Los Grupos de Frisos.

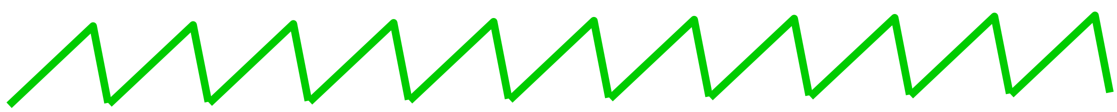
Los grupos finitos de isometrias del plano son muy simples, los grupos infinitos pueden ser bastante complicados. Una simplificación natural es pensar únicamente en grupos que son **discretos**, en el sentido de que no contienen elementos arbitrariamente cercanos: no hay traslaciones arbitrariamente cortas, ni rotaciones por ángulos arbitrariamente pequeños, y por lo tanto tampoco reflexiones en rectas arbitrariamente cercanas o que formen ángulos arbitrariamente pequeños.
Los grupos finitos de isometrias del plano son discretos, y también lo son los grupos de simetrías de la mayoría de las figuras simples, pero los grupos de simetrías del circulo o de la recta no son discretos.

Los grupos finitos de simetrías en el plano dejan un punto fijo. Los grupos infinitos de simetrías mas sencillos son los que no dejan puntos fijos pero dejan una recta invariante (una recta que al aplicarle cualquiera de las simetrías del grupo vuele a caer en si misma).

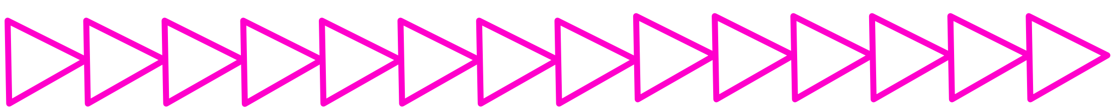
Un **friso** es una figura plana cuyo grupo de simetrías es discreto y contiene traslaciones en una sola dirección.

Ejemplos de frisos (con sus tipos de simetrías):

(traslaciones)

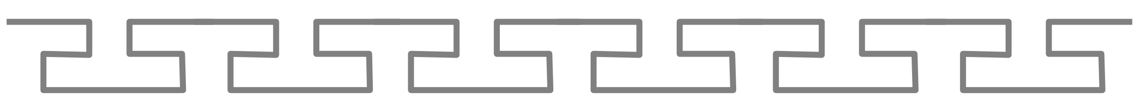


(traslaciones y rotaciones)

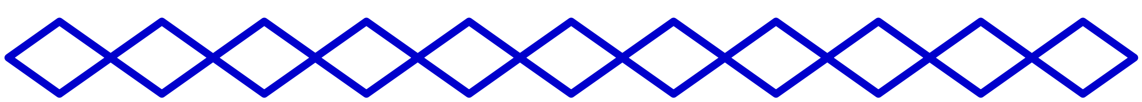


(traslaciones, reflexión vertical y pasos)

(traslaciones y reflexiones horizontales)



(traslaciones, rotaciones, reflexiones horizontales y pasos)



(traslaciones, rotaciones, reflexiones verticales y horizontales, pasos)

Lema 1. Si un grupo de isometrias del plano no deja puntos fijos, debe contener traslaciones

Demostración. Si el grupo G no tiene traslaciones entonces G tampoco tiene pasos (el cuadrado de un paso es una traslación) asi que si G no contiene traslaciones podemos suponer que todos los elementos de G son rotaciones o reflexiones.

1. Si G tiene una rotación R con centro en un punto p y ángulo a, entonces como G no deja puntos fijos debe existir una isometria S en G que lleva p a otro punto Sp. Pero entonces $R'=SRS^{-1}$ es una rotación con centro en Sp y ángulo α (si S es una rotación) o ángulo $-\alpha$ (si S es una reflexión). En el primer caso $R'R^{-1}$ es una traslación en G y en el segundo caso R'R es una traslación en G.

2. Si G tiene una reflexión Я en una recta r, y p es un punto de r, entonces como G no deja puntos fijos existe una isometria S que lleva p a otro punto Sp y Я'=SЯS^{-1} es una reflexión en la recta Sr.
a. Si Sr no es paralela a r entonces Я'Я es una rotación, y estamos en el caso 1.
b. Si Sr es paralela a r, entonces Я'Я es una traslación,
c. Si Sr=r entonces S debe ser una traslación o un paso a lo largo de r (y ya acabamos) o S es una rotación de 180º o es una reflexión en una recta r' perpendicular a r, y en este caso SЯ es una rotación de 180º, y estamos en el caso1 otra vez. ■

Lema 2. Si un grupo discreto de isometrias del plano no deja puntos fijos pero deja una recta invariante, entonces el subgrupo de traslaciones es isomorfo a Z.

Demostración. El lema anterior muestra que el grupo tiene traslaciones. Tenemos que mostrar que todas son potencias de una traslación fija. Como el grupo deja una recta r invariante, todas las traslaciones el grupo estan dadas por vectores en la dirección de la recta r.
Sea T_1 la traslación dada por el vector mas corto, llamémoslo v_1. Si T es otra traslación en el grupo entonces T esta dada por un vector $v=av_1$ donde a es algun numero real. Si a es entero entonces $T=T_1^a$ y ya acabamos. Si a no fuera entero entonces $a=a'+r$ para algun $0<r<1$ de donde $T'= T_1^{-a}\circ T'$ seria una traslación en el grupo dada el vector $v-a'v_1=rv$, que es mas corto que v_1, lo que es una contradicción ■

Los lemas 1 y 2 muestran que los grupos discretos de isometrias del plano que no dejan puntos fijos y dejan una recta invariante son los grupos de simetrías de frisos.
El lema 2 no vale cuando el grupo no es discreto:

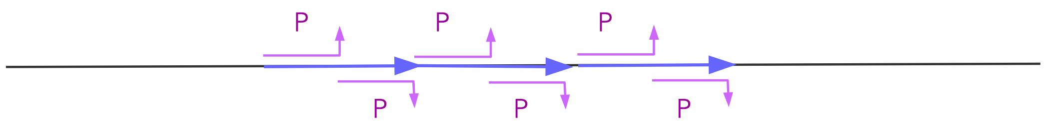
Ejemplo. Existen grupos de traslaciones horizontales isomorfos a Z^2 y también a Z^n para cada n en N.
Considerar el grupo G generado por las traslaciones horizontales a distancias 1 y $\sqrt{2}$, que esta formado por todas las traslaciones a distancias $m+n\sqrt{2}$ para m,n en Z.
La funcion $\varphi : Z+Z \to G$ dada por $\varphi(m,n) = m+n\sqrt{2}$ es claramente un homomorfismo de grupos que es suprayectivo. Para ver que φ es inyectiva, supongamos que $\varphi(m,n)=\varphi(m',n')$ entonces $m+n\sqrt{2}= m'+n'\sqrt{2}$ y por lo tanto $m-m'=(n'-n)\sqrt{2}$. Si $n'-n\neq0$ entonces $m-m'/n'-n=\sqrt{2}$ asi que $\sqrt{2}$ seria racional. Y si $n'-n=0$ entonces $m-m'=0$ asi que $m=m'$ y $n=n'$ por lo que $(m,n)=(m',n')$.

Teorema 3. Existen 7 grupos distintos de simetrías de frisos.

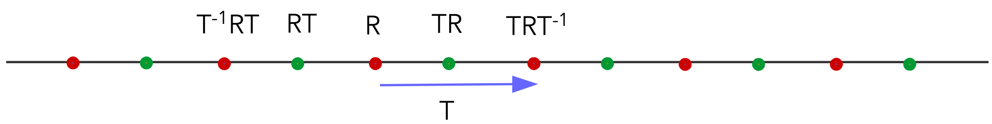
Demostración. Si G es un grupo discreto de isometrias del plano que no deja puntos fijos pero deja una recta invariante, los elementos de G solo pueden ser traslaciones en una dirección, digamos horizontal, rotaciones de 180°, reflexiones en rectas horizontales o verticales y pasos.

a. Las traslaciones en G estan generadas por la traslación mas corta, que llamaremos T.

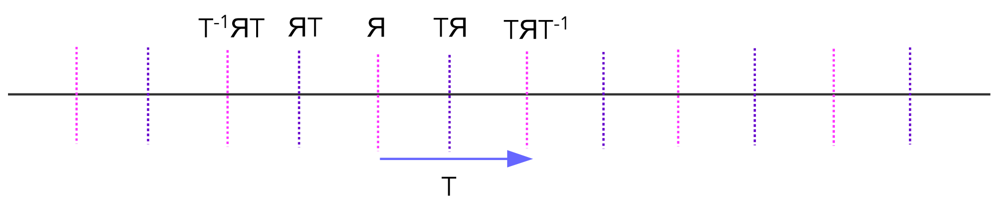
b. Si G tiene pasos, y P es el paso mas corto, entonces P^2 es una traslación, asi que $P^2=T^n$ para alguna n en Z. Si $n\neq\pm1$ entonces T seria mas corta que P asi que $T^{\pm1}P$ seria un paso mas corto que P. Asi que $P^2=T^{\pm1}$., y todas las traslaciones y pasos estan generados por el paso mas corto.



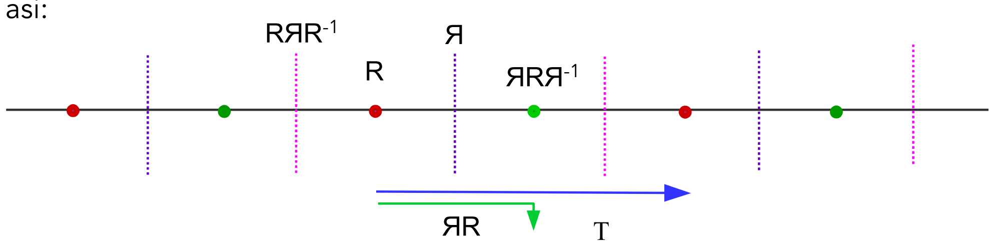
c. Si G tiene una rotación R con centro en el punto x, entonces TRT^{-1} es una rotación con centro en el punto Tx, y TR es una rotación con centro en el punto medio de x y Tx.
Como la composición de dos rotaciones es una traslación por el doble de la distancia entre sus centros, no puede haber rotaciones mas cercanas que R y TR



d. Si G tiene una reflexión Я en una recta vertical r, entonces TЯT^{-1} es una reflexión en la recta vertical Tr, y TЯ es una reflexión en la mediatriz de r y Tr.
Como la composición de dos traslaciones en rectas verticales es una traslación horizontal por el doble de la distancia entre esas rectas, no puede haber reflexiones mas cercanas que Я y TЯ.



e. Si G contiene una rotación R en un punto x y una reflexión Я en una recta vertical r que no pasa por x, entonces ЯRЯ$^{-1}$ es una rotación, RЯR^{-1} es una reflexión en una recta vertical y ЯR es un paso (por el doble de la distancia entre x y r). Asi que si R y Я son la rotación y la reflexión mas cercanas, deben verse asi:



Si el centro de R esta en la recta de reflexión de Я entonces ЯR es la reflexión en la recta horizontal.

f. Si G contiene a la reflexión V en la recta horizontal, entonces VT es un paso, si hay una rotación R entonces VR es una reflexión en una recta vertical (que pasa por el centro de R), y si hay una reflexión Я en una recta vertical entonces VЯ es una rotación de 180 (con centro en la recta de reflexión).

Las observaciones anteriores nos indican como se pueden combinar las distintas isometrias para formar un grupo G:

Si G no contiene a la reflexión en la recta horizontal:

1. Si G solo contiene traslaciones → G esta generado por la traslación mas corta

2. Si G solo contiene traslaciones y pasos → G esta generado por el paso mas corto

3. Si G solo contiene traslaciones y rotaciones → G esta generado por dos rotaciones a distancia mínima (o por una rotación y la traslación mas corta).

4. Si G contiene reflexiones en rectas verticales, pero no rotaciones → G esta generado por 2 reflexiones a distancia mínima

5. Si G contiene rotaciones y reflexiones en rectas verticales, estas no pasan por los centros de rotación → G esta generado por la rotación y una reflexión a distancia mínima

Si G contiene a la reflexión en la recta horizontal, entonces G contiene pasos.

6. Si G no contiene reflexiones en rectas verticales entonces G no contiene rotaciones y solo contiene traslaciones, pasos y la reflexión en la recta horizontal → G esta generado por la traslación mas corta y la reflexión en la recta horizontal.

7. Si G contiene reflexiones en rectas verticales → G esta generado por la reflexión en la recta horizontal y 2 dos reflexiones en rectas verticales a distancia mínima.

Lo anterior dice que hay 7 posibilidades para los grupos de simetrias de un friso, para ver que todas las posibilidades son reales hay que hallar 7 frisos que tengan esos grupos de simetrias (tarea) ●

Problemas

1. Sean T_1 y T_2 dos traslaciones del plano en la misma dirección, T_1 a una distancia racional y T_2 a una distancia irracional. Muestra que el grupo generado por T_1 y T_2 tiene traslaciones a distancias arbitrariamente pequeñas.

2. Muestra que hay un grupo de rotaciones del circulo que es isomorfo a Z.
Hay una figura del plano con ese grupo de simetrias?

3. Los ejemplos dados representan a 6 de los 7 grupos de simetrías de frisos. Encuentra un friso con el grupo de simetrías que falta.

4. Señala las traslaciones, pasos, centros de rotacion y lineas de reflexion para cada uno de los ejemplos de frisos.

5. Encuentra conjuntos minimos de generadores para los grupos de simetria de los 6 frisos dados (algunos tienen mas de uno).

6. Como son los grupos de simetrias de estos 3 frisos de Mitla?