Geometrías no euclidianas.

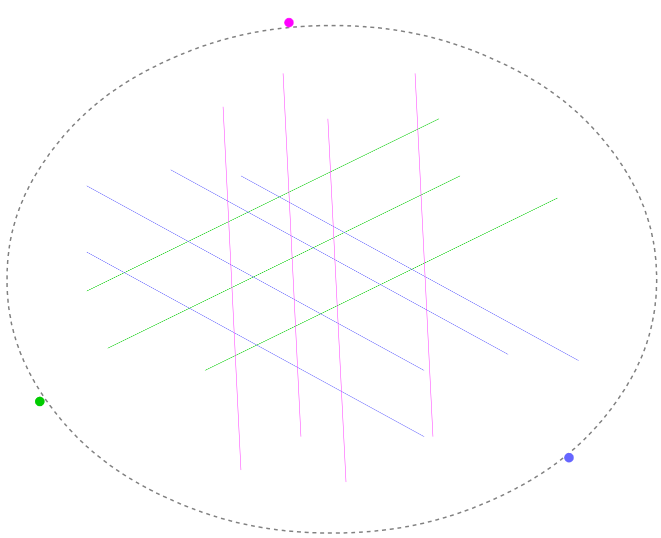
Recordemos algunos de los postulados de la geometría euclidiana:

- Por cada par de puntos del plano pasa una linea
- Cada par de lineas del plano se intersectan en a lo mas un punto
- Para cada linea L y cada punto p que no esta en L, existe exactamente una linea que no intersecta a L, es decir, una *paralela* a L.

Uno de los problemas mas fascinantes en las matemáticas es el de la existencia de geometría no euclidianas, donde se valgan todos los postulados de la geometría clásica, excepto el de las paralelas.
Se trata de ver si pueden existir otros planos, tan simétricos como el plano euclidiano, pero donde el postulado de las paralelas no valga. Para esto hay dos posibilidades: que dada una linea L y un punto fuera de ella no exista ninguna paralela a L que pase por el punto, o que exista mas de una paralela.

El primero puede construirse a partir del plano euclidiano, *extendiendo* el plano para que contenga puntos en donde las paralelas se crucen. Para esto basta añadir un punto al infinito por cada familia de lineas paraleles, es decir, un punto en cada dirección, pero sin distinguir el sentido (de otro modo las paralelas se intersectarían en 2 puntos). El plano así extendido es llamado *plano proyectivo*.

La union de una linea euclidiana con el punto al infinito que corresponde a su dirección es una *linea proyectiva.* Los puntos al infinito forman otra linea proyectiva, llamada la *linea al infinito*.



El plano proyectivo tiene un punto al infinito por cada clase de lineas paralelas.

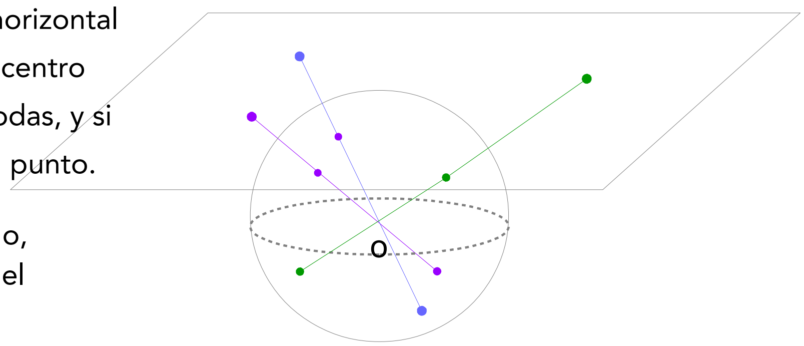
En el plano proyectivo no hay lineas paralelas, pero se cumplen los otros postulados de la geometría euclidiana, en particular:

- Por cada par de puntos pasa una linea proyectiva.
- Cada par de lineas proyectivas se intersectan en un punto.

Uno puede preguntarse si el plano proyectivo no es algo artificial. Los puntos al infinito se ven distintos de los otros puntos del plano, y parecen forman un borde del plano proyectivo. Pero hay un modelo del plano proyectivo en el que se ve que es homogéneo (todos sus puntos se ven iguales) y que no tiene borde.
El modelo, que se construye a partir de la esfera, también muestra que en el plano proyectivo podemos medir distancias, algunos y áreas (de una manera distinta que en el plano euclidiano) de modo que haya muchas transformaciones rígidas, lo que lo hace tan simétrico como el plano euclidiano.

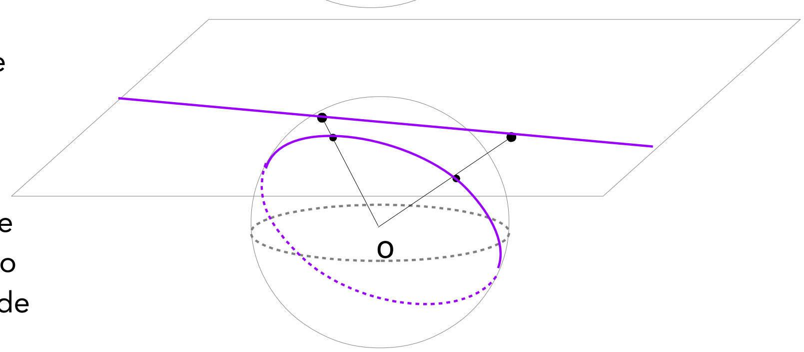
Teorema 1. Los puntos del plano proyectivo pueden identificarse con los pares de puntos antípodas de una esfera.

Demostración Consideremos un plano horizontal tangente a una esfera. Las rectas por el centro de la esfera la cruzan en 2 puntos antípodas, y si no son horizontales cruzan al plano en 1 punto.



Las rectas horizontales no cruzan al plano, pero corresponden a las *direcciones* en el plano, es decir, a los puntos al infinito.

Así, a cada punto del plano proyectivo le corresponden 2 puntos antípodas de la esfera, y a cada linea proyectiva le corresponde un circulo de radio máximo en la esfera (la intersección del plano que contiene a la linea con la esfera)- El punto al infinito de la linea corresponde al par de puntos donde el circulo intersecta al ecuador.



Otra manera de enunciar el teorema es diciendo que el plano proyectivo es el cociente de la esfera bajo la acción del mapeo antípoda.

En algunos aspectos el plano euclidiano y el plano proyectivo se parecen mucho, pero en otros son muy distintos. Por ejemplo:

- Las lineas euclidianas son *abiertas*, mientras que las lineas proyectivas son *cerradas*.

- El plano euclidiano es una superficie *abierta* y *orientable*, mientras que el plano proyectivo es una superficie *cerrada* y *no orientable*.

- Las lineas dividen al plano euclidiano en dos, pero las lineas proyectivas no dividen al plano proyectivo.

La manera de medir en el plano euclidiano no puede extenderse al plano proyectivo (ya que la distancia entre 2 puntos al infinito seria infinita) pero podemos medir de otra manera. Como el plano proyectivo es el cociente de la esfera por el mapeo antípoda (que es una isometría de la esfera) entonces podemos medir longitudes, algunos y áreas en $P^{2 \text{ viéndolos}}$ en S^2. La distancia entre 2 puntos de P^2 es la mínima de las distancias entre los 2 pares de puntos antípodas en S^2, el ángulo entre 2 lineas proyectivas es igual a los algunos entre las 2 lineas esféricas correspondientes.

Con la métrica heredada de la esfera, en el plano proyectivo se cumplen los siguiente resultados:

- Los algunos internos de un triangulo suman mas que π.
- Si 2 triángulos tienen algunos iguales entonces son congruentes.
- Las medianas, las mediatrices, las bisectrices y las alturas de un triangulo son concurrentes.

Problemas.

1. Muestra que las lineas proyectivas no dividen al plano proyectivo, es decir, que si p y q son cualesquiera dos puntos fuera de una linea proyectiva, podemos viajar de p a q sin cruzar la linea.

2. Muestra que el plano proyectivo contiene bandas de Moebius, por lo tanto no es orientable.

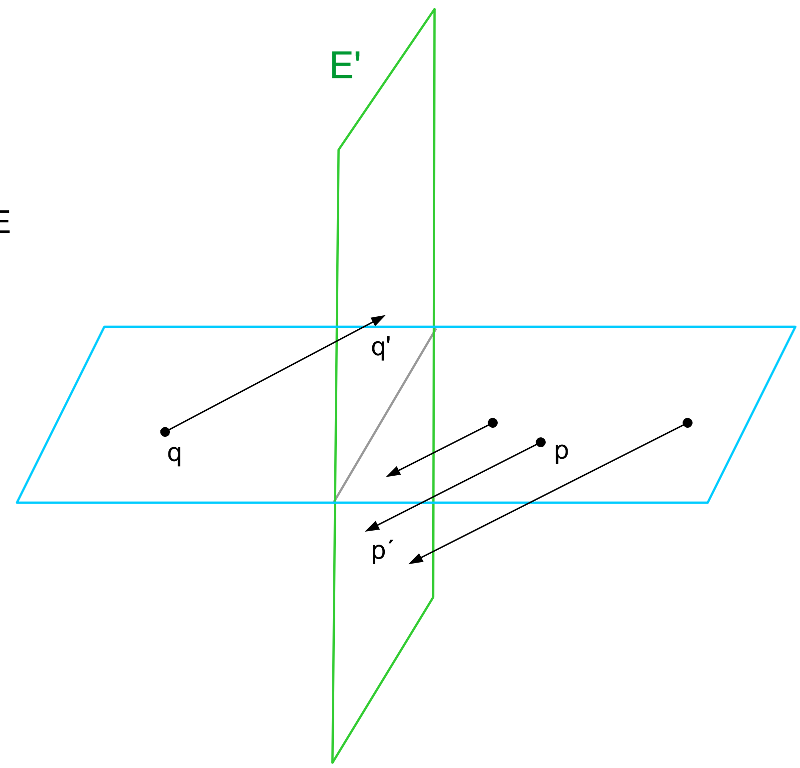
3. ¿Cierto o falso?

a. Dada una linea y un punto en el plano proyectivo, existe una única perpendicular a la linea que pasa por el punto.

b. Los círculos dividen al plano proyectivo en 2 partes (como sucede en el plano euclidiano).

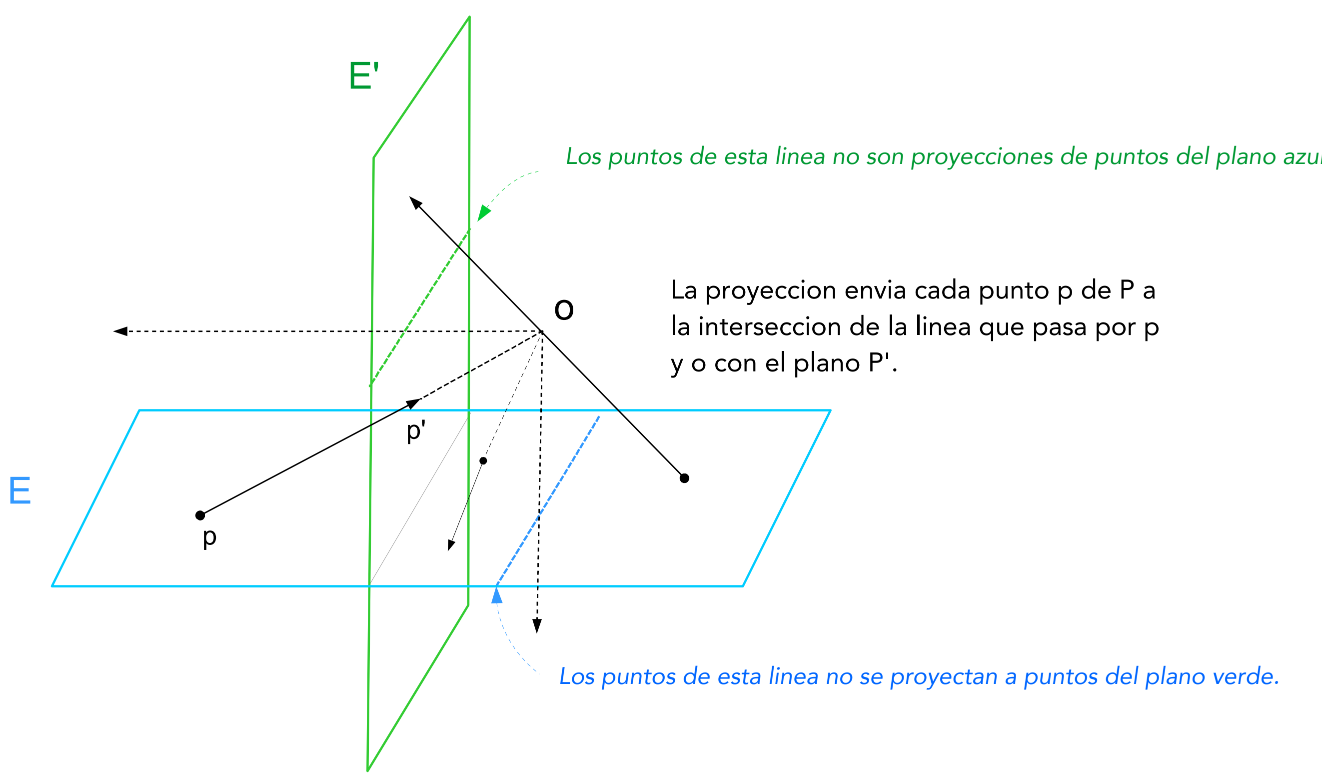
Proyecciones.

Si E y E´ son 2 planos en el espacio y d es una dirección que no este en ninguno de ellos, podemos proyectar E a E´en la dirección d:



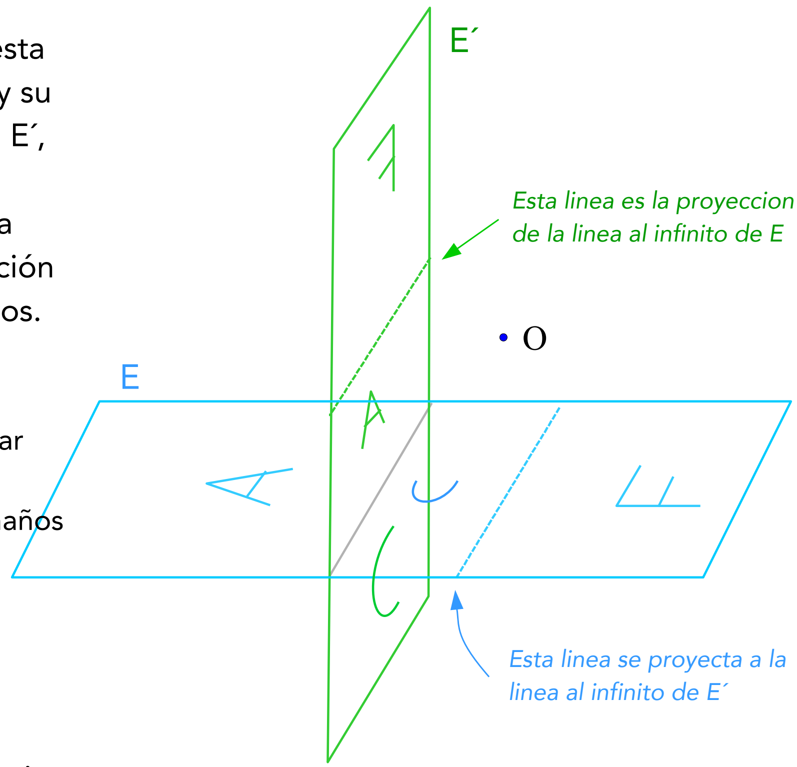
Esta proyección *paralela* es una función biyectiva de E en E´ que manda lineas rectas en lineas rectas, aunque en general no preserva distancias ni algunos ni áreas

Si p es un punto que no este en E ni en E´, podemos proyectar E a E´ desde p:



La proyección *desde un punto* no esta definida en todos los puntos de E, y su imagen no son todos los puntos de E´, pero si a E y a E´ les añadimos sus puntos al infinito, entonces si queda bien definida y obtenemos una función biyectiva entre los planos proyectivos.

Las proyecciones desde un punto enviar lineas proyectivas a lineas proyectivas, pero hacen cosas extrañas con los tamaños y las orientaciones.



Transformaciones afines y proyectivas.

Una transformación es una función biyectiva y continua.

Las **transformaciones afines** son las transformaciones del plano euclidiano que mandan lineas en lineas.

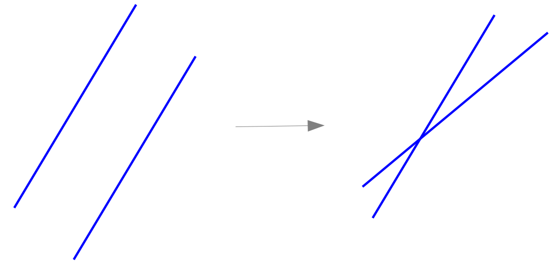
Ejemplo. Proyecciones paralelas y sus composiciones

Las **transformaciones proyectivas** son las transformaciones del plano proyectivo que mandan lineas proyectivas en lineas proyectivas.

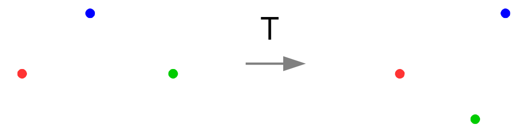
Ejemplo. Proyecciones desde un punto y sus composiciones.

Lema 2. Las transformaciones afines enviar lineas paralelas en lineas paralelas.

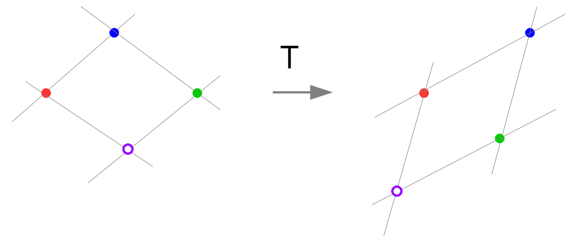
Demostración Sea T una transformación (biyectiva y continua) del plano que envía lineas en lineas. Si dos lineas paralelas L y L´ fueran a dar a 2 lineas no paralelas, el punto de intersección de TL y TL´ tendría que venir de un punto de L y también de un punto de L´, pero entonces T no seria inyectiva. •



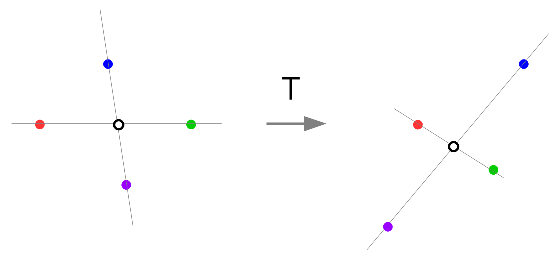
Lema 3. Las transformaciones afines están determinadas por las imágenes de 3 puntos no colineales.



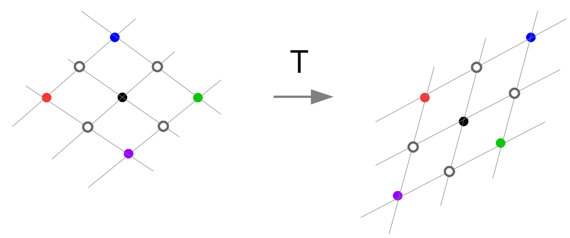
Demostración Sea T una transformación afín y sean a, b y c 3 puntos no colineales.
Por el lema 2, T manda paralelogramos en paralelogramos, así que si d es el cuarto vértice del paralelogramo determinado por a, b y c, entonces Td es el cuarto vértice del paralelogramo determinado por Ta, Tb y Tc.
Esto muestra que las transformaciones afines envian la latice determinada por a, b y c a la latice determinada por a´, b´y c´.



Si e es el punto de intersección de las diagonales del paralelogramo abcd, entonces Te es el punto de intersección de las diagonales del paralelogramo TaTbTcTd.
Así que los puntos medios de los lados de abcd (que son las intersecciones de los lados con las paralelas a los otros lados que pasan por e) van a dar a los puntos medios de los lados de TaTbTcTd.



Repitiendo estos argumentos vemos que las imágenes de 3 puntos determinan las imágenes de latices cada vez mas finas, cuya union es un conjunto denso de puntos del plano. Y como T es continua, esto determina las imágenes de todos los puntos del plano •



Lema 4. Dadas dos ternas de puntos no alineados del plano, existe una (y solo una) transformación afín del plano que lleva la primera a la segunda.

Demostración. Para ver que la transformación existe basta ver que dados 2 triángulos ABC y A´B´C´, hay una secuencia de proyecciones paralelas que lleva el primer triangulo al segundo (tarea).
Pero la manera mas fácil es usando coordenadas y vectores: Las transformaciones lineales y las traslaciones son funciones afines. Si T es la traslación que lleva a al 0, T´es la traslación que lleva el 0 a A´ y L es la transformación lineal L que lleva los vectores B-A y C-A a los vectores B´-A´ y C´-A´, entonces la composición T´LT es afin y lleva abc a a´b´c´.
La unicidad es consecuencia del lema anterior. •

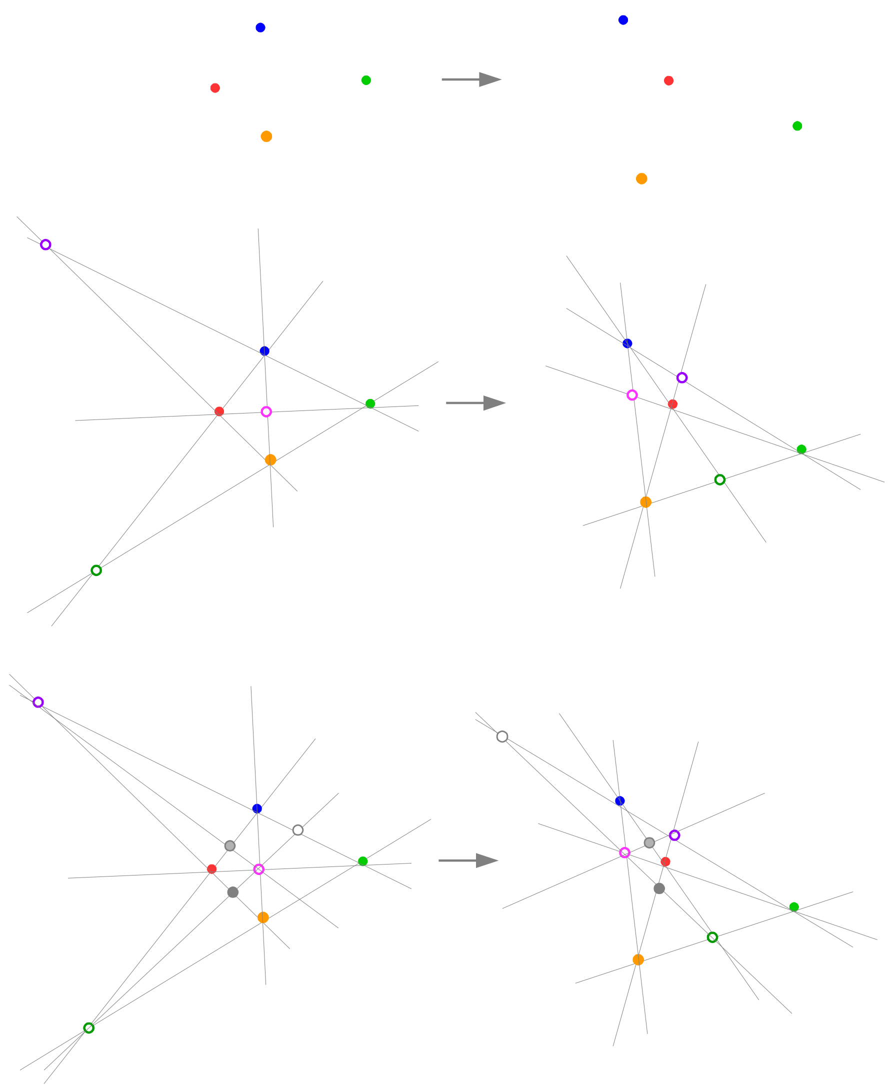
Decimos que un conjunto de puntos del plano están en *posición general*, si no hay 3 de ellos alineados.

Lema 5. Las transformaciones proyectivas están determinadas por las imágenes de 4 puntos del plano en posición general.

Demostración. Es muy parecida a la demostración del lema 3.
Las transformaciones proyectivas enviar lineas en lineas, así que las imágenes de los vértices de un cuadrilátero determinan las imágenes de las intersecciones de todas las lineas que pasan por ellos.
Estas intersecciones definen mas lineas que dividen al cuadrilátero en 4 cuadriláteros mas pequeños, cuyas imágenes están determinadas.

Repitiendo el argumento podemos dividir al cuadrilátero en cuadriláteros cada vez mas pequeños, y haciendolo en sentido inverso, también podemos formar cuadriláteros cada vez mas grandes.

Así las imágenes de 4 puntos no colineales determinan las imágenes de un conjunto de puntos que es denso en el plano. Y como la transformación es continua, esto determina las imágenes de todos los puntos del plano. •



Teorema 6. Dadas 2 cuartetas de puntos en posición general en el plano proyectivo, existe una (y solo una) transformación proyectiva que lleva la primera a la segunda.

Demostración. Geométricamente bastaría ver que si ABCD y A´B´C´D´ son dos cuartetas de puntos del plano en posición general, entonces existe una secuencia de proyecciones entre distintos planos y desde distintos puntos cuya composición envía la primera cuarteta a la segunda. Esto no es obvio, en especial en el caso de que una cuarteta sea convexa y la otra no, como en el dibujo anterior.
La manera mas sencilla de hacerlo es usando coordenadas y álgebra, y así lo haremos.

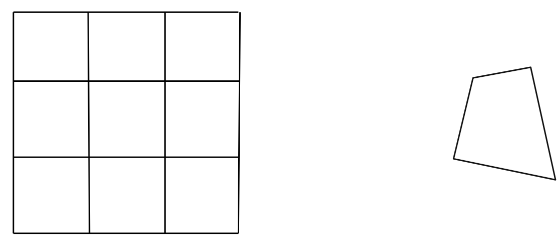
Problemas.

4. ¿Cual es la función que da la proyección del plano yz en el plano xy desde el punto (1,0,2)? (¿cual es la imagen del punto con coordenadas (0,y,z)?)

5. Demuestra que cada transformación afín del plano se extiende a una transformación proyectiva.

6. Muestra que es posible proyectar (paralelamente o desde un punto) un triangulo equilátero para convertirlo en un triangulo de forma arbitraria.

7. Un plano cuadriculado se proyecta a otro plano desde un punto. Se muestra la imagen del cuadrado de enmedio, encuentra las imágenes exactas de los otros 8 cuadrados.



Coordenadas homogéneas.

En el plano euclidiano podemos definir coordenadas, que permiten localizar a los puntos, calcular distancias y algunos fácilmente y usar ecuaciones para convertir problemas geométricos en problemas algebraicos y viceversa. En las coordenadas cartesianas, las lineas tienen ecuaciones lineales y las cónicas tienen ecuaciones cuadráticas.

Es natural preguntarse si será posible definir coordenadas así en el plano proyectivo.
Para darlas se usa el siguiente resultado, que es inmediato del teorema 1:

Teorema 7. El plano proyectivo P^2 puede identificarse con el conjunto de rectas por el origen de R^3. Los puntos de P^2 son las rectas y las lineas de P^2 son los planos por el origen.

Si vemos a P^2 como el conjunto de rectas por el origen de R^3, la distancia entre 2 puntos de P^2 es el ángulo entre las rectas y el ángulo entre 2 lineas proyectivas es el ángulo entre los planos correspondientes. Las transformaciones rígidas de P^2 corresponden a las transformaciones rígidas de R^3 que fijan el origen, modulo el mapeo antípoda.

Las rectas por el origen de R^3 están determinadas por su dirección, que esta dada por un vector no nulo y todos sus múltiplos positivos y negativos.

Si definimos una relación de equivalencia entre vectores no nulos diciendo que 2 vectores (x,y,z) y (x´,y´,z´) están relacionados si existe un real $t \neq 0$ tal que t(x,y,z) = (x´,y´,z´).
La clase de equivalencia del vector (x,y,z), denotada por [x,y,z], determina de manera única a la recta generada por (x,y,z).

Ejemplos.

- [-1,0,0] = [1,0,0] = { (x,0,0) / x en R-0 }
- [1,2,-3] = [2,4,-6] = [-3,-6,9]

Así que a los puntos del plano proyectivo les podemos dar **coordenadas homogéneas** [x,y,z]. *Las coordenadas homogeneas solo están bien definidas salvo múltiplos.*

Si identificamos al plano euclidiano como el plano z=1 en R^3, los puntos de coordenadas cartesianas (x,y) tienen coordenadas homogéneas [x,y,1] y los puntos al infinito del plano correspondientes a direcciones (x,y) tienen coordenadas homogéneas [x,y,0].

Las ecuaciones en el plano pueden convertirse en ecuaciones homogéneas en el plano proyectivo. Por ejemplo, la linea recta con ecuación cartesiana ax+by=c tiene ecuación homogénea ax+by=cz en el plano proyectivo (la ecuación del plano por el origen de R3 que contiene a la linea ax+by=c, z=1).

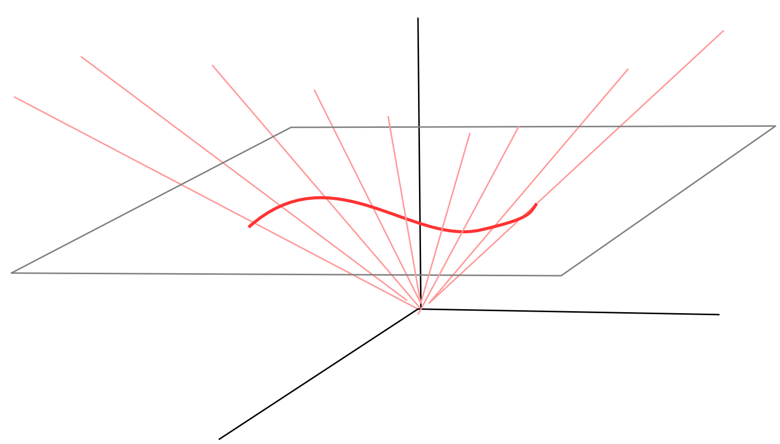
Podemos convertir a cualquier ecuación polinomial p(x,y) = 0 en el plano en una ecuación homogénea P(x,y,z) = 0 en el plano proyectivo multiplicando cada termino de p(x,y) por una potencia de z de modo que todos los términos tengan el mismo grado.

Ejemplos.

- Si p(x,y) es x+2y+3=0 entonces P(x,y,z) es x+2y+3z=0.
- Si p(x,y) es $x^2+2xy+3y+4=0$ entonces P(x,y,z) es $x^2+2xy+3yz+4z^2=0$.

Vistas en R^3, las soluciones de la ecuación homogénea P(x,y,z) = 0 forman rectas por el origen, que pasan por las soluciones de la ecuación p(x,y) = 0 en el plano z = 1.

En el plano proyectivo las soluciones [x,y,z] de la ecuación P(x,y,z)=0 son las soluciones originales de la ecuación p(x,y)=0, con z=1, y sus puntos al infinito, con z=0.



La identificación del plano proyectivo con el conjunto de rectas por el origen de R^3 permite dar una descripción muy simple de las transformaciones proyectivas.
Observar que cualquier transformación lineal de R^3, envía rectas por el origen en rectas por el origen y planos por el origen a planos por el origen, así que define una transformación proyectiva de P^2. Es natural preguntarse si todas las transformaciones proyectivas son así.

Lema 8. Dadas 2 cuartetas de rectas por el origen de R^3 de modo que no haya 3 en el mismo plano, existe una transformación lineal de R^3 que lleva las primeras a las segundas.

Demostración. Una transformación proyectiva T esta determinada por las imágenes de 4 puntos en posición general. Para ver que T viene de una transformación lineal, basta ver que existe una transformación lineal que hace lo mismo en esos 4 puntos.

Identificando al plano proyectivo con el conjunto de rectas por el origen de R^3, basta ver que. Para esto necesitamos ver que dadas dos cuartetas de vectores $\{v_1,v_2,v_3,v_4\}$ y $\{w_1,w_2,w_3,w_4\}$ en R^3 de modo que no haya 3 coplanares, existe una transformación lineal L tal que $L(v_i)=c_i\, w_i$ para algún escalar c_i (ojo: en general no es posible hacer que $L(v_i)=w_i$).

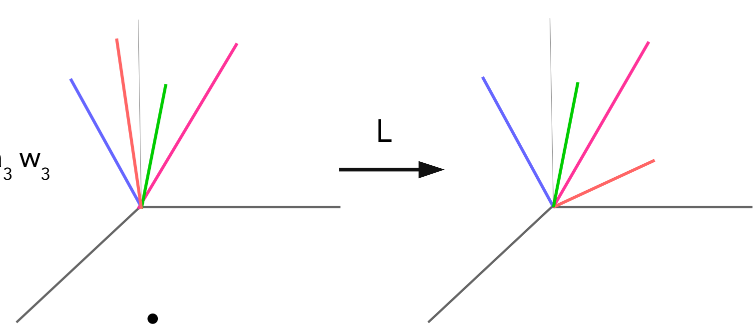
Que los vectores estén en posición general en R^3 significa que no hay 3 en el mismo plano. Por lo tanto v_1,v_2,v_3 forman una base de R^3 y w_1,w_2,w_3 forman otra base.

Así que v_4 se puede expresarse como $v_4=a1v_1+a_2v_2+a_3v_3$ y w_4 se puede expresarse como $w_4=b_1w_1+b_2w_2+b_3w_3$ y ninguno de los escalares es 0 porque si no la combinación lineal estaría en el mismo plano que dos de los sumandos.

Observar que existen transformaciones lineales que mandan a los vectores v_1,v_2,v_3 a los múltiplos de los vectores w_1,w_2,w_3 que queramos.

Sea L la transformación lineal tal que

$L(v_1) = b_1/a_1\, w_1$, $L(v_2) = b_2/a_2\, w_2$ y $L(v_3) = b_3/a_3\, w_3$



Entonces $L(v_4) = L(a_1v_1+a_2v_2+a_3v_3) =$

$a_1L(v_1)+a_2L(v_2)+a_3L(v_3) = b_1w_1+b_2w_2+b_3w_3 = w_4$

Corolario 9. Las transformaciones proyectivas de P^2 corresponden a las transformaciones lineales de R^3, modulo escalamiento.

Demostración. Si identificamos al plano proyectivo P^2 con el conjunto de rectas por el origen de R^3 entonces cada transformación lineal de R^3 determina una transformación proyectiva de P^2.
Esta asociación es suprayectiva ya que las transformaciones proyectivas están determinadas por las imágenes de 4 puntos de P^2, y el lema anterior muestra que con una transformación lineal podemos llevar cualquier cuarteta de rectas a otra cuarteta de rectas (suponiendo que no hay 3 coplanares).
Esta asociación no es inyectiva, ya que todos los múltiplos de una transformación lineal determinan la misma transformación proyectiva. •

Observar que el corolario 9 implica el Teorema 6, cuya prueba había quedado pendiente.

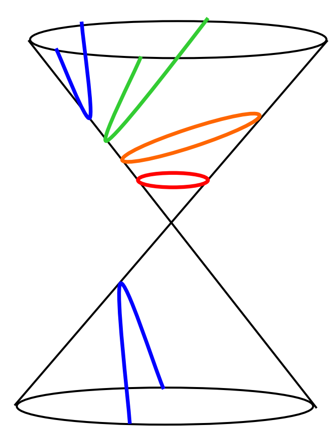
Problemas.

8. ¿Los puntos del plano proyectivo con coordenadas homogéneas [2,3,4], [1,2,3] y [2,0,-2] están alineados o no?

9. Encuentra transformación proyectiva que lleve los puntos [0,0,1], [1,0,1], [0,1,1] y [1,1,1] del plano proyectivo a los puntos [0,0,1], [1,0,1], [0,1,1] y [1,1,-1] respectivamente.

Cónicas.

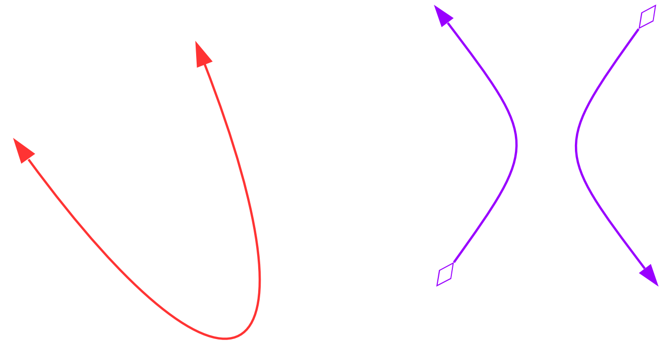
Recordemos que las cónicas son las curvas que se obtienen como intersección de un cono con un plano. Son círculos y elipses, parábolas e hipérboles, y como casos degenerados, un punto, una recta o dos rectas.



Todas las cónicas tienen al menos un eje de simetría, y todas salvo las parábolas tienen un centro de simetría, aunque esto no es obvio de la definición. Tampoco es obvio si las conicas obtenidas de distintos conos pueden ser iguales o no.

En geometría analítica se demuestra que si usamos coordenadas cartesianas, las cónicas son todas las curvas con ecuaciones cuadráticas $Ax^2 + By^2 + Cx + Dy + Ez + F = 0$.

Podemos extender las cónicas en el plano proyectivo, añadiéndoles sus *puntos al infinito* (las direcciones en que las cónicas se alejan hacia el infinito). Las elipses no tienen ningún punto al infinito, las parábolas tienen uno (la dirección en que abren) y las hipérbolas tienen 2 (las direcciones de las asíntotas).



Al añadirle a cualquier cónica sus puntos al infinito se obtiene una curva cerrada en el plano proyectivo.

Para usar coordenadas proyectivas, comenzamos con el polinomio de grado 2 en x y y que define a la crónica en el plano y lo convertimos en un polinomio homogéneo de grado 2 añadiéndole potencias de z adecuadas a cada termino.

Ejemplos.

- La hipérbola $x^2 - 3y^2 = 4$ tiene ecuación homogénea $x^2 - 3y^2 = 4z^2$
- La parábola $x^2 + 3y = 2$ tiene ecuación homogénea $x^2 + 3yz = 2z^2$

Las soluciones de las ecuaciones homogéneas son los puntos de la cónica en el plano proyectivo, que son los puntos originales de la cónica (si la tercera coordenada homogenea 1) y los puntos al infinito (si la tercera coordenada homogénea es 0).

Lema 10. Las cónicas en el plano proyectivo son todas las curvas que tienen ecuaciones homogéneas cuadráticas en x, y, z.

Demostración. Las cónicas son las curvas del plano con ecuaciones cuadráticas
$Ax^2 + By^2 + Cx + Dy + Ez + F = 0$
que corresponden a curvas en el plano proyectivo con ecuaciones homogéneas
$Ax^2 + By^2 + Cxy + Dyz + Exz + Fz^2 = 0$
Y cada ecuación de esta forma viene de una de la primera forma, haciendo z=1. •

Las cónicas (no degeneradas) son proyecciones de un circulo en un plano hacia a otro plano, pero no es obvio que pasa si proyectamos una cónica hacia otro plano.
Las cónicas tienen simetrías, pero las proyecciones no las preservan, así que no es claro que las proyecciones de cónicas no puedan ser muy asimétricas.

Lema 11. Las transformaciones afines envian cónicas en cónicas.

Demostración. Lo mas sencilla es usando coordenadas. Sabemos que las transformaciones afines son funciones lineales compuestas con traslaciones, es decir,
$x' = ax + by + c$
$y' = dx + ey + f$

Para ver como cambia la curva al hacer la transformación, hay que ver como cambia su ecuación al cambiar de las coordenadas (x,y) a las coordenadas (x´,y´)
Para esto basta despejar las coordenadas x, y en términos de x,y´ y sustituir en la ecuación original.

Si empezamos con una cónica, su ecuación es cuadratica en x,y, como x, y son funciones de primer grado en x´,y´, al sustituir vuelve a quedar una ecuación cuadratica en x´,y´, lo que corresponde a otra cónica. •

Ejemplo. Tomemos la elipse $x^2 + 4y^2 = 36$ y la transformación $x' = x + y$, $y' = y$
entonces despejando x y y en términos de x´, y´ queda $x = x' - y'$, $y = y'$
y la ecuación se convierte en $(x'-y')^2 + 4(y')^2 = 36$ es decir $x'^2 - 2x'y' + 5y'^2 = 36$

La transformación afín envia la elipse en otra elipse, pero *no* envia ejes en ejes

Teorema 12. Las transformaciones proyectivas envían cónicas en cónicas.

Demostración. Usaremos coordenadas homogéneas. Las cónicas son las curvas en el plano proyectivo que tienen ecuaciones homogéneas cuadráticas en x,y,z, es decir, ecuaciones de la forma
$Ax^2 + By^2 + Cz^2 + Dxy + Eyz + Fxz = 0$

Las transformaciones proyectivas corresponden a transformaciones lineales del espacio modulo escalamientos, así que en coordenadas homogéneas las transformaciones tienen la forma
$x' = ax+by+cz$
$y' = dx+ey+ez$
$z' = fx+gy+hz$

Para ver como se transforma una cónica, hay que tomar su ecuación en x.y.z y ver como es su ecuación en x´,y´,z´. Si despejamos x,y,z en términos de x´,y´,z´ vemos x, y, z son funciones lineales de x´, y´, z´, así que al sustituir en la ecuación cuadratica en x, y,z obtenemos una ecuación cuadratica en x´,y´,z´ lo que dice que la curva resultante también es una cónica. •

Lema 13. Dadas dos cónicas del mismo tipo (círculos/elipses, parábolas o hipérboles) siempre existe una transformación afín del plano que lleva una a la otra.

Demostración. Dadas 2 cónicas del mismo tipo, podemos girar el plano para que sus ejes tengan las mismas direcciones, y luego podemos estirar o encoger el plano en la dirección de los ejes para que se hagan iguales. •

En otras palabras, todas las cónicas del mismo tipo son afinmente equivalentes.

Lema 14. Dadas dos cónicas no degeneradas, siempre existe una transformación proyectiva del plano que lleva una a la otra.

*Demostración. T*odas las cónicas son proyecciones de un circulo, así que podemos ir de cualquier cónica a cualquier otra componiendo una de esas proyecciones con la inversa de otra. •

Así que todas las cónicas no degeneradas son proyectivamente equivalentes.

Problemas.

10. Da la ecuación homogénea correspondiente a la hipérbola $9x^2 - 4y^2 = 36$
y encuentra sus puntos al infinito.

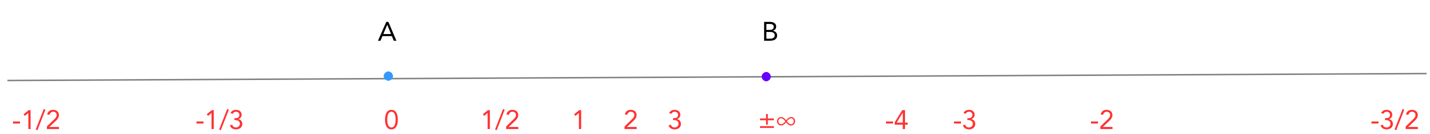
11. ¿A donde va a dar la hipérbola $9x^2 - 4y^2 = 36$ al hacer la transformación afín $x' = x + y$, $y' = y - x$?

12. ¿Será posible proyectar un círculo a otro círculo, de modo que el centro no vaya el centro?

Razones y razones cruzadas.

Si A, B y C son 3 puntos en una linea, la **razón** en que C divide a AB es el numero AC/CB.

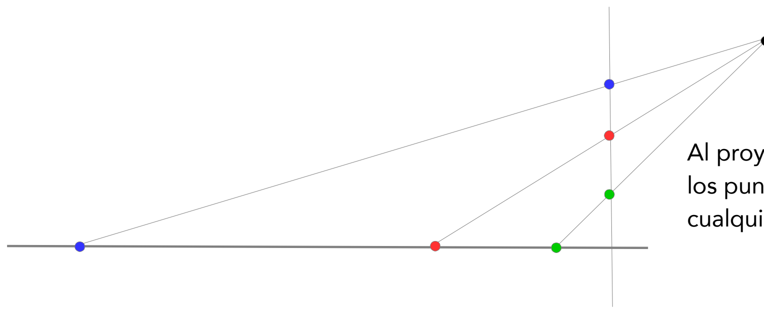
Si fijamos A y B la razón AC/CB es una función de C, que es positiva en el intervalo entre A y B y es negativa fuera del intervalo, vale 0 si C=A, vale ±∞ si C=B y vale -1 si C=±∞.



Lema 15. Las transformaciones afines preservan las razones entre puntos alineados.

Demostración. Como preservan puntos medios, preservan todas las fracciones de la forma $m/2^n$, y por continuidad preservan todas las fracciones.

Las transformaciones proyectivas en general no preservan razones:



Al proyectar desde un punto, los puntos medios pueden ir a cualquier punto

Si A,B,C,D son 4 puntos alineados del plano, su razón **cruzada** es el numero real

AC·BD / AD·BC

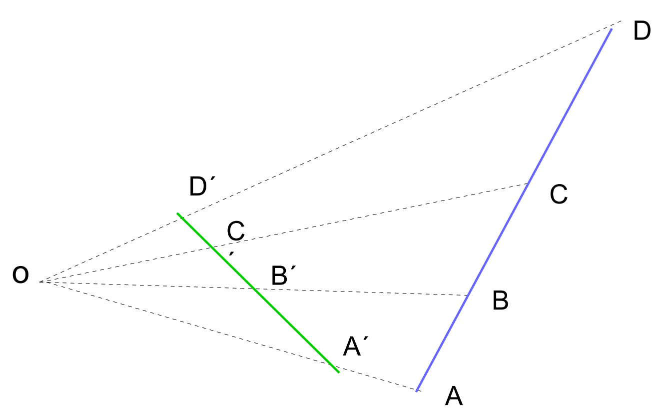
La razón cruzada puede escribirse como la razón entre 2 razones: AC/CB / AD/DB.

Ejemplo. Si en la recta real A=1, B=3, C=8, D=7 entonces AB=2, BC=5, BD=4, CD=-1
Asi que la razón AB/BC es 2/5 y la razon AD/DB es 6/-4 = -3/2
y la razón cruzada AC·BD / AD·BC es 7·4 /6·5 = 14/15.

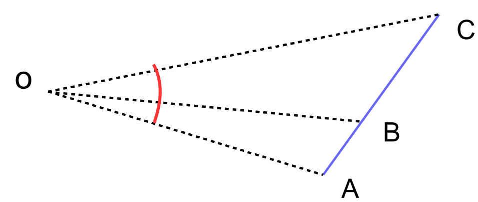
Teorema 16. Las transformaciones proyectivas preservan las razones cruzadas.

Demostración. Como las transformaciones proyectivas son composiciones de proyecciones, basta ver que estas proyecciones preservan la razón cruzada.

Para esto tenemos que ver que al proyectar una linea a otra, la razón cruzada entre 4 puntos A,B,C,D en una linea y sus proyecciones A´,B´,C´,D´ en la otra son iguales.



Esto es consecuencia de la relación que hay entre la división de segmentos y la división de ángulos:
Si A,B,C son 3 puntos en una linea y o es un punto fuera de la linea entonces

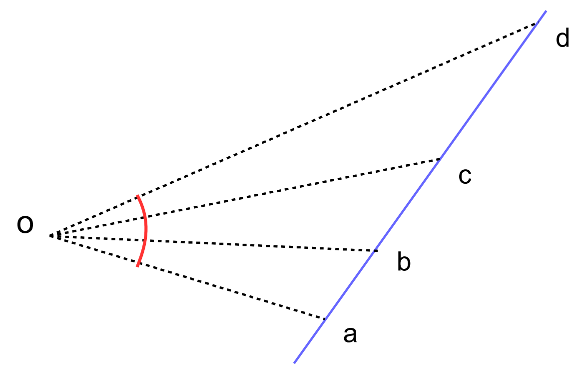


$$\frac{AB}{BC} = \frac{\text{sen } AOB}{\text{sen } BOC}$$

(esto es fácil de demostrar usando la definición de seno)

Así que si A,B,C,D son 4 puntos alineados entonces

$$\frac{AC\ BD}{AD\ BC} = \frac{\text{sen}(AOC)\ \text{sen}(BOD)}{\text{sen}(AOD)\text{sen}(BOC)}$$



Como el cociente de la derecha solo depende de los algunos entre las lineas por o, entonces no depende de la linea que contiene los puntos A,B,C,D por lo que es igual para los puntos A,B´,C´,D´.

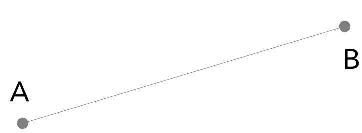
La invariancia de la razón cruzada al hacer una transformación proyectiva muestra que las imágenes de 3 puntos en una linea determinan las imágenes de todos los puntos de la linea.

Ejemplo. Una proyección envía los puntos A, B, C a los puntos A´, B´, C´ ¿a donde va el punto D, suponiendo que A,B,C,D estan igualmente espaciados y lo mismo ocurre con A´,C´Bá?

Como AC·BD / AD·BC = 2·2 / 3·1 = 4/3 entonces A´C´·B´D´ / A´D´·B´C´ = 1·B´D´ / A´D´·(-1) = 4/3
así que A´D´/D´B´=3/4 , o sea que D´ divide al segmento A´C´ en la razón 3 a 4:

Problemas.

13. Localiza los puntos de la recta por A y B que dividen al segmento AB en las razones 1/1, 2/1, 1/2, -1/2, -1/1, -2/1.



14. Donde esta el punto D tal que la razón cruzada AC BD / AD BC = AC/CB / AD/DB es 1? ¿y donde es -1? ¿y 2? ¿y -2?