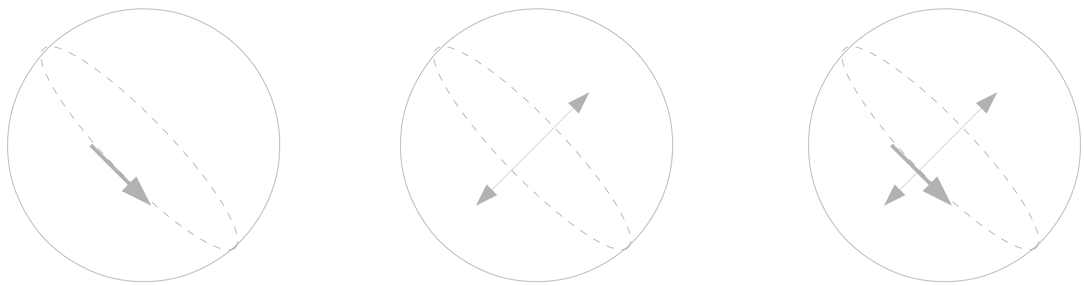
isometrías de la esfera.

Son las transformaciones de la esfera que preservan distancias, y por lo tanto preservan lineas esféricas y ángulos

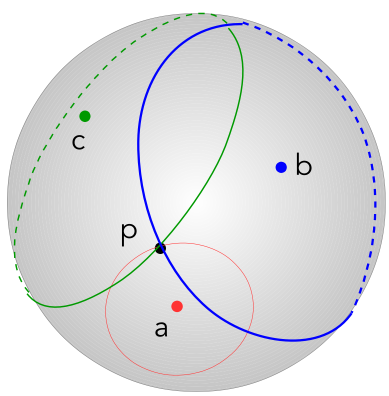
Ejemplos:



Rotación Reflexión Reflexión con giro

Lema 1. Las isometrías de la esfera estan determinadas por las imágenes de cualesquiera 3 puntos no colineales.

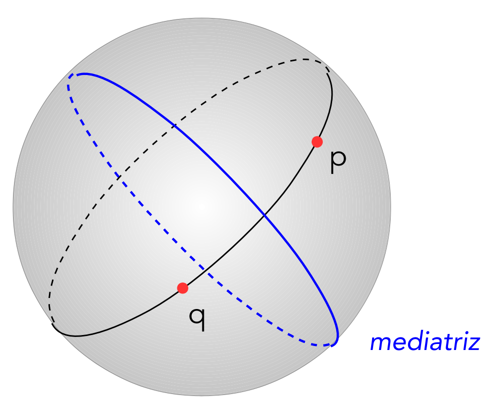
Demostración La posición de un punto p en la esfera queda determinada por sus distancias a cualesquiera 3 puntos a, b y c no colineales de S^2 (p es en la intersección de 3 círculos centrados en esos puntos).



Asi que si I una isometría de la esfera, el punto Ip esta determinado por las distancias de Ip a Ia,Ib y Ic, que son iguales a las distancias del punto p a los puntos a, b y c. ◙

La mediatriz de 2 puntos de la esfera es la linea esférica formada por los puntos que equidistan de p y q. Es la perpendicular a la linea esférica que pasa por p y q.

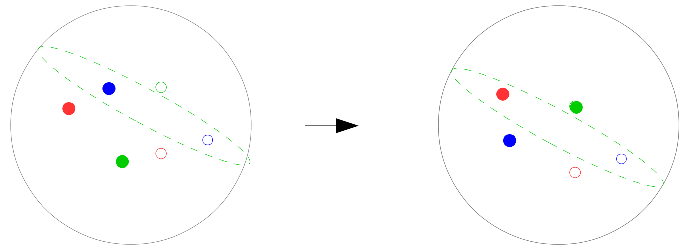
Observar que la reflexión en la mediatriz de p y q intercambia p con q.



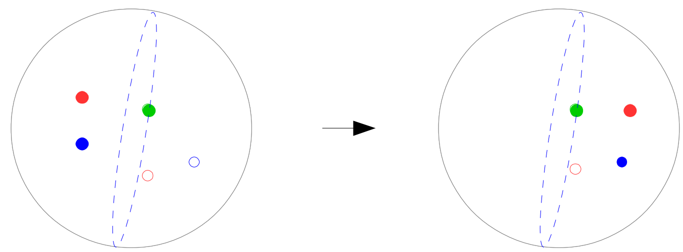
Lema 2. Cada isometría de la esfera es composición de a lo mas 3 reflexiones

Demostración. Por el lema 1, basta ver que podemos llevar cada tercia de puntos a,b,c de la esfera a otra tercia de puntos a',b',c' que estén a las mismas distancias usando a lo mas 3 reflexiones:

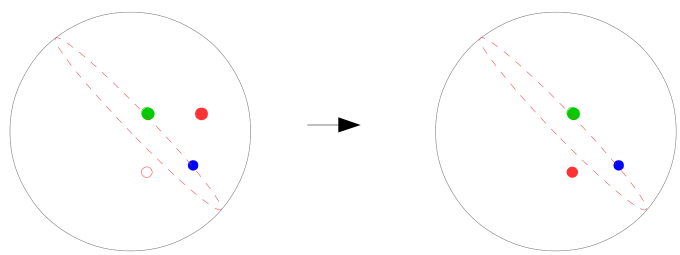
Sea $\square_1$ la reflexión en la mediatriz m_1 de a y a'. Entonces $\square_1$a=a'.



Sea $\square_2$ la reflexión en la mediatriz de $\square_1$b y b'. Entonces $\square_2\square_1$b=b' y $\square_2$ no mueve a' ya que $\square_1$a=a' esta a la misma distancia de $\square_1$b y b', asi que a' esta en su mediatriz.



Sea $\square_3$ la reflexión en la mediatriz de $\square_2\square_1$c y c'. Entonces $\square_3\square_2\square_1$c=c'. $\square_3$ no mueve b' ya que $\square_2\square_1$b=b' esta a la misma distancia de $\square_2\square_1$c y c', asi que a' esta en su mediatriz. Y $\square_3$ no mueve a' ya que $\square_2\square_1$a=a' esta a la misma distancia de $\square_2\square_1$c y c', asi que a' esta en su mediatriz.

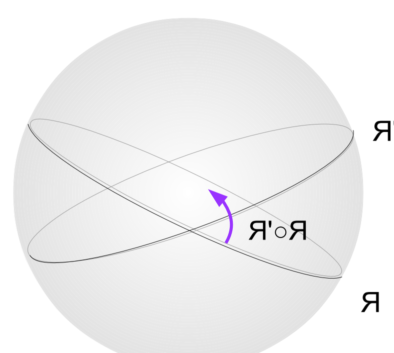


Por lo tanto $\square_3\square_2\square_1$ mueve a los puntos a, b y c a los puntos a', b' y c' respectivamente. ∎

Lema 3. La composición de dos reflexiones en S^2 es una rotación. La composición de dos rotaciones de S^2 es una rotación

Demostración.

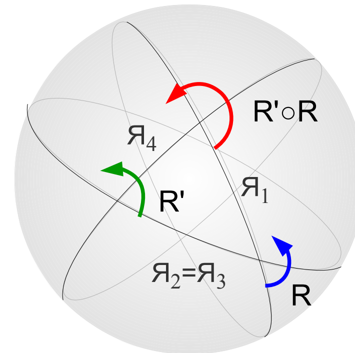
1. Si **Я** y **Я'** son las reflexiones en dos planos en R^3, la composición de **Я** y **Я'** es una rotación del espacio alrededor de la linea de intersección L de los planos, por el doble del ángulo entre los planos.



Observar que si giramos ambos planos alrededor de L, su composición no cambia.

2. Si R y R' son las rotaciones en 2 rectas, entonces R es la composición de dos reflexiones Я_1 y Я_2 y R' es la composición de dos reflexiones Я_3 y Я_4. Podemos girar los planos de reflexión de modo que el segundo plano de R coincida con el primer plano de R', de modo que $\text{Я}_2=\text{Я}_3$ asi que R'R= $\text{Я}_4\,\text{Я}_3\,\text{Я}_2\,\text{Я}_1 = \text{Я}_4\text{Я}_1$ que por la parte 1 es una rotación

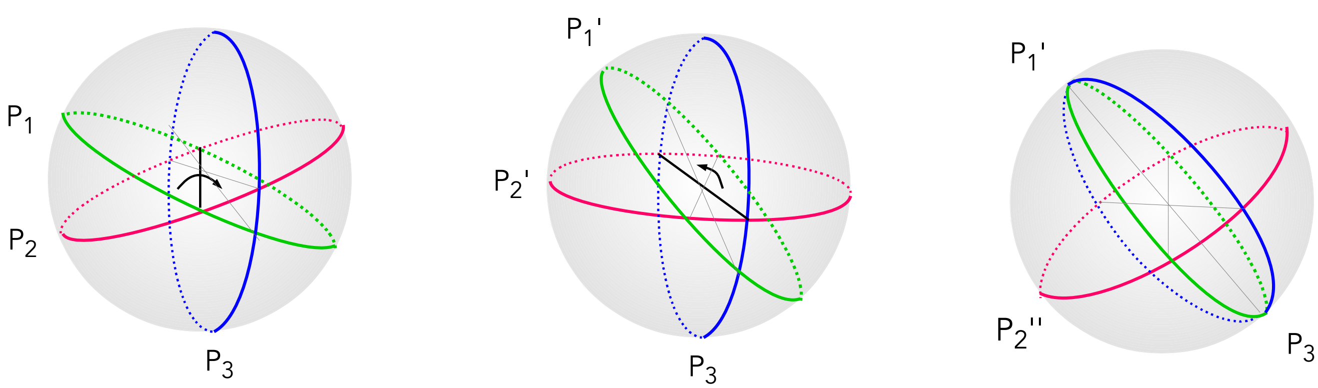
◙



Teorema 4. Las isometrías de la esfera son las rotaciones, reflexiones y reflexiones con giro.

Demostración. Basta ver que la composición de 3 reflexiones en lineas no concurrentes es una reflexión con giro. Estas corresponden a reflexiones en 3 planos por el origen P_1, P_2 y P_3.

Observar que si rotamos dos planos alrededor de su recta de intersección el resultado de la composición de sus reflexiones no cambia.



Primero podemos rotar los dos primeros planos alrededor de su linea de interseccion para hacer que el segundo sea perpendicular al tercero.

Luego podemos rotar el segundo y tercer planos alrededor de su linea de interseccion para hacer que el tercero sea perpendicular al primero (y siga siendo perpendicularal segundo).

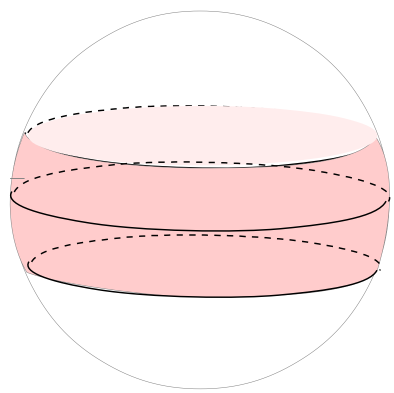
Asi que la composición de las reflexiones en los planos P_1, P_2 y P_3. Equivale a la composición de las reflexiones en los planos P_1', P_2'' y P_3' donde los dos últimos son perpendiculares al primero. Esta es una reflexión con rotación en P_1'. ◙

Grupos discretos de isometrías de la esfera.

Es natural preguntarse como son los grupos de simetrías de figuras en la esfera, si serán como en el plano o no.

El Teorema de Leonardo, que dice que todo grupo finito de simetrías del plano deja un punto fijo, implica que los únicos grupos discretos de simetrías de figuras acotadas del plano son los grupos cíclicos Z_n y los grupos diedricos D_n.

Todos los grupos discretos de isometrías de la esfera son finitos, pero el teorema de Leonardo no vale ahí: hay grupos finitos de simetrías en la esfera que no dejen ningún punto fijo. Por ejemplo, un anillo alrededor del ecuador tiene simetrías que intercambian sus orillas, como (el mapeo antípoda:



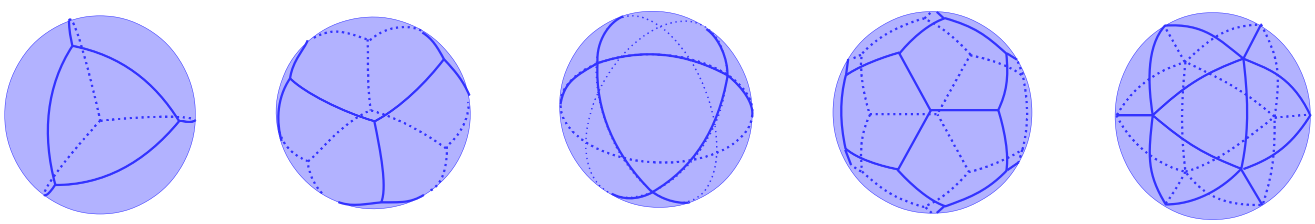
El grupo de simetrias de este anillo en la esfera no es isomorfo al grupo de simetrias de ninguna figura plana.

Como en el caso del plano, podemos dividir a los grupos discretos de isometría de la esfera en 3 clases: los grupos que dejan algun punto fijo, los que dejan invariante a alguna linea esférica pero no fijan ningún punto y los que no dejan fijo ningún punto ni dejan invariante a ninguna linea esférica

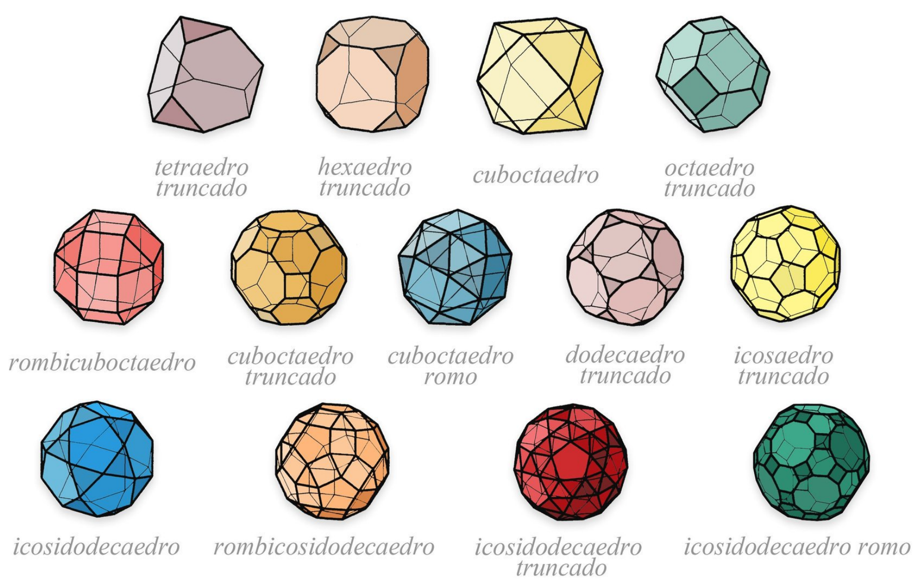
Los primeros corresponden a figuras esféricas pequeñas (contenidas en algun hemisferio), los segundos corresponden a “frisos esféricos” y los últimos a los mosaicos esféricos

Los mosaicos esféricos son figuras en la esfera cuyos grupos de simetrías no fijan ningún punto ni dejan invariante ninguna linea.

Ejemplo 1. Si proyectamos los 5 sólidos platónicos hacia esferas concéntricas, obtenemos mosaicos en la esfera formados por triángulos, cuadrados o pentágonos esféricos



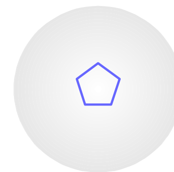
Ejemplo 2. Si proyectamos los 13 sólidos arquimedianos obtenemos mosaicos formados por combinaciones de triángulos, cuadrados, pentágonos, hexágonos u octágonos esféricos.



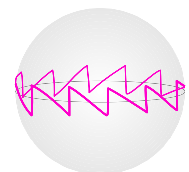
El siguiente teorema clasifica a todos los grupos discretos de simetrías en la esfera.

Teorema 5. Los grupos discretos de isometrías de la esfera son

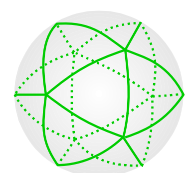
- Los grupos de simetrías de figuras pequeñas.
  Son 2 familias infinitas, correspondientes a los grupos de simetrías de figuras planas.



- Los grupos de frisos esféricos
  Son 7 familias infinitas, correspondientes a los 7 grupos de frisos del plano (incluyendo las 2 familias que si fijan puntos en la esfera).



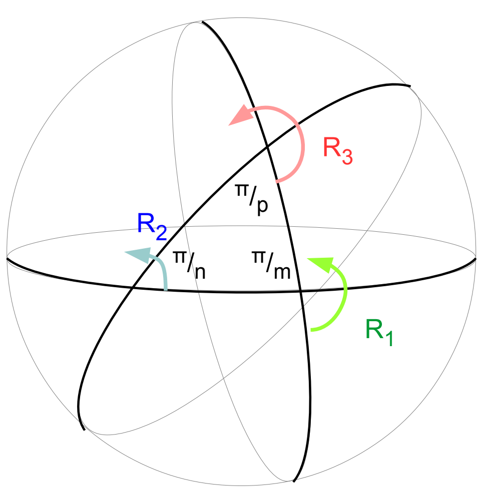
- Los grupos de mosaicos esféricos
  Son 7 grupos: los 3 grupos de simetrías de los sólidos platónicos, sus 3 subgrupos de rotaciones, y una extensión del grupo de rotaciones del tetraedro.



Demostración. Considerar primero los grupos que preservan orientación, que consisten únicamente de rotaciones. Las rotaciones deben ser por ángulos de la forma $2\pi(p/q)$ ya que deben tener orden finito, y si hay rotaciones de orden q, estan generadas por una rotación de ángulo $2\pi/q$.

Si hay un solo eje de rotación el grupo es cíclico, y puede tener cualquier orden. Si hay dos ejes de rotación distintos, al rotar uno de ellos alrededor del otro obtenemos mas centros de rotación.

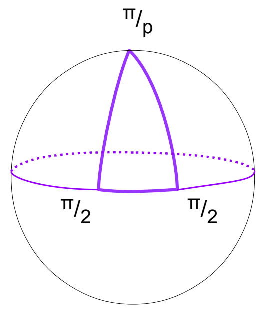
Sea R_1 una rotación de ángulo $^{2\pi}/_m$ y eje L. Sea R_2 otra rotación con eje L' mas cercano a L, sea $^{2\pi}/_n$ su ángulo de rotación. Entonces $R_3=R_2$▯ $_1$Rdebe ser otra rotación con ángulo de la forma $2\pi(^p/_q)$. Los ejes de R_1, R_2 y R_3 pasan por los vértices de un triángulo esférico Δ cuyos ángulos son π/m, π/n y $\pi p/q$. Entonces $p=1$, porque si $p>1$ habria una rotación R_4 con ángulo menor que R_3 con ese mismo eje, y entonces R_4▯ $_1$Rseria otra rotación cuyo eje estaría mas cerca del eje de R_1 que R_3.



Por el teorema de Girard los angulos del triangulo Δ safisfacen
$^{\pi}/_m + {}^{\pi}/_n + {}^{\pi}/_p = \pi + \text{area } \Delta > \pi$
Como m, n, p son enteros mayores que 1, si $m \leq n \leq p$ las unicas posibilidades son

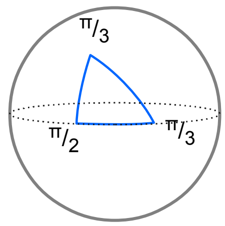
m	n	p	area Δ
2	2	p	$^{\pi}/_p$
2	3	3	$^{\pi}/_6$
2	3	4	$^{\pi}/_{12}$
2	3	5	$^{\pi}/_{30}$

Sea $\Delta(m,n,p)$ el triángulo esférico con ángulos ${}^{\pi}/_{m}$,${}^{\pi}/_{n}$ y ${}^{\pi}/_{p}$. El primer caso corresponde al triángulo $\Delta(2,2,p)$, formado por 2 meridianos y un ecuador de la esfera. Si reflejamos este triángulo en sus lados obtenemos el friso formado por 2n meridianos y el ecuador de la esfera:

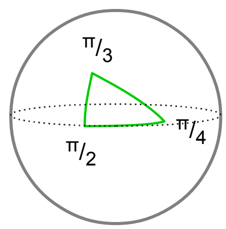


$\Delta(2,2,p)$

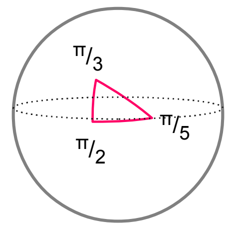
Los otros 3 casos corresponden a estos triángulos esféricos:



$\Delta(2,3,3)$

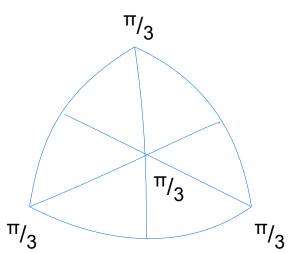


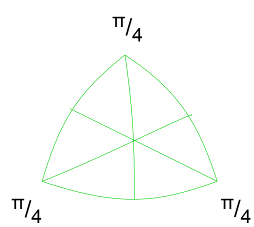
$\Delta(2,3,4)$

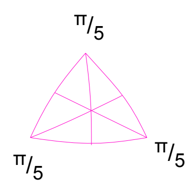


$\Delta(2,3,5)$

Al reflejar un triángulo $\Delta(2,3,n)$ con n=3,4,5 en los lados adyacentes al vértice de ángulo ${}^{\pi}/_{3}$ se obtiene un triángulo $\Delta(n,n,n)$ formado por 6 copias del triángulo $\Delta(2,3,n)$:

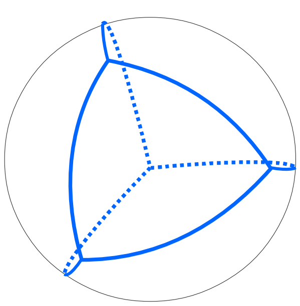


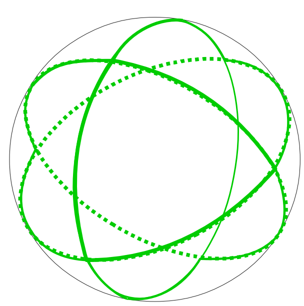


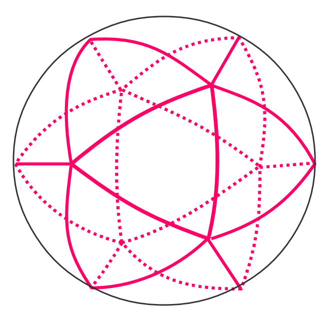


Al reflejar repetidamente el triángulo $\Delta(n,n,n)$ con n=3,4,5 en sus 3 lados se obtiene una teselacion de la esfera formada por 4, 8 y 20 de esos triángulos.

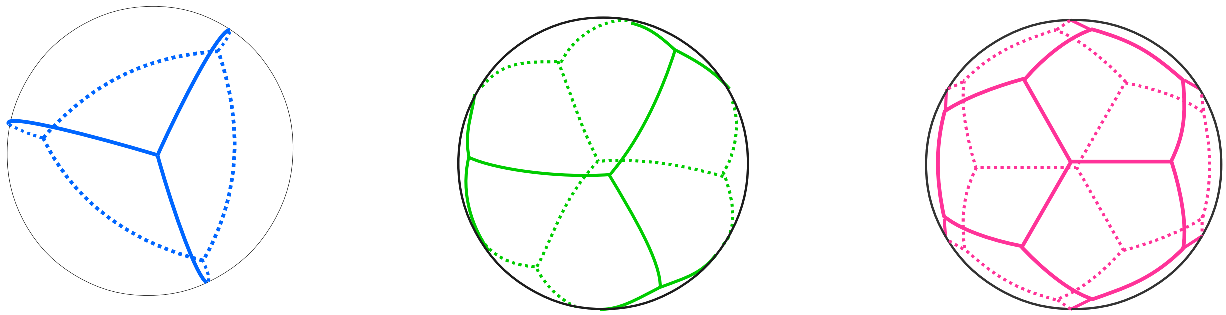
Los vértices de los triángulos $\Delta(3,3,3)$ forman un tetraedro, los vértices de los triángulos $\Delta(4,4,4)$ forman un octaedro y los vértices de los triángulos $\Delta(5,5,5)$ forman un icosaedro.



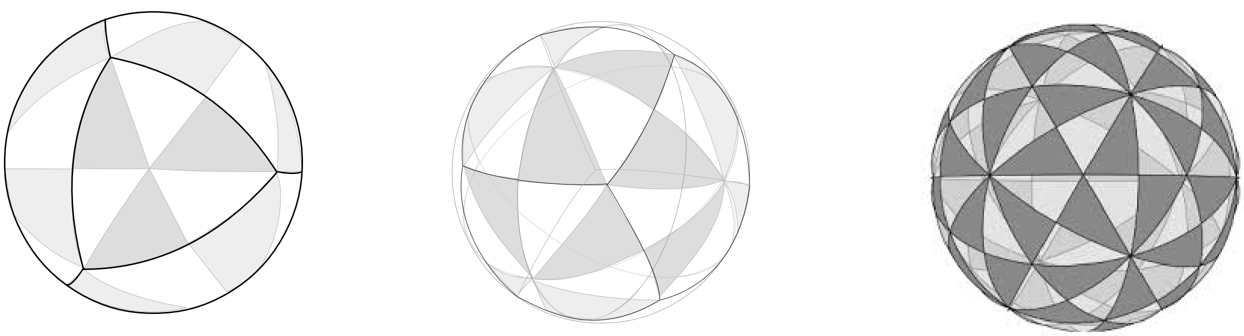




Los centros de los triángulos Δ(4,4,4) son los vértices de un tetraedro, los centros de los triángulos Δ(4,4,4) son los vértices de un cubo y los centros de los Δ(5,5,5) son los vértices de un dodecaedro.



En todos estos casos las simetrías de los mosaicos formados por los triángulos grandes Δ(n,n,n) dejan invariantes a los triángulos pequeños Δ(2,3,n). Y en los casos Δ(2,3,4) y Δ(2,3,5), las simetrías de los triángulos chicos deben dejar invariantes a los triángulos grandes (ya que los vértices de los triángulos grandes son los centros de rotaciones de orden 4 y 5 respectivamente). Por lo tanto los grupos de simetrías de los mosaicos grandes y los chicos son iguales y sus subgrupos de rotaciones también son iguales. En particular, el grupo de simetrías del cubo es isomorfo al grupo de simetrías del octaedro, y el grupo de simetrías del dodecaedro es isomorfo al del icosaedro.



Pero en el caso Δ(2,3,3) hay simetrías que dejan invariantes a los triángulos chicos pero no a los triángulos grandes Δ(2,3,3): los centros de rotaciones de orden 4 estan en los vértices y también en los centros de los triángulos grandes, y hay simetrías mandan los vértices de triángulos grandes a los centros. El grupo de simetrías del mosaico de triángulos chicos es la extensión del grupo de simetrías del mosaico de triángulos grandes por el mapeo antípoda de la esfera.

Ya sabemos como son todos los posibles grupos discretos de rotaciones en la esfera. Los mosaicos de triángulos coloreados como tableros de ajedrez tienen precisamente estos grupos de simetrías (las simetrías que invierten la orientación cambian el color de los mosaicos).

Para ver como son los grupos discretos que contienen isometrias que invierten orientación, observamos que cada grupo G contiene un subgrupo G^+ de indice 2 formado por rotaciones, por lo que G^+ es uno de los anteriores. Falta ver que reflexiones o reflexiones con giro podemos añadirle a G^+ sin que se generen mas rotaciones. Para esto las reflexiones o reflexiones con giro deben dejar invariantes los centros de rotación con el mismo ángulo

En el caso $\Delta(2,2,p)$, como los 2 centros de rotación de orden p en los polos, las reflexiones solo pueden ser en meridianos y en el ecuador. Y las reflexiones con giro deben dejar el ecuador invariante, asi que podemos tratar este caso como hicimos con los frisos en el plano.

En los casos $\Delta(2,3,4)$ y $\Delta(2,3,5)$ los centros de rotación de orden mayor a 3 estan en los vértices de los triángulos grandes, asi que las reflexiones y reflexiones con giro deben dejar a estos triángulos invariantes, por lo que corresponden a reflexiones y reflexiones con giro del tetraedro, el octaedro y el icosaedro. En el caso $\Delta(2,3,3)$ las reflexiones y reflexiones con giro pueden enviar vertices de triángulos grandes a centros de triángulos grandes. Y si hay una isometría asi en el grupo entonces el mapeo antípoda es una isometría del grupo/ ◙

Problemas.

1. La funcion de S^2 en S^2 que manda cada punto a su antípoda es una isometría de S^2. ¿Se trata de una rotación, una reflexión o una reflexión con giro?

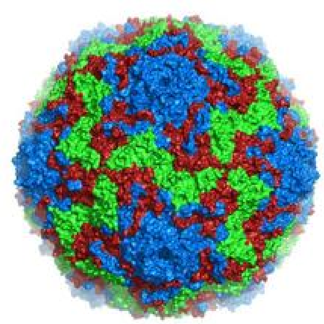
2. Dibuja figuras en la esfera cuyos grupos de simetrías sean $Z_n \times Z_2$ y $D_n \times Z_2$.

3. Dibuja un mosaico en la esfera cuyo grupo de simetrías sea el grupo de rotaciones del tetraedro.

4. Los grupos de simetrías de 4 de los sólidos platónicos contienen reflexiones con giro ¿donde estan y de que orden son?

5. ¿Cuantas rotaciones tienen los grupos de simetrías de los sólidos platónicos (incluyendo la identidad)? ¿Cuantas reflexiones y reflexiones con giro tienen?

6. La imagen muestra la estructura molecular del capside de un virus común. ¿Cual es su grupo de simetrías?



7. ¿Cuales de los sólidos arquimedianos comparten el mismo grupo de simetrías? (marcalos directamente en la ilustración de los sólidos, no hace falta justificarlo)