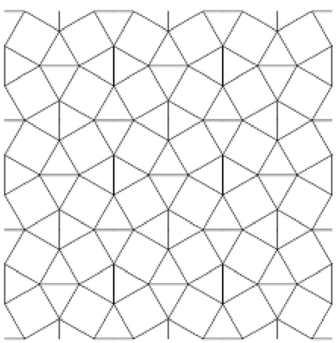
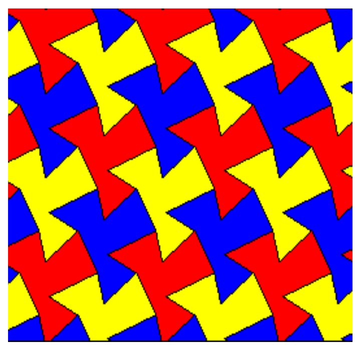
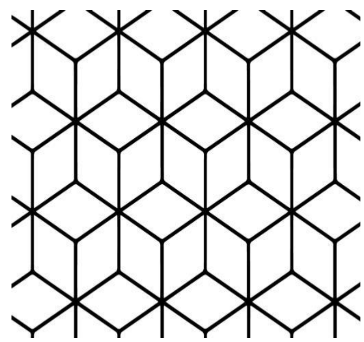
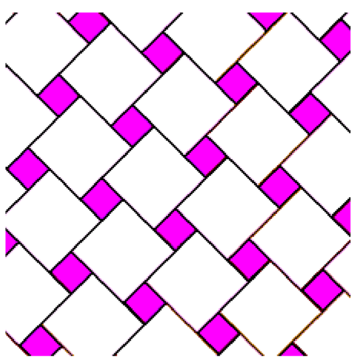
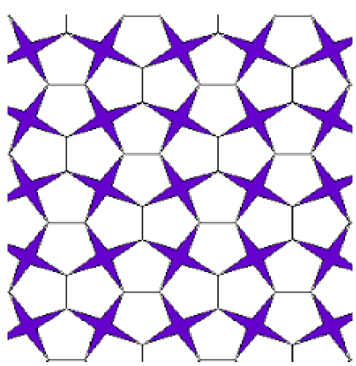
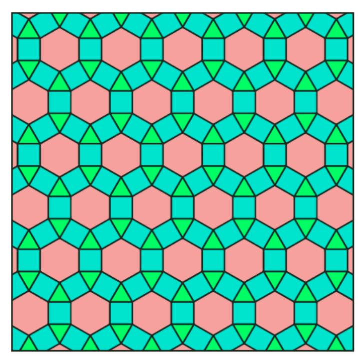
Grupos de mosaicos

Pensemos ahora en los grupos de isometrias del plano que no dejan puntos fijos ni rectas invariantes. Nos concentraremos en los grupos que son discretos. Estos son los grupos de simetrías de los mosaicos periódicos

Un **mosaico periódico** es una figura plana (necesariamente infinita) cuyo grupo de simetrías es discreto y contiene traslaciones en al menos 2 direcciones distintas.

Ejemplos de mosaicos periódicos:

Para ver que los grupos de isometrias del plano que no dejan puntos fijos ni rectas invariantes corresponden precisamente con los grupos de simetrías de los mosaicos periódicos, tenemos que ver que:

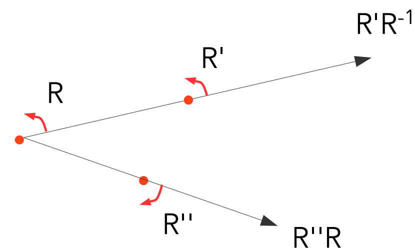
1) aquellos grupos siempre tienen traslaciones en al menos 2 direcciones
2) cada uno de esos grupos es el grupo de simetrías de algun mosaico periódico

Lema 1. Si G es un grupo de isometrias del plano que no deja puntos fijos ni rectas invariantes, entonces G contiene traslaciones en al menos dos direcciones y por lo tanto en una infinidad de direcciones.

Demostración.

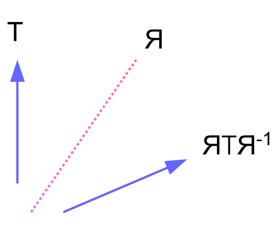
1. Si G contiene solamente traslaciones.
Sea T es una traslación con dirección d. Entonces G debe contener alguna traslación T' en una dirección distinta que d, ya que de otro modo cada recta con dirección d seria invariante bajo G.

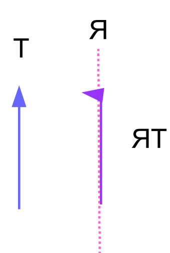
2. Si G contiene rotaciones.
Sea R es una rotación con centro en un punto p y ángulo α.
Como G no tiene puntos fijos, debe existir una isometría S en G tal que $Sp \neq p$. Entonces $R'=SRS^{-1}$ es una rotación con centro en $p'=Sp$ y ángulo α o $-\alpha$. Asi que R'R ó $R'R^{-1}$ es una traslación en la dirección de la recta pp'. Como el grupo G no deja a la recta pp' invariante, existe una isometría S' en G que lleva a p o a p' a un punto p'' fuera de la recta. Entonces $S'RS'^{-1}$ ó $S'R'S'^{-1}$ es una rotación R'' con centro en p'' y ángulo α o $-\alpha$, asi que R''R o $R''R^{-1}$ es una traslación en la dirección de la recta pp'', y ya hallamos dos traslaciones en direcciones distintas.



3. Si G no contiene rotaciones, pero tiene reflexiones o pasos.
Entonces todas las reflexiones y pasos son en rectas en una misma dirección d (porque la composición de dos reflexiones y/o pasos en rectas no paralelas es una rotación).

El grupo G no puede contener solo reflexiones, porque las rectas en la dirección perpendicular a d serian invariantes bajo G. Asi que si hay reflexiones entonces hay un paso P o una traslacion T en una direccion que no es perpendicular a d.
Si G tiene una reflexión Я en una recta r y existe una traslación T, entonces ЯTЯ$^{-1}$ es una traslación en la dirección Яd, que es distinta a d a menos que la dirección de T sea igual o perpendicular a d. Pero T no tiene direccion perpendicular a d, y si T tiene direccion d entonces ЯT es un paso en la dirección d.





Asi que podemos suponer que hay un paso P en una recta r. Como G no deja a r invariante, debe existir una isometría S que mande r a otra recta r'=Sr.. Asi que S es una traslación, o S es una reflexión o un paso en una recta paralela a r. En el primer caso P^2 y S son traslaciones en direcciones distintas, en el segundo caso P^2 y S^2 son traslaciones en direcciones distintas y en el tercer caso P^2 y SP son traslaciones en direcciones distintas. ●

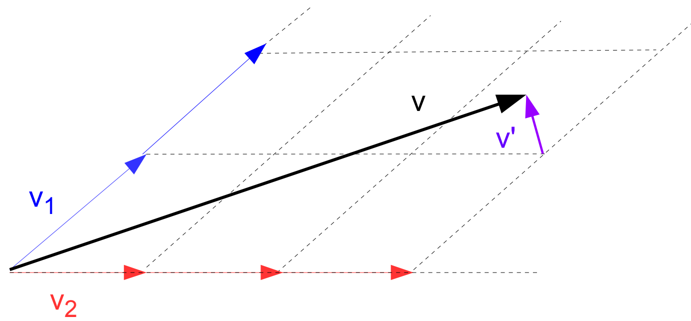
Lema 2. Si G es un grupo discreto de traslaciones del plano, entonces G es isomorfo a **Z** o a Z+Z.

Demostración SI todas las traslaciones en G son en la misma dirección, el lema 2 de la sección anterior muestra que todas son múltiplos de la traslación mas corta.

Si G tiene traslaciones en distintas direcciones, sea T1 la traslación dada por el vector mas corto, llamémoslo v1, y entre todas las traslaciones en G on otras direcciones, sea T2 la traslación dada por el vector mas corto, llamémoslo v2. Queremos ver que G esta generado por T_1 y T_2, es decir, que cada traslación T en G es de la forma $T = T_1^a \circ T_2^b$ con a,b en Z.

La traslación T esta dada por un vector v, y $v=av_1+bv_2$ con a y b reales.

Podemos escribir a=a'+r y b=b'+s donde a' y b' son enteros, $-^1/_2 \le r \le ^1/_2$ y $-^1/_2 \le r \le ^1/_2$.



El vector $v'= v -a'v_1-b'v_2 = rv_1+sv_2$ es mas corto que v_1 o v_2 ya que $|rv_1+sv_2| \le ^1/_2 |v_1| + ^1/_2 |v_2|$.

Pero v' es el vector de traslación de $T'= T_1^{-a'} \circ T_2^{-b'} \circ T$, que no puede ser mas corto que v_1 ni v_2 a menos que v' sea el vector 0. Eso quiere decir que r=s=0 por lo tanto a y b son enteros. •

Problemas

1. Describe todas las isometrias del plano que envían alguna recta a otra recta paralela (son 5 tipos).

2. Muestra que si G es un grupo de isometrias del plano que no deja puntos fijos ni rectas invariantes, entonces para cada punto en cada recta del plano, existe una isometría en G que envía a p fuera de r.

3. Muestra que el grupo de traslaciones del plano generado por las 3 traslaciones:

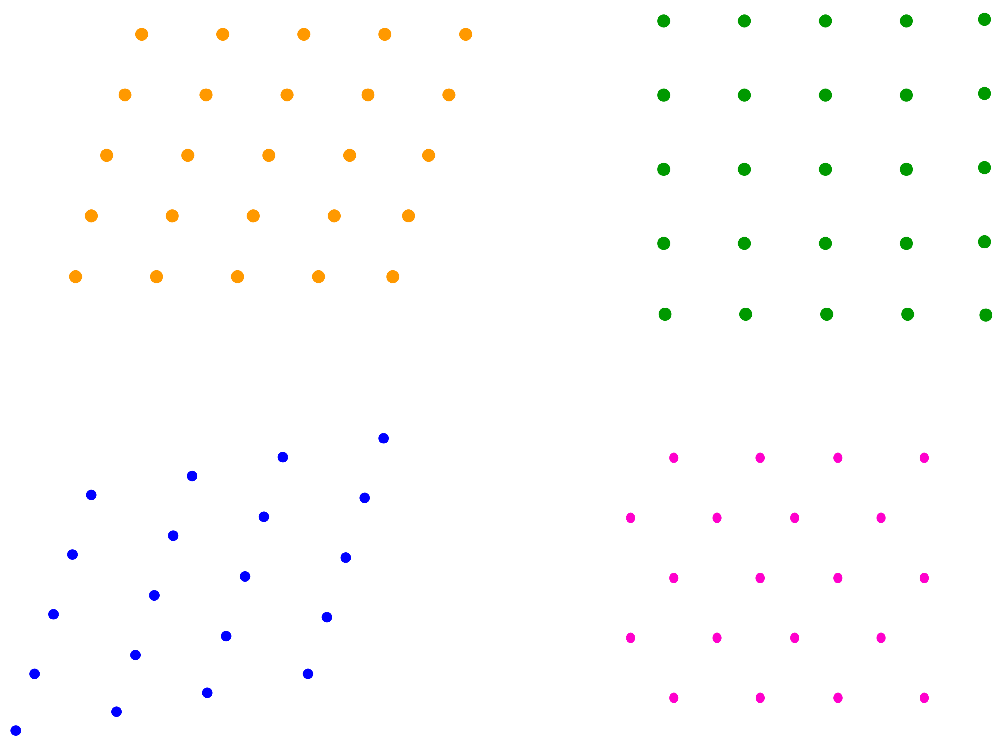
$T_1(x,y)=(x+5,y+3)$ $\qquad$ $T_2(x,y)=(x+2,y+4)$ $\qquad$ $T_3(x,y)=(x+3,y-2)$

puede generarse con solo dos traslaciones. Encuéntralas.

La latice de traslaciones.

Sea G un grupo de isometrias del plano y H el subgrupo de traslaciones de G.
Si p es cualquier punto del plano, entonces el conjunto Hp formado por las imágenes de p bajo todas las traslaciones de G es una **latice** (o **retícula**). La forma de esta latice no depende del punto, sino solamente del grupo: si q es cualquier otro punto, la latice Hq es igual a la latice Hp trasladada.

Ejemplos de latices:



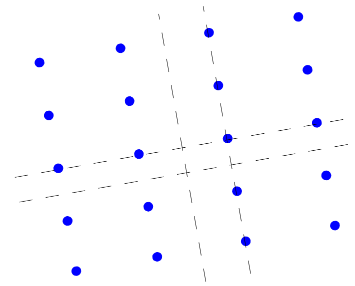
La latice de traslaciones de un punto contiene informacion muy util del grupo G.

Veamos que relación hay entre las traslaciones y las reflexiones y pasos en un mosaico.

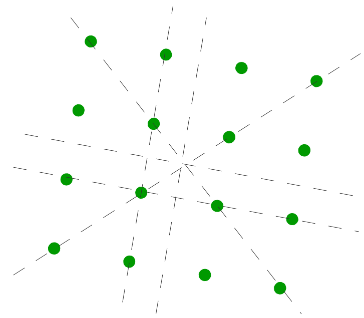
Lema 3. Si G el grupo de simetrías de un mosaico periódico, entonces las reflexiones o pasos en G deben enviar a cada dirección de traslación a otra dirección de traslación por la misma distancia.

Demostración. Sea H el subgrupo de traslaciones de G. Si Я es una reflexion y p es un punto del mosaico en la recta de reflexión, entonces la imagen de la latice Hp bajo Я es la latice ЯHp, que es invariante bajo la acción del grupo $ЯHЯ^{-1}$= H, y como la latice ЯHp contiene a p, entonces ЯHp debe ser igual a la latice Hp. •

Este lema muestra que si d_1 y d_2 son las direcciones de las dos primeras traslaciones mas cortas, y sus distancias de traslación son distintas, entonces Я debe preservar ambas direcciones, asi que la dirección de reflexión debe ser paralela o perpendicular a ambas. En particular, la latice debe ser ortogonal.

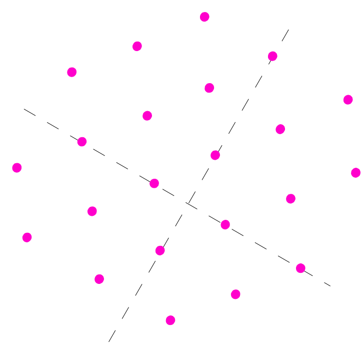


Si las distancias de traslación en las dirección d_1 y d_2 son iguales, entonces Я puede preservar o intercambiar las direcciones d_1 y d_2.



Si d_1 y d_2 son perpendiculares la latice es cuadrada y la reflexión puede ser en la dirección d_1 y d_2 y en la dirección de sus bisectrices.

Si d_1 y d_2 no son perpendiculares, la latice es rómbica y la reflexión debe ser en la dirección de las bisectrices.



Ademas, si T es una traslación y r es la recta de reflexión de Я, entonces TЯ es una reflexión o un paso en la recta $^1/_2$T r, y TЯ□Я = T (asi que hay rectas de reflexión o pasos a la mitad de las distancias de traslación, pero no mas cerca).

Los mismos argumentos tambien valen si en lugar de una reflexión Я consideramos un paso P.

Observar que si el grupo se simetrías de un mosaico periódico contiene una rotación R con centro en un punto p, entonces contiene rotaciones con centros en todos los puntos de la latice Hp (todas las conjugadas de R por las traslaciones del grupo).

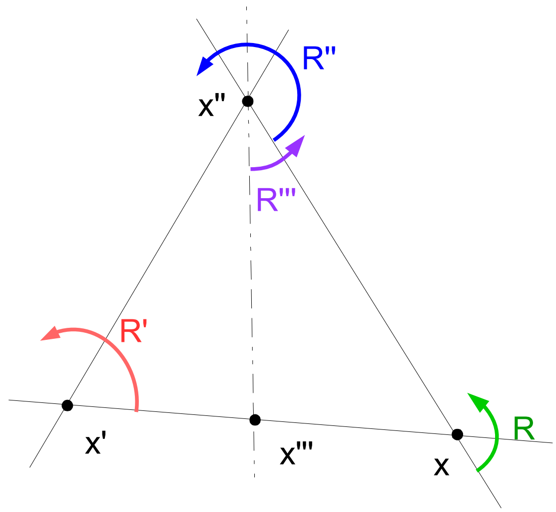
Lema 4. Sea G el grupo de simetrías de un mosaico periódico y H el subgrupo de traslaciones de G. Si p es un centro de rotación del mosaico, la latice Hp es invariante bajo las rotaciones del mosaico con centro en p.

Demostración. Si R es una rotación con centro en p, entonces la imagen de la latice Hp bajo R es otra latice RHp, que contiene a p y es invariante bajo la acción del grupo RHR^{-1}. Pero RHR^{-1}= H, asi que RHp es invariante bajo H, y como contiene a p, debe ser igual a Hp. Esto muestra que las rotaciones del mosaico con centro en p deben ser rotaciones de la latice Hp. •

Lema 5. Las únicas rotaciones posibles en el grupo de un mosaico periódico del plano son las de 180°, 120°, 90° y 60°.

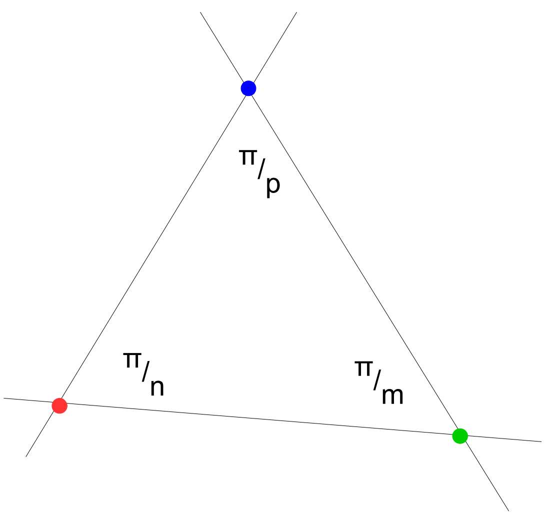
Demostración. Como el grupo es discreto, todas las rotaciones con un mismo centro son múltiplos de la rotación con ángulo mas pequeño, que debe ser de la forma 2π/n para algun n en N.

Sea R una rotación con centro x y ángulo 2π/m m>0, y sea R' la rotación cuyo centro x' es el mas cercano a x, y cuyo ángulo de rotación es 2π/n , n>0. Entonces R'∘ R es una rotación R'' con centro en otro punto x'' y ángulo un múltiplo de 2π/p.



Veamos el triángulo con vértices x, x' y x''. Como las rotaciones R , R' pueden obtenerse componiendo reflexiones en dos lados del triángulo, los ángulos en los vértices x y x' son π/m y π/n respectivamente.

El ángulo en el vértice x'' es un múltiplo de π/p, ya que es la mitad del ángulo de la rotación $(R'')^{-1}$. Si fuera mas grande que π/p y R''' es la rotación con centro en x'' y ángulo 2π/p, entonces R∘ R''' seria una rotación cuyo centro x''' estaría mas cerca de x que x'.
Asi que los ángulos en x, x' y x'' son π/m, π/n y π/p.



Como los ángulos internos cualquier triángulo suman π, entonces 1/m + 1/n + 1/p = 1

Las soluciones positivas de esta ecuación son:

{m,n,o} = {2,4,4} {3,3,3} {2,3,6}

Asi que los unicos ángulos de rotación posibles son:

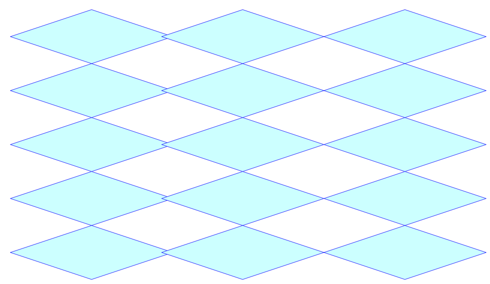
180^{o}, 120^{o}, 90^{o} y 60^{o}, y solo 3 combinaciones de estos angulos son posibles •

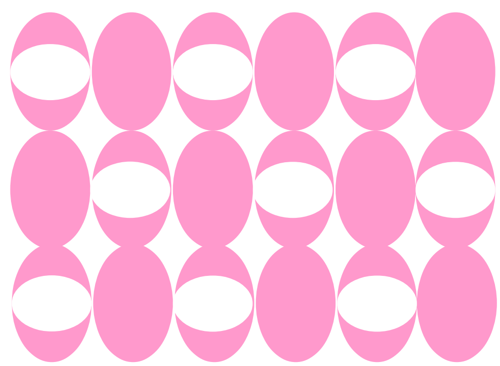
Problemas

4. Dibuja 4 mosaicos periódicos cuyos grupos de simetrias no tengan rotaciones y sean todos distintos.

5. ¿Cuantos grupos de simetrías de latices planas (no isomorfos) hay?

6. Dibuja las latices de traslaciones para 3 puntos distintos en cada mosaico, usando 3 colores distintos para distinguirlos.





7. ¿Cuales de los mosaicos anteriores tendran los mismos grupos de simetrías?

8. ¿Existira un mosaico cuyo grupo de simetrias tenga rotaciones de 90° y rotaciones de 60º?