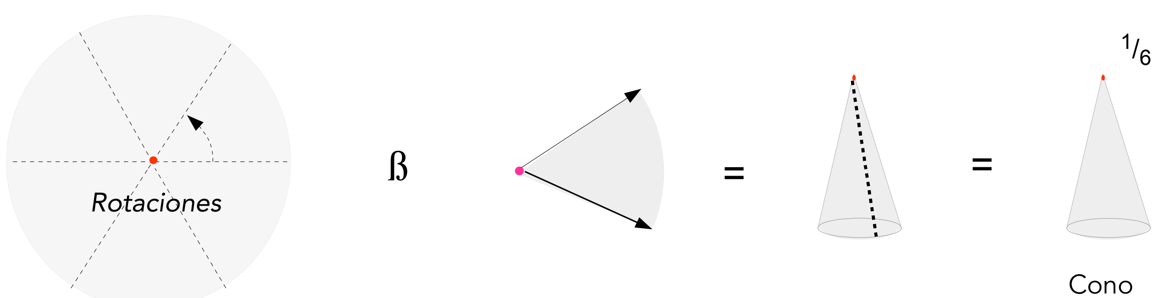
Superficies de órbitas

Dado un grupo discreto G de isometrías del plano, podemos considerar las clases de equivalencia de puntos en el plano dadas por x~x' si x' = gx para algun elemento g de G. La clase de equivalencia de un punto x es la ***órbita*** de x bajo la acción del grupo.

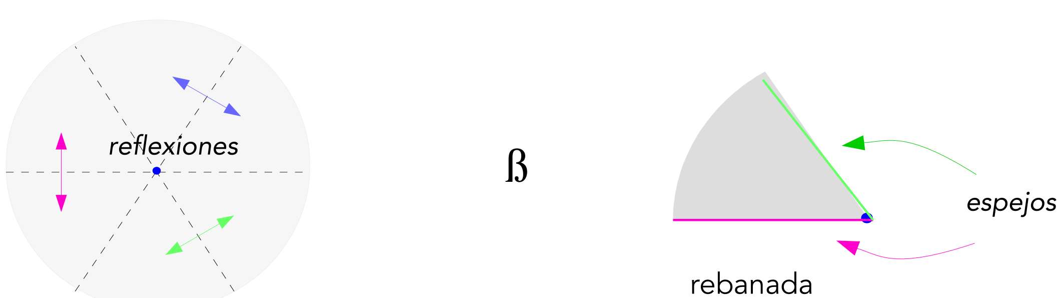
La superficie de órbitas (también llamada orbiedad o orbifold) es el cociente R^2/G que se obtiene de R^2 al identificar a cada órbita con un punto.

Ejemplos.

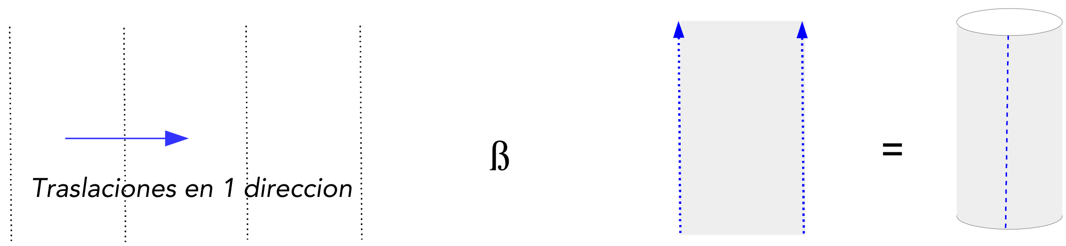
1. Si G es el grupo generado por la rotación de 60° alrededor del origen. entonces R^2/G es un cono, que se obtiene tomando una rebanada de 60° del plano, e identificando sus orillas.



2. Si G es el grupo generado por las reflexiones en estas 3 rectas por el origen, entonces R^2/G es una rebanada con ***espejos*** en los bordes.

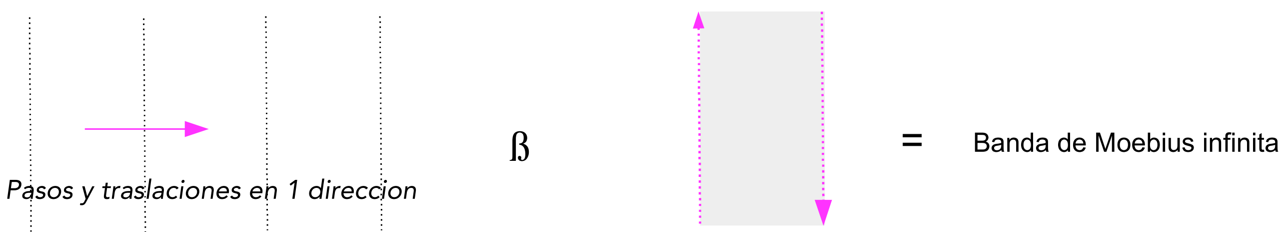


3. Si G es el grupo generado por una traslación horizontal, entonces R^2/G es es un cilindro infinito:

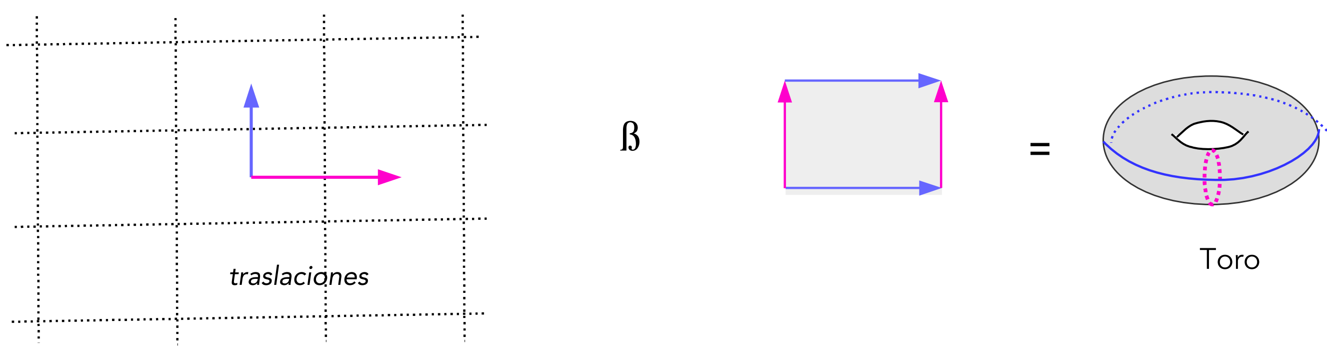


Cilindro infinito

4. Si G es el grupo generado por un paso horizontal, entonces R^2/G es una banda de Moebius infinita:

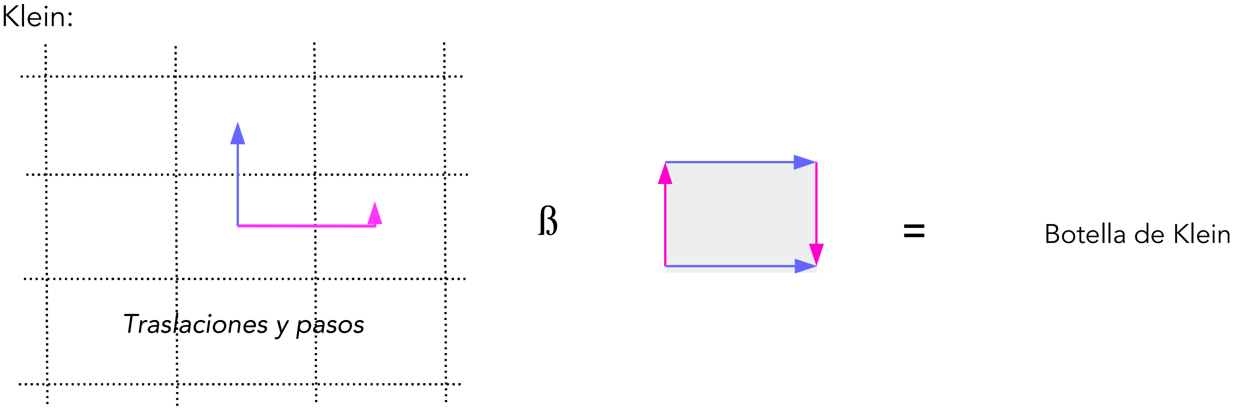


5. Si G es el grupo generado por un traslación vertical y una traslación horizontal, entonces R^2/G es un toro:

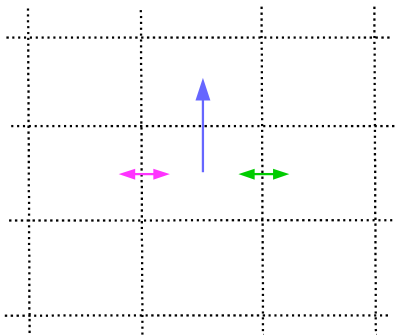


Toro

6. Si G es el grupo generado por una traslación vertical y un paso horizontal, R2/G es una botella de Klein:

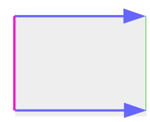


7. Si G es el grupo generado por una traslación vertical y 2 reflexiones en rectas verticales, R^2/G es un cilindro con espejos:

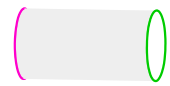


(Traslaciones, reflexiones y pasos)

ß

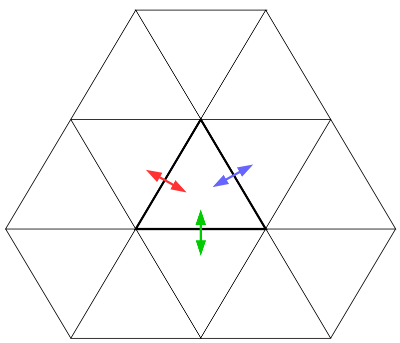


=

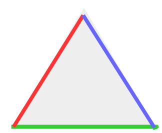


Cilindro con espejos

8. El grupo G de isometrias generado por las reflexiones en los lados de un triángulos equilátero contiene traslaciones, reflexiones y rotaciones de 120°. R^2/G es un triángulo equilátero con espejos:

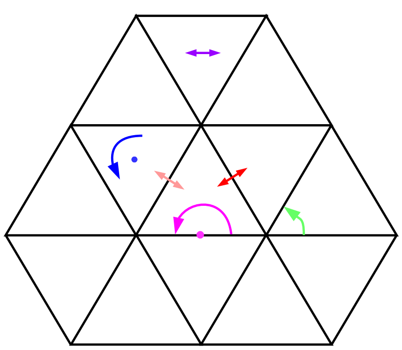


ß

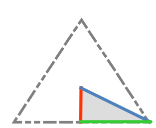


Triangulo equilatero con espejos

9. El grupo G de simetrías del mosaico de triángulos equiláteros, tiene rotaciones de 120° en los centros de los triángulos, de 60° en los vértices y de 180° en los lados de los triángulos, ademas de reflexiones en los lados de los triángulos y en sus bisectrices R^2/G es un triángulo rectangulo con espejos:

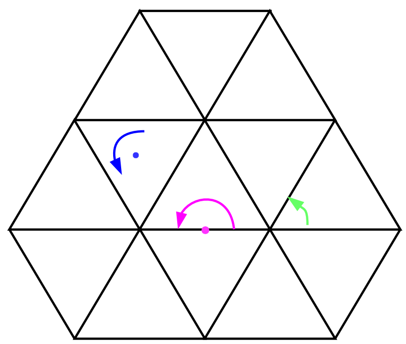


ß

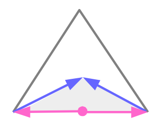


Triangulo rectangulo con espejos

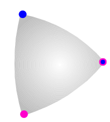
9. Si G^+es el subgrupo de simetrías del mosaico de triángulos equiláteros que preservan la orientación, G^+ tiene rotaciones de 120° en los centros de los triángulos, de 60° en los vértices y de 180° en los lados de los triángulos ademas de traslaciones. R^2/G^+ es una esfera con 3 picos:



ß

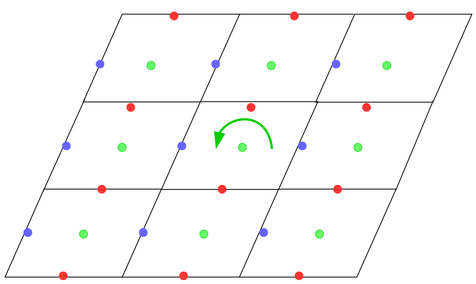


=



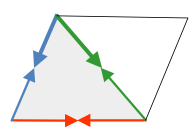
Esfera con 3 picos

10. Si G es el grupo generado por 2 traslaciones y una rotación de 180°. entonces es una esfera con 4 picos (como una almohada):

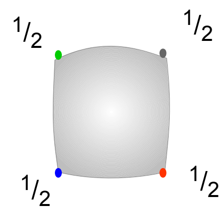


(Traslaciones y rotaciones de 180°)

ß



≈



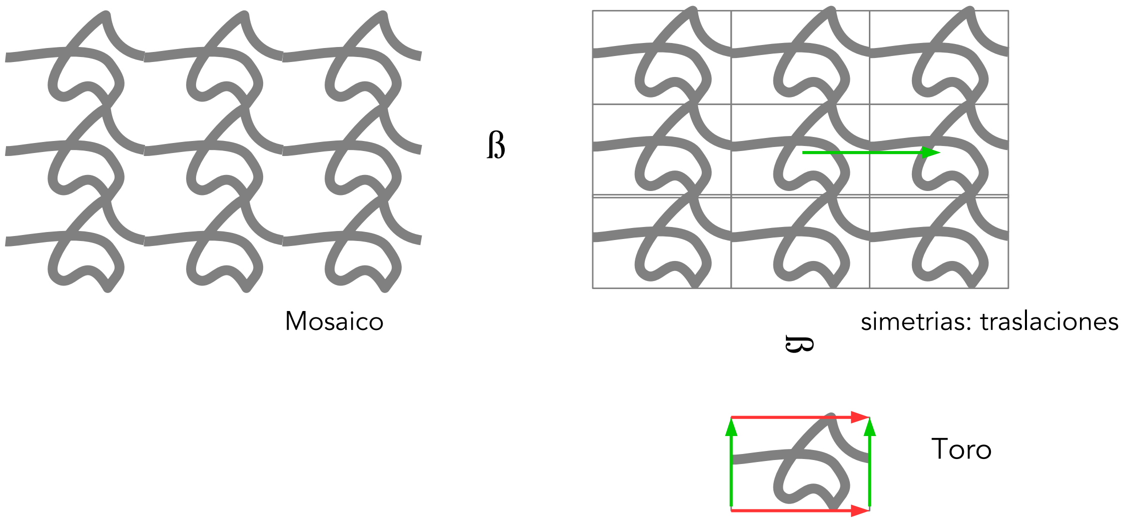
Esfera con 4 picos

Mosaicos y orbiedades.

A cada mosaico M le podemos asociar la orbiedad O correspondiente a su grupo de simetrías O se obtiene enrollando y doblando el plano para que todos los puntos del plano correspondientes bajo las simetrías de M se encimen en un solo punto de la orbiedad.

Ejemplo:

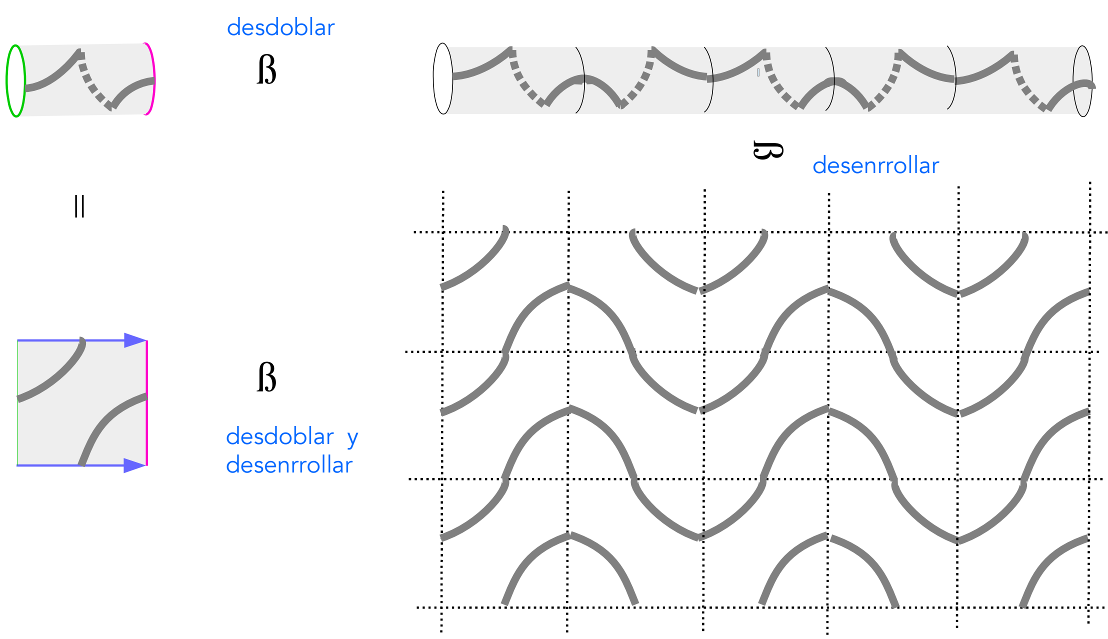
1.



Recíprocamente, para cada orbiedad O podemos construir muchos mosaicos cuyos grupos de simetrías den la orbiedad, empezando con cualquier dibujo asimétrico en O, y desdoblando (reflejando) y desenrollando a O hasta obtener el plano.

Ejemplo:

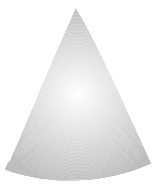
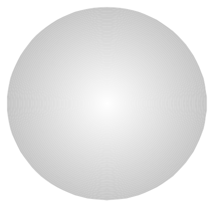
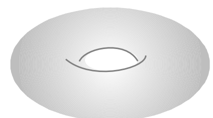
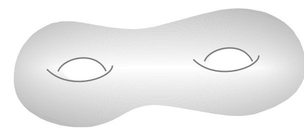
1. Cilindro con espejos



Superficies y orbiedades

Las **superficies** son objetos geométricos bidimensionales, que se ven *localmente* como el plano, posiblemente deformado.

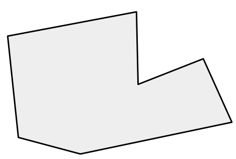
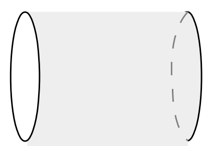
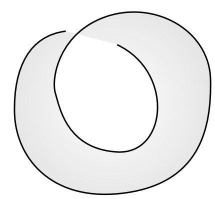
Ejemplos:

Cono infinito Esfera Toro Doble toro

Las **superficies con borde** se ven *localmente* como un plano o un semiplano, quizás deformados.

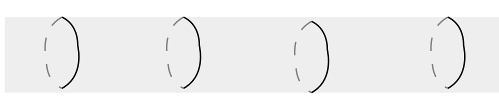
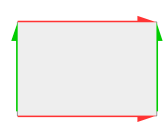
Ejemplos:

Polígono Anillo Banda de Moebius

Las **superficies planas** son superficies que son localmente *idénticas* al plano (sin deformarse).

Ejemplos.

Tubo infinito Toro (pegando los lados opuestos de un rectángulos)

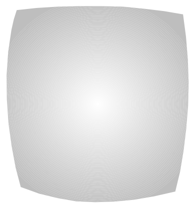
También podemos hablar de superficies con borde planas, que son las superficies con borde que son localmente idénticas a un plano o un semiplano.

Ejemplo:

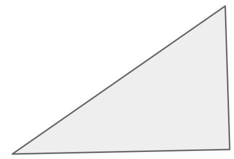
Banda de Moebius

Existen superficies y superficies con borde que son planas casi en todos lados, con excepción de algunos puntos donde se ven como los vértices de conos o esquinas de rebanadas del plano.

Ejemplos:



Esfera con 4 puntos conicos



Triángulo

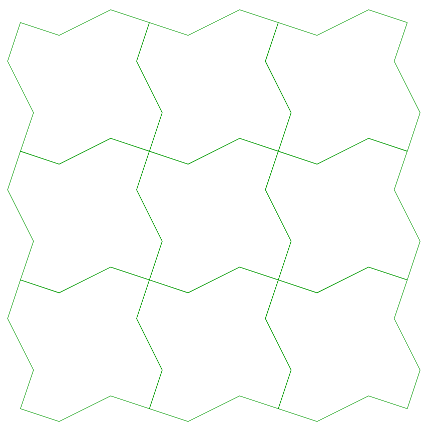
Las orbiedades que se obtienen de los mosaicos son superficies son asi: los puntos raros corresponden a centros de rotación o a los puntos donde que cruzan lineas de reflexión Por eso se les llama a veces *orbiedades planas*.

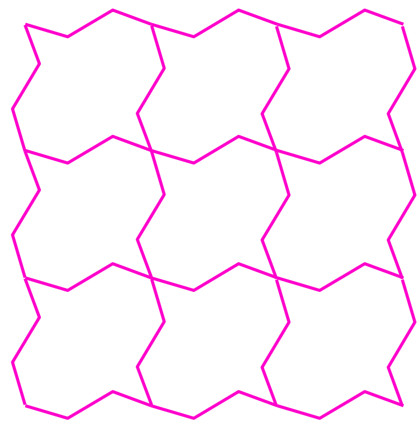
Cada grupo discreto de isometrias del plano determina una orbiedad plana, y puede demostrarse que cada orbiedad plana con ángulos cónicos de la forma $^{2\pi}/_{m}$ y ángulos en las esquinas de la forma $^{\pi}/_{m}$ determina un grupo discreto de isometrias del plano, asi que el teorema de clasificación de grupos de mosaicos equivale al siguiente:

Teorema. Existen exactamente 17 orbiedades planas (con ángulos cónicos de la forma $^{2\pi}/_{m}$ y ángulos en las esquinas de la forma $^{\pi}/_{m}$).

Problemas

1. Encuentra las orbiedades correspondientes a los grupos de simetrías de estos mosaicos.



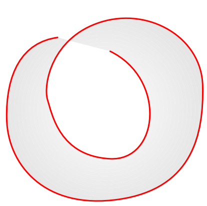


2. ¿Existe un grupo G de isometrias del plano tal que la superficie de órbitas R^2/G sea una banda de Moebius con espejo?

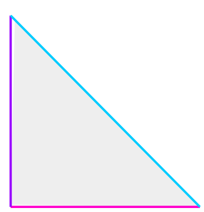
3. Encuentra las 5 orbiedades que se obtienen de los 5 grupos de mosaicos que preservan orientación

4. Construye con papel una esfera con 4 puntos cónicos de orden 2, y una esfera con 3 puntos cónicos de orden 3 (empieza con triángulos planos e identifica sus lados)

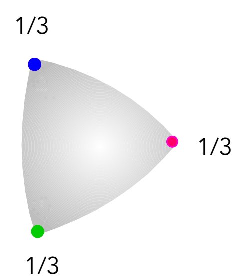
5. ¿Puedes dibujar mosaicos que vengan de estas 3 orbiedades?



Banda de Moebius con espejo



Triángulo rectangulo isósceles



Esfera con 3 puntos conicos

6. Como son las 17 orbiedades planas?