Modelos del plano hiperbólico

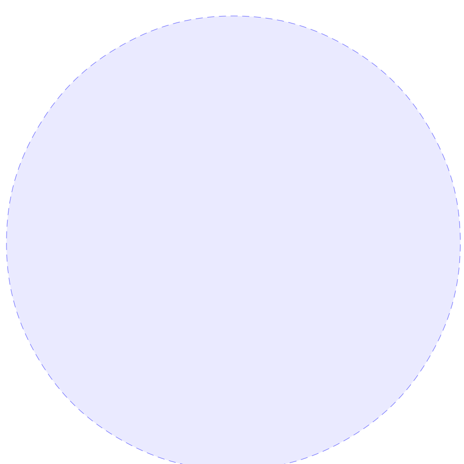
Los postulados de la geometría hiperbólica permiten demostrar que en caso de existir, el plano hiperbólico tendría propiedades muy extrañas:

- Los ángulos internos de los triángulos sumarían menos de π radianes.
- Las áreas de los triángulos serian proporcionales a su deficiencia angular (lo que les falta a sus ángulos para sumar π radianes).
- No existirían rectángulos.
- Existirían tercias de puntos no alineados por los que no pasaría ningún círculo.

Nada hasta aquí garantiza que un plano así exista o no. Podría ocurrir que al explorar mas sus propiedades llegáramos a una contradicción, lo que mostraría que no, que es lo que se buscaba originalmente.

Una manera contundente de mostrar que los postulados de la geometría hiperbólica son consistentes (que no hay contradicciones intrínsecas) es exhibiendo un *modelo* del plano hiperbólico H^2, o sea una manera de representar a H^2 partiendo de cosas ya conocidas y donde podamos demostrar que se cumplen todos los postulados.

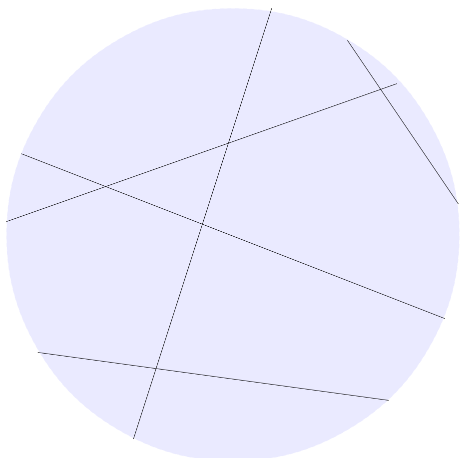
Existen varios modelos del plano hiperbólico, los mas sencillos son el de Beltrami-Klein y el de Poincare. En ambos modelos los puntos de H^2 están representados por los puntos del *interior* del disco unitario D^2 (pero las líneas y la manera de medir distancias son distintas).



Los puntos de la orilla (el círculo unitario S^1) *no* representan puntos del plano hiperbólico, sino *puntos al infinito* (también llamados *puntos ideales*).

El modelo de Beltrami-Klein.

El primer modelo del plano hiperbólico fue el de Beltrami-Klein, que está basado en la geometría proyectiva y la razón cruzada. Los puntos son los del interior del disco unitario D^2 y las líneas son los segmentos de rectas en el interior del disco:



Es inmediato que:

- Por cada par de puntos pasa una línea.
- Dos líneas se intersectan a lo mas en un punto.
- Dado un punto p fuera de una línea L, hay una infinidad de líneas por p que no intersectan a L.

Esto muestra que se cumplen los postulados de la geometría hiperbólica que no tienen que ver con medidas, pero falta mucho mas:

- Necesitamos medir distancias, ángulos y áreas, de modo que las líneas sean las trayectorias mas cortas entre 2 puntos.

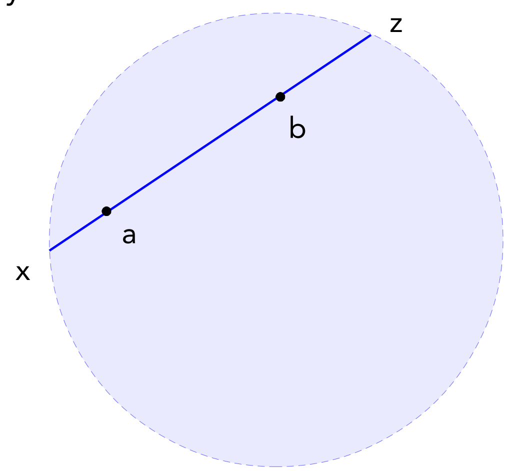
- Deben existir transformaciones rígidas (que preserven distancias, ángulos y áreas) que lleven cualquier punto a cualquier otro, cualquier linea a cualquier otra y cualquier ángulo a cualquier otro ángulo igual.

En el modelo de Beltrami-Klein no podemos medir distancias, ni ángulos de la manera usual (las líneas no serian infinitas y la suma de los ángulos internos de un triángulo no serían menores que π). ¿Como podemos entonces medir distancias y ángulos?

Como las transformaciones rígidas en este modelo deben enviar lineas en lineas, deben corresponder a transformaciones proyectivas que dejan invariante al disco D^2.
Así que para definir la distancia hiperbólica podríamos usar alguna medida que sea invariante bajo esas transformaciones proyectivas.

La razón cruzada r(x,a,b,y) = xb/ac /ab/xy es invariante bajo todas las transformaciones proyectivas ¿Podremos usarla para medir distancias?

¿Podríamos medir la distancia entre 2 puntos a y b del disco calculando la razón cruzada r(x,a,b,z) de a y b con los extremos x y z del intervalo por a y b?



La distancia debe ser aditiva: para 3 puntos alineados a,b,c se debe cumplir que d(a,b)+d(b,c)=d(a,c)

Si x,a,b,c,z están alineados, las razones cruzadas no son aditivas, sino multiplicativas: r(x,a,b,z)r(x,b,c,z) = r(x,a,c,z)

Pero este problema se puede resolver usando el logaritmo, que cambia multiplicaciones por sumas y definiendo:

$$d(a,b) = \log |r(x,a,b,z)|$$

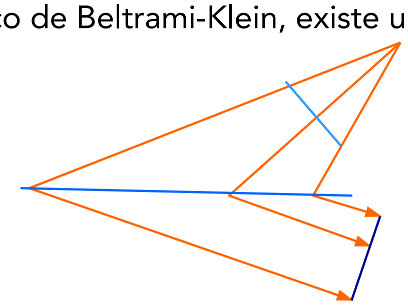
Se puede mostrar que con esta manera de medir distancias las líneas hiperbólicas son las trayectorias mas cortas, y las transformaciones rígidas corresponden a las transformaciones proyectivas del plano euclidiano junto con sus puntos al infinito)que dejan invariante el disco. También se puede ver que hay suficientes transformaciones rígidas para llevar cualquier punto a cualquier otro y cualquier línea a cualquier otra. Y esto da una manera de medir ángulos en cualquier punto partiendo de la medida usual de ángulos en el origen.

Problemas.

1. Muestra que si x,a,b,c,z son 5 puntos en una línea entonces las razones cruzadas cumplen r(x,a,b,z)r(x,b,c,z)=r(x,a,c,z).

2. Muestra que dados 2 puntos p y q en el plano hiperbólico de Beltrami-Klein, existe una transformación rígida que lleva p a q.

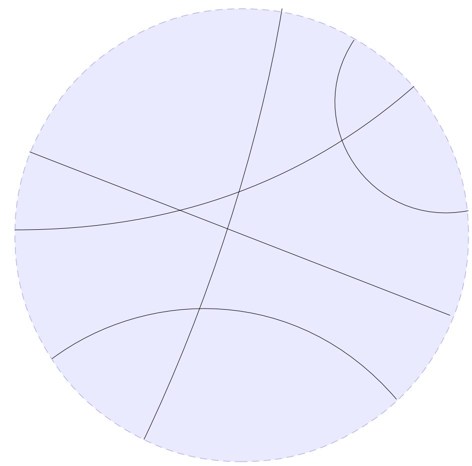
Hint: basta ver que existe una transformación proyectiva que envía un disco en otro disco y envía el centro del disco a cualquier punto del otro. Esto puede hacerse componiendo una proyección desde un punto con una proyección paralela.



3. Demuestra que con la métrica d(a,b)=log |r(x,b,a,z)| las líneas del plano hiperbólico de Beltrami-Klein son infinitas.

El Modelo de Poincare.

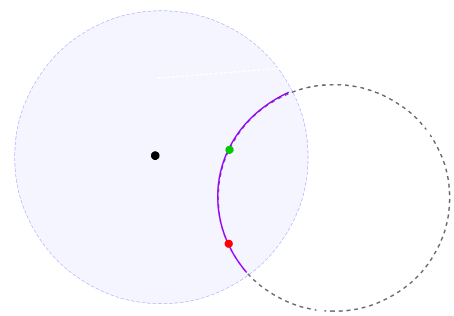
El plano hiperbólico de Poincare esta basado en la geometría euclidiana, usando las propiedades de los círculos y la razón cruzada compleja.

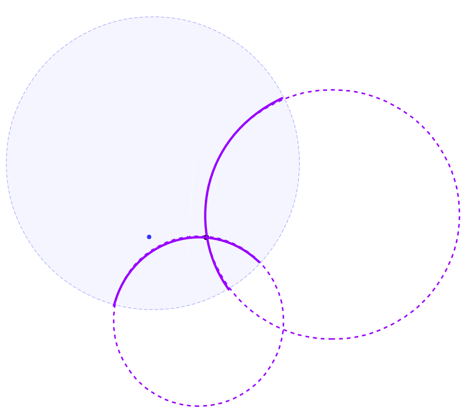


Los puntos son los del interior del disco unitario D^2, y las líneas son los arcos de círculos ortogonales a S^1 y las rectas por el origen.

- Por cada par de puntos pasa una linea hiperbólica.

  Ya que por cada par de puntos p y q del plano pasa un único círculo que es ortogonal a un círculo dado.

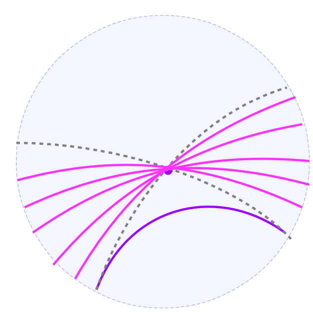




- Dos lineas hiperbólicas se intersectan en a lo mas un punto.

  Ya que dos círculos se intersectan en a lo mas 2 puntos, y si son ortogonales a S^1 solo uno de los puntos está en el interior de D^2.

- Por cada punto fuera de una línea hiperbólica L pasan una infinidad de paralelas a L.

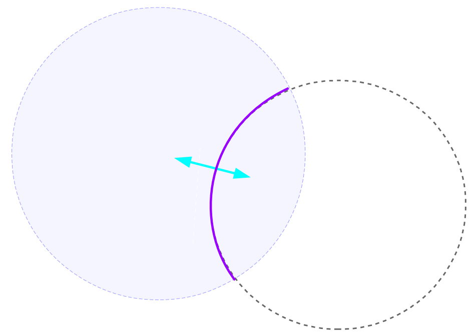


Así que se cumplen los postulados de la geometría hiperbólica que no involucran medidas.

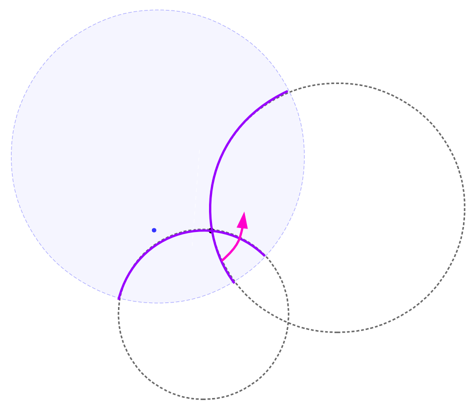
No es obvio como deben medirse las distancias en el modelo de Poincare (no es posible medirlas de la manera usual ya que las líneas no serían infinitas).

Resulta mas fácil decir cuales queremos que sean las transformaciones rígidas y buscar una manera de medir que no cambie al hacerlas. Para esto se usan las *inversiones* (ver el apéndice) que son una especie de reflexiones en círculos de la geometría euclidiana.

Las inversiones no preservan las distancias euclidianas, pero si preservan ángulos y envían círculos y rectas en círculos o rectas.

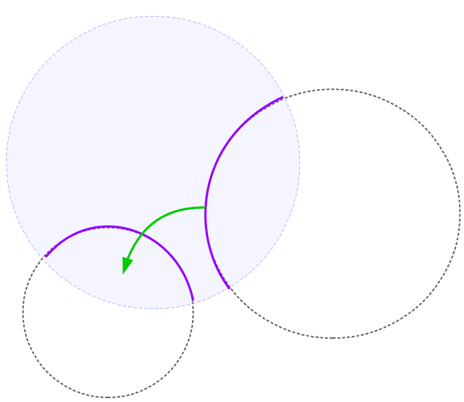


Así que si L es una línea hiperbólica en el plano de Poincare, la inversión en el círculo que la contiene da una transformación del plano hiperbólico que envía líneas hiperbólicas en líneas hiperbólicas, fija a L e intercambia los lados en que L divide al plano hiperbólico. De modo que podemos pensar en ella como un *reflexión hiperbólica*.

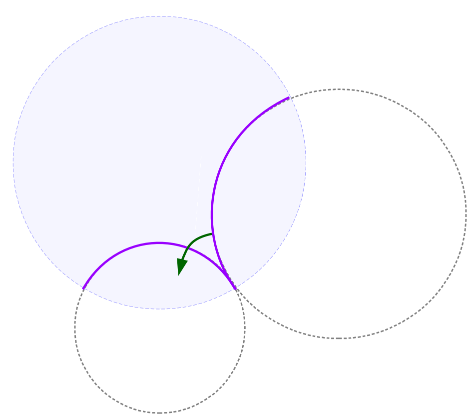


Si componemos dos reflexiones en lineas hiperbólicas que se cruzan, obtenemos una transformación que fija el punto de intersección (y ningún otro punto del disco) por lo que podemos pensar en ella como una *rotación hiperbólica.*

La composición de dos reflexiones en lineas hiperbólicas que no se intersectan es una transformación que no fija ningún punto, por lo que podemos pensar en ella como una traslación. Diremos que la traslación es *hiperbólica* si las lineas de reflexión no se tocan ni siquiera en el infinito y que es *parabólica* si las lineas sí se tocan en el infinito.



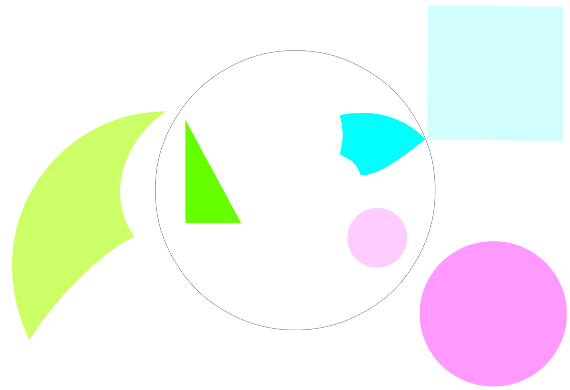
Traslación hiperbólica



Traslación parabólica

Aunque preservan ángulos, las inversiones distorsionan mucho las formas euclidianas.

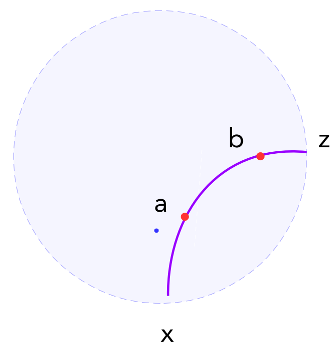
¿Será posible medir distancias en el plano hiperbólico de modo que las reflexiones hiperbólicas y sus composiciones sean transformaciones rígidas?



Poincare observo que la razón cruzada $r(x,a,b,z) = xb\cdot az \,/\, xa\cdot bz$ definida originalmente para 4 números reales en una linea, también tiene sentido para 4 números complejos en el plano, y demostró que es invariante bajo inversiones.

Como la razón cruzada de 4 puntos que están en una recta o en un circulo es un número real (tarea) podemos definir la distancia entre 2 puntos a y b del plano hiperbólico de Poincare tomando los extremos x y z de la línea hiperbólica que los contiene, y definiendo

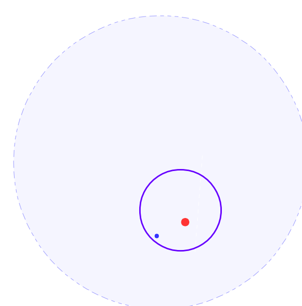
$$d(a,b) = \log |r(x,a,b,z)|$$



Se sigue inmediatamente que con esta manera de medir distancias las reflexiones en lineas hiperbólicas y sus composiciones son transformaciones rígidas.

Lema. En el modelo de Poincaré, los círculos hiperbólicos se ven como círculos euclidianos, (pero sus centros no son los centros euclidianos).

Demostración. Las simetrías del círculo implican que los círculos hiperbólicos centrados en el origen son círculos euclidianos. Todos los otros círculos hiperbólicos son reflexiones de estos en ´líneas hiperbólicas. Se sigue que el centro de un círculo hiperbólico está en la línea que va del origen al centro euclidiano. •



Lema. El conjunto de puntos de H^2 que equidistan de 2 puntos fijos en una linea hiperbólica.

Demostración. Si p y q son 2 puntos, si M es la perpendicular a la linea pq que pasa por el punto medio de p y q, entonces los puntos de M están a la misma distancia de p y q (ya que la reflexión en M intercambia a p y q y preserva distancias). Los puntos de un lado de M están mas cerca de p y los del otro lado están mas cerca de q. •

Lema. La posición de cualquier punto en H^2 esta determinada por sus distancias a 3 puntos no alineados (en la misma línea hiperbólica).

Demostración. Igual que en el plano euclidiano: si conocemos las distancias hiperbólicas de un punto p a otros 3 puntos entonces sabemos que p está en la intersección de 3 círculos hiperbólicos centrados en esos puntos. 2 círculos se intersectan en a lo mas 2 puntos, y el tercer círculo solo puede pasar por uno de esos puntos a menos que los 3 centros estén alineados. •

Lema. Las isometrías de H^2 están determinadas por las imágenes de 3 puntos no alineados.

Demostración. Igual que en el plano euclidiano: Sean I una isometría, a,b,c 3 puntos no alineados y p cualquier otro punto. Como I es una isometría, si a,b,c no están alineados entonces Ia, Ib Ic tampoco lo están, y las distancias de Ip a Ia,Ib,Ic son iguales a las distancias de p a a,b,c, así que Ip está determinado por Ia,Ib,Ic. •

Teorema. Las isometrías de H^2 son composiciones de a lo mas 3 reflexiones hiperbólicas.

Demostración. Igual que en el plano euclidiano: sean I una isometría, a,b,c 3 puntos no alineados y a´,b´,c´ sus imágenes bajo I. Si vemos que componiendo a lo mas 3 reflexiones podemos llevar a,b,c a sus imágenes a´,b´,c´, entonces por el lema anterior I será igual a esa composición.
Sea Я_1 una reflexión que lleve a a a´. Sea Я_2 una reflexión que lleve Я_1b a b´, entonces Я_2 fija a a´.
Sea Я_3 una reflexión que lleve $\text{Я}_2\text{Я}_1$c a c´, entonces Я_3 fija a los puntos a´ y b´.
Así que $\text{Я}_3\text{Я}_2\text{Я}_1$ lleva los puntos a,b,c a los puntos a´,b´,c´. •

Corolario. Las transformaciones rígidas de H^2 son:
- Reflexiones hiperbólicas
- Rotaciones hiperbólicas
- Traslaciones hiperbólicas o parabólicas
- Reflexiones con deslizamiento

Demostración. Las transformaciones rígidas son composiciones de 1, 2 o 3 reflexiones, las primeras son por definición reflexiones, rotaciones y traslaciones. Cuando son 3 reflexiones es posible girar las lineas de reflexión, sin que cambie su composición, de modo que la tercera línea sea perpendicular a las otras 2, así que la composición es una reflexión con deslizamiento en la tercera línea. •

Ojo: las traslaciones en el plano hiperbólico son muy distintas de las traslaciones euclidianas!
- Las traslaciones hiperbólicas dejan una sola linea invariante, el *eje de traslación*.
- Las traslaciones parabólicas no dejan ninguna linea invariante.
- La composición de traslaciones no tiene que ser una traslación.
- Las traslaciones hiperbólicas NO conmutan.

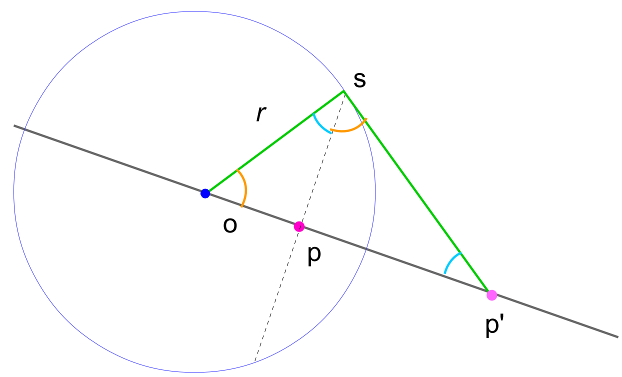
Inversiones.

Para usar el modelo de Poincare es necesario saber algunas cosas sobre inversiones en círculos.

Si C es un circulo en el plano euclidiano, la *inversión* en C es una transformación que lleva los puntos de afuera del circulo a los de adentro y los de adentro afuera, con excepción del centro del circulo, donde no está definida.

Mas precisamente, si C tiene centro o y radio r, la inversión en C envía a cada punto p del plano al punto p' en la linea op y tal que op·op' = r^2.

Construcción geométrica de la inversión en C:

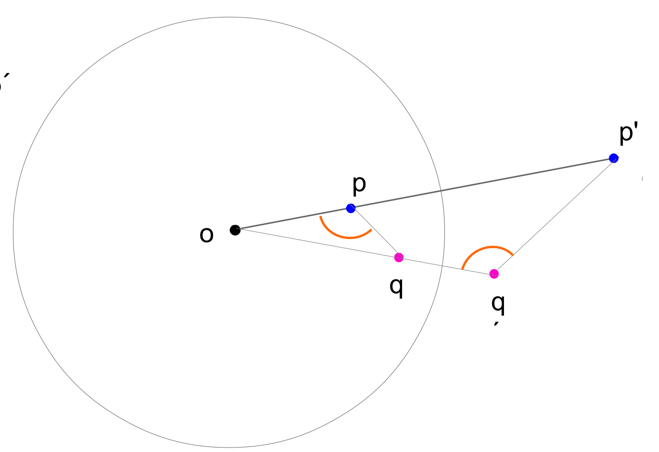


Si el punto p esta en C entonces p´=p.

Si p esta en el interior de C, trazamos la perpendicular a op por p y nos fijamos en el punto s donde cruza a C. La imagen de p es el punto p´ donde la tangente a C por q cruza a la linea op, ya que como ∠oqp´=90°, los triángulos pos y sop´ son semejantes, op/os=os/op' asi que op·op'=os^2=r^2.

Si p esta afuera de C, le hacemos al revés: dibujamos una tangente a C por p y nos fijamos en el punto q donde cruza a C. La imagen de p es el punto p´donde la prependicular a op por q cruza a op.

La inversión no esta definida en o, pero si le añadimos al plano un solo punto al infinito y definimos I(o)=∞ y I(∞)=o obtenemos una función bien definida de la esfera en la esfera, que es continua.



Lema 1. Si la inversión en el círculo C manda p a p´ y q a q` entonces opq y oq´p´son semejantes.

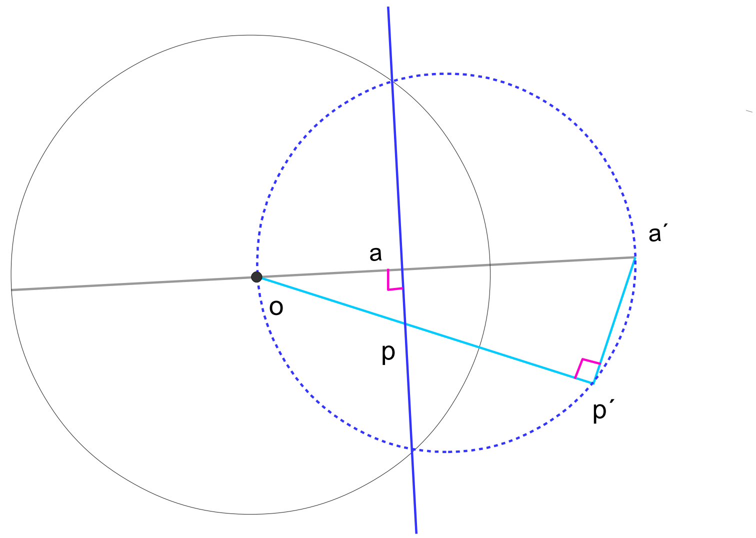
Demostración. Por las alineaciones ∠poq = ∠q´op´. Además, si C tiene centro en o y radio r entonces op·op´ = r^2 = oq·oq´ por lo tanto op/oq´ = oq/op´, asi que los triángulos tienen un ángulo igual y lados adyacentes proporcionales.

Teorema 2. Las inversiones envían rectas y/o círculos en rectas y/o círculos.

Demostración.

Caso 1. Si L es una recta que pasa por el centro o del círculo C, entonces por la definición de inversión L cae sobre si misma.

Caso 2. Sea L una recta que no pase por o y L´ su imagen bajo la inversión en C. Queremos ver que L´ es un círculo.



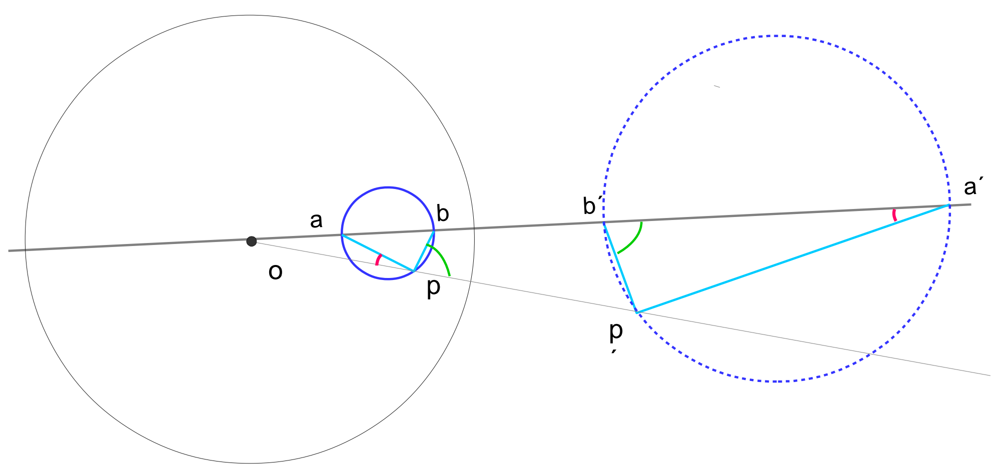
Sea p cualquier punto de L y sea a el punto de L mas cercano al centro o. Entonces oa es perpendicular a L. Por el lema anterior oap y opá´ son semejantes, así ∠oap=∠opa´=90. Esto dice que p´ está en el círculo con diámetro oa´.

Como cada inversión es su propia inversa, esto muestra que la imagen bajo la inversión de un círculo que pasa por o es una recta.

Caso 3. Sea D un circulo que no pase por O y D´ su imagen bajo la inversión en C. Queremos ver que D´ es un círculo.

Si ab es el diámetro de D que pasa por O, entonces D es el conjunto de puntos p tales que ∠apb=90° . Para ver que la imagen D´ de D es un círculo, basta ver que D´ es el conjunto de puntos p´ tales que ∠a´p´b´=90°.

Por el lema 1 los triángulos opa y oa´b´ son semejantes, ∠opa=∠oa´p´ y los ángulos rosas son iguales.

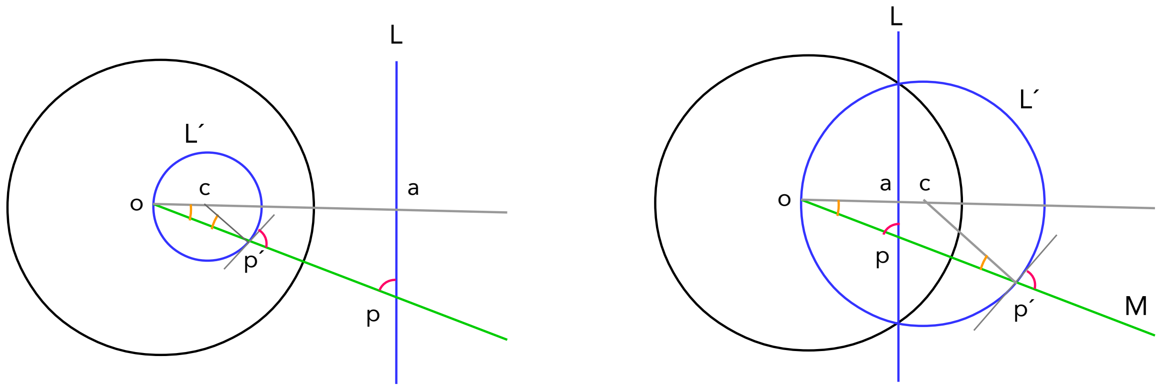


Como los triángulos opb y ob´p´ también son semejantes, ∠opb=∠ob´p´ así que los ángulos verdes son iguales.

Como ∠apb=90° el ángulo rosa y el verde en p suman 90°, así que el ángulo rosa en a´ y el ángulo verde en b´ suman 90, por lo que ∠∈p´b´=90°.

Teorema 3. Las inversiones preservan los ángulos de intersección entre curvas.

Demostración. El ángulo de intersección entre 2 curvas es el ángulo que forman sus tangentes en el punto de intersección, así que todas las curvas con las mismas tangentes en un punto forman el mismo ángulo. Para ver que una inversión preserva ángulos, basta ver que al invertir 2 rectas L y M, que se intersectan formando un ángulo, sus imágenes, que son 2 círculos L´y M´, se intersectan formando el mismo ángulo.



Corolario. La inversión en un círculo perpendicular a S^1 manda a cada círculo perpendicular a S^1 a otro círculo perpendicular a S^1.

Problemas.

4. Dados dos puntos A y A' en el modelo del plano hiperbólico de Poincare, dí como hallar la reflexión hiperbólica que lleva A a A'.

5. ¿Es cierto que la composición de dos traslaciones hiperbólicas es una traslación hiperbólica?

6. Muestra que dos traslaciones hiperbólicas conmutan únicamente si tienen el mismo eje (la linea hiperbólica invariante bajo la traslación).

7. Muestra, sin medir distancias, que si dos triángulos en H^2 tienen ángulos iguales, entonces hay una composición de reflexiones hiperbólicas que lleva uno al otro.

8. Muestra que 4 puntos del plano euclidiano están en alguna recta o un círculo si y solamente si su razón cruzada compleja es un número real.