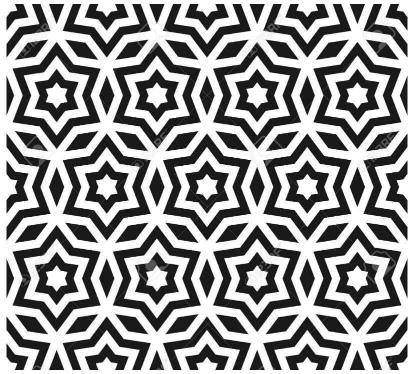
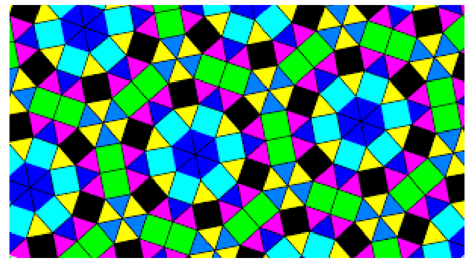
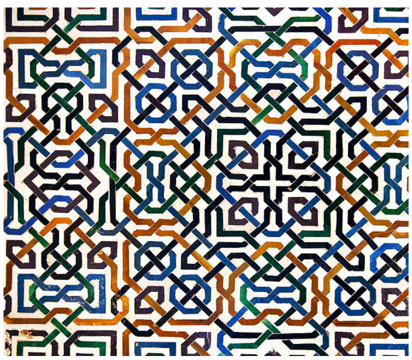
Los grupos de mosaicos.

Aunque podemos construir una infinidad de mosaicos periodicos distintos,
muchos de ellos comparten los mismos grupos de simetrias.

Teorema. Existen exactamente 17 grupos distintos de simetrías de mosaicos planos.

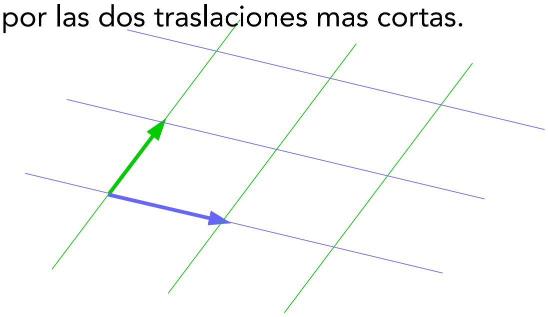
La idea de la demostración es empezar considerando grupos de isometrias que preservan la orientación, ya que son mas sencillos y pueden clasificarse de acuerdo a los ángulos de sus rotaciones.

Si un grupo G contiene isometrias que invierten orientacion, entonces exactamente la mitad de las isometrias de G preservan orientacion, estas isometrias forman un subgrupo G^+ de indice 2 y el grupo G es una *extension* de G^+. Los elementos de G son los elementos de G^+ y los productos de elementos de G^+ por cualquier elemento fijo de G que no este en G^+.

Para obtener G a partir de G^+ hay que ver que isometrias que invierten orientacion se pueden añadir a G^+ sin que se generen nuevas rotaciones. Estas isometrias deben dejar invariantes a los conjuntos los centros de rotacion con un mismo angulo, y deben enviar a cada direccion de traslacion a otra direccion de traslacion por la misma distancia.

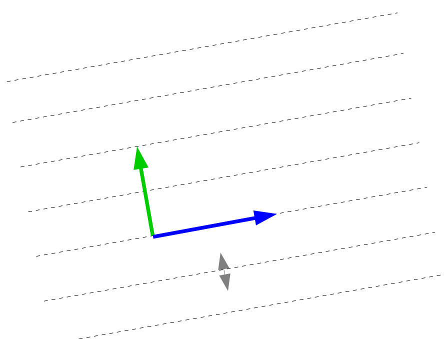
Grupos de isometrias sin rotaciones.

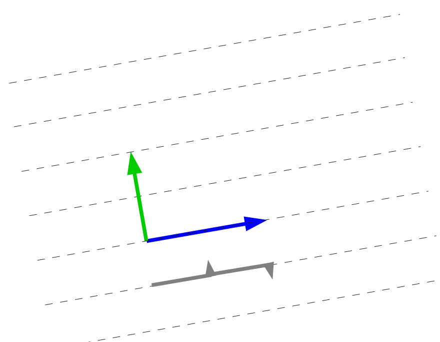
Si el grupo de isometrias G no contiene rotaciones, entonces todas las isometrias en G^+ son traslaciones, asi que G^+ esta generado por las dos traslaciones mas cortas.



Si el grupo G contiene ademas isometrias que invierten orientación, todas deben ser reflexiones y pasos en la misma dirección (ya que la composición de dos reflexiones y/o pasos en distintas direcciones es una rotación).
Al reflejar las direcciones de traslación mas cortas deben ir a direcciones de traslación mas cortas. Esto solo es posible si la latice de traslaciones de cada punto es rectangular y las lineas de reflexion o pasos son paralelas a los lados de los rectangulos, o si la latice es romboidal y las lineas de reflexion o pasos son paralelas a las diagonales de los rombos. Estas lineas estan a la mitad de la distancia de traslacion. La longitud de los pasos es la longitud de traslacion si hay reflexiones o la mitad de la distancia de traslacion, si no las hay. Las posibilidades son:

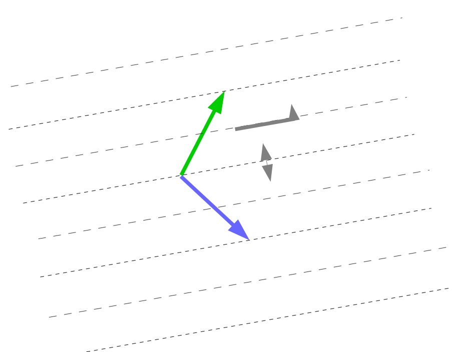
Latice rectangular:





Reflexiones o pasos en lineas a la mitad de la distancia de traslacion minima o a la mitad de la distancia de traslacion perpendicular a la minima

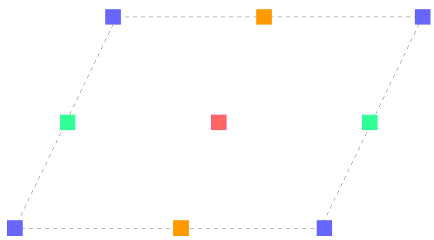
Latice romboidal:

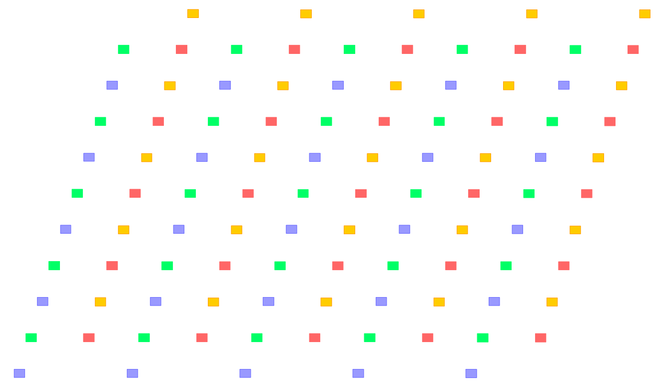


Reflexiones y pasos en lineas alternadas

Grupos de isometrias con rotaciones mínimas de 180°

Si el grupo G tiene una rotación de 180° con centro x, entonces tiene otra rotación de 180° con centro Tx para cada traslación T del grupo, y también tiene una rotación con centro en el punto medio entre x y Tx. No puede haber mas centros de rotación porque habria mas traslaciones. Asi que el grupo G^+ esta generado por dos traslaciones y una rotación.

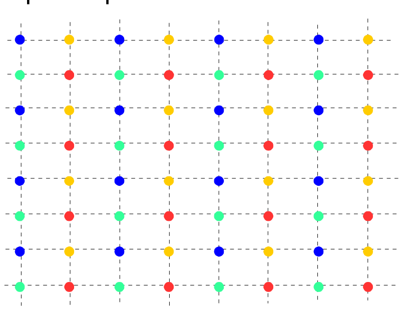




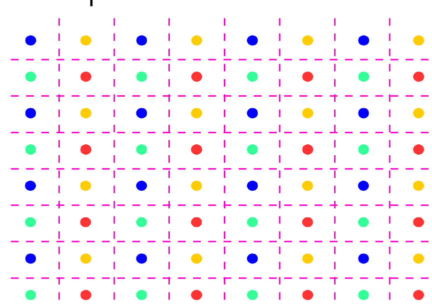
El conjunto de centros de rotación de G es la unión de 4 latices que son invariantes por traslaciones y rotaciones.

Las reflexiones y pasos en G deben mandar centros de rotacion en centros de rotacion, asi que solo pueden existir cuando la latice es rectangular o romboidal, y deben ser en las direcciones de los lados de los rectángulos o de las diagonales de los rombos. Si hay reflexiones o pasos en una recta, tambien debe haberlos en todas las rectas paralelas la mitad de las distancias de traslacion. Y si hay rotaciones de 180° y hay reflexiones o pasos en una dirección entonces también debe haber reflexiones o pasos en la dirección a 90° de esa. Las unicas posibilidades son las siguientes:

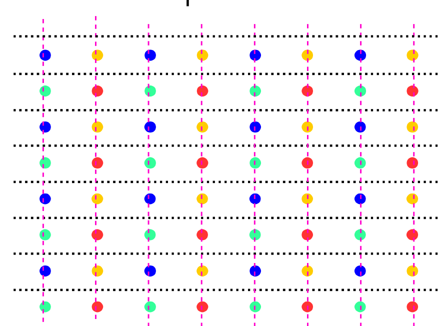
Latice rectangular. Para preservar los centros de rotacion las lineas de reflexiones o pasos deben pasar por los centros de rotacion o sus puntos medios. Las unicas combinaciones posibles son estas:



Reflexiones



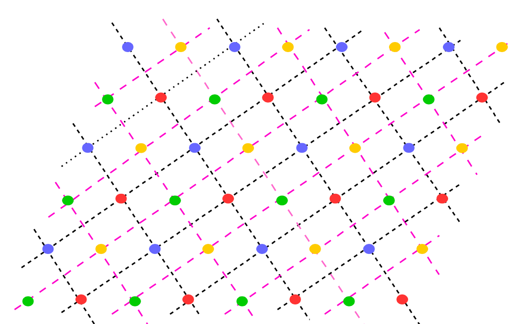
Pasos



Reflexiones y pasos

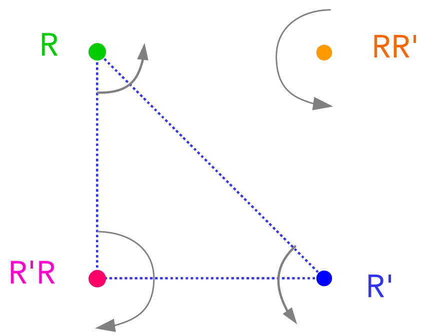
Latice romboidal:

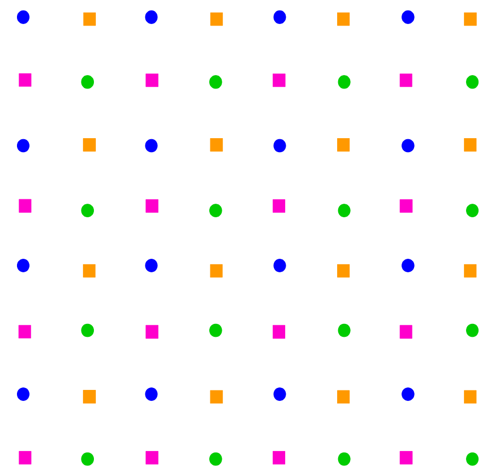
Las lineas de reflexión en las direcciones diagonales deben pasar por los centros de rotación.
La única posibilidad es que haya lineas de reflexion y pasos alternados:



Grupos de isometrias con rotaciones mínimas de 90° y 180°.

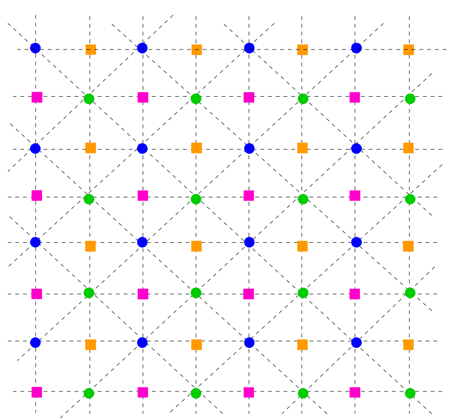
Si R y R´ son rotaciones de 90° entonces R'R y RR' son rotaciones de 180°, y los centros de R, R´ y R´R y RR' forman un cuadrado. Como $R'^{-1}R$, $R^{-2}R''$ y $R'^{-2}R''$ son traslaciones, si R y R' son las rotaciones de de 90° mas cercanas entonces el conjunto de centros de rotaciones debe verse asi:



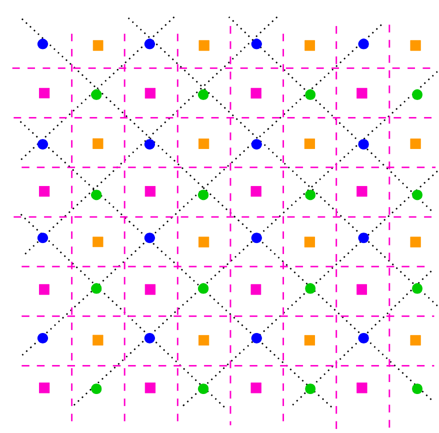


El grupo G^+ de isometrias que preservan orientacion esta generado por dos rotaciones de 90° a distancia mínima.

Si el grupo G contiene isometrias que invierten orientación, estas deben ser reflexiones o pasos en rectas en las direcciones de los lados o de las diagonales de los cuadrados. Esas rectas deben estar a la mitad de la distancia de traslacion en esa direccion. Y como hay rotaciones de 90°, si hay reflexiones o pasos en una dirección, también debe haber reflexiones o pasos en las direcciones a 45° de esas. Como las reflexiones y pasos deben preservar los centros de rotacion de 90° y los de 180°, las únicas posibilidades son las siguientes:



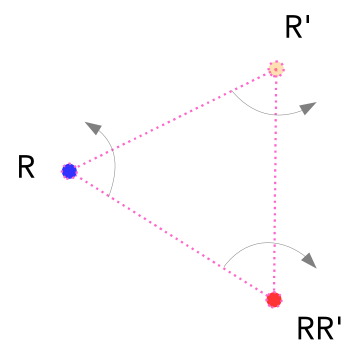
Peflexiones que preservan colores

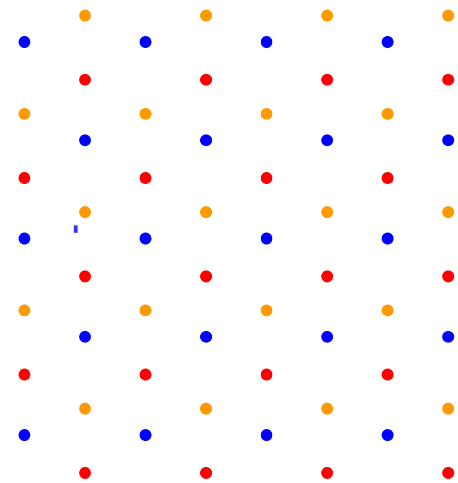


Reflexiones y pasos que intercambian puntos naranjas/rosas y azules/verdes

Grupos de isometrías con rotaciones mínimas de 120°.

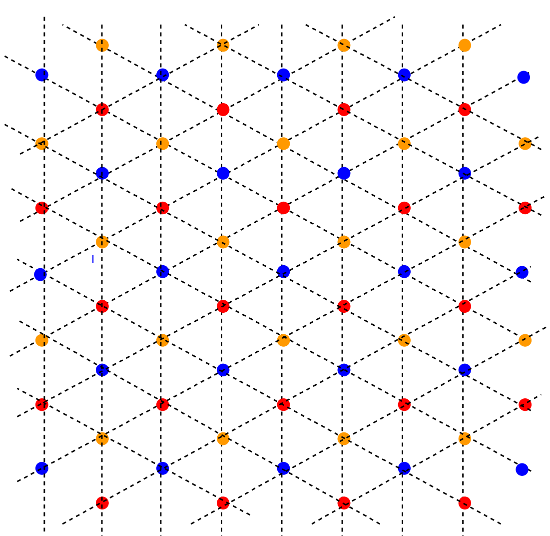
Si el grupo G tiene dos rotaciones R y R' de 120° entonces R''=R'R es una rotación de -120° , y las composiciones $R'^{-1}R$, $R''^{-1}R$ y $R''^{-1}R'$ son traslaciones. Asi que si R y R' son rotaciones de 120° a distancia mínima, el conjunto de centros de rotaciones del mosaico debe verse asi:



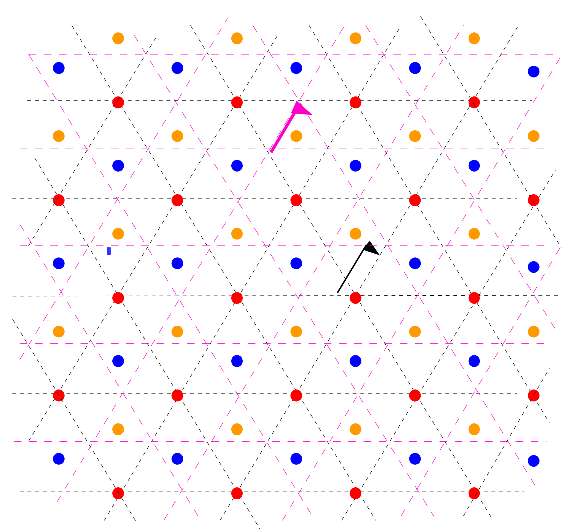


El grupo G^+ esta generado por dos rotaciones de 120° a distancia mínima.

Si el grupo G contiene isometrías que invierten orientación, estas deben ser reflexiones o pasos en las direcciones de los lados o en las direcciones de las diagonales de los triángulos equiláteros (pero no ambas, porque entonces habrían rotaciones de 60°). Las únicas posibilidades son las siguientes:



reflexiones

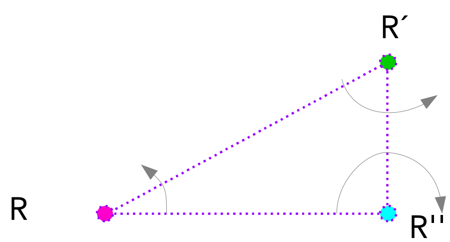


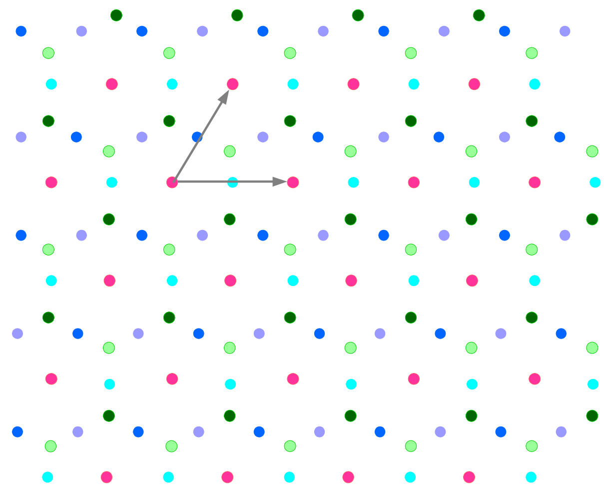
reflexiones y pasos que intercambian puntos amarillos y azules

Las lineas de reflexión deben cruzarse en los centros de rotación Las lineas de los pasos pueden cruzarse en otros puntos. Las lineas paralelas de reflexión y de pasos estan a la mitad de la distancia de traslacion. La longitud de los pasos en las lineas donde no hay reflexion es la mitad de la distancia de traslacion.

Grupos de isometrías con rotaciones mínimas de 60°, 120° y 180°.

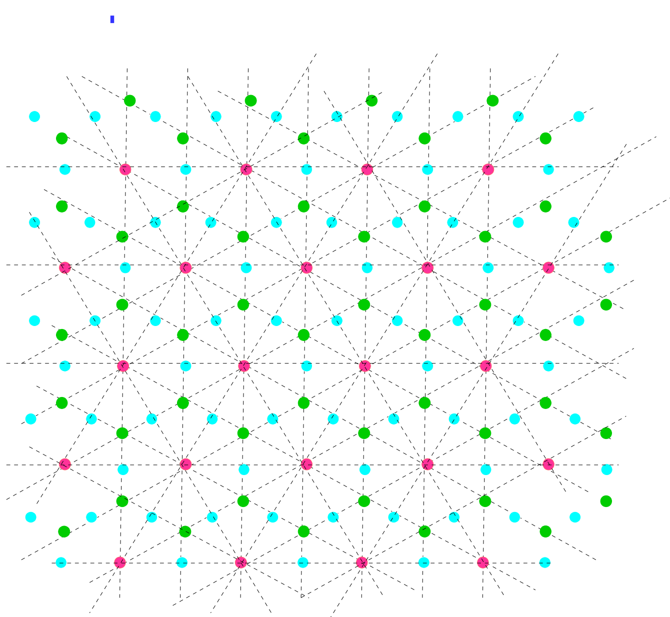
Si el grupo G tiene rotaciones minimas de 60° entonces las otras rotaciones de G son de 120° y 180°. La composición de una rotación R de 60° con una rotación R' de 120° con otro centro es una rotación R'' de 180° y los centros de rotación forman un triángulo rectangulo. Las composiciones $R'^{-1}R^2$ y $R^2R'^{-1}$ son traslaciones. Si R y R' son las rotaciones de 120° y 60° mas cercana, el conjunto de centros de rotación del mosaico debe verse asi:





El grupo G^+ esta generado por dos rotaciones de 120° y 60° a distancia mínima.

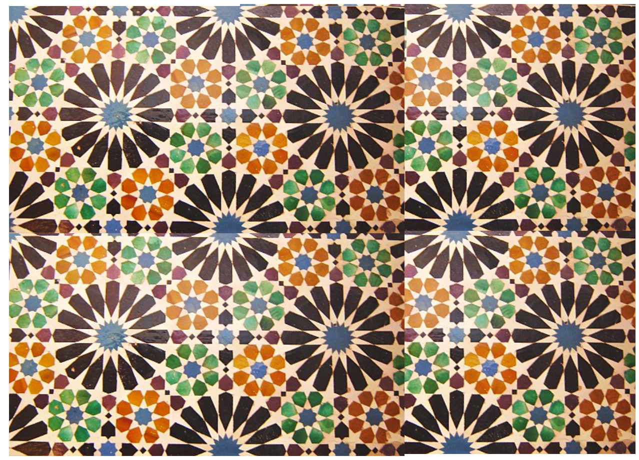
Si el grupo G contiene ademas isometrías que invierten orientación, estas deben ser reflexiones o pasos en las direcciones de los lados o de las diagonales de los hexágonos, y las lineas de reflexión deben pasar por los centros de rotación de 60°. Las única posibilidad es la siguiente:



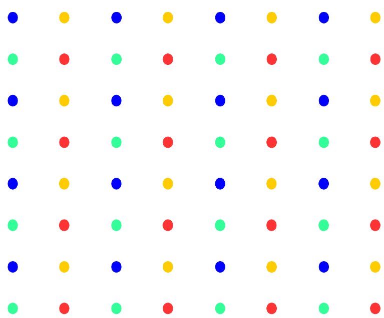
reflexiones

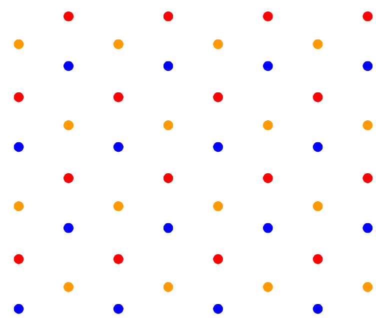
Problemas

1. Haz un dibujo de los centros de rotación, lineas de reflexión y pasos de este mosaico.



2. Muestra que el subgrupo de rotaciones y traslaciones del mosaico de la derecha esta generado por una rotacion y una traslacion, pero el de la izquierda no.





3. Dibuja 5 mosaicos cuyos grupos de simetrias sean distintos y consistan unicamente de traslaciones y/o rotaciones.

4. Encuentra un mosaico cuyo grupo de simetrías este generado por dos pasos en direcciones ortogonales. ¿Que otras simetrías contiene el grupo?

5. Demuestra que si un mosaico tiene todos sus centros de rotación en lineas de reflexión y otro mosaico tiene algunos centros de rotación fuera de esas lineas, los grupos de simetrías de los mosaicos no son isomorfos (ojo: se trata de hallar una diferencia *algebraica* entre los grupos).

6. Dibuja 3 mosaicos *cuyos grupos de simetrias sean distintos* y tengan rotaciones de 90° y 180°.

7. A cuales de los 17 grupos de simetrias descritos antes corresponden estos mosaicos?