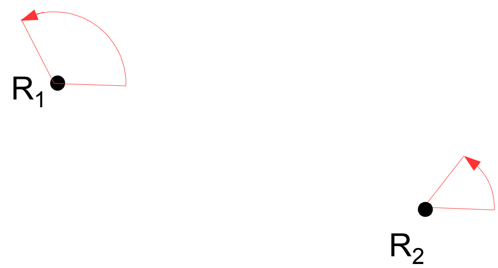
Corolario 10. La orientación y los puntos fijos distinguen a los distintos tipos de isometrías del plano (traslaciones, rotaciones, reflexiones o pasos). Los puntos fijos y las direcciones invariantes también las distinguen. $\blacksquare$

PROBLEMAS

1. Demuestra que las isometrías del plano son suprayectivas.

2. Si T es una traslación y R es una rotación, demuestra que $T \circ R$ y $R \circ T$ son rotaciones.

3. Si R_1 y R_2 son las rotaciones mostradas abajo, localiza cuidadosamente los centros de las rotaciones $R_1 \circ R_2$ y $R_2 \circ R_1$.



4. Muestra que una isometría del plano que fija mas de un punto es la identidad o una reflexión, y que una que deja invariante mas de una dirección es una traslación.

5. Muchos resultados sobre las isometrías del plano E^2 pueden generalizarse al espacio E^3. Muestra que:

a. Las isometrías de E^3 preservan lineas, planos, distancias, áreas y volúmenes
b. Las isometrías de E^3 estan determinadas por las imágenes de 4 puntos no coplanares.
c. Cada isometría de E^3 es la composición de a lo mas 4 reflexiones en planos.

6. ¿Como son las isometrías de E^3 que preservan orientación (además de traslaciones y rotaciones en rectas, que mas hay)? ¿Y las isometrías de E^3 que invierten orientación?

Coordenadas.

Recordar que el plano euclidiano esta modelado por $R^2 = \{ (x,y) / x, y \in R \}$.

La distancia entre dos puntos se define como $d((x_1,y_1),(x_2,y_2)) = \sqrt{(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2}$

Las rectas son los conjuntos de soluciones de ecuaciones lineales $\{ (x,y) \in R^2 / ax+by=c \}$.

Los círculos son los conjuntos de la forma $\{ (x,y) \in R^2 / (x-a)^2+(y-b)^2=c^2 \}$.

Los puntos (x,y) del plano se pueden identificar con *flechas* o *vectores* que van del origen (0,0) al punto (x,y). Los vectores pueden sumarse y multiplicarse por números reales:

$$(x,y)+(z,w)=(x+z,y+w) \qquad\qquad a(x,y)=(ax,ay)$$

La recta que pasa por el punto P en la dirección del vector V esta formada por los puntos de la forma P+tV, $t \in R$, y la recta que pasa por los puntos P y Q esta formada por los puntos de la forma P + t(Q-P), $t \in R$.

El *producto punto* de dos vectores U=(x,y) y V=(z,w) es el numero real $U{\cdot}V = xz+yw$

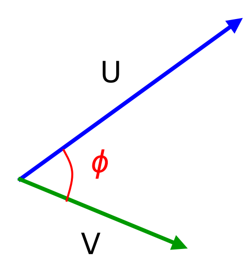
Se sigue de la ley de los cosenos que $U{\cdot}V = |U||V| \cos\phi$

Esto permite calcular ángulos y áreas:

el ángulo entre los vectores U y V es $\phi = \cos^{-1} \frac{U \cdot V}{|U||V|}$

el área del paralelogramo formado por U y V es $A = U^{\perp}{\cdot}V$

donde $U^{\perp}=(-y,x)$ es el vector que se obtiene rotando 90° a U.



Transformaciones lineales.

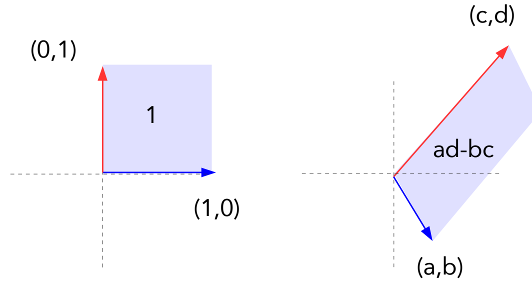
Una transformación *lineal* del plano es una funcion $T: R^2 \to R^2$ que preserva la suma de vectores y su producto por escalares, es decir, $T(U+V) = TU + TV$ y $T(aV) = aTV$

Las transformaciones lineales estan determinadas por sus valores en los vectores básicos: si T(1,0)=(a,b) y T(0,1)=(c,d) entonces T(x,y) = (ax+by,cx+dy) y pueden escribirse mas fácilmente usando matrices:

$$T \begin{vmatrix} x \\ y \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & c \\ b & d \end{vmatrix} \begin{vmatrix} x \\ y \end{vmatrix} \qquad \text{con } a,b,c,d \in R \quad ad-bc \neq 0$$

Lema 11. El determinante de la matriz, ad-bc, mide como cambian las áreas de los paralelogramos al hacer la transformación

Demostración. El determinante ad-bc es el producto punto de los vectores (a,b) y (-d,c), que da el área del paralelogramo formado por (a,b) y (c,d), las imágenes de (1,0) y (0,1). ∎



Lema 12. Las transformaciones de R^2 que preservan rectas y fijan el origen son las transformaciones lineales.

Demostración. Una transformacion (invertible) del plano que envia rectas en rectas debe enviar paralelas en paralelas (de otra manera enviaria dos rectas que no se cruzan a dos que si se cruzan, asi que enviaria dos puntos distintos al mismo punto). Y si preserva paralelas entonces envia paralelogramos en paralelogramos, asi que si T fija el origen y manda los vectores U y V a los vectores U' y V' entonces debe mandar la diagonal del paralelogramo determinado por U y V, a la diagonal del paralelogramo formado por U' y V', por lo que debe enviar U+V a U'+V', asi que T preserva la suma de vectores. De manera parecida se puede mostrar que T debe preservar multiplos, asi que es T lineal.

Si T es una transformacion lineal que envia los puntos P y Q a los puntos P' y Q' entonces T envia los puntos de la recta por P y Q, que son los puntos tP+(1-t)Q, a los puntos tP'+(1-t)Q', que son los puntos de la recta por P' y Q'. ∎

Corolario 13. Las transformaciones de R^2 que preservan rectas son las *transformaciones afines*:

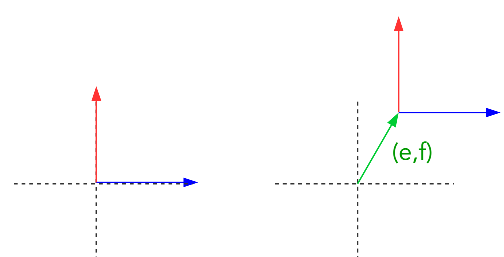
$$T\begin{vmatrix} x \\ y \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & c \\ b & d \end{vmatrix}\begin{vmatrix} x \\ y \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} e \\ f \end{vmatrix}$$

Demostración. Si una transformacion preserva rectas y manda el origen al punto (e,f), podemos componerla con una traslacion que mande (e,f) al origen para obtener una transformacion que preserve rectas y fije el origen. Por el lema anterior esta transformacion es una transformacion lineal. Podemos recuperar la transformacion original componiendo a esta con una traslacion que lleve (0,0) a (e,f), esto corresponde a sumar el vector (e,f). ∎

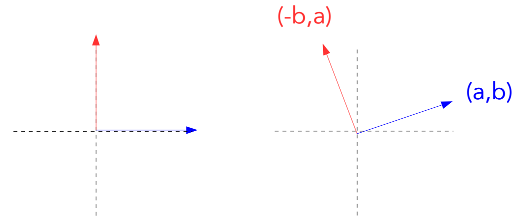
Ejemplos.

Las traslaciones de R^2 son de la forma

$$T\begin{vmatrix} x \\ y \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}\begin{vmatrix} x \\ y \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} e \\ f \end{vmatrix}$$



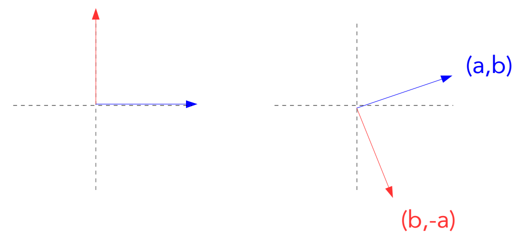
Las rotaciones de R^2 alrededor del origen son de la forma



$$R\begin{vmatrix} x \\ y \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & -b \\ b & a \end{vmatrix}\begin{vmatrix} x \\ y \end{vmatrix} \qquad \text{con } a^2+b^2 = 1$$

Una rotación R en el origen lleva al vector (1,0) a un vector (a,b) de tamaño 1 y lleva al vector (0,1) a uno perpendicular a (a,b) de tamaño 1, y este debe ser (-b,a) porque R preserva orientación

Las reflexiones de R^2 que fijan el origen son de la forma



$$Я\begin{vmatrix} x \\ y \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & b \\ b & -a \end{vmatrix}\begin{vmatrix} x \\ y \end{vmatrix} \qquad \text{con } a^2+b^2 = 1$$

Una reflexión Я que fija el origen lleva al vector (1,0) a un vector (a,b) de tamaño 1 y lleva al vector (0,1) a uno perpendicular a (a,b) de tamaño 1, este debe ser (b,-a) porque Я invierte la orientación.

Corolario 14. Las isometrías de R2 son de la forma

$$I\begin{vmatrix} x \\ y \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & \mp b \\ b & \pm a \end{vmatrix}\begin{vmatrix} x \\ y \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} e \\ f \end{vmatrix} \qquad \text{con } a^2+b^2= 1.$$

Demostración. Ya vimos en los ejemplos que las isometrías (rotaciones y reflexiones) que fijan al origen tienen esta forma con (e,f)=(0,0). Y a las isometrías que mueven el origen podemos componerlas con una traslación para que lo fijen, como en la prueba del corolario 13. ■

Ejemplos.

1. La transformación lineal

$$T\begin{vmatrix} x \\ y \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} {}^3/_5 & {}^4/_5 \\ {}^4/_5 & {}^3/_5 \end{vmatrix}\begin{vmatrix} x \\ y \end{vmatrix}$$

no es una isometría: aunque lleva los vectores (1,0) y (0,1) a los vectores unitarios $({}^3/_5\,,{}^4/_5)$ y $({}^4/_5\,x,{}^3/_5)$ estos no son ortogonales. El determinante de la matriz es $-{}^7/_{25}$, asi que la transformación invierte la orientación y reduce todas las áreas por un factor ${}^7/_{25}$.

2. La transformación lineal

$$T \begin{vmatrix} x \\ y \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} {}^{-3}/_5 & {}^{4}/_5 \\ {}^{4}/_5 & {}^{3}/_5 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} x \\ y \end{vmatrix}$$

si es una isometría, ya que lleva a los vectores (1,0) y (0,1) a los vectores ($-{}^{3}/_{5}$,${}^{4}/_{5}$) y (${}^{4}/_{5}$ x,${}^{3}/_{5}$) que son unitarios y ortogonales. Como el determinante de la matriz es -1, se trata de una reflexión en una recta. Para ver en que recta podemos buscar los puntos que no se mueven al aplicar T:

$$\begin{vmatrix} {}^{-3}/_5 & {}^{4}/_5 \\ {}^{4}/_5 & {}^{3}/_5 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} x \\ y \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x \\ y \end{vmatrix} \qquad \text{si y solo si}$$

$-{}^{3}/_{5}\,x + {}^{4}/_{5}\,y = x$ $\qquad -{}^{8}/_{5}\,x + {}^{4}/_{5}\,y = 0$ $\qquad -8x+4y = 0$

${}^{4}/_{5}\,x + {}^{3}/_{5}y = y$ $\qquad {}^{4}/_{5}\,x - {}^{2}/_{5}\,y = 0$ $\qquad 4x-2y = 0$

y ambas ecuaciones equivalen a 2x=y, esta es la recta de reflexión

3. ¿Cual es la expresión en coordenadas de la rotación de 30° alrededor del origen?

La rotación de θ grados alrededor del origen manda a los vectores (1,0) y (0,1) a los vectores (cosθ, senθ) y (-senθ, cosθ).

Cuando θ=30°, sen θ =${}^{1}/_{2}$ y cos θ = ${}^{\sqrt{3}}/_{2}$ asi que la rotación es

$$R \begin{vmatrix} x \\ y \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} {}^{\sqrt{3}}/_2 & -{}^{1}/_2 \\ {}^{1}/_2 & {}^{\sqrt{3}}/_2 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} x \\ y \end{vmatrix}$$

4. ¿Cual es la expresión en coordenadas de la reflexión en la recta x+2y=0?

La reflexión fija a los vectores en dirección de la recta e invierte los vectores en la dirección perpendicular. Un vector en la dirección de la recta es (2,-1) y un vector perpendicular es (1,2).

Я(2,-1) = (2,-1) y Я(1,2) = (-1,-2) y Я es una transformación lineal.

Como (1,0) = ${}^{2}/_{5}$(2,-1) +${}^{1}/_{5}$(1,2) entonces Я(1,0) = ${}^{2}/_{5}$(2,-1) + ${}^{1}/_{5}$(-1,-2) = (${}^{3}/_{5}$. $-{}^{4}/_{5}$)

Como (0,1) = $-{}^{1}/_{5}$(2,-1) + ${}^{2}/_{5}$(1,2) entonces Я(1,0) = ${}^{1}/_{5}$(2,-1) + ${}^{2}/_{5}$(-1,-2) = ($-{}^{4}/_{5}$. $-{}^{3}/_{5}$)

asi que la reflexión es

$$Я \begin{vmatrix} x \\ y \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} {}^{3}/_5 & -{}^{4}/_5 \\ -{}^{4}/_5 & -{}^{3}/_5 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} x \\ y \end{vmatrix}$$

5. ¿Cual es la expresión en coordenadas de la rotación de 45° alrededor del punto (2,3)?

La rotación R alrededor de (2,3) se puede obtener haciendo la traslación que lleva (2,3) a (0,0), después la rotación de 45° en el origen y luego la traslación que regresa (0,0) a (2,3).

La rotación de 45° alrededor del origen es

$$R'\begin{vmatrix} x \\ y \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \end{vmatrix}\begin{vmatrix} x \\ y \end{vmatrix}$$

y la traslacion que lleva (2,3) a (0,0) es $T\begin{vmatrix} x \\ y \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x-2 \\ y-3 \end{vmatrix}$

La rotación buscada es la composición $R = T^{-1}\circ R'\circ T$

$$T^{-1}\circ R'\circ T\begin{vmatrix} x \\ y \end{vmatrix} = T^{-1}\circ R\begin{vmatrix} x-2 \\ y-3 \end{vmatrix} = T^{-1}\begin{vmatrix} 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \end{vmatrix}\begin{vmatrix} x-2 \\ y-3 \end{vmatrix} = T^{-1}\begin{vmatrix} 1/\sqrt{2}\,x - 1/\sqrt{2}\,y + 1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2}\,x + 1/\sqrt{2}\,y - 5/\sqrt{2} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1/\sqrt{2}\,x - 1/\sqrt{2}\,y + 1/\sqrt{2} + 2 \\ 1/\sqrt{2}\,x + 1/\sqrt{2}\,y - 5/\sqrt{2} + 3 \end{vmatrix}$$

PROBLEMAS

7. Demuestra que dada una recta *l*, que satisface la ecuación ax+by=c con (a,b)≠(0,0) y un punto (u,v) que no esté en *l*, existe una única recta *m* paralela a *l* tal que (u,v) está en *m*.

8. Da (analíticamente) una transformación del plano que envíe rectas en rectas y preserve áreas pero no preserve distancias ni ángulos.

9. Muestra analíticamente que T(x,y) = (1-y,x+2) es una isometría. Encuentra sus puntos fijos y direcciones invariantes (si es que tiene) y usa esta información para decir de que isometría se trata.

10. La transformación

$$Я\begin{vmatrix} x \\ y \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & b \\ b & -a \end{vmatrix}\begin{vmatrix} x \\ y \end{vmatrix}$$

con $a^2+b^2 = 1$ es una reflexión, pero en que recta?

11. Encuentra las expresiones en coordenadas para las siguientes isometrías del plano:
a. La rotación de 180˚ alrededor del origen.
b. La reflexión en la recta y=2x
c. La rotación de 30˚ alrededor del punto (1,2).
d. La reflexión en la recta que pasa por los puntos (3,1) y (2,5).