La geometría absoluta.

Durante mucho tiempo se creyó que la geometría de Euclides era la única geometría posible, y se trato de demostrar que el 5° postulado (sobre la existencia de paralelas únicas) debía ser una consecuencia lógica de los otros postulados: por un lado se estudio la geometría sin asumir el postulado de las paralelas y por otro lado asumió que el postulado era falso para tratar de llegar a una contradicción Estas dos estrategias tuvieron resultados sorprendentes, que iban en contra del sentido común pero no llegaban al resultado deseado.

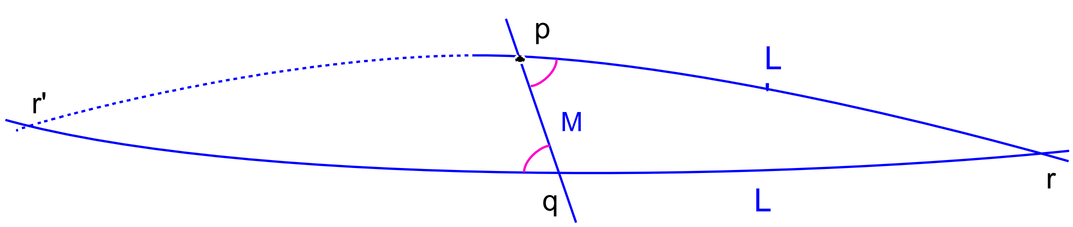
Algo crucial en la geometría euclidiana es la existencia de *movimientos rígidos,* sin los cuales no se puede demostrar casi nada: existen simetrías que llevan cualquier punto a cualquier otro y cualquier recta en cualquier otra. En terminología moderna, el plano euclidiano es *homogéneo* e *isotropico*.

El plano proyectivo muestra que existen otras geometría, tan simétricas como la euclidiana, y en las que se cumplen todos los postulados excepto el de las paralelas. Las lineas proyectivas son distintas de las lineas euclidianas en dos aspectos fundamentales: no son infinitas y no separan al plano proyectivo.

Si al conjunto de axiomas de la geometría euclidiana le quitamos el axioma de las paralelas, y lo cambiamos por el que dice que las lineas separan al plano, obtenemos la geometría *absoluta.*

Lema. En la geometría absoluta, por cada punto fuera de una linea L pasa al menos una paralela a L.

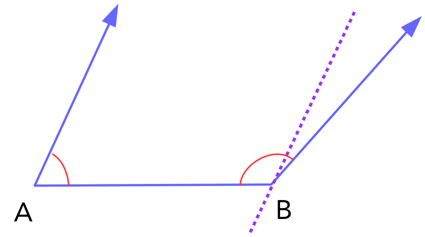
Demostración. Sea p un punto fuera de una linea L, sea M cualquier linea por p que cruce a L, digamos en q. Por p pasa una linea L' tal que M forma ángulos alternos iguales con L y L'. Si L' no fuera paralela a L, entonces L' intersecta a L en un punto r que queda de un lado de M.



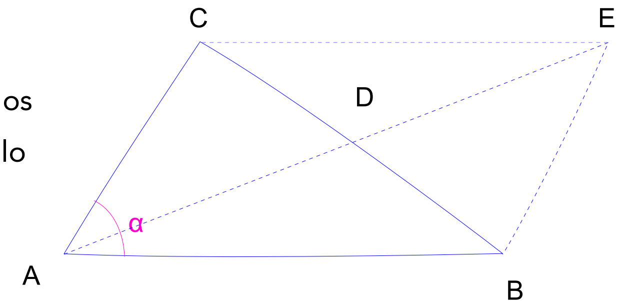
La rotación del plano que intercambia p y q intercambia a L y L´así que lleva r a otro punto r´del otro lado de M. Así que por los puntos r y r' pasan dos lineas distintas, lo que es imposible. •

Teorema de Saccheri-Legendre. En la geometría absoluta, los ángulos internos de cada triángulo suman a lo mas π radianes.

Demostración Observar primero que si ABC es cualquier triangulo, la suma de los ángulos internos en A y en B es menor que π radianes. Si no fuera así los rayos que van de A a C y de B a C no podrían intersectarse, ya que estarían en distintos lados de la paralela a AC por B.



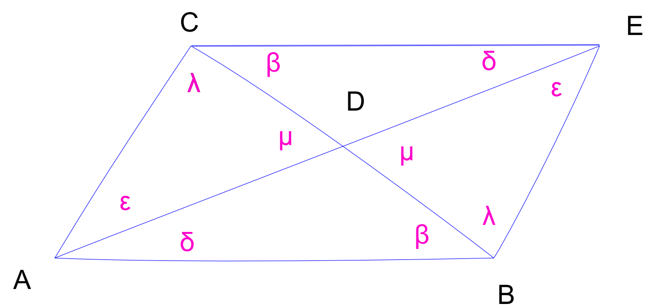
Supongamos que hay una triángulo ABC cuyos tres ángulos internos suman mas de π radianes. Digamos que el ángulo mas pequeño es el ángulo α en A.



Sea D el punto medio de BC y sea E un punto en la linea AD con AD=DE.

Por LAL, ADC es congruente a EDB.

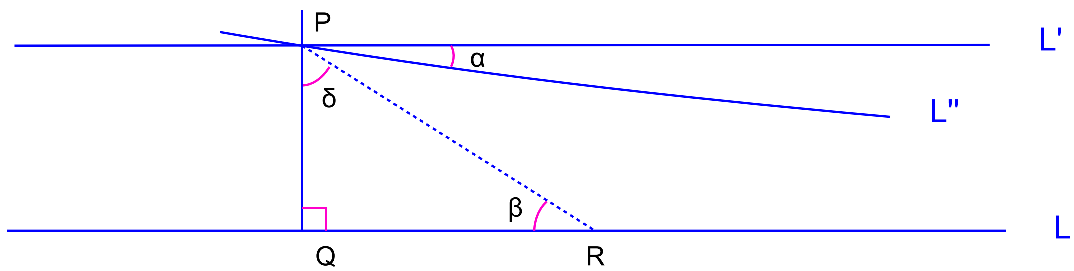
Entonces los triángulos ABC, ABE y ACE tienen la misma suma de ángulos: $\beta+\lambda+\delta+\varepsilon$.



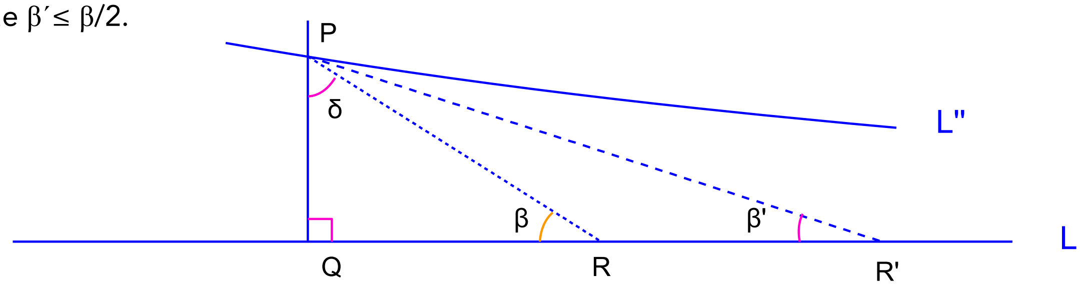
Como $\delta+\varepsilon = \alpha$ entonces $\delta \leq \alpha/2$ o $\varepsilon \leq \alpha/2$. Así construimos un triángulo (ABE o ACE) con la misma suma de ángulos que ABC, pero cuyo ángulo menor se reduce a la mitad. Repitiendo este argumento podemos construir triángulos con la misma suma de ángulos, donde el ángulo menor es arbitrariamente pequeño. Esto dice que la suma de los otros dos ángulos es mas de 180°, lo que es imposible. •

Lema. Si por algún punto p fuera de una linea pasa mas de una paralela a la linea, entonces existe un triángulo cuyos ángulos suman menos de π radianes.

Demostración Ya sabemos que la linea L´que forma un ángulo de $\pi/2$ radianes con la perpendicular a L por P es paralela a L. Si hay otra linea L´´paralela a L por P, entonces L´´ cruza a L´ en P formando un ángulo α. Si podemos encontrar un punto R en L tal que el ángulo β es menor que ii habremos terminado, ya que el triángulo PQR tendrá ángulos que suman $\pi/2+\delta+\beta<\pi/2+(\pi/2-\alpha)+\alpha<\pi/2+\pi/2$.



Para ver que podemos hacer que el ángulo β sea arbitrariamente pequeño, podemos observar que como la linea L es infinita, existe un punto R' tal que PR=RR'. Como el triángulo PRR' es isósceles, tiene dos ángulos iguales y como la suma de los 3 es a lo mas π radianes entonces $\pi-\beta+2\beta'<\pi$ así que $\beta' \leq \beta/2$.

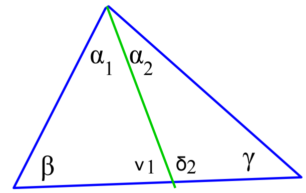


En el plano euclidiano los ángulos internos de los triángulos suman π radianes y los ángulos internos de los polígonos de n lados suman $(n-2)\pi$ radianes.

El *defecto angular* de un triángulo con ángulos internos α, β, γ es $D(T)=\pi-\alpha-\beta-\gamma$, y el defecto angular de un n-ágono con ángulos internos $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ es $D(P)=(n-2)\pi- \alpha_1- \alpha_2-\ldots- \alpha_n$.

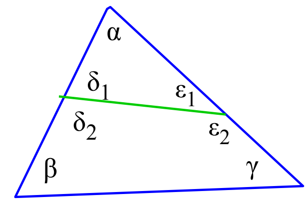
Lema. El defecto angular es aditivo: si se parte un triángulo o un cuadrilátero en 2 triángulos o cuadriláteros entonces el defecto del total es la suma de los defectos de los pedazos.

Demostración. Si partimos a un triangulo T en dos triángulos como en la figura 1, entonces la suma de los defectos es



$$\pi-(\alpha_1+\beta+\delta_1) + \pi-(\alpha_2+\gamma+\delta_2) = \pi-(\alpha_1+\alpha_2+\beta+\gamma) + \underbrace{\pi-(\delta_1+\delta_2)}_{0}$$

que es el defecto de T.

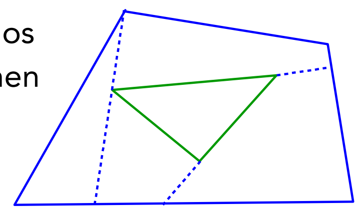


Si partimos a un triangulo T en un triangulo y un cuadrilátero como en la figura 2 entonces la suma de sus defectos es

$$\pi-(\alpha+\delta_1+\varepsilon_1) + 2\pi-(\beta+\gamma+\delta_2+\varepsilon_2) = \pi-(\alpha+\beta+\gamma) + \underbrace{\pi-(\delta_1+\delta_2)}_{0} + \underbrace{\pi-(\varepsilon_1+\varepsilon_2)}_{0}$$

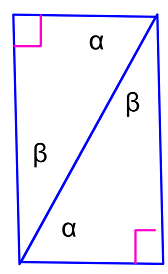
que es el defecto de T.

Corolario. Los triángulos y polígonos que están contenidos en un triángulo o un polígono con defecto angular 0 tienen defecto angular 0.



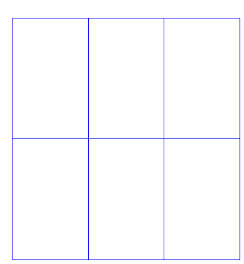
Demostración. Si un polígono P esta contenido en el polígono P´ y dividimos a P´ en polígonos de modo que uno de ellos sea P. Como el defecto de P´ es la suma de los defectos, y ningún defecto es negativo, su suma debe ser positiva. •

Lema. Si existe un triángulo cuyos ángulos internos suman π radianes, entonces existe un rectángulo y los ángulos internos de todos los triángulos suman π radianes.



Demostración. Supongamos que hay un triángulo cuyo defecto angular es 0. Si partimos al triángulo en dos triángulos rectángulos, entonces por el resultado anterior estos triángulos rectángulos tienen deficit angular es 0.

Uniendo dos copias de un triángulo rectángulo cuyos ángulos suman π radianes, obtenemos un rectángulo (un cuadrilátero cuyos ángulos son todos rectos). Uniendo copias de un rectángulo obtenemos rectángulos de cualquier tamaño.



Entonces cada triángulo en el plano esta contenido en un rectángulo, así que por el resultado anterior todos los triángulos tienen defecto angular 0. •

Geometría hiperbólica.

Los dos resultados anteriores implican que en la geometría absoluta solo hay dos alternativas:

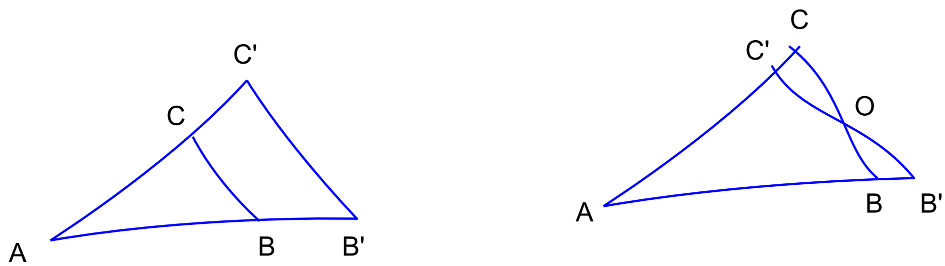
1. Por cada punto fuera de una linea pasa exactamente una paralela a la linea, y los ángulos internos de cada triángulo suman π radianes.

2. Por cada punto fuera de una linea pasan al menos 2 paralelas, y los ángulos internos de cada triángulo suman menos de π radianes.

La primera alternativa es la geometría euclidiana y la segunda es llamada *geometría hiperbólica.*

Teorema (AAA). En la geometría hiperbólica, dos triángulos con ángulos iguales son congruentes.

Demostración. Tomemos dos triángulos ABC y A´B´C´con ángulos correspondientes iguales y lados distintos. Si hacemos que el angulo BAC coincida con el angulo B´A´C´ y los triángulos no coinciden, entonces hay dos configuraciones posibles:

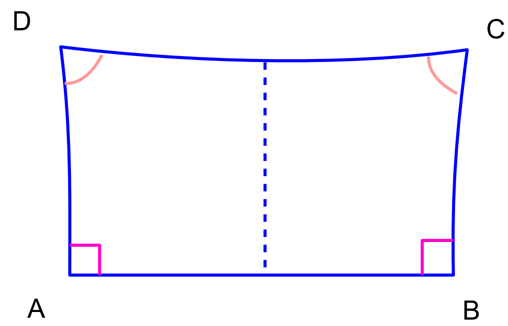


En la primera la suma de los ángulos internos del cuadrilátero BCC´B´ suman 2π radianes, lo que es imposible, y en la segunda configuración los ángulos internos del triángulos BOB' y del triángulo COC' suman mas de π radianes, lo que es aún mas imposible. •

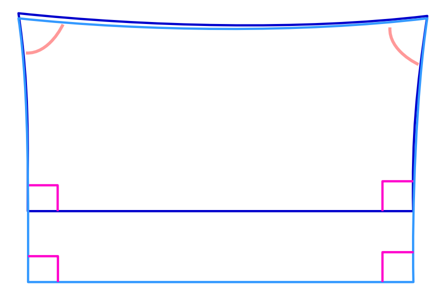
Un cuadrilátero ABCD tal que $\angle DAB=\angle CBA=\pi/2$ y AD=BC es un *cuadrilátero de Saccheri*. AB es la *base* del cuadrilátero, CD es la *cima*, y AD y BC son los *lados*. El segmento que une los puntos medios de la base y la cima es la *altura*.

No es difícil mostrar que en un cuadrilátero de Saccheri:

- Los dos ángulos en la cima son iguales.
- La cima es mayor que la base.
- La altura es menor que los lados.



2. Dos cuadriláteros de Saccheri con cimas iguales y ángulos iguales son congruentes, ya que de otro modo habría un rectángulo:



Areas y ángulos.

Aun no hemos definido "área" en geometría hiperbólica (la definición en el caso euclidiano se basa en los rectángulos, que en este caso no existen). Pero cualquier definición razonable de área debería tener las siguientes propiedades:

1. Para cada polígono P, Area(P) > 0.

2. Si un polígono P puede cortarse en polígonos P_1, P_2, ..., P_n entonces

$$\text{Area}(P) = \text{Area}(P_1) + \text{Area}(P_2) + \ldots + \text{Area}(P_n) \quad \text{(el área es aditiva)}$$

El defecto angular de un polígono D(P) tiene las mismas propiedades:

1. Para cada polígono hiperbólico P, D(P) > 0.

2. Si un polígono P puede cortarse en polígonos P_1, P_2, ..., P_n, entonces

$$D(P) = D(P_1) + D(P_2) + \ldots + D(P_n)$$

Esta coincidencia de las propiedades del área y el defecto angular sugiere que existe una relación entre ellas.

Teorema de Bolyai. Dos triángulos hiperbólicos con defectos angulares iguales tienen áreas iguales.

Demostración.

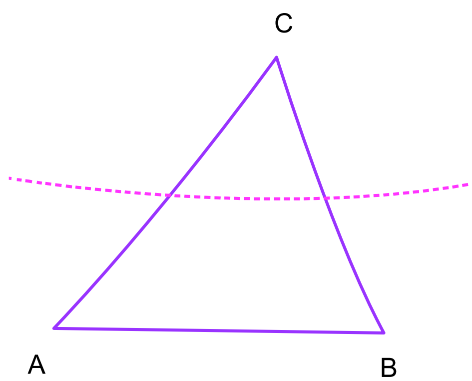
Vamos a ver que si 2 triángulos tienen defectos angulares iguales, entonces es posible recortar a uno en pedazos y reensamblar los pedazos para obtener el otro.

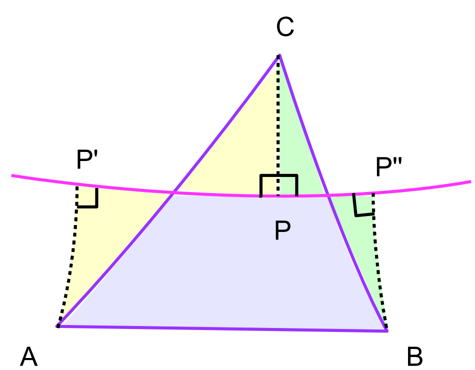
Paso 1. Si los dos triángulos tienen bases iguales y defectos iguales, veremos que ambos pueden recortarse para obtener el mismo cuadrilátero.

Si cortamos el triángulo ABC con una línea que pase por los puntos medios de AB y AC, y por la perpendicular a esa linea por C, podemos armar un cuadrilátero de Saccheri con cima AB.

Los ángulos en la cima son iguales a 1/2(A+B+C).

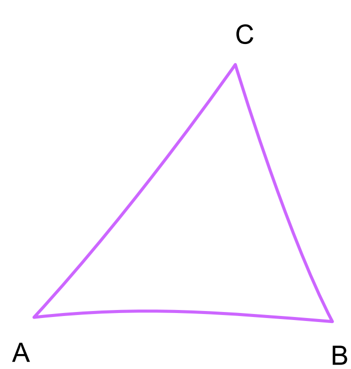
Cualquier otro triángulo con la misma base y los misma suma de ángulos produce otro cuadrilátero de Saccheri con la misma cima y los mismos ángulos, así que debe ser igual al primer cuadrilátero de Saccheri, asi que los 2 triángulos tiene áreas iguales.

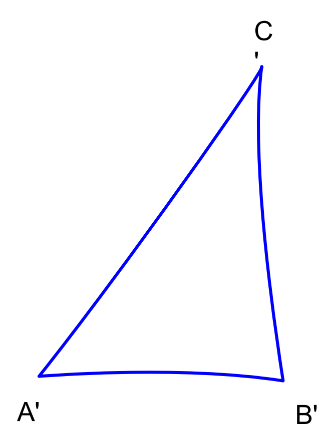




Paso 2. Si dos triángulos tienen defectos angulares iguales, veremos que el primero puede recortarse y reensamblarse para convertirlo en un triángulo con la misma base que el segundo.

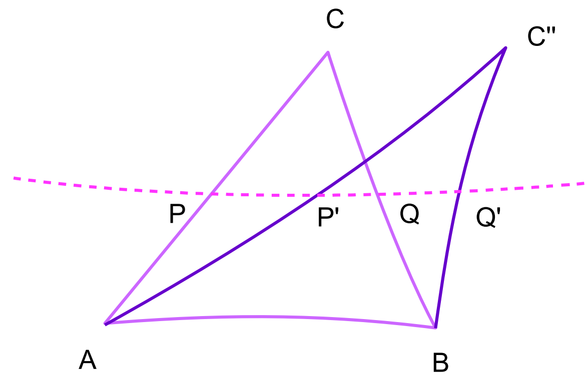
Consideremos dos triángulos ABC y A´B´C´con defectos angulares iguales y algunos lados distintos. Podemos suponer que AC<A´C.



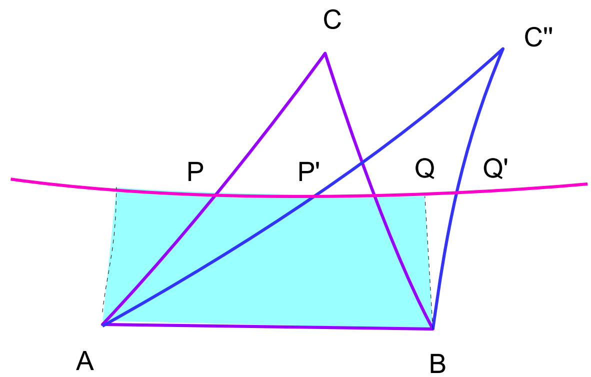


Sean P y Q los puntos medios de AC y BC, y sea P' un punto sobre PQ tal que AP'=A´C´/2.

Considerar el triángulo ABC'' tal que P' es el punto medio de AC''.



La linea PQ contiene la cima del cuadrilátero de Saccheri correspondiente a ABC y por lo tanto es perpendicular a la mediatriz de AB.

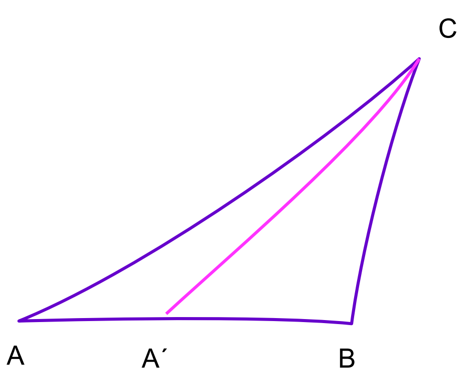


Como la cima del cuadrilátero de Saccheri correspondiente a ABC'' es la perpendicular a la mediatriz de AB que pasa por el punto medio de AC'', que es P', entonces la linea PQ también contiene a esta cima.

Así que ABC y ABC'' pueden recortarse para obtener el mismo cuadrilátero de Saccheri, por lo que sus defectos son iguales, y por construcción AC''=A'C', lo que nos lleva al caso 1. •

Corolario. Las áreas de los polígonos hiperbólicos son proporcionales a sus defectos angulares.

Demostración. Hay que ver que existe una constante c tal que A(P)/D(P)=c para todos los polígonos hiperbólicos. Como el defecto angular y el área son aditivos, basta verlo para triángulos.



En el triángulo ABC dibujemos un triángulo mas chico A´BC, con A´entre A y B. Observemos que si A´esta muy cerca de A el defecto de A´BC se parece mucho al defecto de ABC, y si A´esta muy cerca de B, el defecto de A´BC es muy pequeño (ya que ∠AA´C se parecerá mucho a ∠ABC y por lo tanto ∠A´BC y ∠ BA´C suman casi π)

Al mover A´de A a B,el defecto angular de A.BC va disminuyendo continuamente (y su área también) así que en un momento el defecto de A´BC será ña mitad del defecto de ABC. Como el defecto es aditivo, en ese momento el defecto de AA´C también será la mitad del defecto de ABC, y por el teorema de Bolyai, las áreas de AA´C y A´BC serán iguales a la mitad del área de ABC.

De manera similar, para cada n en N podemos partir al triángulo ABC en n triángulos cuyos defectos angulares sean 1/n del defecto angular de ABC y por el teorema de bolyai sus áreas serán 1/n del área de ABC. Uniendo m de estos triángulos hallamos un triángulo A´BC cuyo defecto angular es m/n del defecto de ABC y su área es m/n del área de ABC,

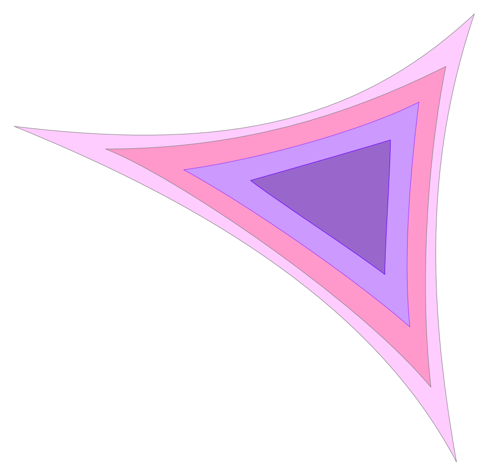
Como el defecto angular y el área varían continuamente, esto dice que para cada número real r con $0<r<1$ el triángulo A´BC cuyo defecto de r veces el defecto de ABC tiene r veces el área de ABC. El teorema de Bolyai dice que todos los tríangulos con defecto r veces el de ABC tienen r veces el área de ABC, asi que el área es proporcional al defecto angular. •

Aunque en el plano hiperbólico se puedan construir triángulos con bases y alturas arbitrariamente grandes, sus áreas no puedan ser arbitrariamente grandes, como ocurre en el plano euclidiano.

Corolario. Las áreas de los triángulos hiperbólicos están acotadas.

Demostración. Los defectos angulares están acotados por π, así que las áreas están acotadas por πc, donde c es la constante que relaciona el área y el defecto angular. •

Al alargar mas y mas los lados de un triángulo eu área no puede crecer mucho porque los ángulos se hacen mas y mas chicos, y los triángulos se hacen mas flacos.

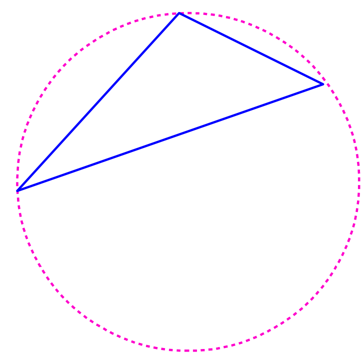


Problemas.

1. En la geometría absoluta, por cada punto p fuera de una linea L pasa una única perpendicular a L.

2. En la geometría absoluta, la unicidad de las paralelas equivale a que por cualesquiera 3 puntos no alineados pase una circunferencia.

Hint: ve que si por un punto pasa mas de una paralela a una línea entonces existen 3 puntos no alineados por donde no pasa ninguna circunferencia, y viceversa)



3. Si L y M son dos lineas hiperbólicas, entonces no hay mas de dos puntos de M a la misma distancia de L. (La distancia de un punto a una linea es la longitud de la perpendicular del punto a la linea) Hint: Saccheri.

4. Muestra que para cada $\varepsilon>0$, existe un triangulo hiperbólico cuyos ángulos internos suman menos que ε.

5. En la geometría hiperbólica es posible comparar distancias entre puntos (decir cuales esta mas cerca y cuales mas lejos) midiendo únicamente ángulos. ¿puedes decir como hacerlo?