Isometrías del espacio euclidiano.

Lema 1. La posición de cualquier punto en R^3 esta determinada por sus distancias a 4 puntos no coplanares de R^3.

Demostración. Sean a,b,c,d 4 puntos no coplanares en el espacio. Si p es cualquier otro punto, sus distancias a a, b, c y d nos dicen que p se encuentra en la intersección de 4 esferas con centros en a, b, c y d. Pero 4 esferas con centros no coplanares se intersectan en a lo mas un punto. •

Corolario 2. Las isometrias de R^3 están determinadas por las imágenes de 4 puntos no coplanares.

Demostración. Sea I una isometría del espacio y sean a, b, c y d 4 puntos no coplanares. Hay que ver que para cada punto p su imagen Ip esta determinado por las imágenes Ia, Ib, Ic y Id.
Como I es una isometría y a , b, c y d no son coplanares entonces Ia, Ib, Ic y Id tampoco son coplanares (tarea).
Por el lema anterior Ip esta determinado por las distancias de Ip a Ia, Ib, Ic y Id. Y como I es una isometría, estas distancias son iguales a las distancias de p a a, b, c y d respectivamente, que ya conocíamos •

Lema 3. Cada isometría de R^3 es la composición de a lo mas 4 reflexiones en planos

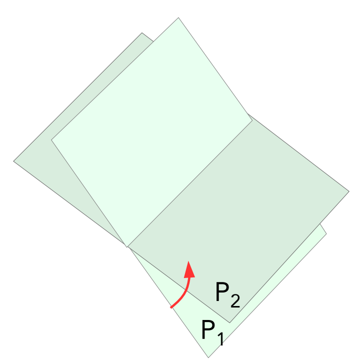
Demostración. Sea I una isometría del espacio y sean a, b, c y d 4 puntos no coplanares. Basta probar que componiendo a lo mas 4 reflexiones podemos llevar los puntos a,b c y d a los puntos Ia, Ib, Ic y Id, porque si la isometría I y la composición coinciden en esos 4 puntos, por el lema 1 deben coincidir en todos los puntos del espacio. •

Teorema 4. Las isometrias de R^3 son traslaciones, rotaciones, movimientos de tornillo, reflexiones, reflexiones con giro y reflexiones con deslizamiento.

Demostración. Sabemos que cada isometría I es la composición de a lo mas 4 reflexiones.

1. Si L es una reflexión no hay nada que hacer.

2. Si I es composición de 2 reflexiones en planos P_1 y P_2 entonces I es una traslación si P_1 y P_2 son paralelos o una rotación en la recta L donde P_1 y P_2 se cruzan (por el doble del ángulo entre los planos).
Esto muestra que si giramos los planos P_1 y P_2 alrededor de la recta de intersección conservando el ángulo entre ellos, la composición de las 2 reflexiones no cambia, y que 2 reflexiones conmutan si y solo si los planos de reflexión son iguales o perpendiculares.



3. Si I es composición de 3 reflexiones en planos P_1, P_2 y P_3.
Observar que si P_3, es perpendicular a P_1 y P_2, entonces I es una reflexión con deslizamiento en P_3 si P_1 y P_2 son paralelos o I es una reflexión con giro en P_3 si P_1 y P_2 se cruzan.
Veamos ahora que siempre es posible girar los planos P_1, P_2 y P_3 para que P_3 sea perpendicular a P_1 y P_2 sin que la composición de las 3 reflexiones cambie:
Giremos P_1 y P_2 alrededor de su recta de intersección para que P_2 sea perpendicular a P_3. Y luego giremos P_2 y P_3 alrededor de su recta de intersección para que P_3 sea perpendicular a P_1.

4. Si I es composición de 3 reflexiones en planos P_1, P_2, P_3 y P_4.
Observar que si P_2 y P_3 son perpendiculares a P_1 y P_4 entonces $I = P_4P_3P_2P_1 = P_3P_2P_4P_1$ es una traslación seguida de una rotación con el mismo eje, así que I es una rotación con giro, o una rotación si $P_4 = P_1$ o una traslación si $P_3 = P_2$.
Veamos que podemos girar los planos para que P_2 y P_3 sean perpendiculares a P_1 y P_4, sin que la composición de las reflexiones cambie.
Primero giremos P_2 y P_3 hasta que P_2 sea perpendicular a P_1, luego giremos P_1 y P_2 hasta que P_1 sea perpendicular a P_3. Así logramos que P_1 sea perpendicular a P_2 y P_3.
Ahora giremos P_2 y P_3 hasta que P_3 sea perpendicular a P_4. Así logramos que P_1 sea perpendicular a P_2 y P_3 sea perpendicular a P_4.
Finalmente, si d es la dirección perpendicular a las rectas $L=P_1 \cap P_2$ y $L'=P_3 \cap P_4$, entonces podemos girar a P_1 y P_2 para que P_1 sea perpendicular a d y podemos girar a P_3 y P_4 para que P_4 sea perpendicular a d. Así logramos que P_1 y P_4 sean paralelos y ambos sea perpendiculares a P_2 y P_3. ●

Corolario 5. Todas las isometrias del espacio dejan una recta invariante.

Demostración. Cada uno de los tipos de isometrias del teorema anterior deja al menos una recta invariante. ●

Lema 6. Estos 3 grupos son isomorfos:

1. El grupo de isometrias de R^3 que fijan un punto.
2. El grupo de isometrias de la esfera.
3. El grupo O(3) de las matrices ortogonales reales de 3x3.

Demostración. Cada isometría del espacio que fija un punto se restringe a una isometría de la esfera unitaria centrada en ese punto, y cada isometría de la esfera se extiende a una única isometría del espacio.
Las isometrias del espacio que fijan el origen son transformaciones lineales que enviar vectores unitarios perpendiculares a vectores unitarios perpendiculares. Estas transformaciones esta dadas por matrices ortogonales, y sus composiciones corresponden al producto de matrices. ●

Corolario 7. Los grupos de simetrías de los sólidos en R^3 son subgrupos del grupo de simetrías de la esfera. En particular, los grupos de simetrías de poliedros corresponden a grupos discretos de simetrías de la esfera.

Demostración. El grupo de simetrías de un solido debe dejar fijo a su centro de gravedad. En el caso de los poliedros no necesitamos invocar la existencia del centro de gravedad: sus simetrías deben mandar vértices en vértices, así que el grupo de simetrías es finito, y cualquier grupo finito de simetrías en R^3 deja un punto fijo: el promedio de la órbita de cualquier punto. ●

Problemas.

1. Demuestra que las isometrias de R^3 mandan planos en planos.

2. Di exactamente que isometrias de R^3 son las siguientes:

   a. La composición de las 3 reflexiones en los planos coordenados.

   b. La composición de una rotación de 90° en el eje x seguida de una rotación de 90° en el eje z.

3. Cuales matrices de 3x3 corresponden a las siguientes isometrias del espacio?

   a. La reflexión en el plano x=y.

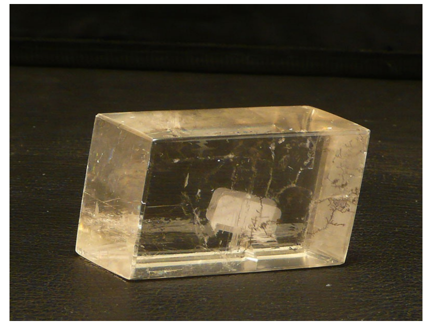
   b. La rotación de 90 en el eje y.

   c. La rotación de 120° en la recta x=y=z.

4. Di como son todas las simetrías de R^3 que...

   a. No fijan ningún punto
   b. Fijan un solo punto
   c. Fijan una linea
   d. Fijan un plano
   e. Dejan invariante una linea
   f. Dejan invariante un plano

Cristales.



Algunos minerales toman naturalmente formas geométricas bien definidas. Por ejemplo, la calcita forma paralelepípedos de distintas proporciones, pero siempre tienen los mismos algunos

En el siglo XIX pensaron que esto debería ser consecuencia de su estructura microscópica, de la manera en que las partículas que los formaban se acomodaban.

Pensando en las partículas como esferitas, uno puede preguntarse de cuantas maneras distintas se podrán "empacar" esferas del mismo tamaño en R^3 de modo que queden estables. Y de cuantas maneras se podrán empacar esferas de 2 o mas tamaños distintos.

Fue hasta principios del siglo XX, con el descubrimiento de los rayos X, que se pudieron observar (indirectamente) las estructuras microscópicas de los cristales.

Ahora se sabe que los átomos no son tan simétricos como las esferas, y que al formar moléculas se enlazan a distancias y algunos muy específicos que dependen de los elementos y de las condiciones (como temperatura y presión) en las que se forman. Las propiedades químicas y físicas (transparencia, conductividad) de muchos materiales dependen no solo de que esta hechos, sino de la manera en que sus átomos esta acomodados.

Ejemplos.

- El hielo y la sal son cristales.

- El grafito y el diamante están compuestos de carbono, toda la diferencia está en su estructura cristalina.

- Muchos materiales avanzados utilizados en la electrónica y la industria, como los semiconductores, son cristales, cuyas propiedades dependen de sus simetrías.

Podemos modelar a los cristales como figuras infinitas en R^3 cuyos grupos de simetrías son discretos y tienen traslaciones en 3 direcciones independientes.

Las traslaciones del cristal forman un grupo isomorfo a Z+Z+Z, así que forman una latice generada por 3 vectores en R^3. La podemos visualizar tomando cualquier punto del cristal y sus imágenes bajo las traslaciones. Las latices de traslaciones de distintos puntos son iguales salvo por un desplazamiento inicial. Pero la latice de traslaciones del cristal no esta basada en ningún punto, puede desplazarse libremente.

La latice de traslaciones del cristal guarda información importante sobre las posibles simetrías del cristal.

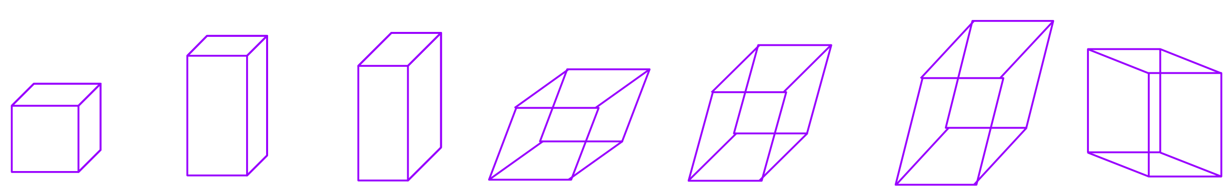
Lema 8. Las simetrías de un cristal son simetrías de su latice de traslaciones.

Demostración Si R es una rotación, los conjugados de las traslaciones por R son traslaciones en las direcciones rotadas y por las mismas distancias.
Así que si T es el subgrupo de traslaciones del cristal, el subgrupo RTR^{-1} (que esta formado por traslaciones) debe estar contenido en T, por lo que es igual a T. Así que la latice de trasladados de un punto en el eje de rotación debe quedar invariante al hacer la rotación.
El mismo argumento funciona si en lugar de una rotación consideramos una reflexión u otra simetría del cristal que fije algún punto.
Las simetrías que no dejan puntos fijos no necesariamente dejan la latice de trasladados de un punto invariante, pero como los conjugados de traslaciones son traslaciones, deben dejar la latice de traslaciones invariante. •

Para saber cuantos grupos de simetrías de cristales hay, lo primero que hay que saber es cuantos grupos distintos de simetrías de latices hay en R^3.

Lema 9. En R^3 hay 7 clases de latices con grupos de simetrías distintos:

Aquí se muestran las *celdas básicas* de cada clase, que son los paralelepípedos formados por los 3 vectores que generan a la latices.



$a=b=c$	$a=b\neq c$	$a\neq b\neq c$	$a=b=c$	$a\neq b\neq c$	$a\neq b\neq c$	$a=b\neq c$
$\alpha=\beta=\gamma=90$	$\alpha=\beta=\gamma=90$	$\alpha=\beta=\gamma=90$	$\alpha\neq\beta\neq\gamma\neq 90$	$\alpha=\beta=90$ $\gamma\neq 90$	$\alpha\neq\beta\neq\gamma\neq 90$	$\alpha=\beta=90$ $\gamma=120$

No es muy difícil ver que (salvo un cambio de base, que cambia los vectores generadores sin cambiar la latice) todas las latices pertenecen a una de estas clases, y que las simetrías de las distintas clases son distintas.

Lema 10. (Restricción cristalográfica). Las únicas rotaciones (y reflexiones con giro) posibles en una latice en R^3 son por múltiplos de 60° y 90°.

Si p es un punto de un cristal, las simetrías del cristal que no mueven a p forman un subgrupo; llamado el **estabilizador del punto** (o el grupo puntual del cristal).
Este subgrupo es un grupo discreto de isometrias de la esfera, de los que sabemos que hay 7 familias infinitas y 7 grupos que vienen de los sólidos platónicos

Teorema 11. En R^3 hay 32 grupos puntuales de cristales.

Idea de la demostración. De las 7 familias de simetrías de la esfera correspondientes a figuras y frisos, solo aquellos grupos cuyas rotaciones o reflexiones con giro tienen orden 2,3,4 y 6 son posibles, y se puede ver que hay 27 de estos grupos.
De los 7 grupos que vienen de los sólidos platónicos, los dos del icosaedro no pueden ser porque contienen rotaciones de orden 5.
Para terminar la demostración faltaría ver que todos estos grupos son estabilizadores de puntos en algún cristal. •

Teorema 12. En R^3 existen 230 grupos distintos de simetrías de cristales abstractos.

La demostración es parecida a la del teorema de clasificación de mosaicos planos, pero es mucho mas laboriosa...

Sorprendentemente, todos estos grupos son grupos de simetrías de cristales naturales, algunos grupos son muy comunes pero otros son muy raros.

El descubrimiento en los años 80´s de una ´estructura cristalina´ con rotaciones de orden 5 (72°) produjo un gran alboroto, por su aparente contradicción a la restricción cristalográfica. Pero lo que sucede es que estas estructuras no son periódicas: la restricción cristalografica implica que sus grupos de simetrías no pueden incluir traslaciones en mas de una dirección, así que no son realmenete cristales. Ahora se les conoce como *cuasicristales.* Aunque los primeros conocidos eran artificiales, en 2009 fueron descubiertos cuasicristales naturales en un meteorito, como el de la foto.