3-variedades

Max Neumann Coto
Instituto de Matemáticas UNAM
Cuernavaca

1. Introducción

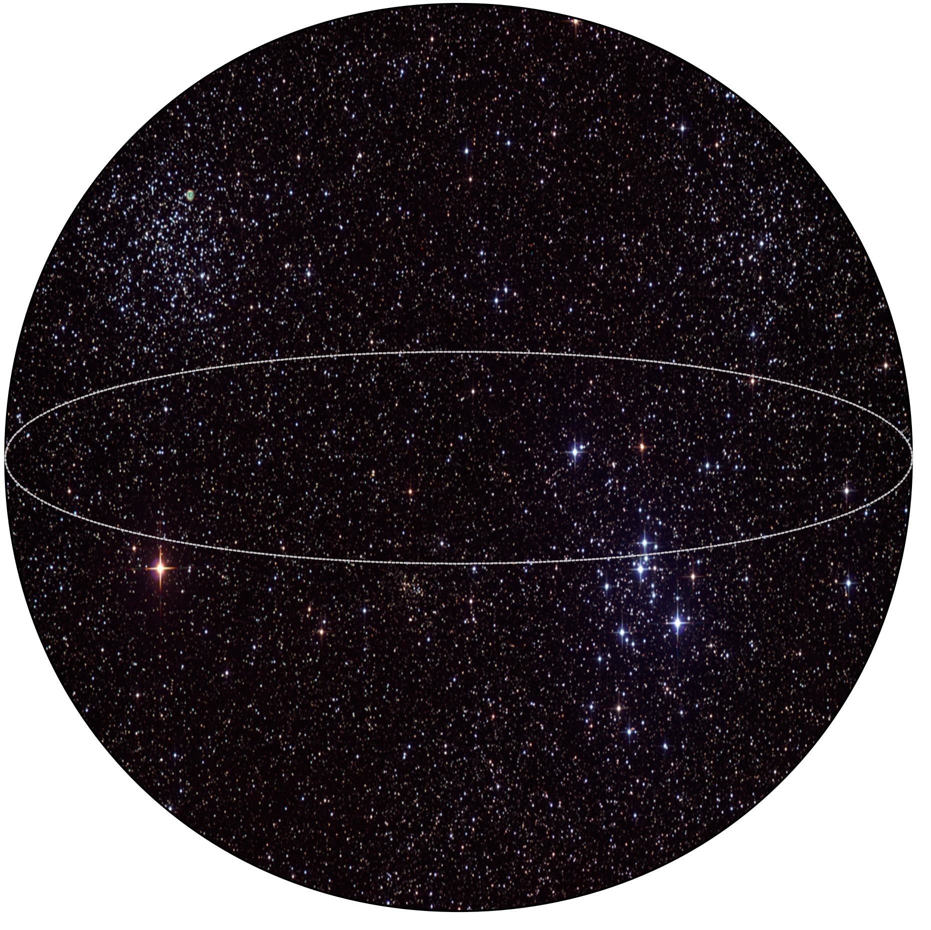
¿Qué forma tiene el Espacio?

¿Qué forma tiene el Espacio?

(si quitamos todo lo que contiene y nos quedamos nada mas con el lugar que ocupa)

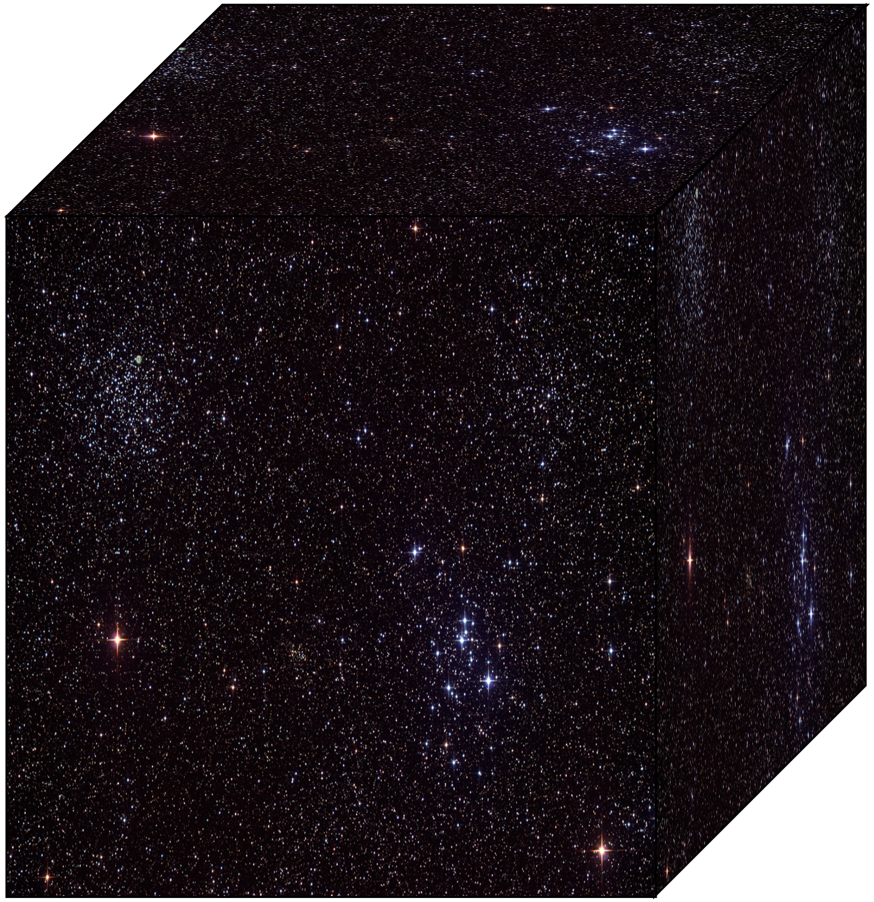
¿puede tener forma algo que no está hecho de nada?

¿Cómo una bola grandísima?



¿diámetro infinito?

¿O cómo un cubo infinito?



Espacio Euclidiano

Primer “modelo” del espacio: está hecho de “puntos” que cumplen algunas propiedades (axiomas) derivadas de lo que vemos y de nuestro sentido común.

- Continuo
- Homogeneo
- Isotrópico
- Tiene 3 dimensiones

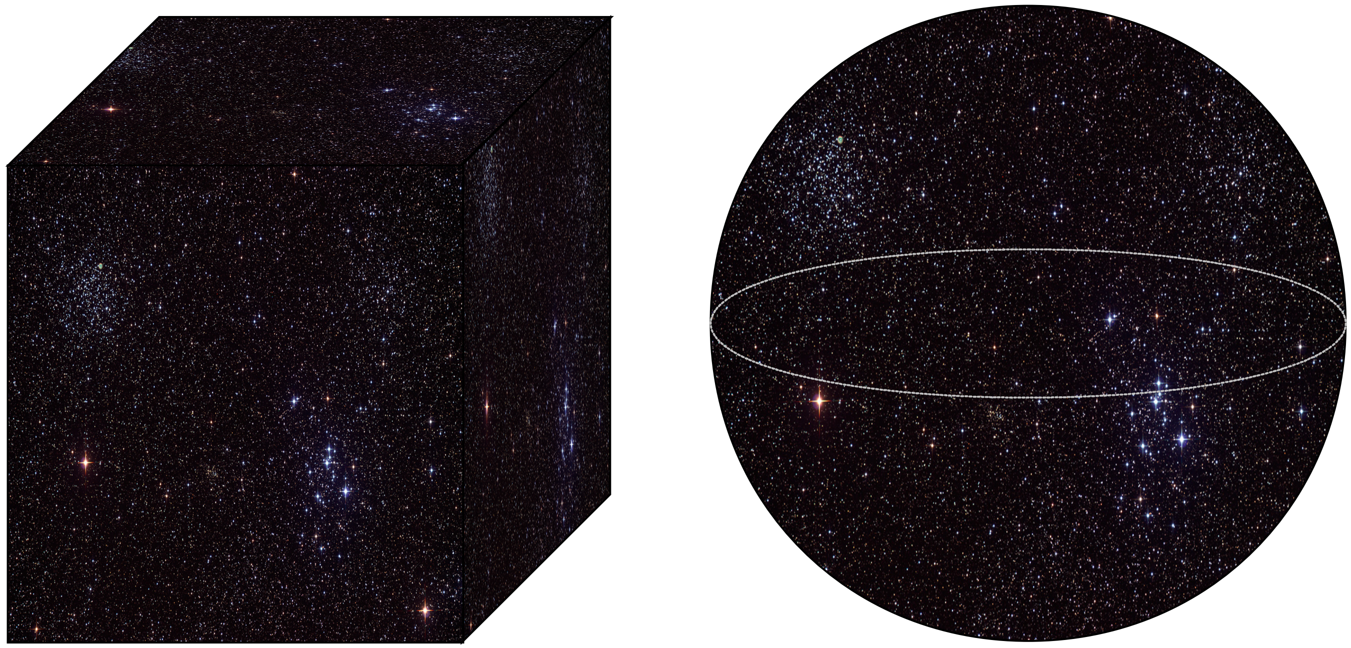
R^3

Modelo matemático del espacio euclidiano

- Los puntos son tercias de números reales.
- Hay manera de medir distancias, longitudes, áreas y volúmenes.
- La forma de los objetos en R^3 está determinada por las distancias entre sus puntos.

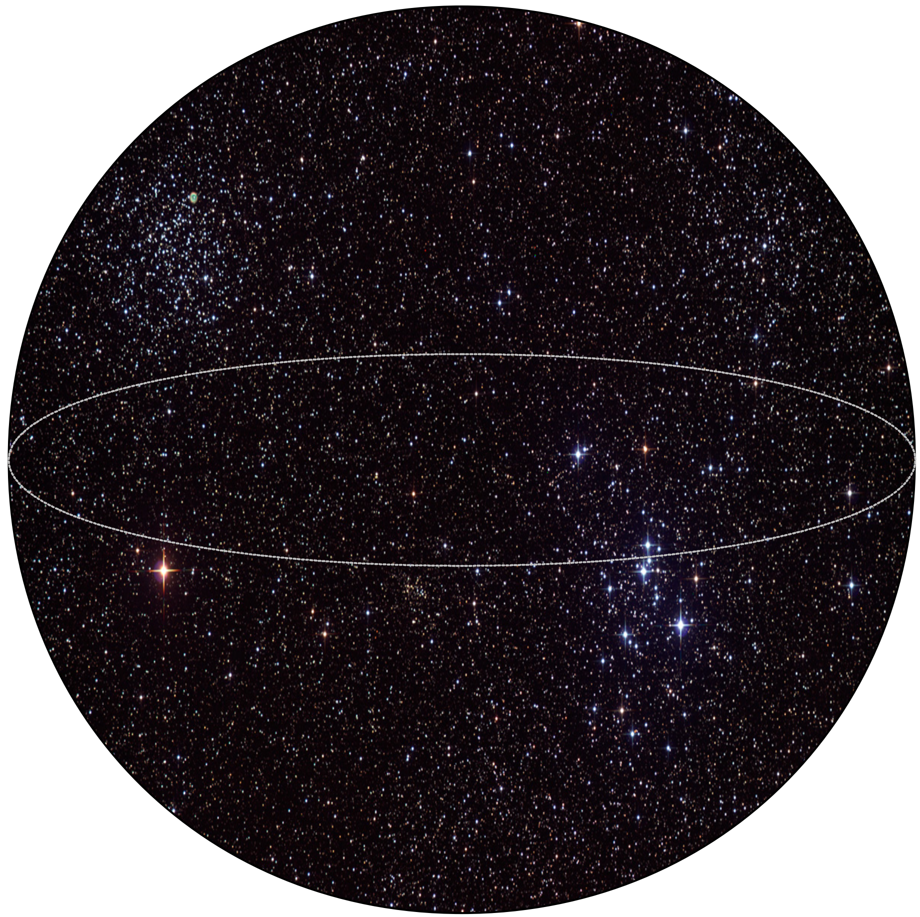
Puede generalizarse a todas las dimensiones (R^n).

¿Qué razones tenemos para pensar que el espacio donde vivimos es como R^3?



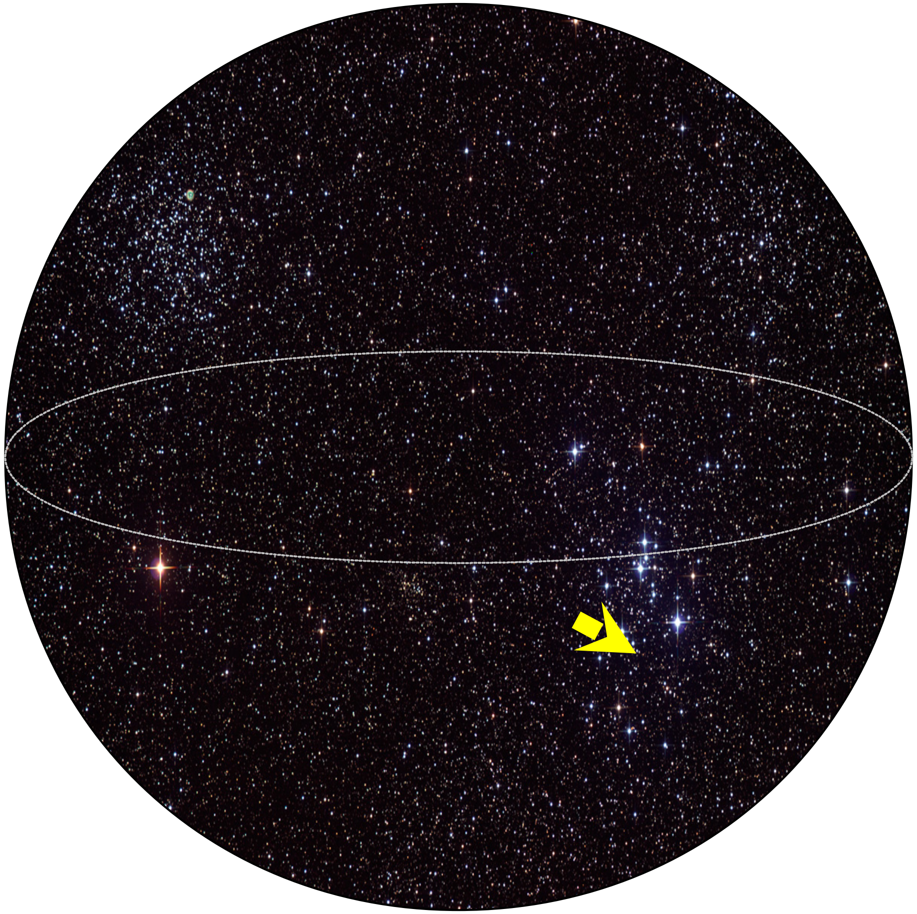
Localmente parece ser un buen modelo, pero eso no quiere decir que *globalmente* lo sea.

(Como visualizar una bola infinita en una bolita)



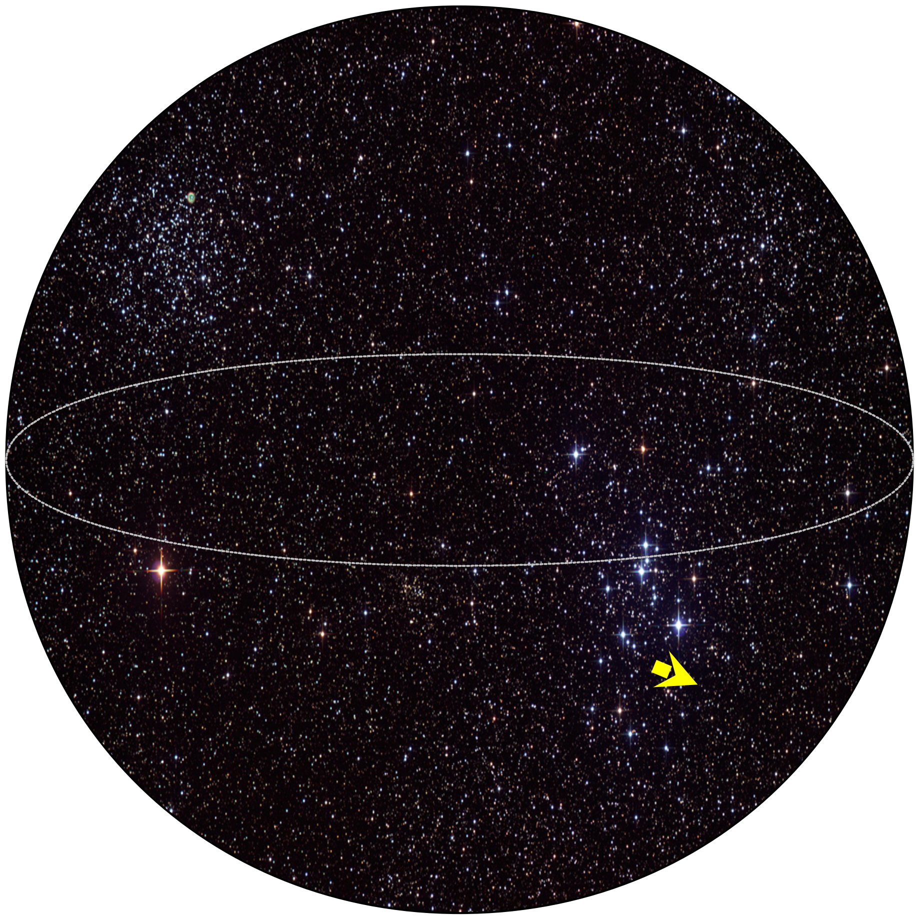
La “cáscara” no es parte del espacio: *está infinitamente lejos*

(Como visualizar una bola infinita en una bolita)



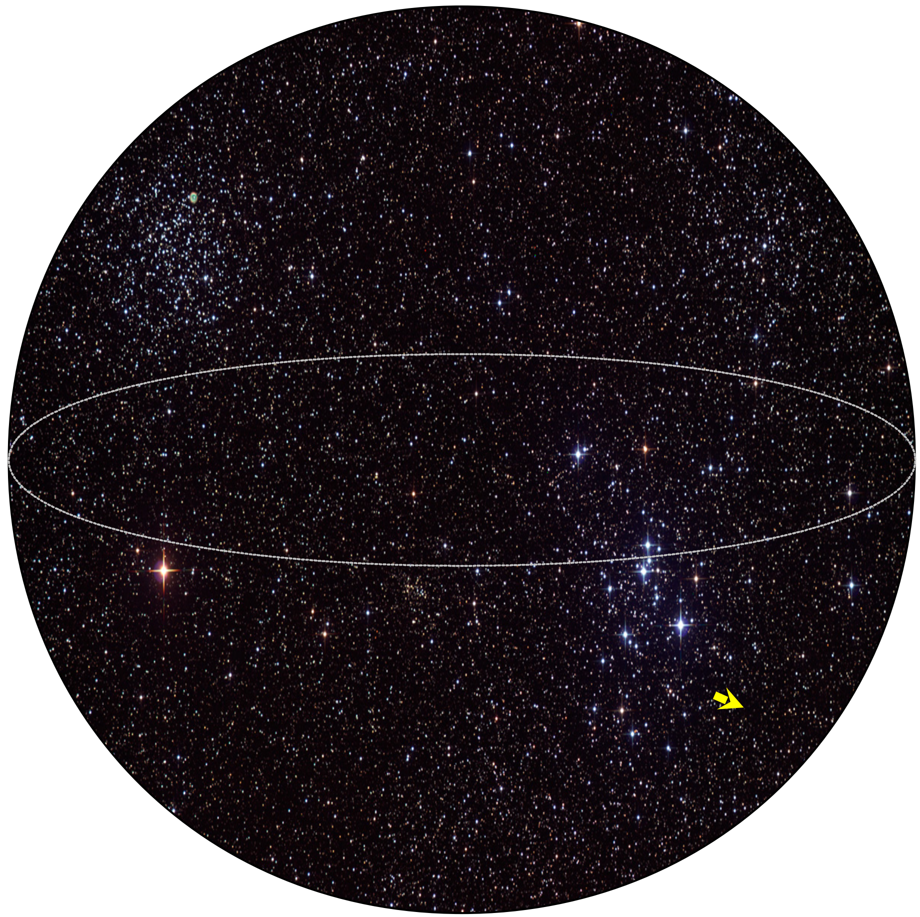
La “cáscara” no es parte del espacio: *está infinitamente lejos*

(Como visualizar una bola infinita en una bolita)



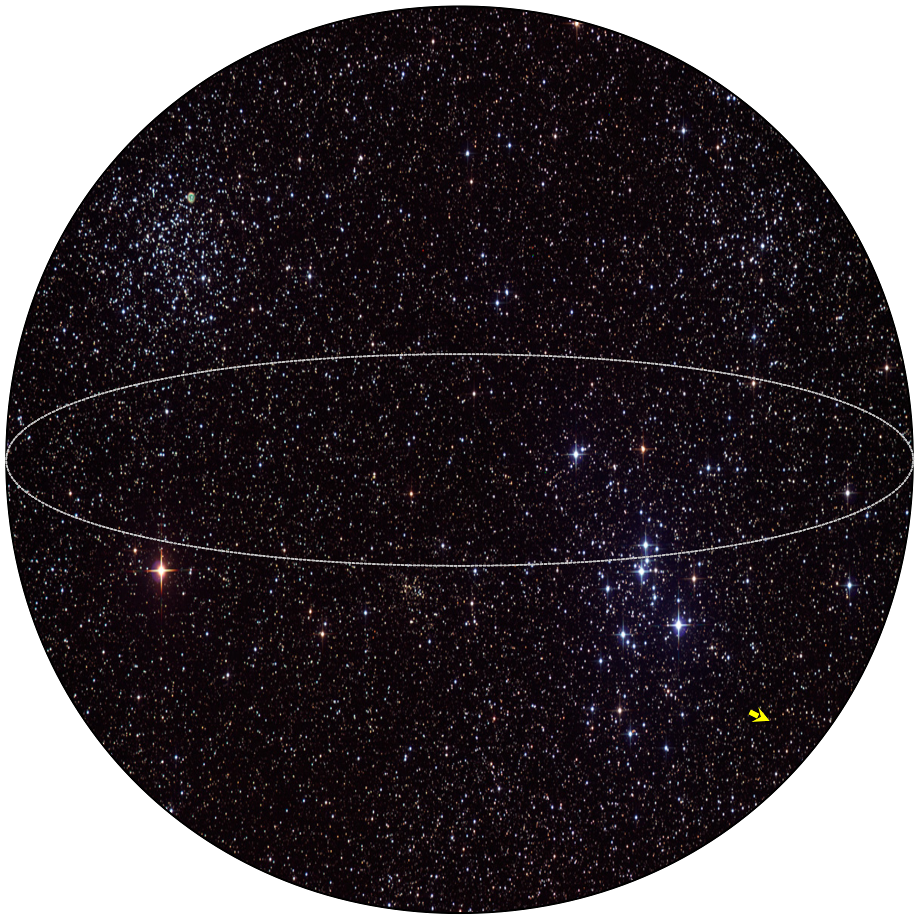
La “cáscara” no es parte del espacio: *está infinitamente lejos*

(Como visualizar una bola infinita en una bolita)



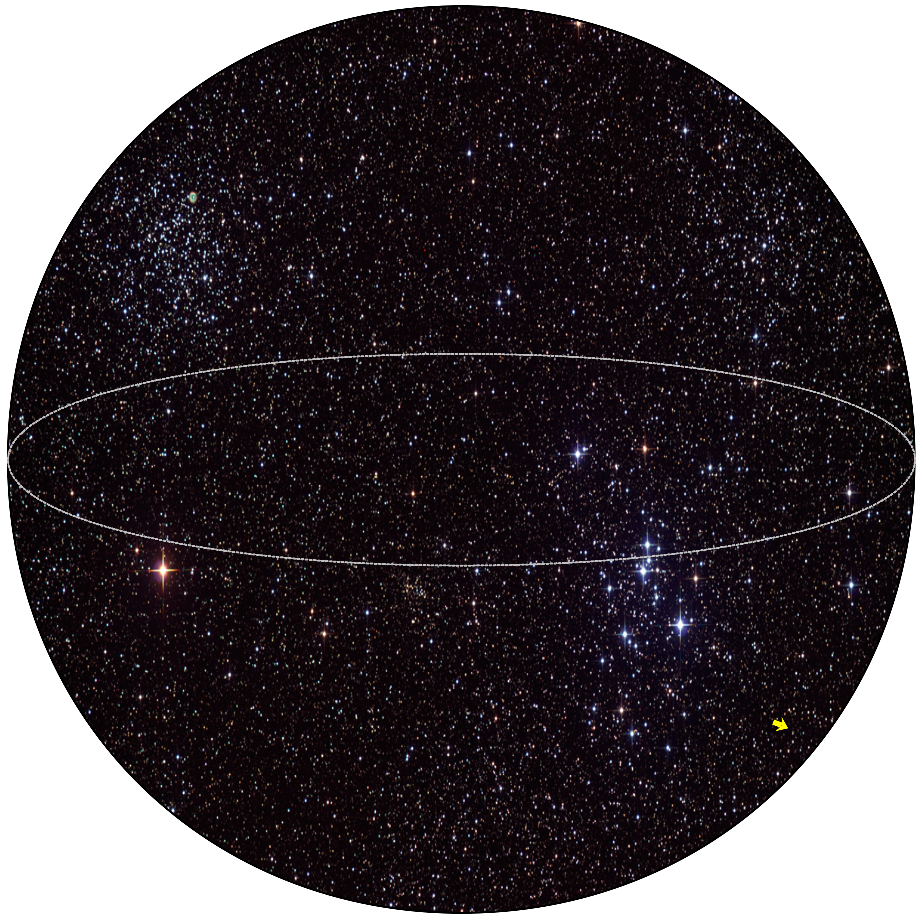
La “cáscara” no es parte del espacio: *está infinitamente lejos*

(Como visualizar una bola infinita en una bolita)



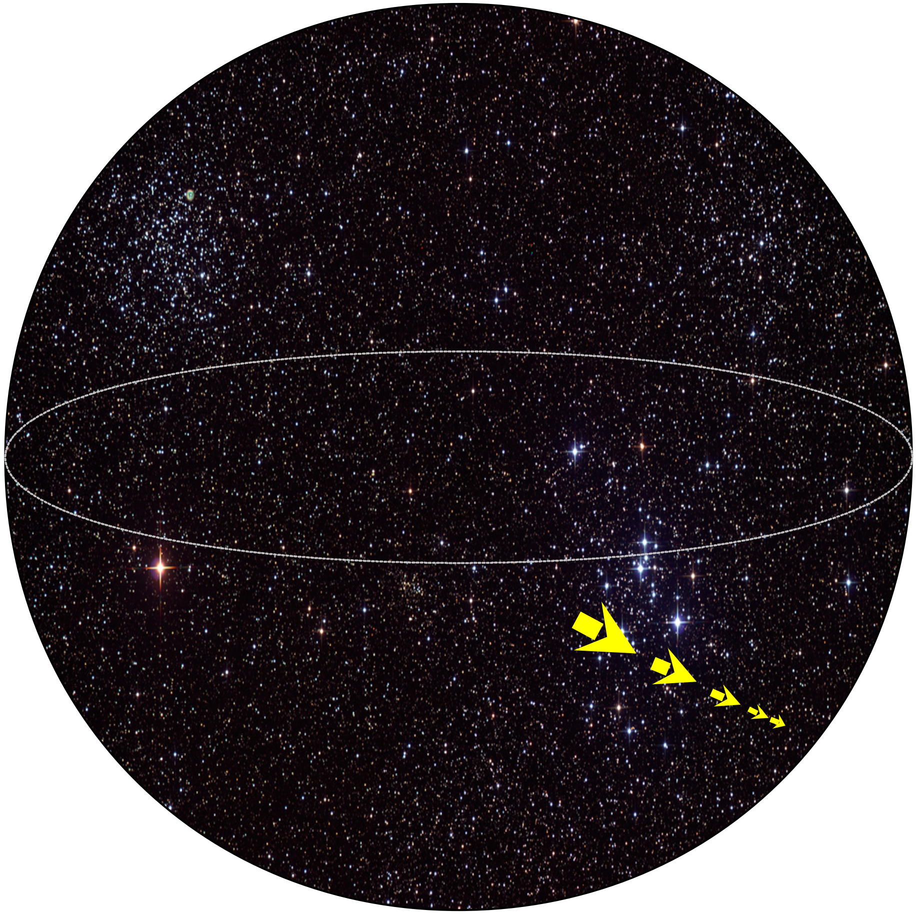
La “cáscara” no es parte del espacio: *está infinitamente lejos*

(Como visualizar una bola infinita en una bolita)



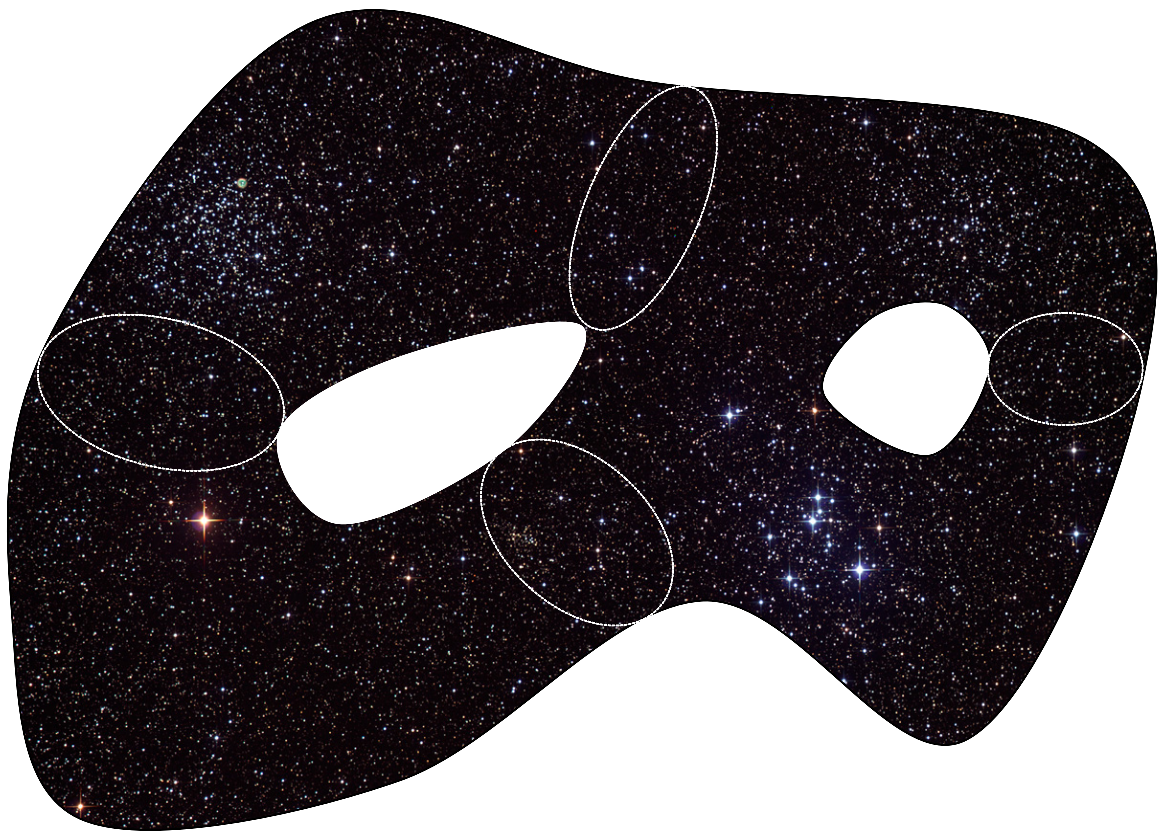
La “cáscara” no es parte del espacio: *está infinitamente lejos*

(Como visualizar una bola infinita en una bolita)



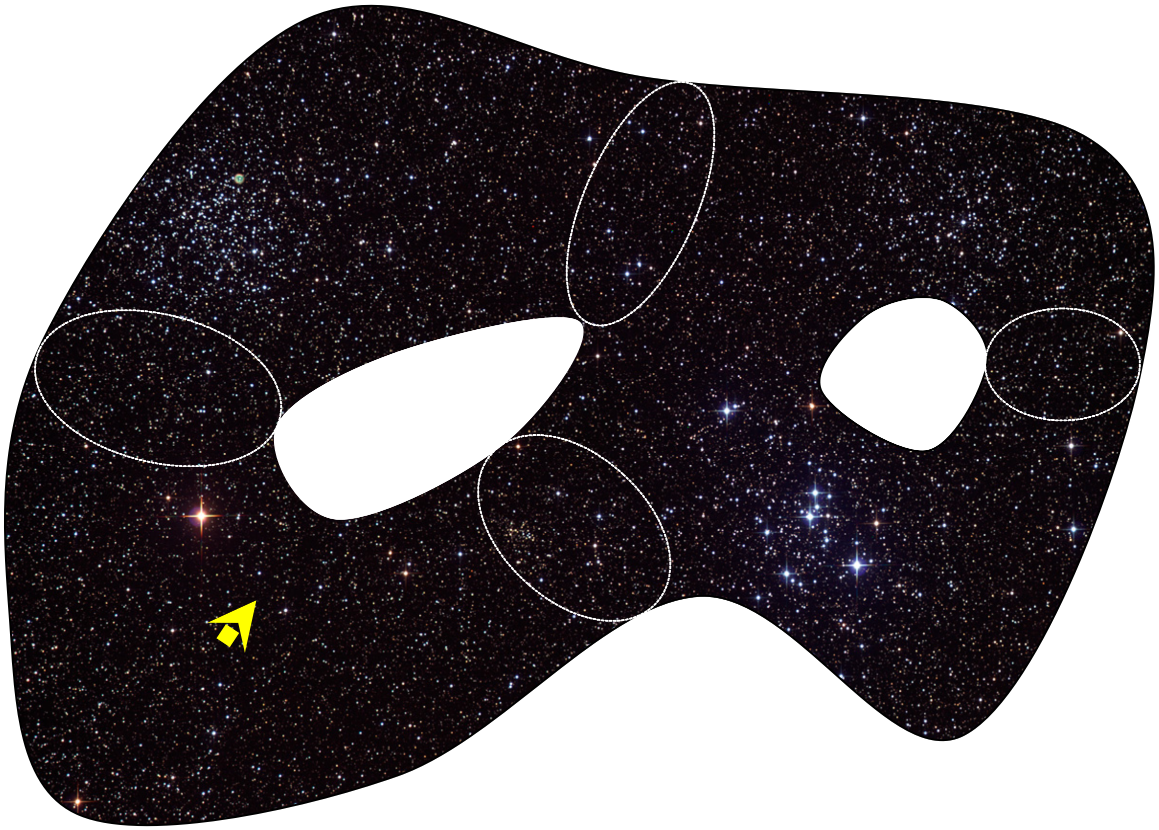
La “cáscara” no es parte del espacio: *está infinitamente lejos*

¿Y el espacio no podría ser algo así?



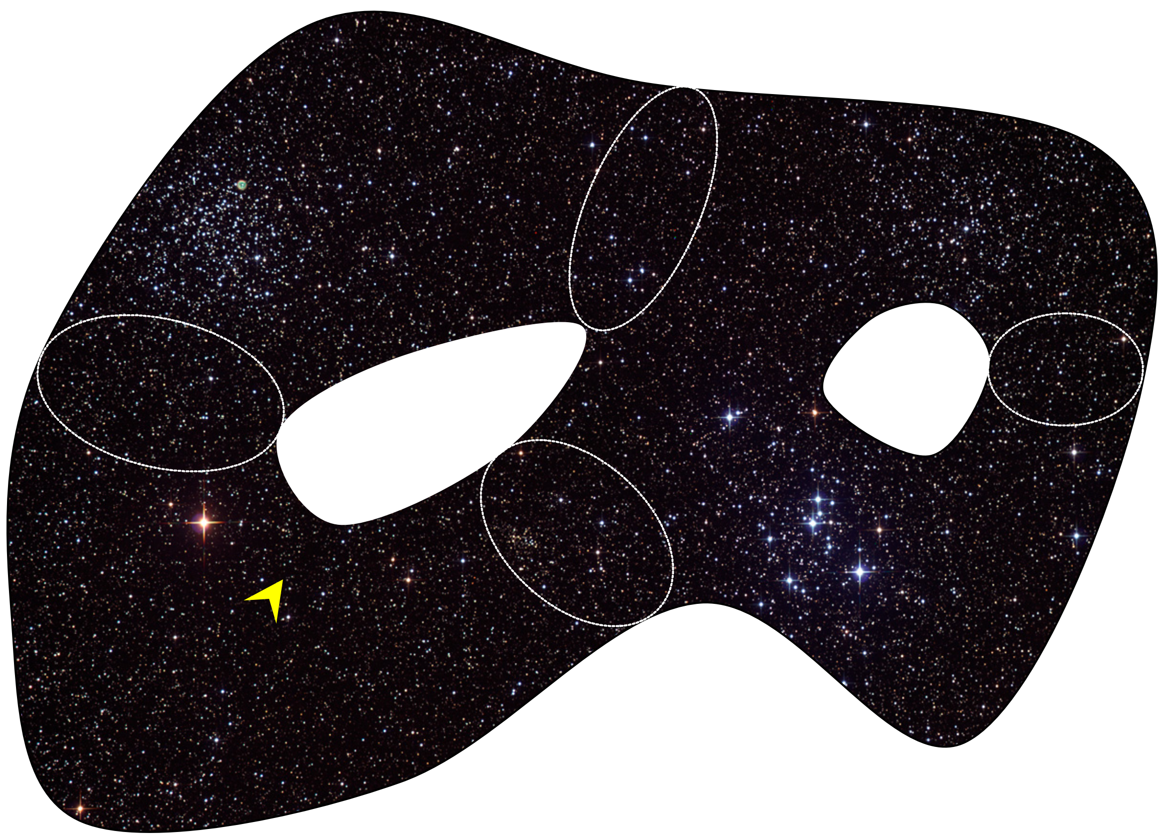
(pero infinitamente grande)

¿Y el espacio no podría ser algo así?



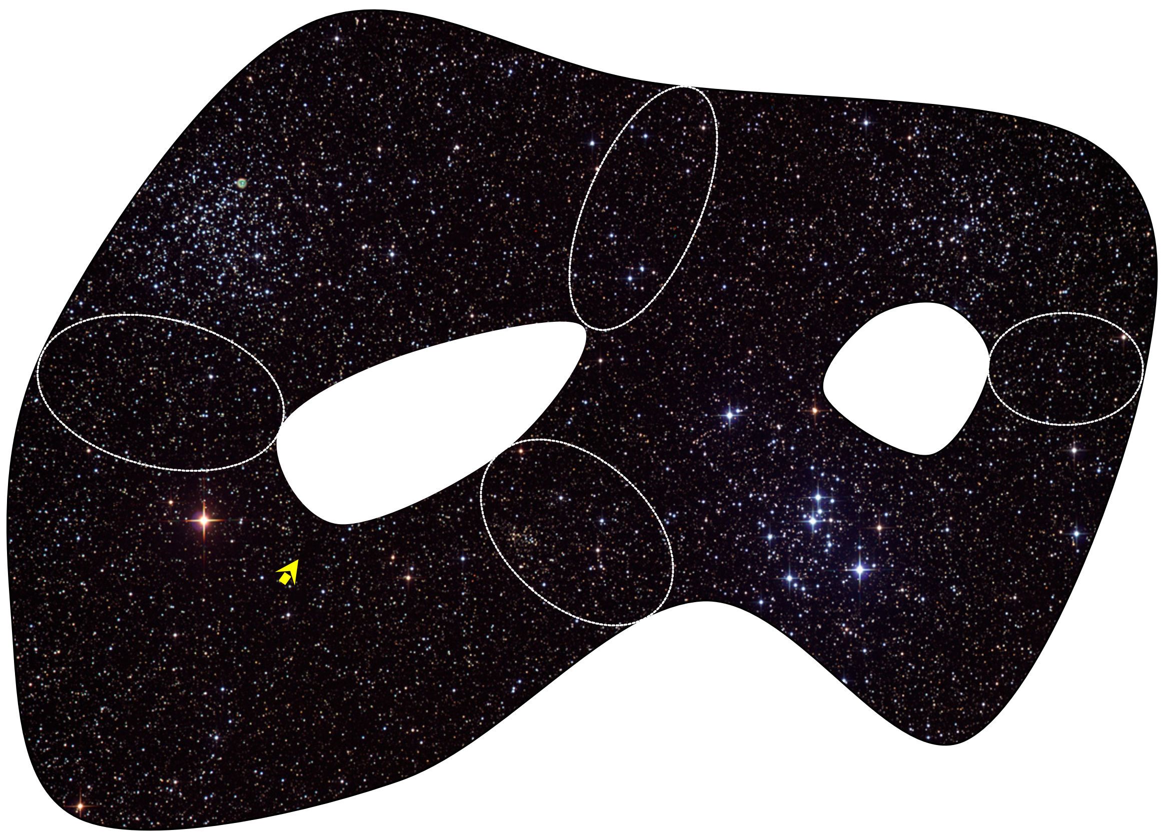
(pero infinitamente grande)

¿Y el espacio no podría ser algo así?



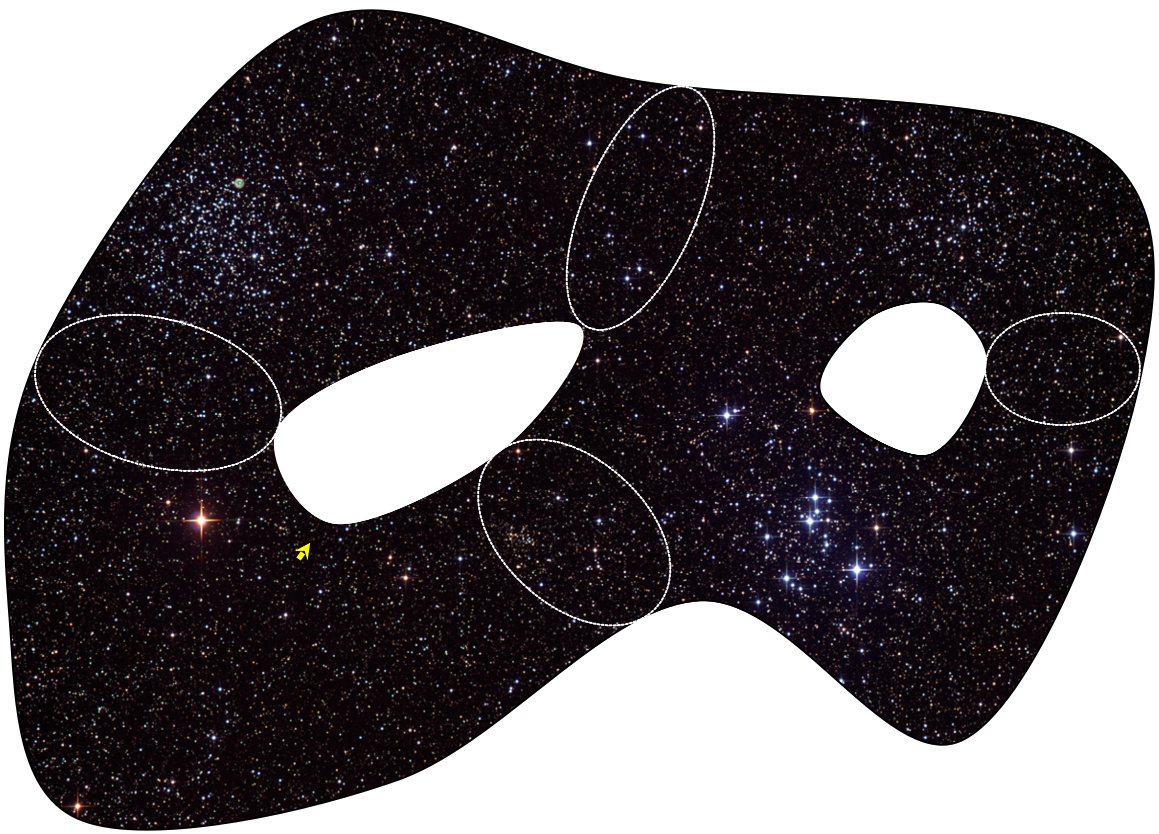
(pero infinitamente grande)

¿Y el espacio no podría ser algo así?



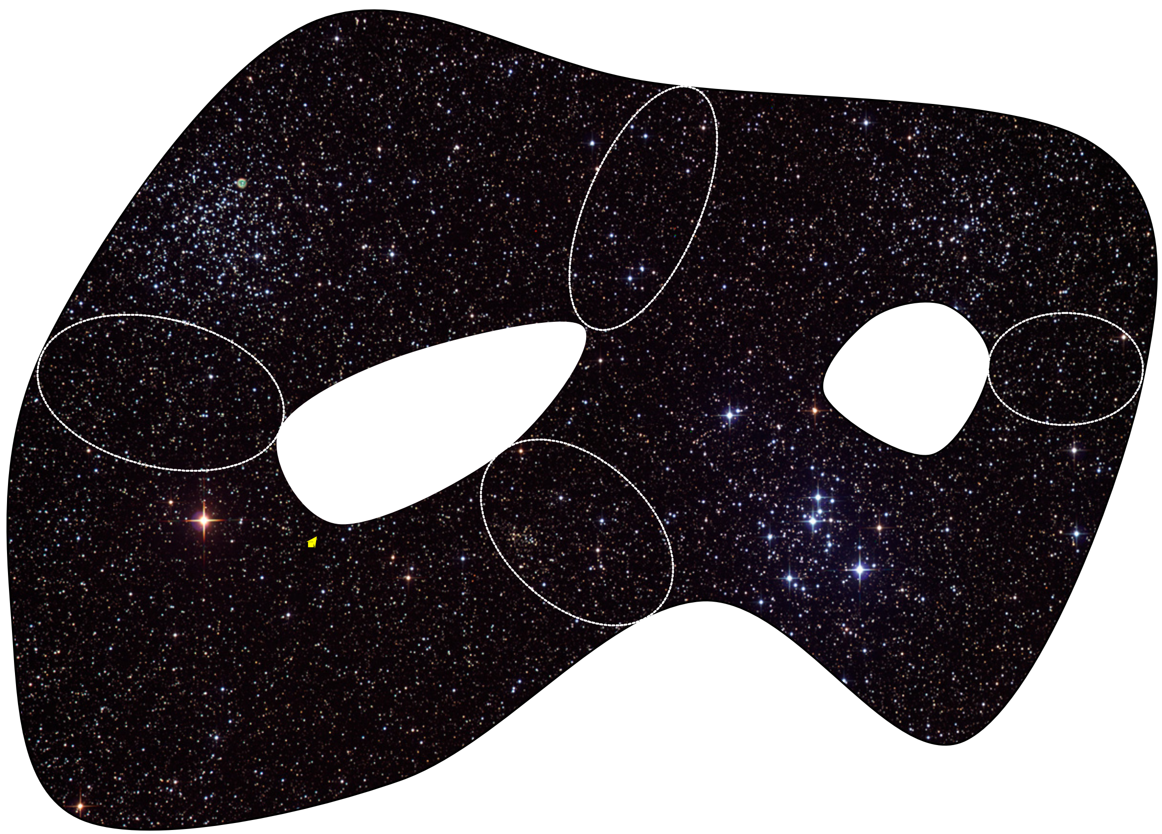
(pero infinitamente grande)

¿Y el espacio no podría ser algo así?



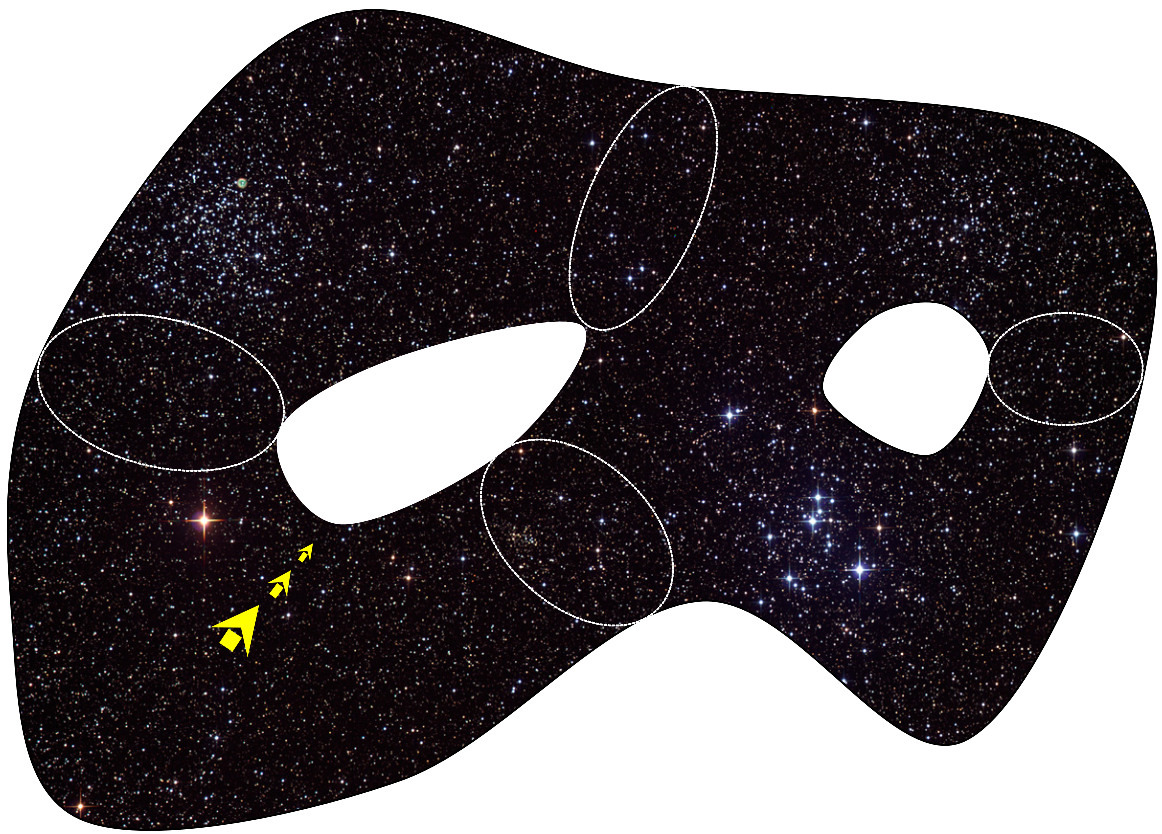
(pero infinitamente grande)

¿Y el espacio no podría ser algo así?



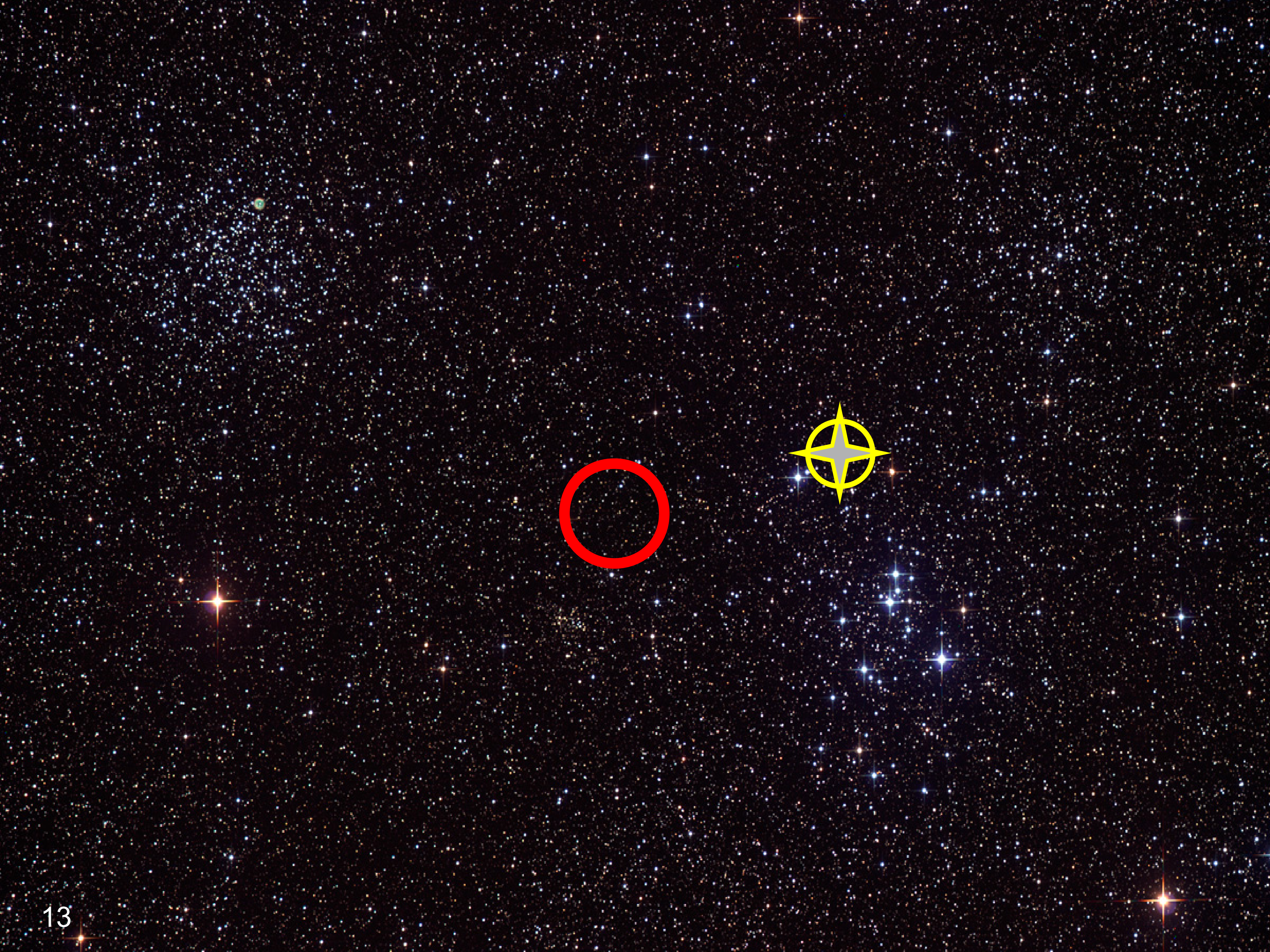
(pero infinitamente grande)

¿Y el espacio no podría ser algo así?

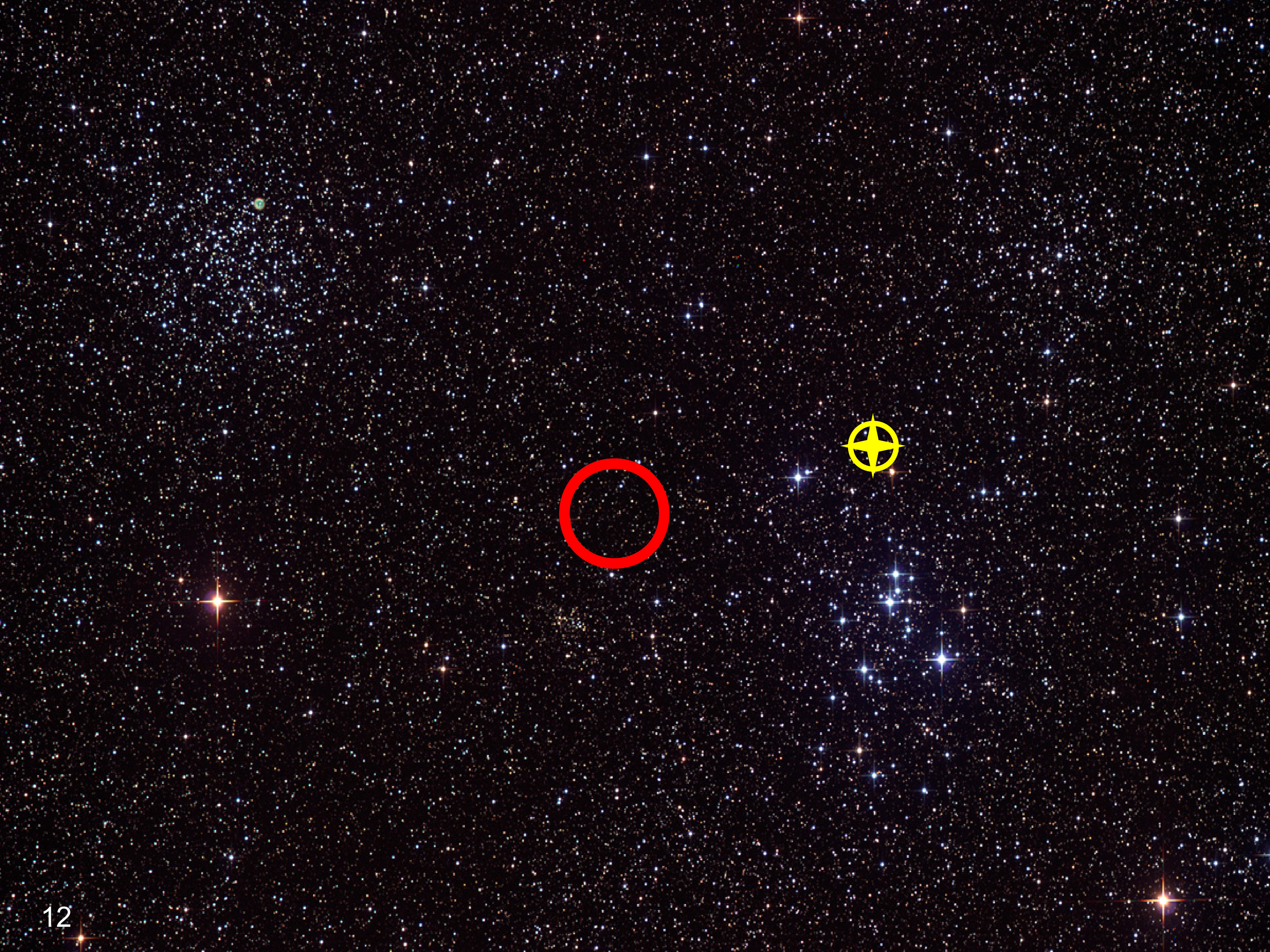


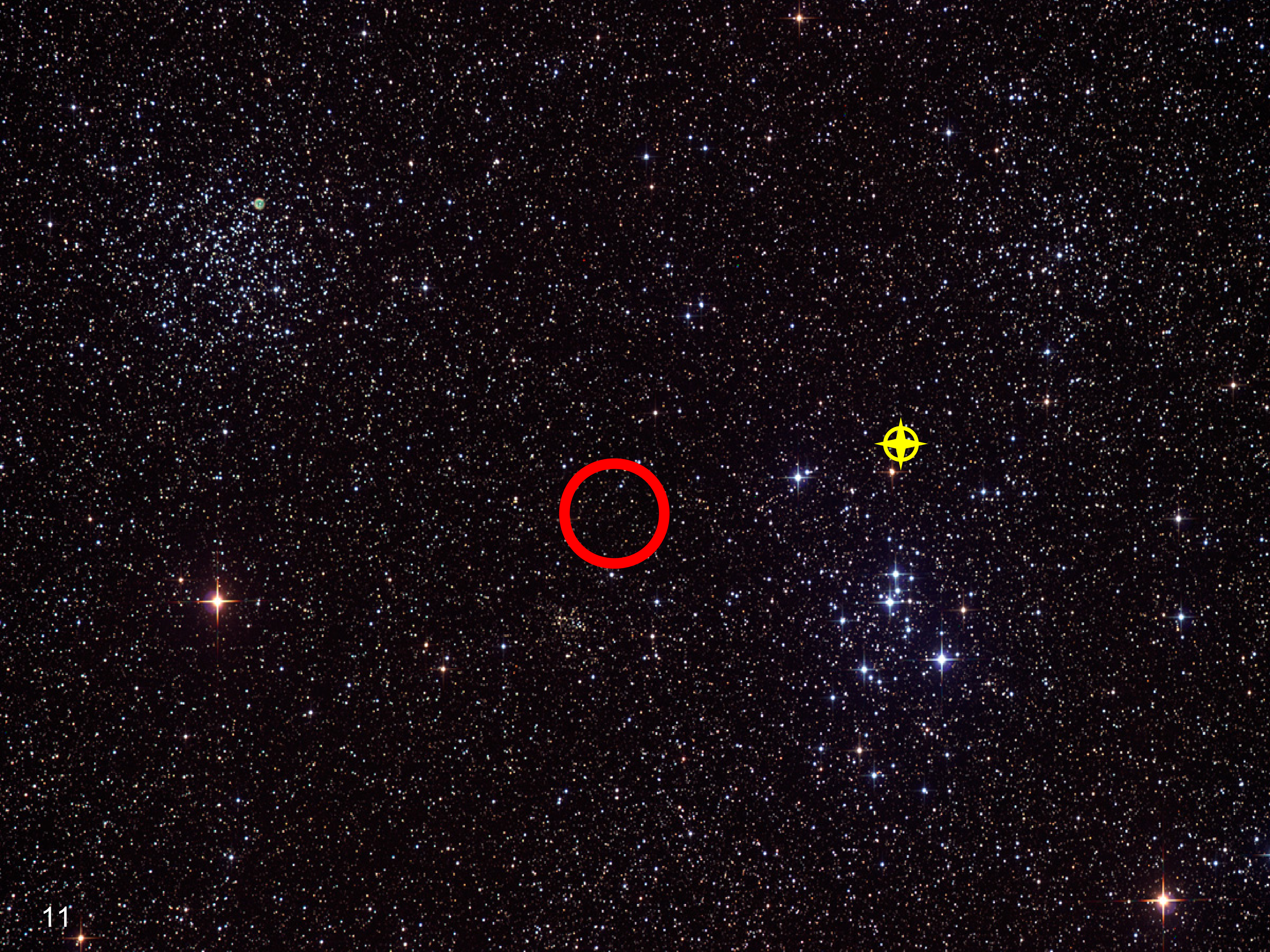
(pero infinitamente grande)

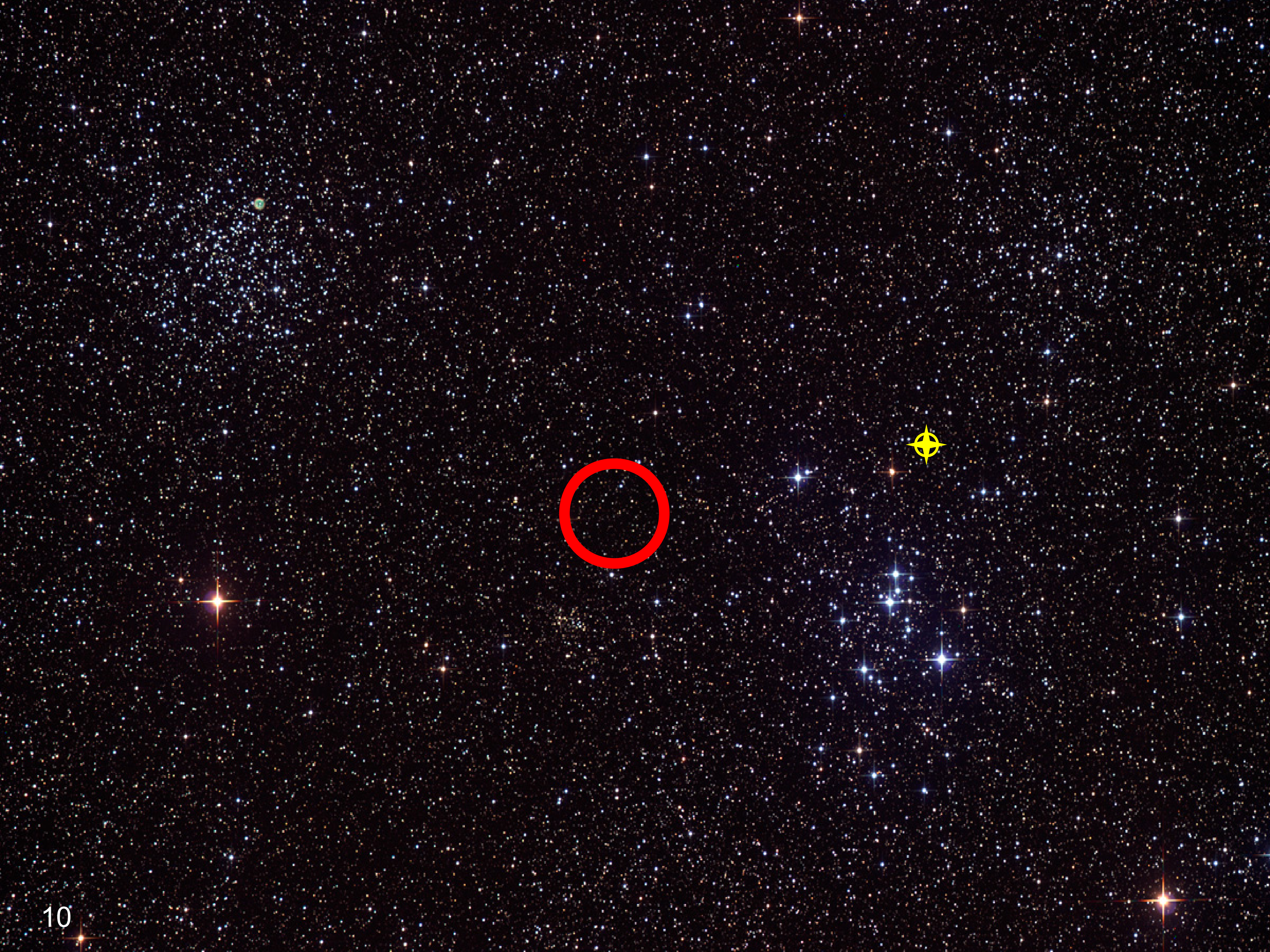
Viaje a las estrellas



13




11

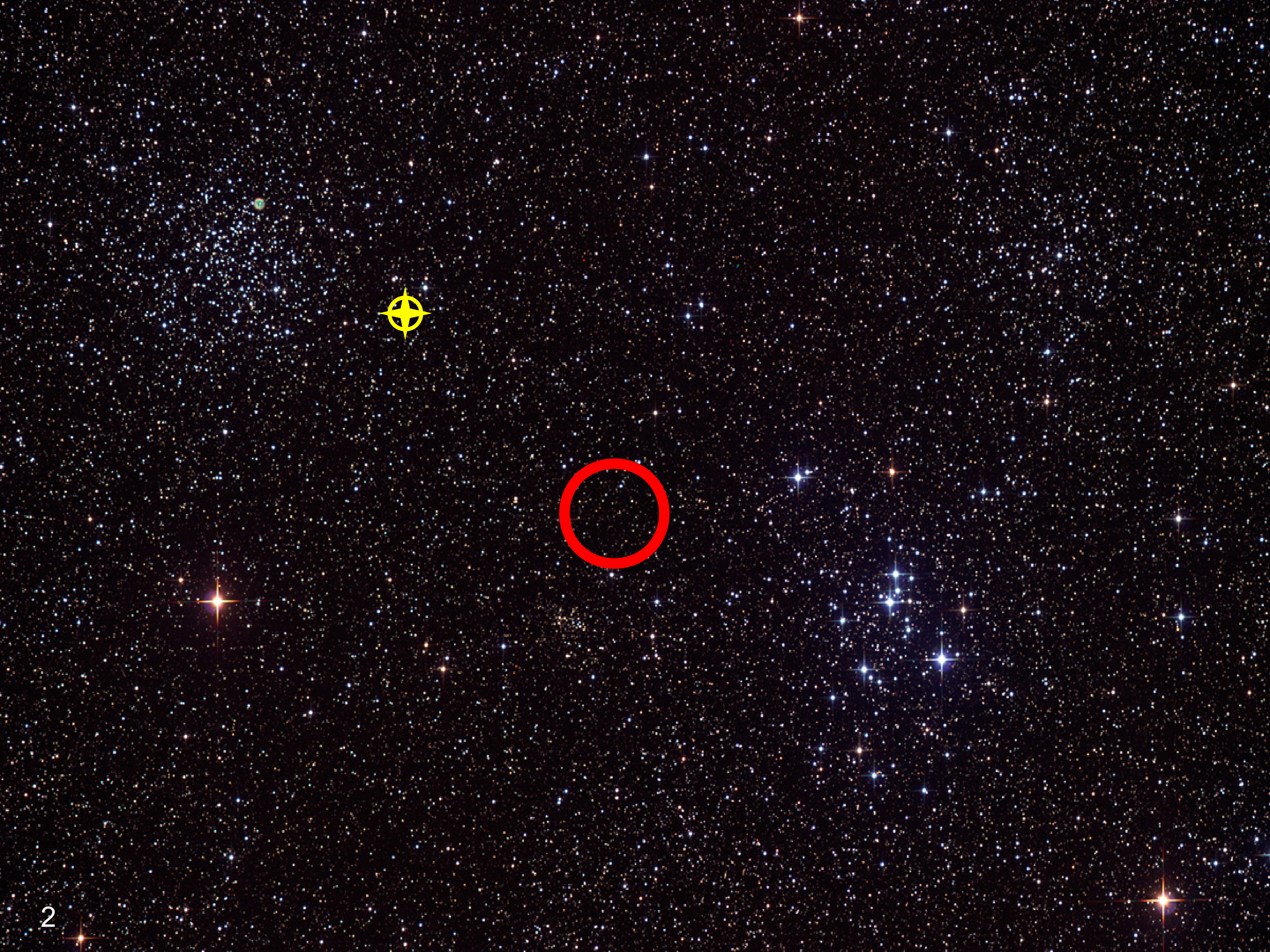



8

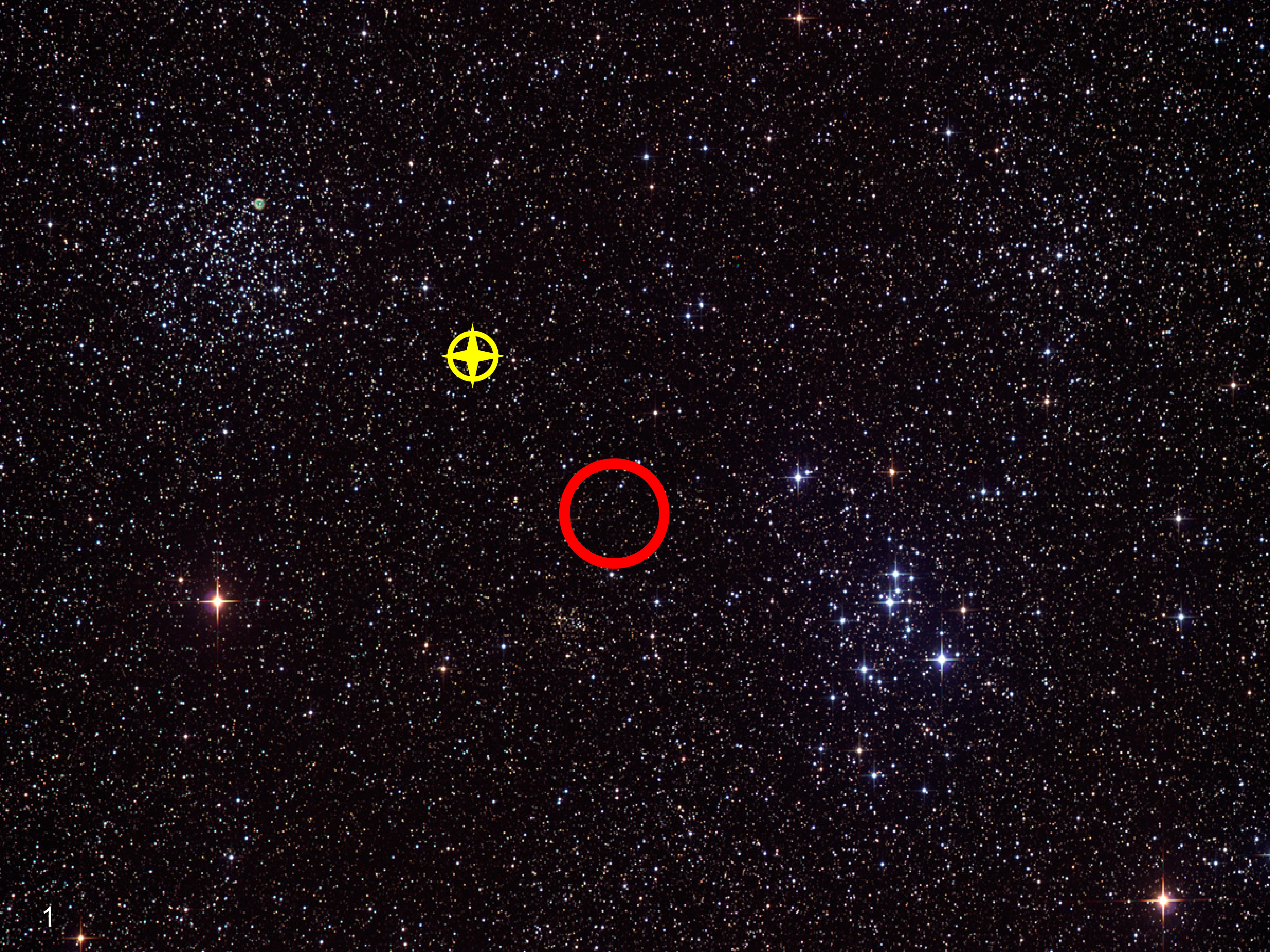

6

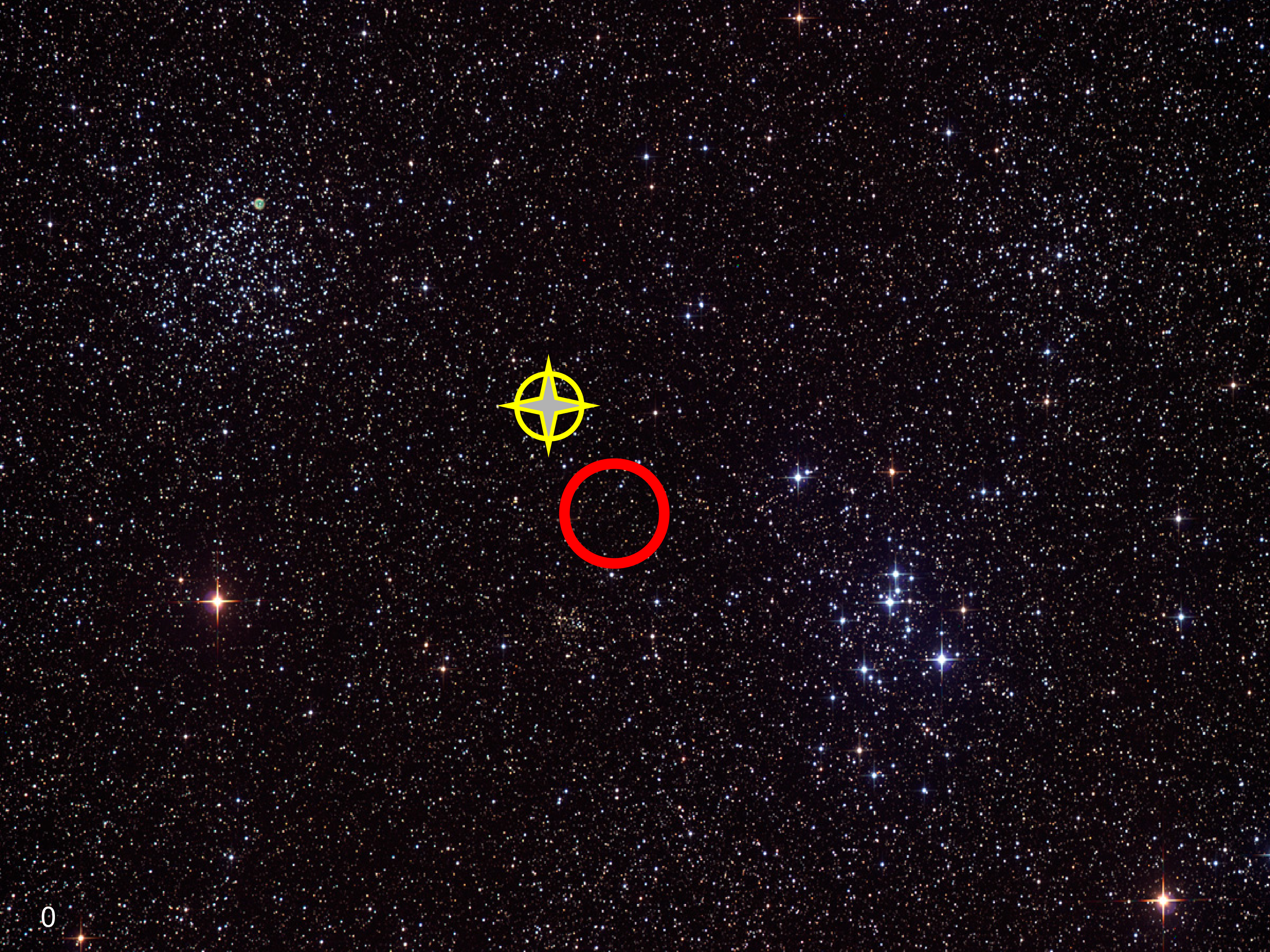

4


3



2


1

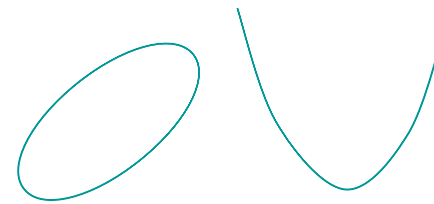


0

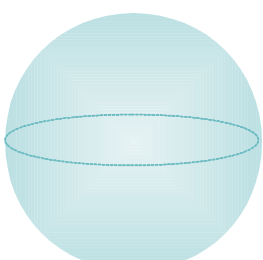
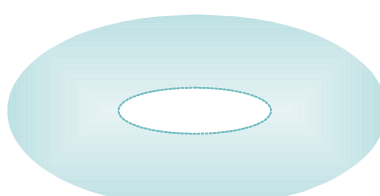
Variedades

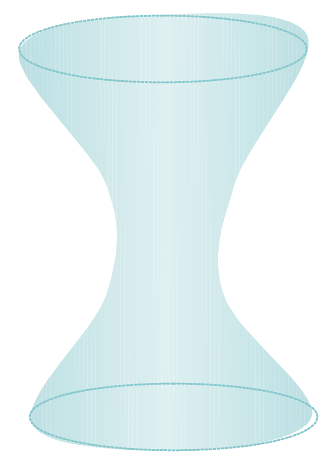
Una *n-variedad* es un espacio que se parece localmente al espacio euclidiano R^n

1-variedades: curvas



2-variedades: superficies



3-Variedades:

Modelos matemáticos de un espacio de 3 dimensiones: son análogos tridimensionales de las superficies.

Una 3-variedad es un espacio que se parece localmente al espacio euclidiano R^3

¿espacio? ¿se parece? ¿localmente?

(Topología)

Una *3-variedad topológica* es un espacio topológico en el cual cada punto tiene una vecindad homeomorfa a la vecindad de un punto en R^3.

Cerca de cada punto una 3-variedad se ve como R^3 deformado o arrugado

3-Esfera

Análoga tridimensional de la 2-esfera

No podemos verla (no cabe en R^3) pero podemos imaginarla de varias maneras:

3-Esfera

Análoga tridimensional de la 2-esfera

No podemos verla (no cabe en R^3) pero podemos imaginarla de varias maneras:

- $\{ (x,y,z,w) \ / \ x^2 + y^2 + z^2 + w^2 = 1\}$

3-Esfera

Análoga tridimensional de la 2-esfera

No podemos verla (no cabe en R^3) pero podemos imaginarla de varias maneras:

- $\{ (x,y,z,w) \;/\; x^2 + y^2 + z^2 + w^2 = 1\}$
- Compactificar R^3 con un punto

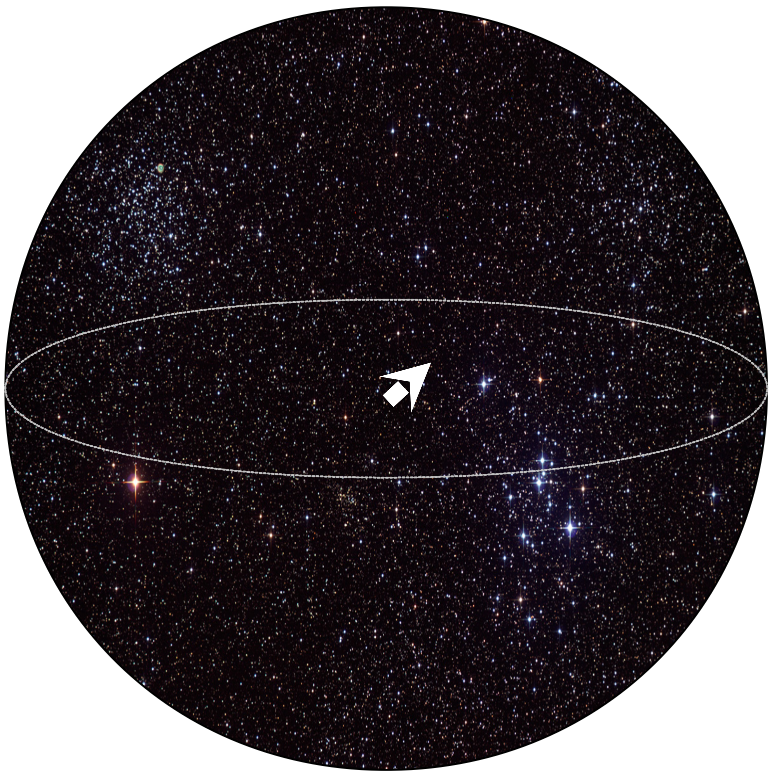
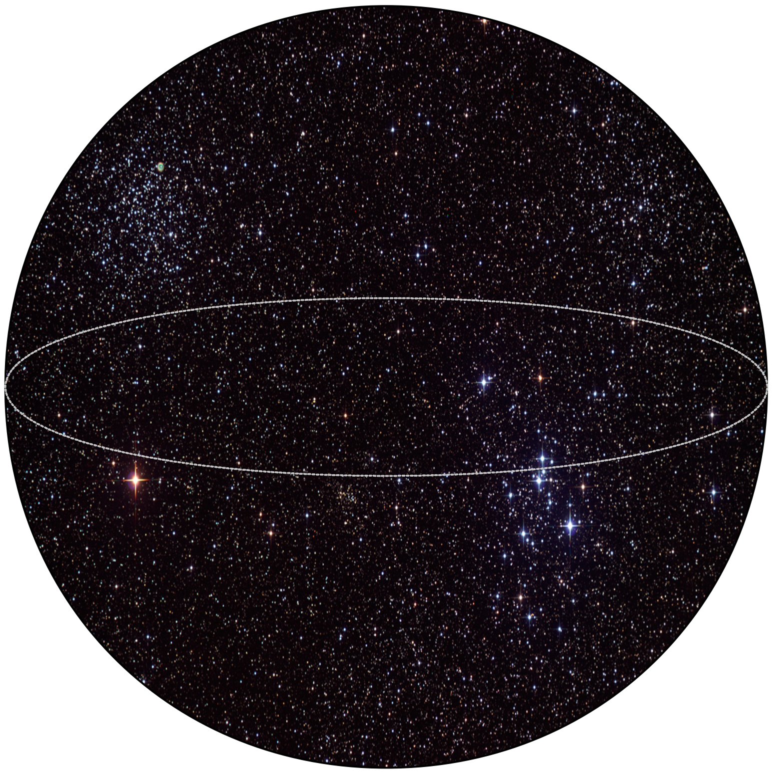
3-Esfera

Análoga tridimensional de la 2-esfera

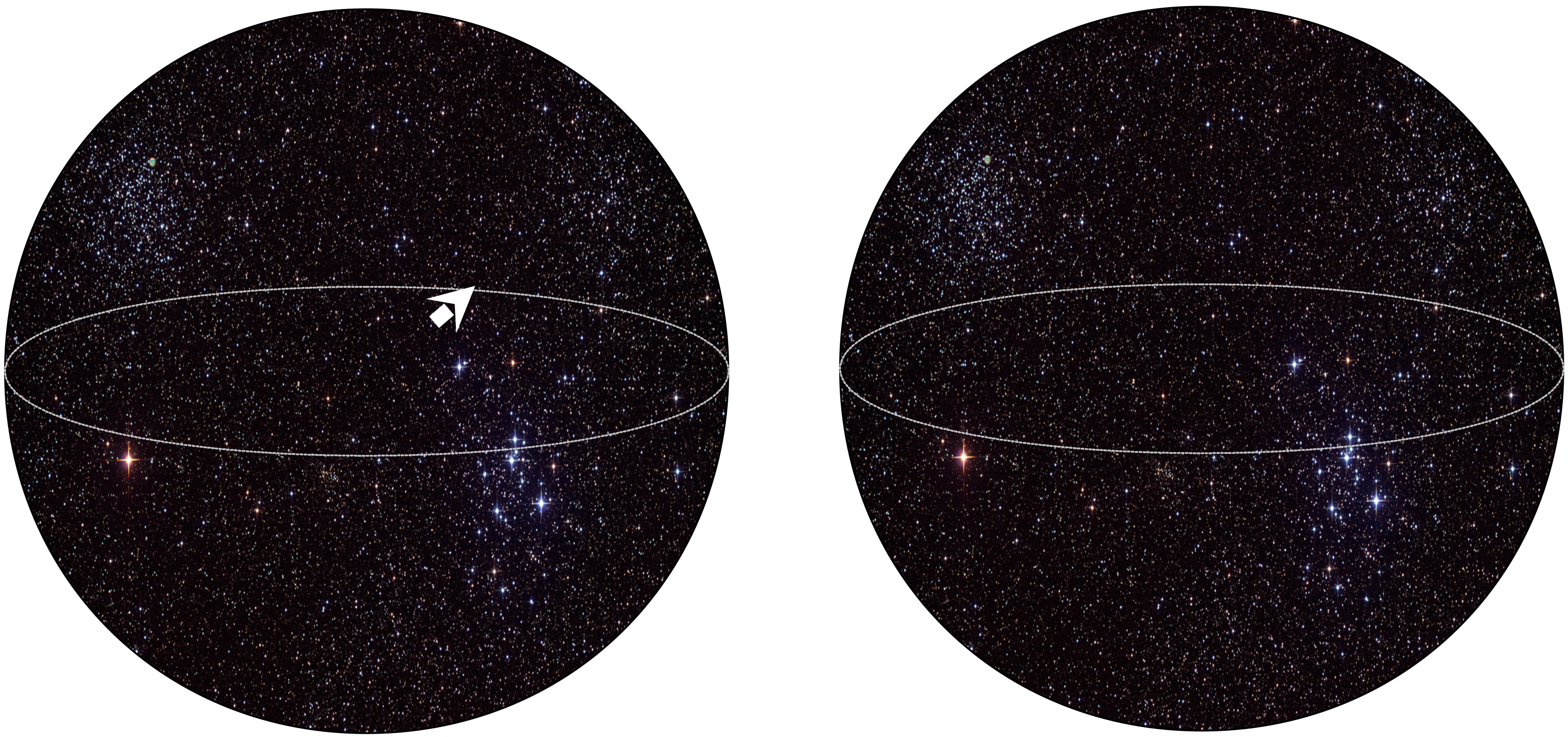
No podemos verla (no cabe en R^3) pero podemos imaginarla de varias maneras:

- $\{ (x,y,z,w) \; / \; x^2 + y^2 + z^2 + w^2 = 1\}$
- Compactificar R^3 con un punto
- Pegar dos bolas sólidas por su cáscara

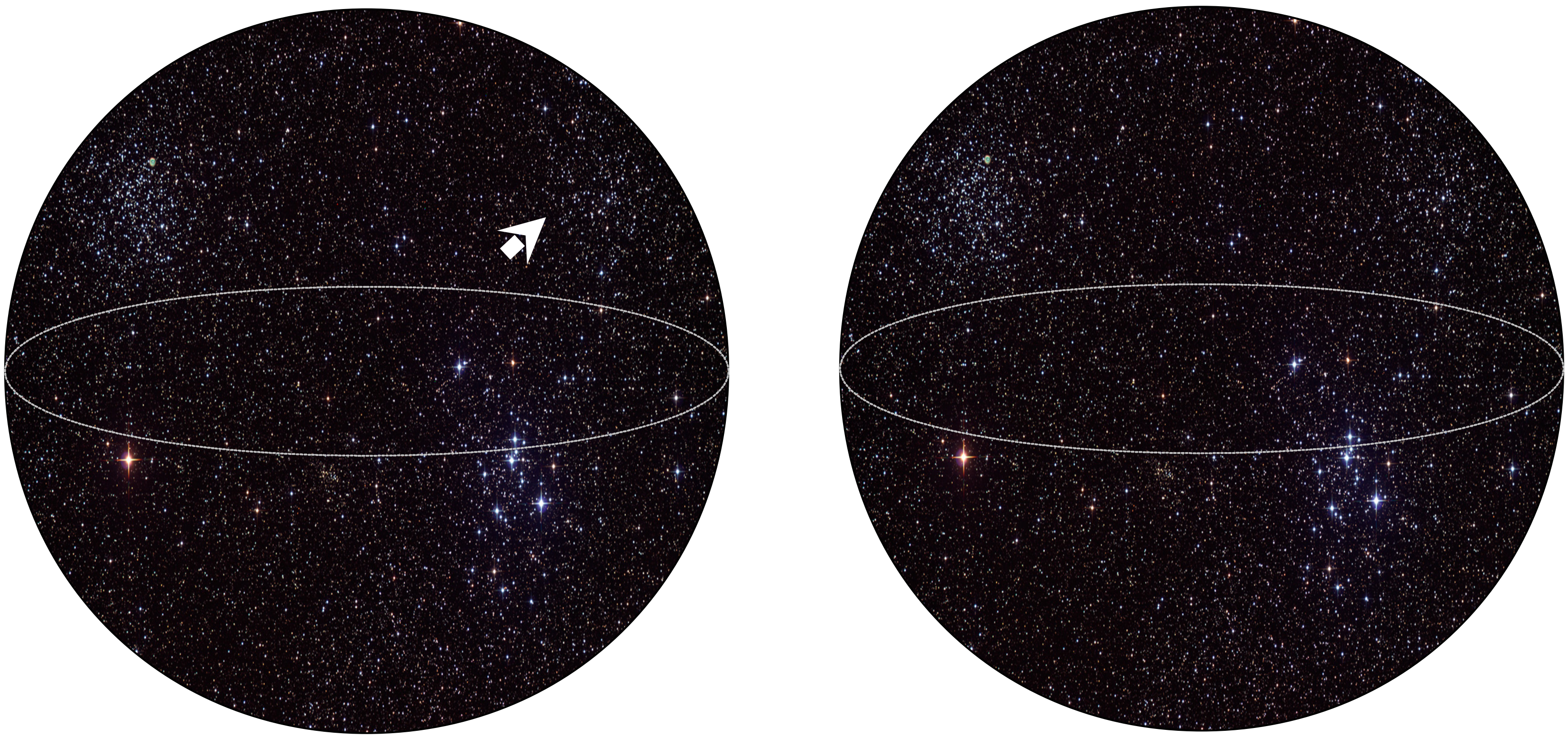
3-esfera: 2 bolas sólidas pegadas por la cáscara

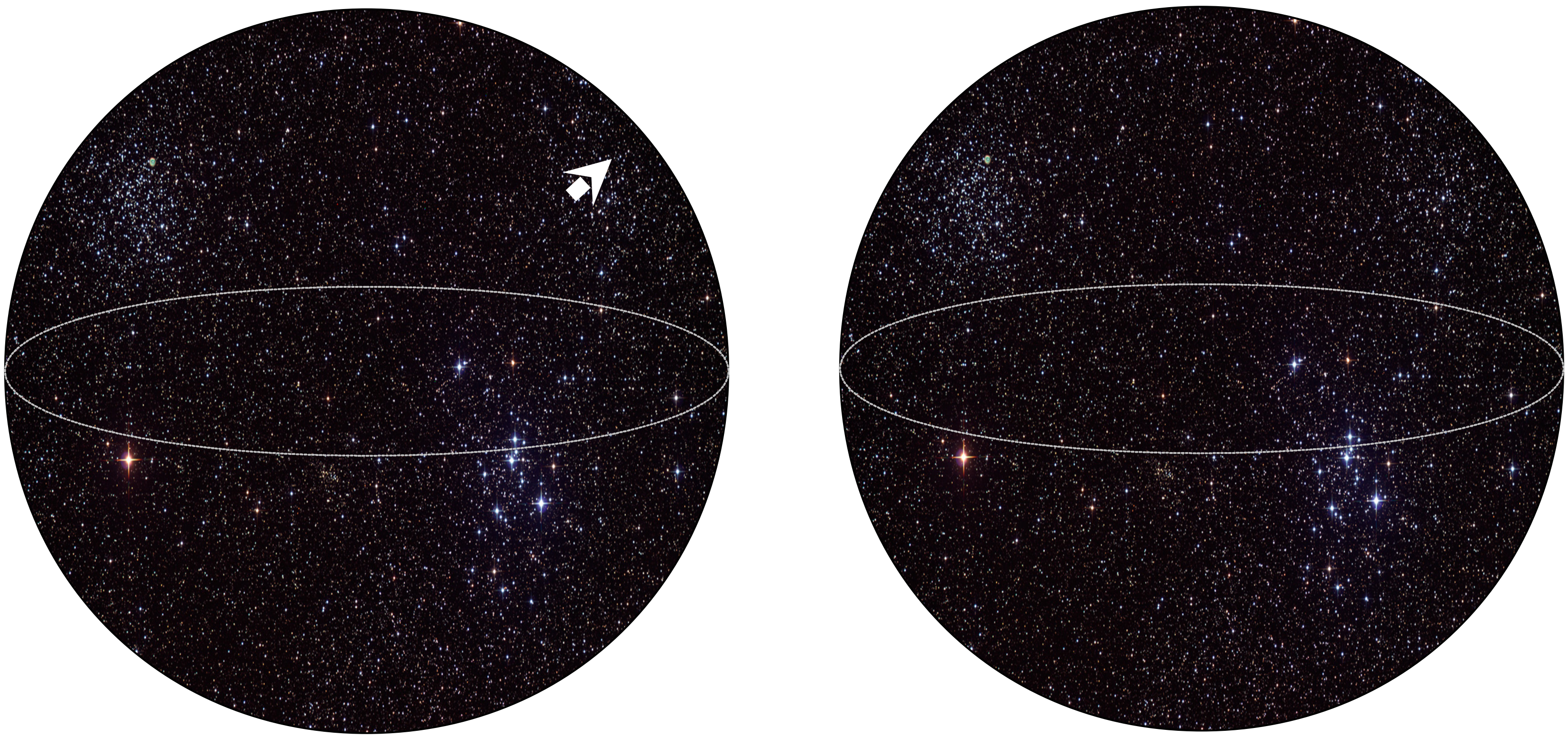
3-esfera: 2 bolas sólidas pegadas por la cáscara



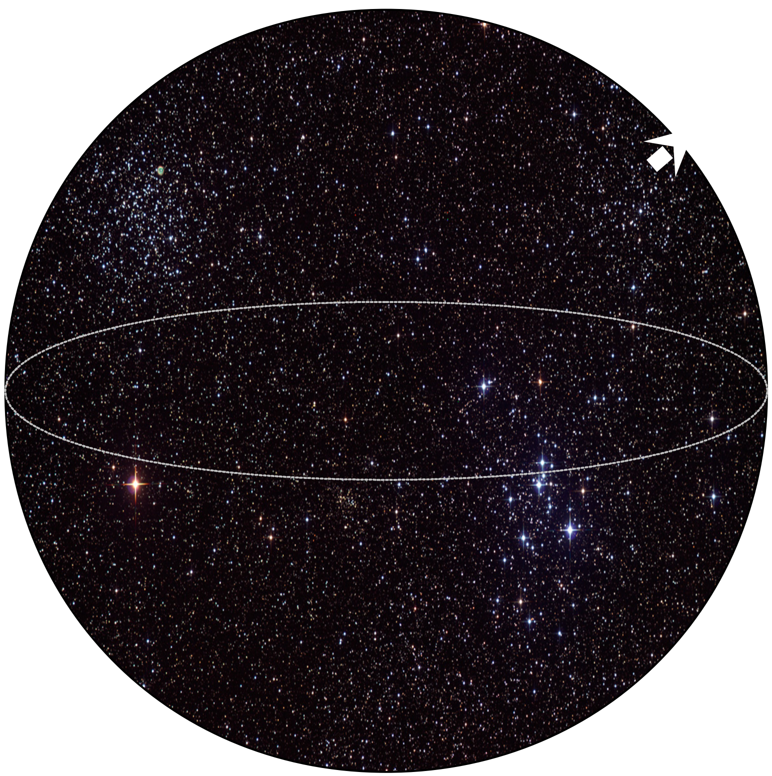
3-esfera: 2 bolas sólidas pegadas por la cáscara

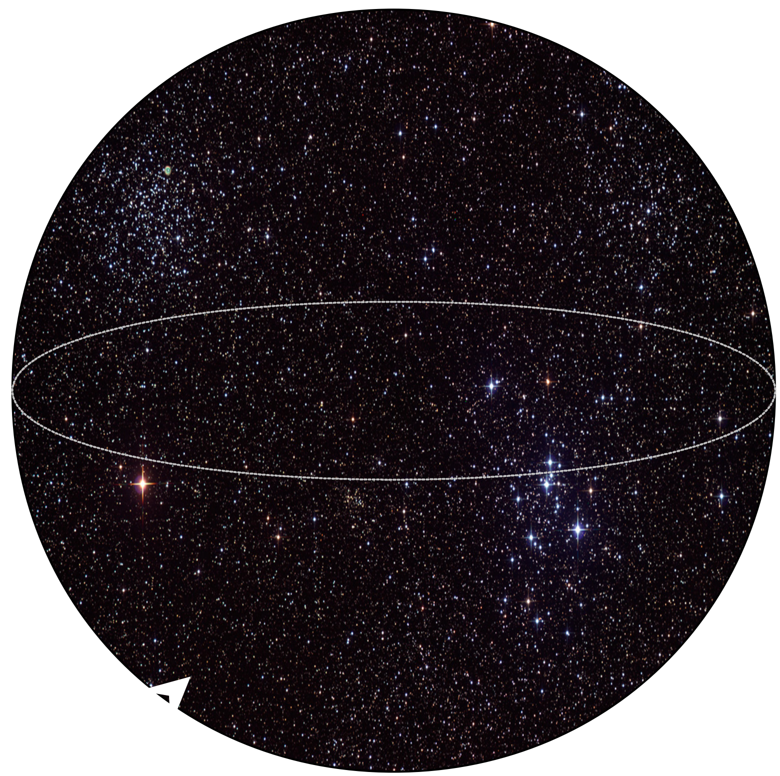


3-esfera: 2 bolas sólidas pegadas por la cáscara



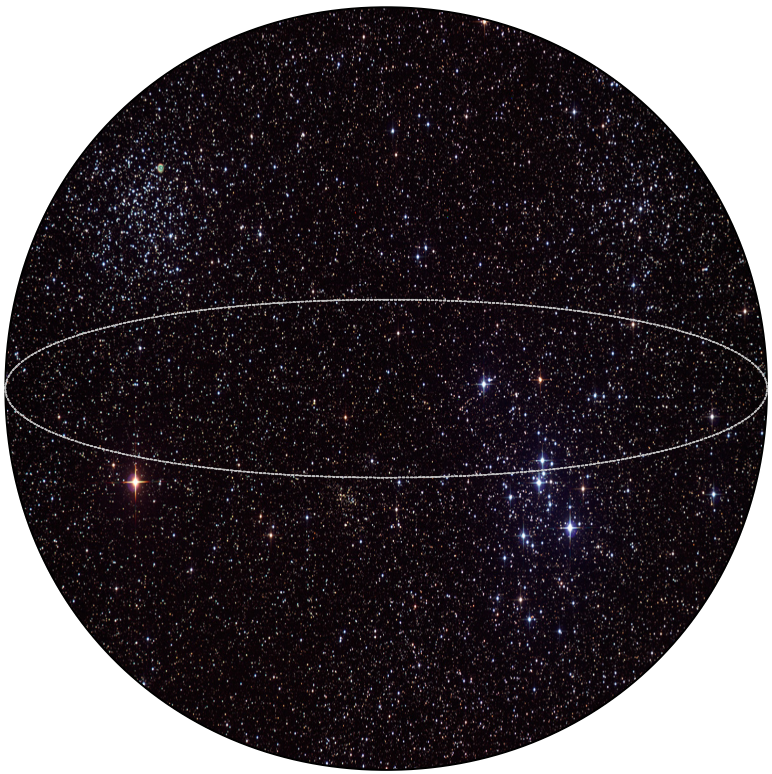
3-esfera: 2 bolas sólidas pegadas por la cáscara

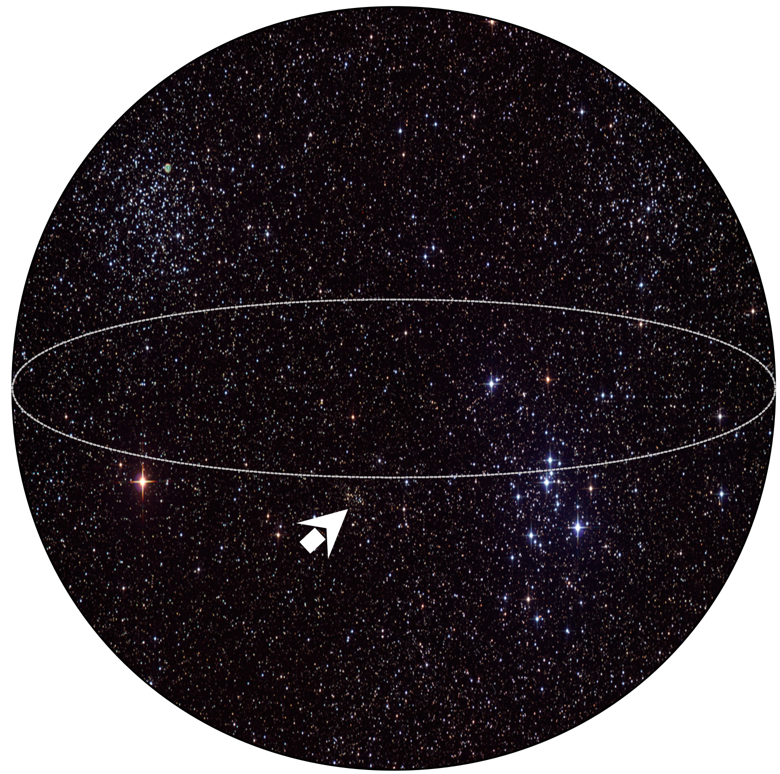




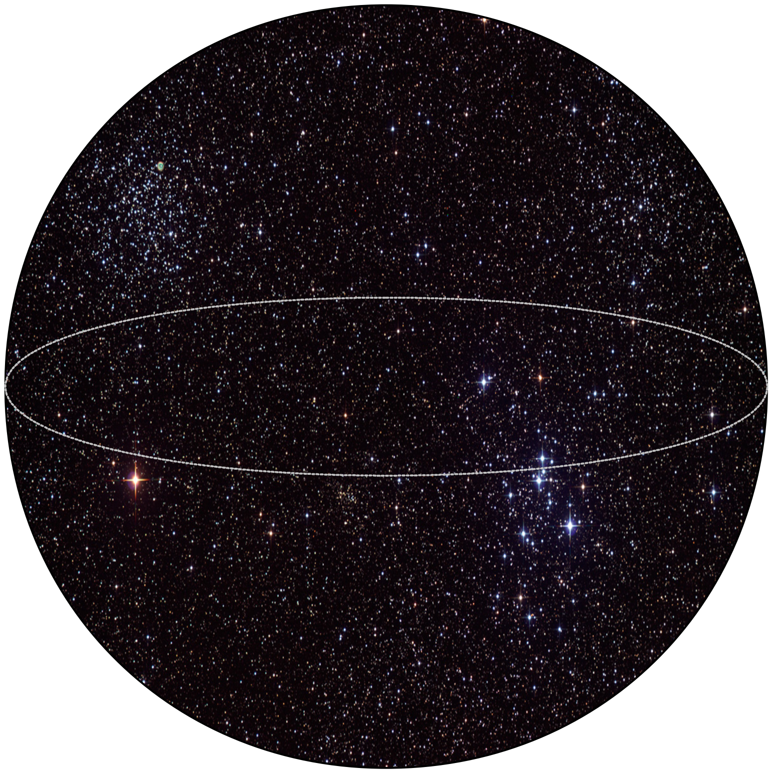
3-esfera: 2 bolas sólidas pegadas por la cáscara

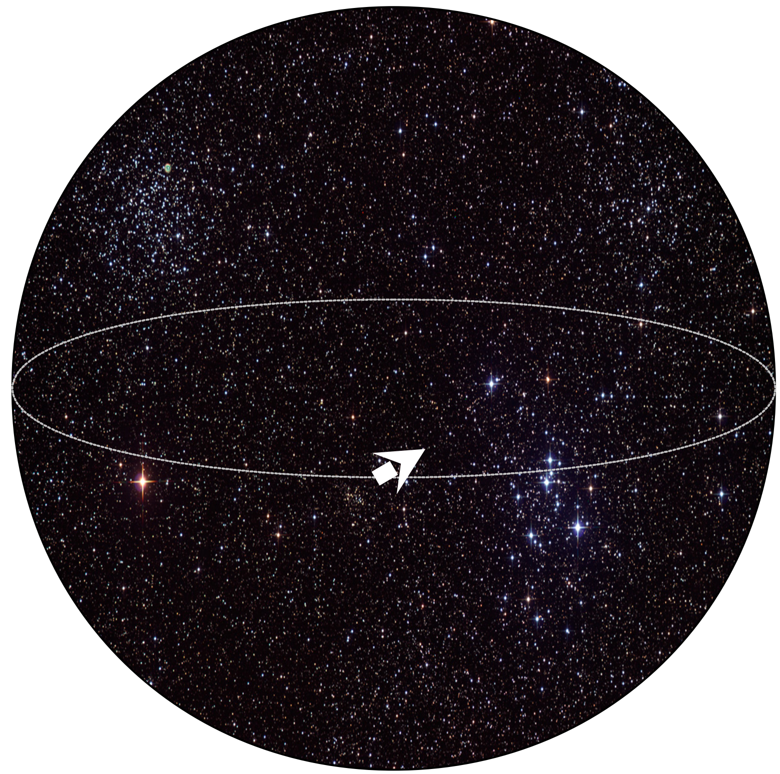
3-esfera: 2 bolas sólidas pegadas por la cáscara





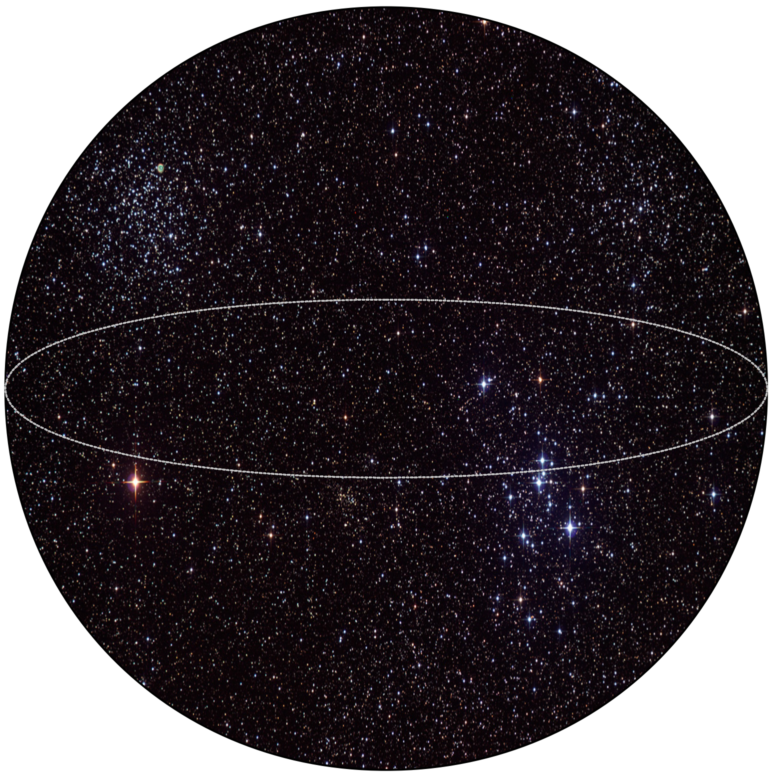
3-esfera: 2 bolas sólidas pegadas por la cáscara

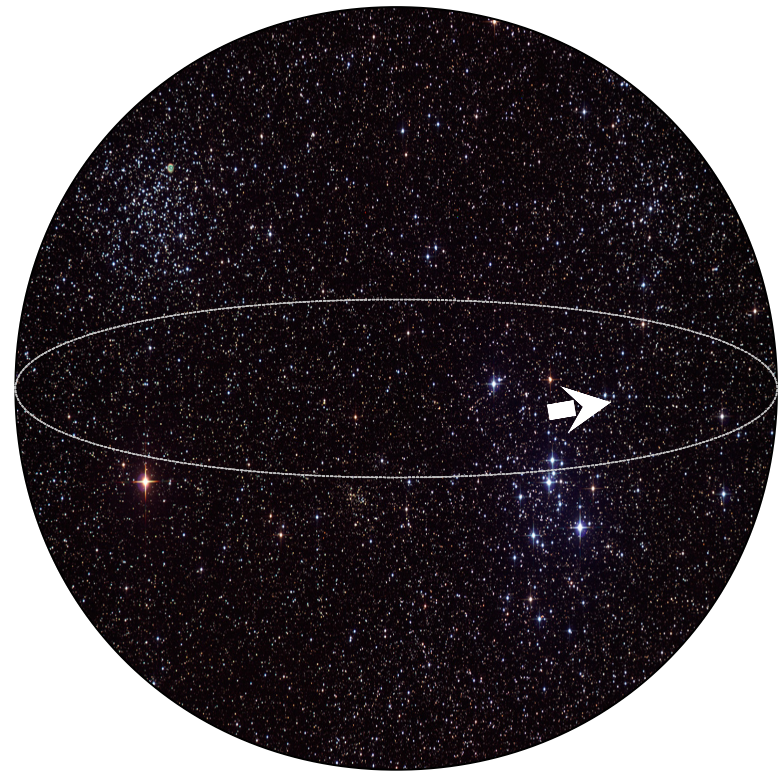




3-esfera: 2 bolas sólidas pegadas por la cáscara

3-esfera: 2 bolas sólidas pegadas por la cáscara



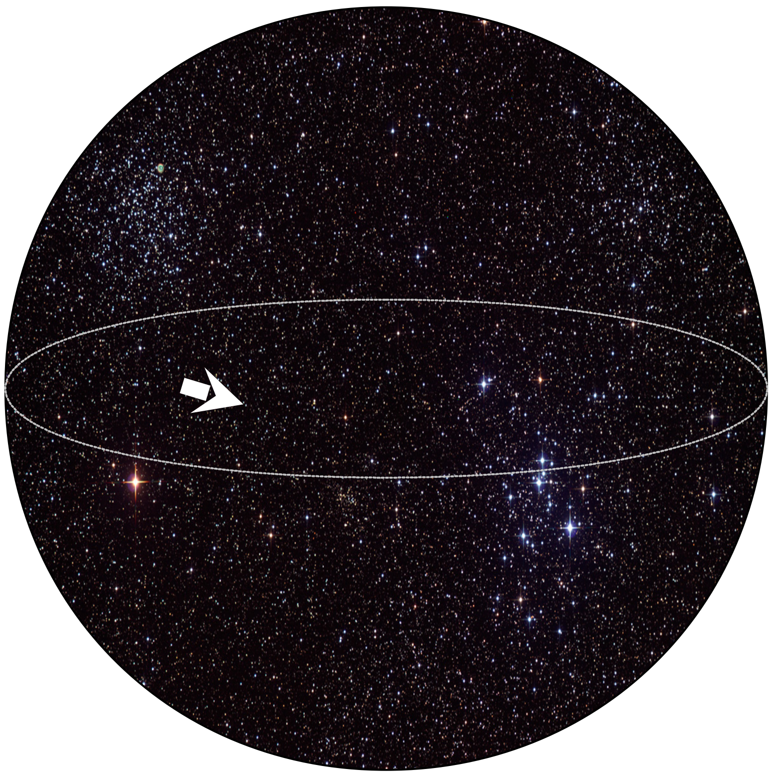


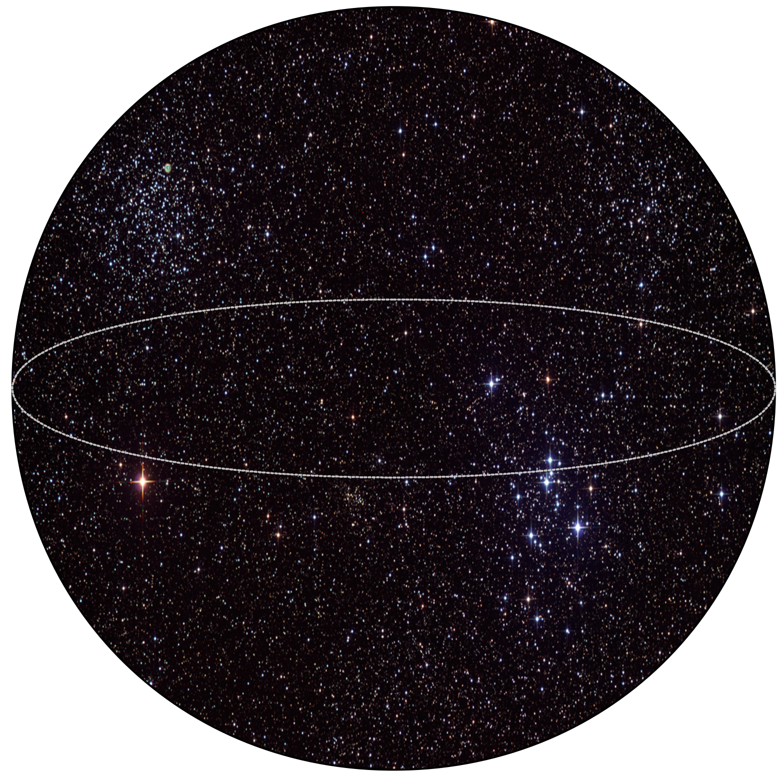
3-esfera: 2 bolas sólidas pegadas por la cáscara

3-esfera: 2 bolas sólidas pegadas por la cáscara

3-esfera: 2 bolas sólidas pegadas por la cáscara

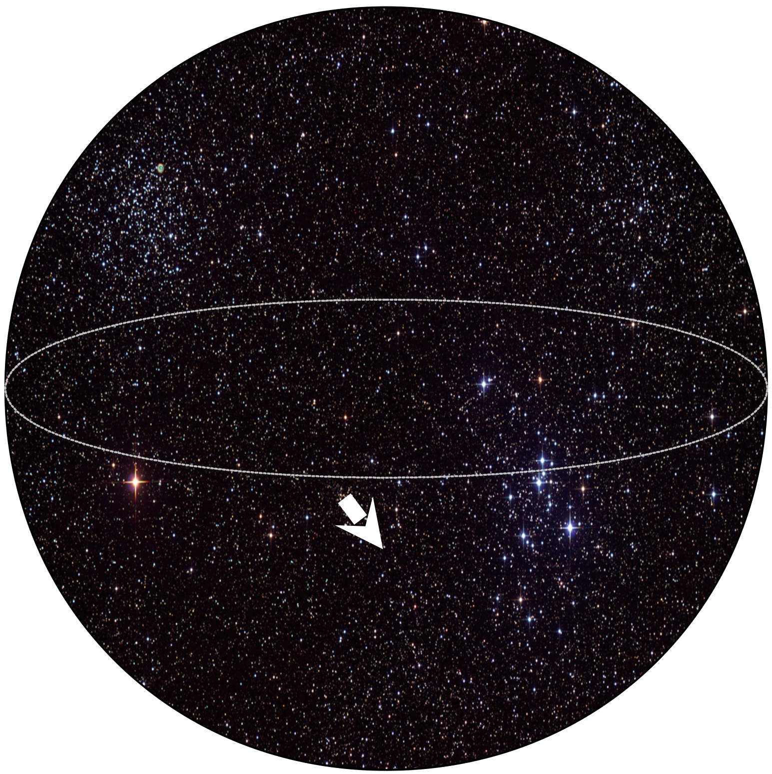
3-esfera: 2 bolas sólidas pegadas por la cáscara

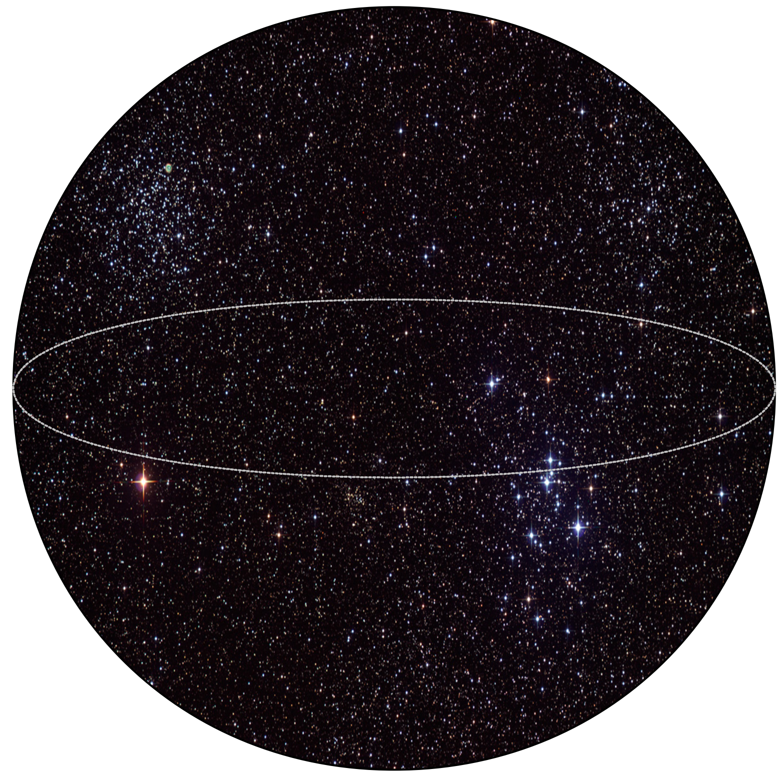




3-esfera: 2 bolas sólidas pegadas por la cáscara

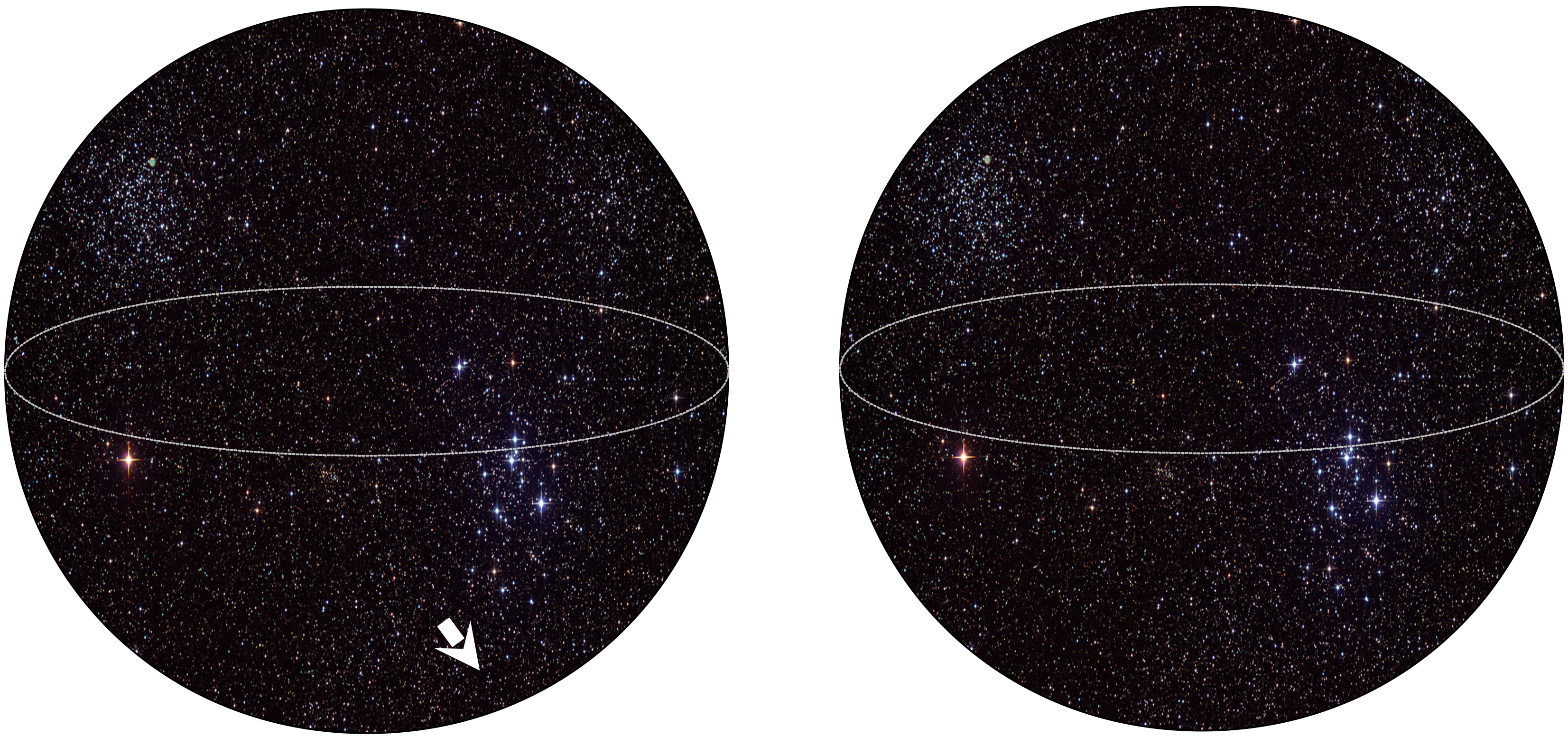
3-esfera: 2 bolas sólidas pegadas por la cáscara



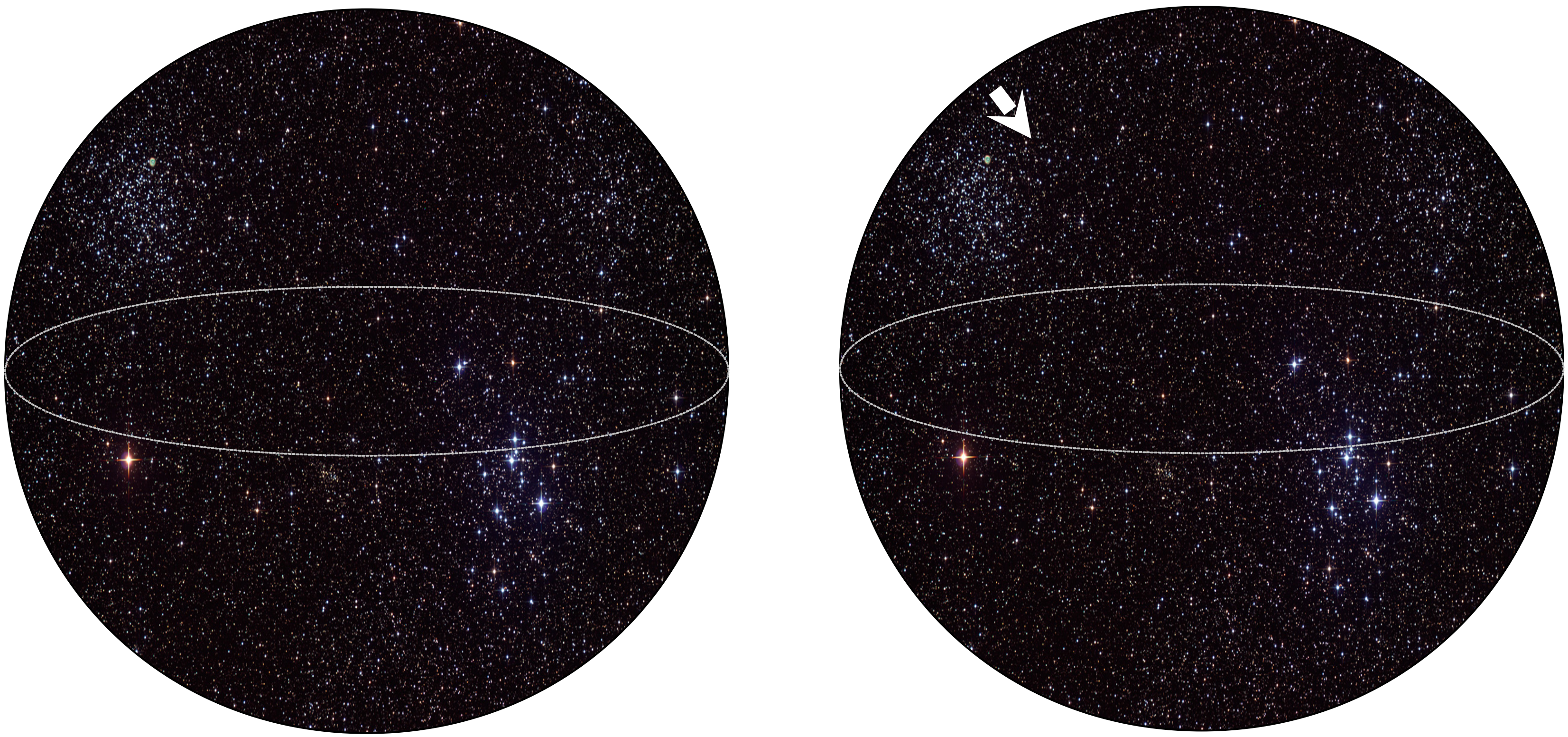


3-esfera: 2 bolas sólidas pegadas por la cáscara

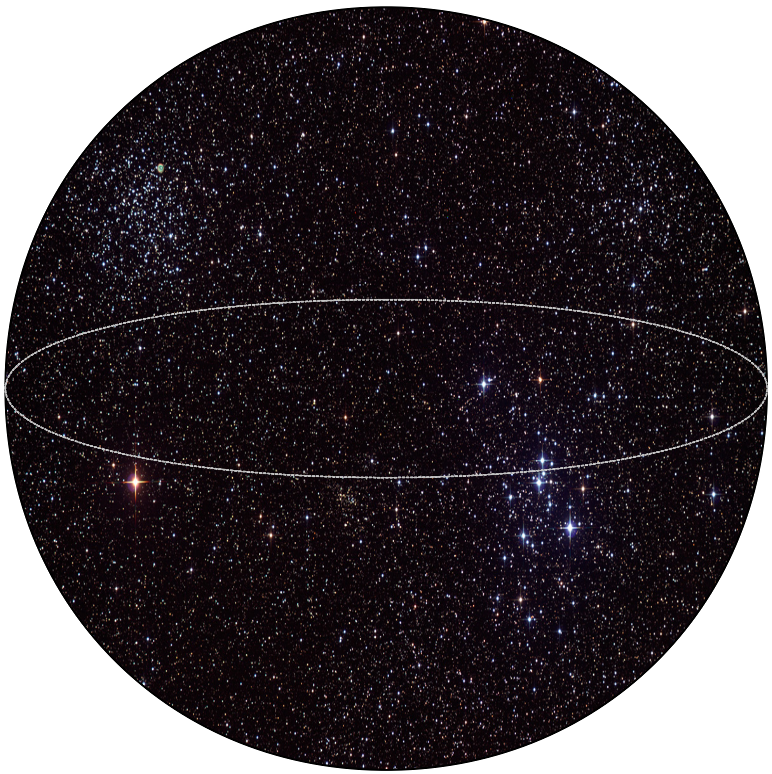
3-esfera: 2 bolas sólidas pegadas por la cáscara

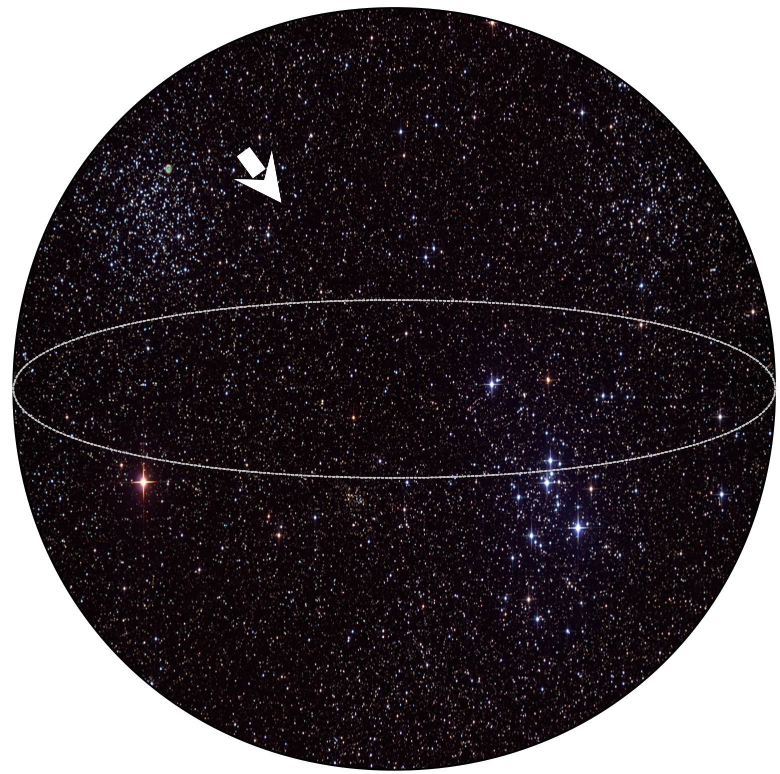


3-esfera: 2 bolas sólidas pegadas por la cáscara

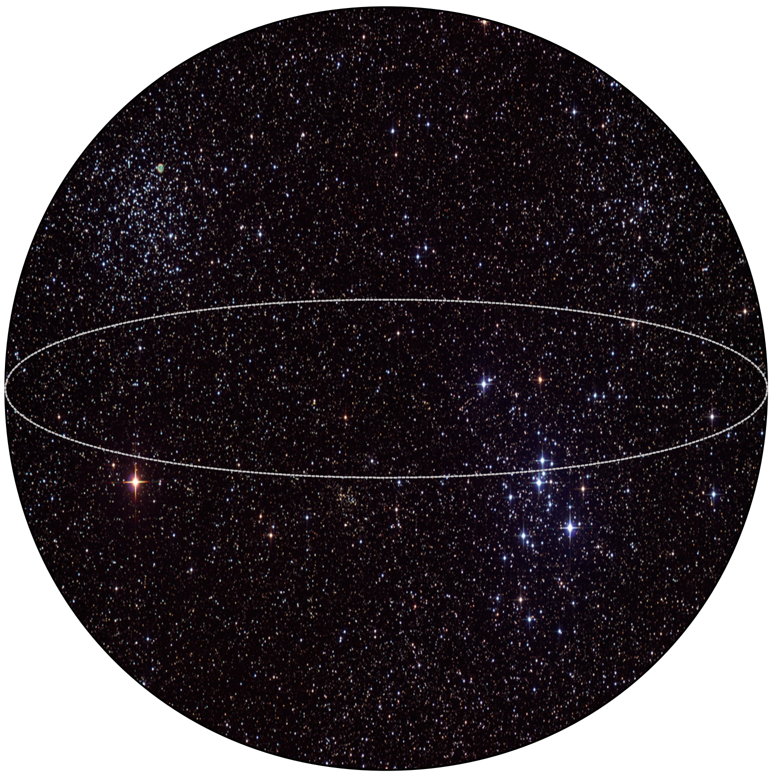


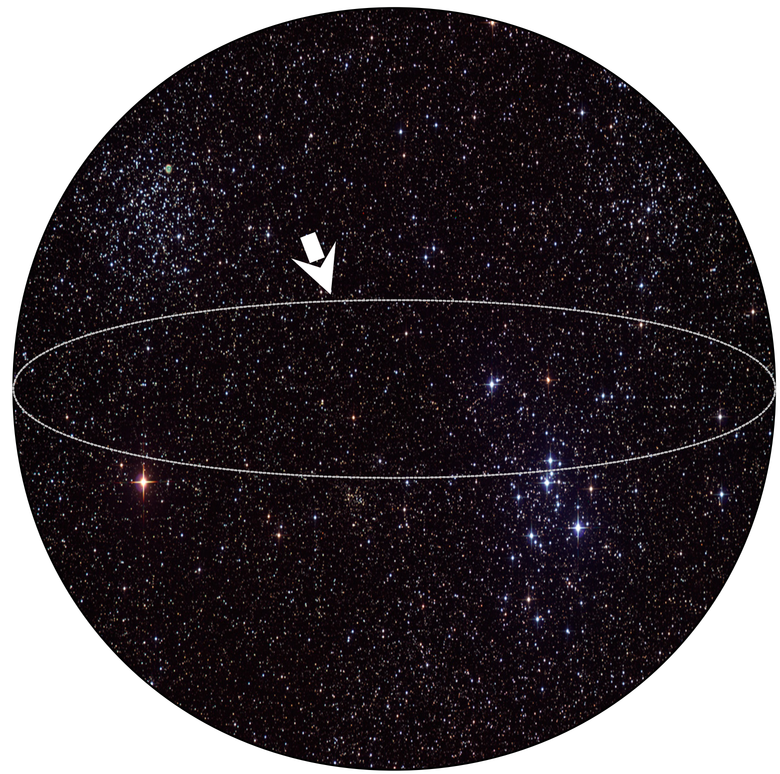
3-esfera: 2 bolas sólidas pegadas por la cáscara





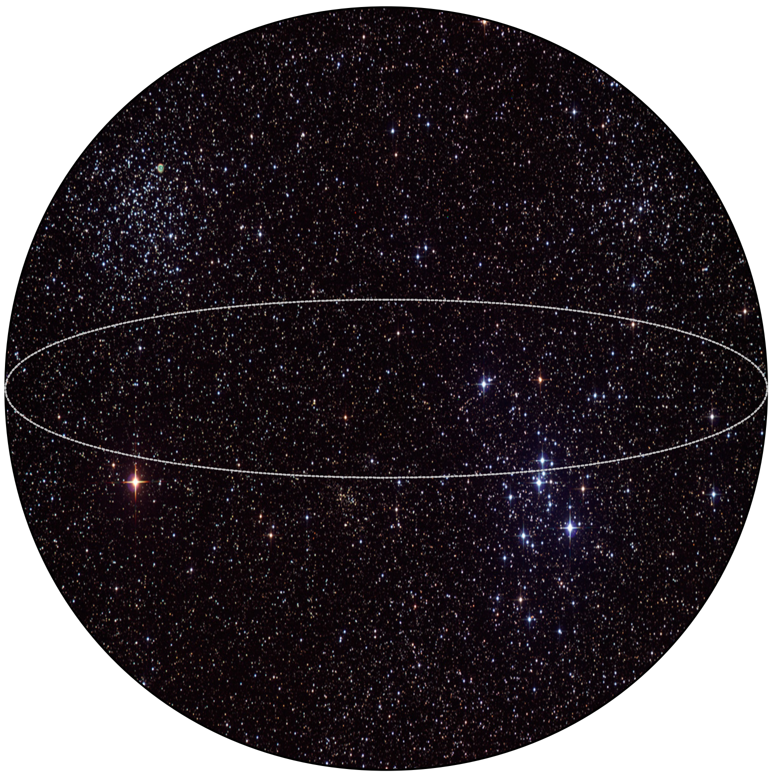
3-esfera: 2 bolas sólidas pegadas por la cáscara

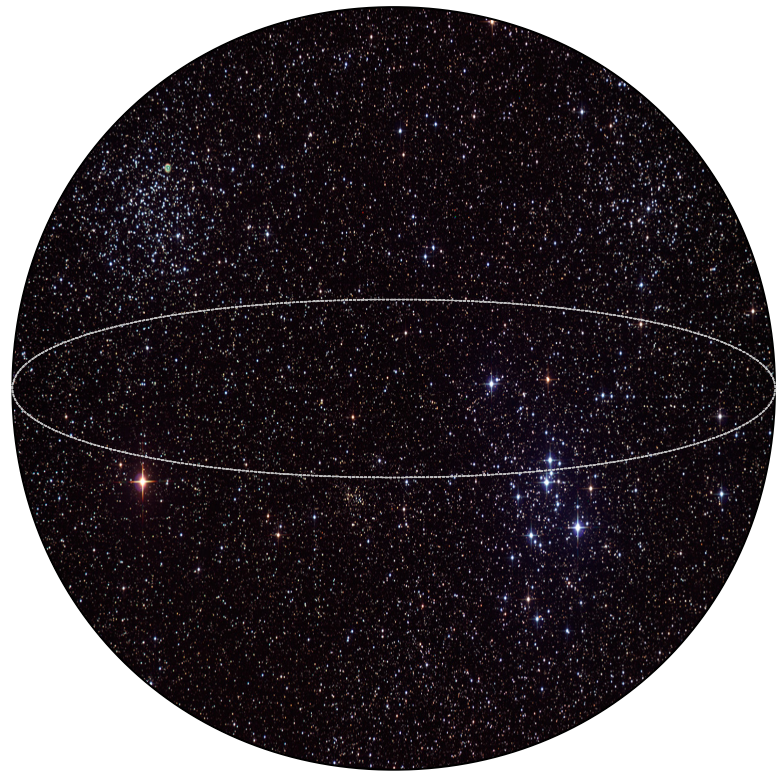




3-esfera: 2 bolas sólidas pegadas por la cáscara

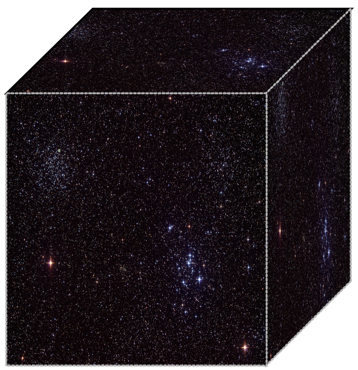
3-esfera: 2 bolas sólidas pegadas por la cáscara



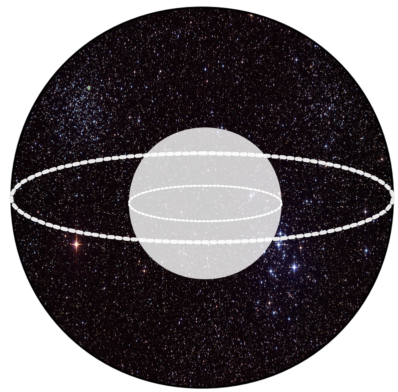


Productos

$R^3 = R^2 \times R$

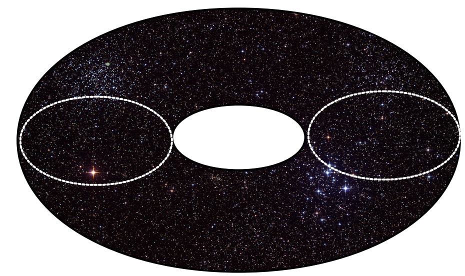


$S^2 \times R$



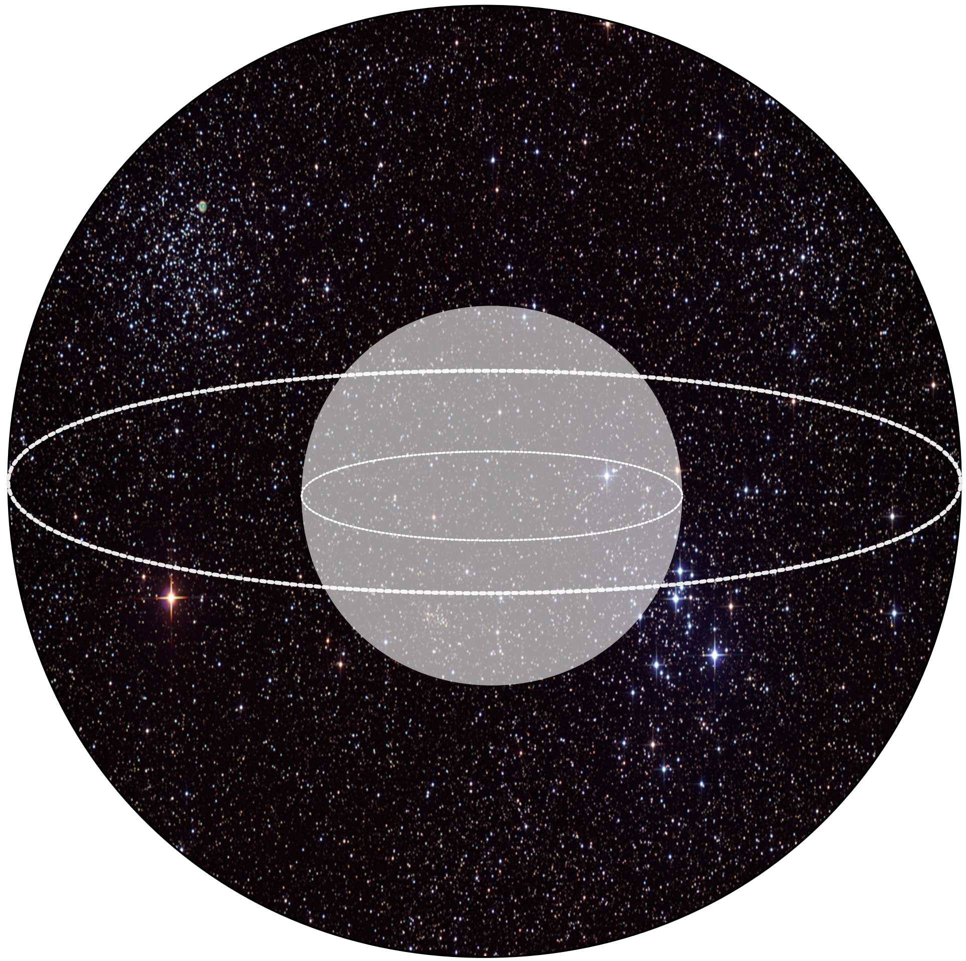
Superficie x R

$R^2 \times S^1$



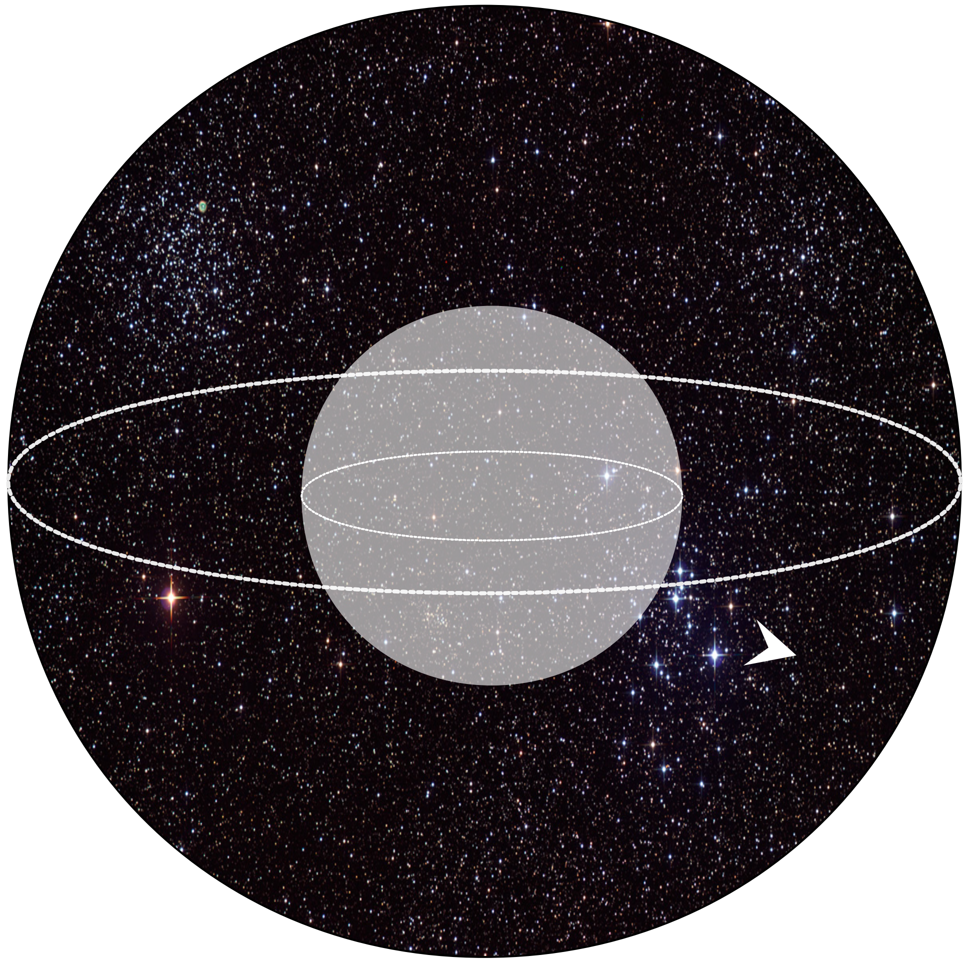
Superficie x S^1

$S^2 \times S^1$



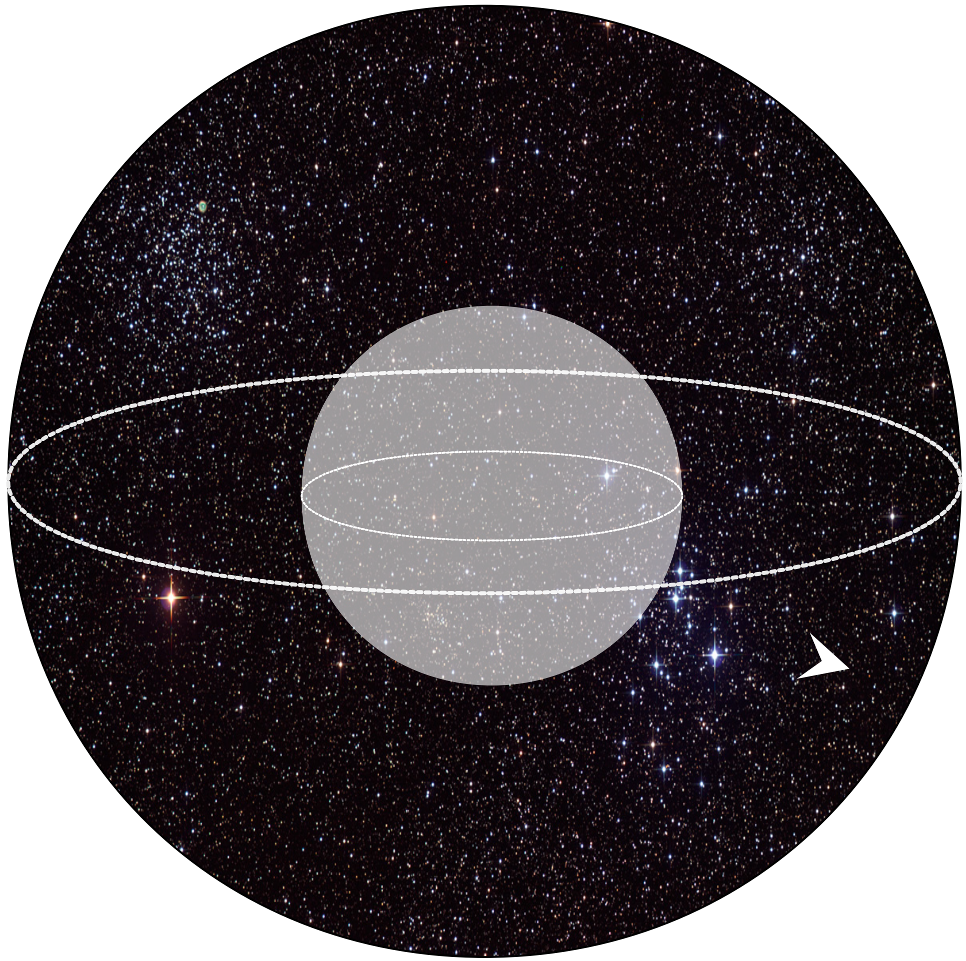
Tomar $S^2 \times [0,1]$ y pegar la esfera $S^2 \times 0$ con la esfera $S^2 \times 1$

$S^2 \times S^1$



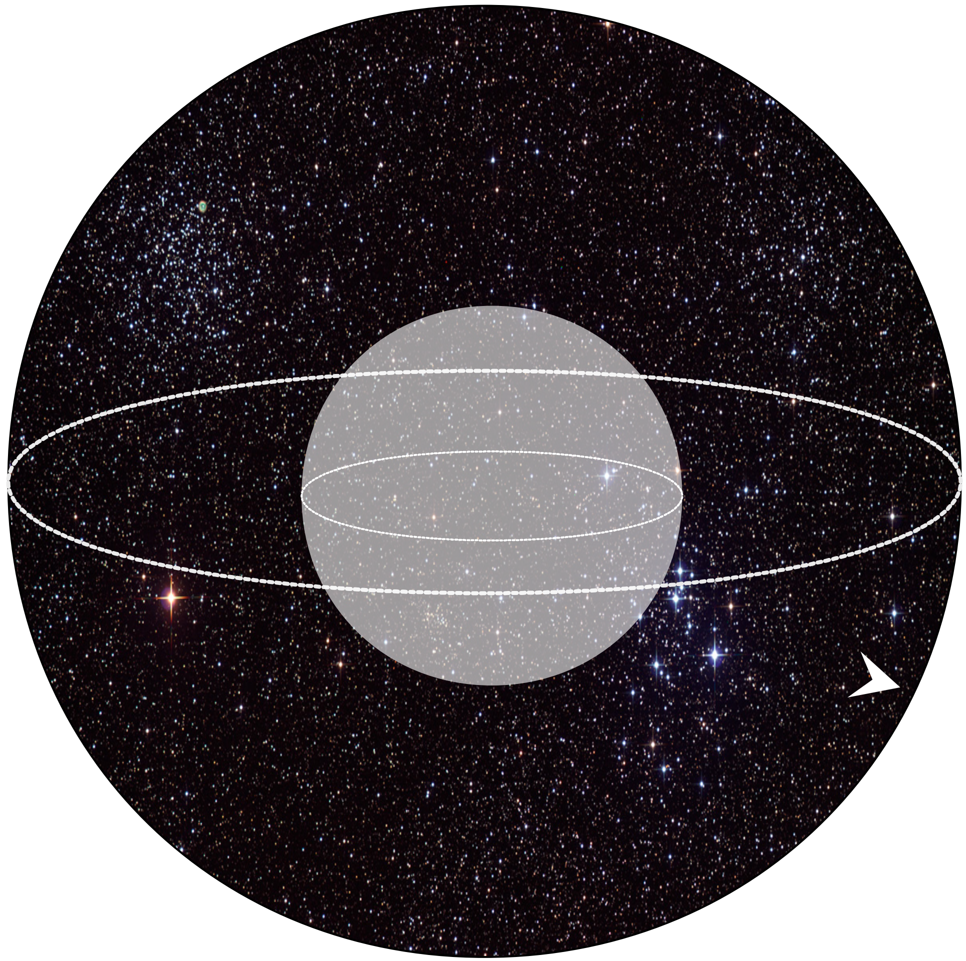
Tomar $S^2 \times [0,1]$ y pegar la esfera $S^2 \times 0$ con la esfera $S^2 \times 1$

$S^2 \times S^1$



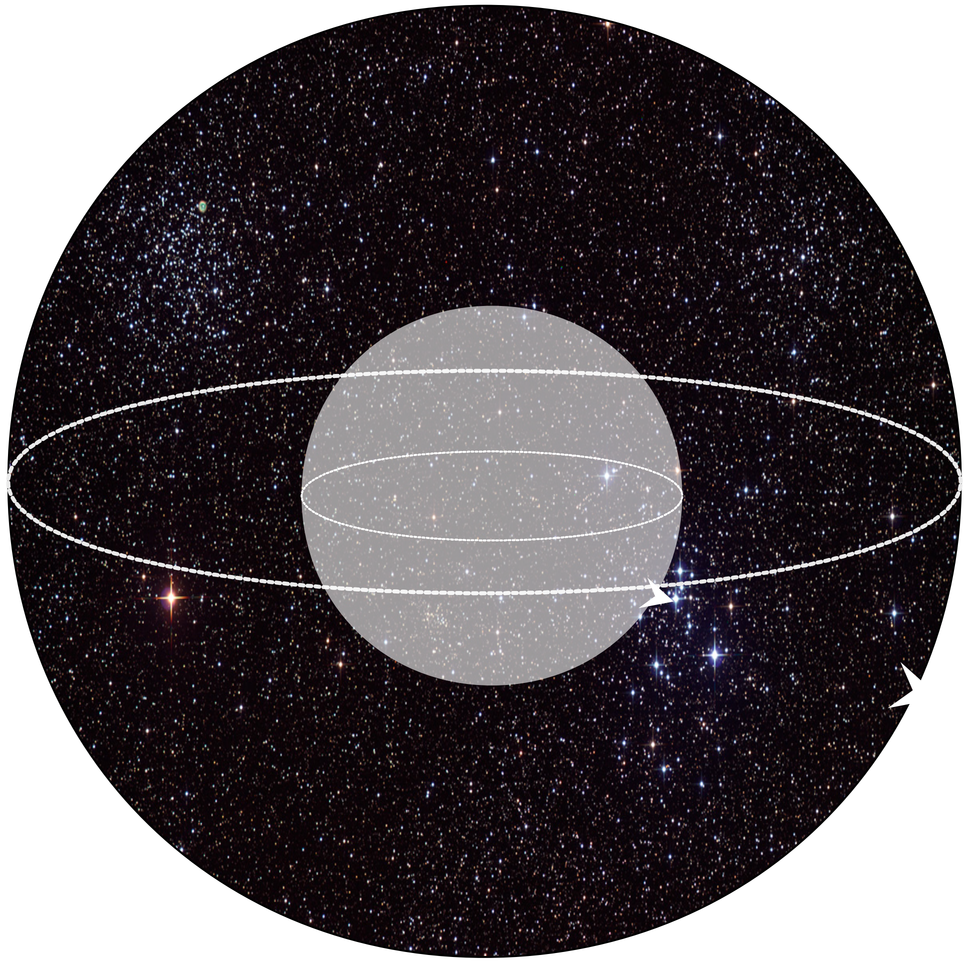
Tomar $S^2 \times [0,1]$ y pegar la esfera $S^2 \times 0$ con la esfera $S^2 \times 1$

$S^2 \times S^1$



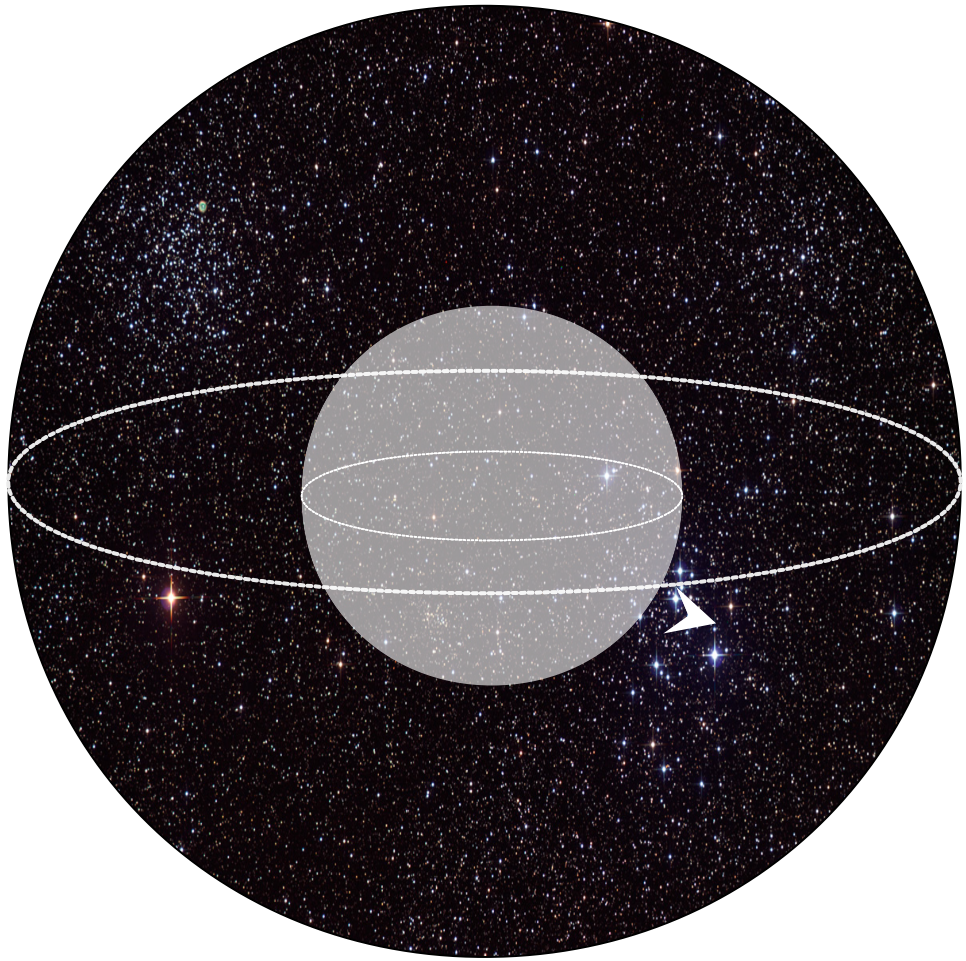
Tomar $S^2 \times [0,1]$ y pegar la esfera $S^2 \times 0$ con la esfera $S^2 \times 1$

$S^2 \times S^1$



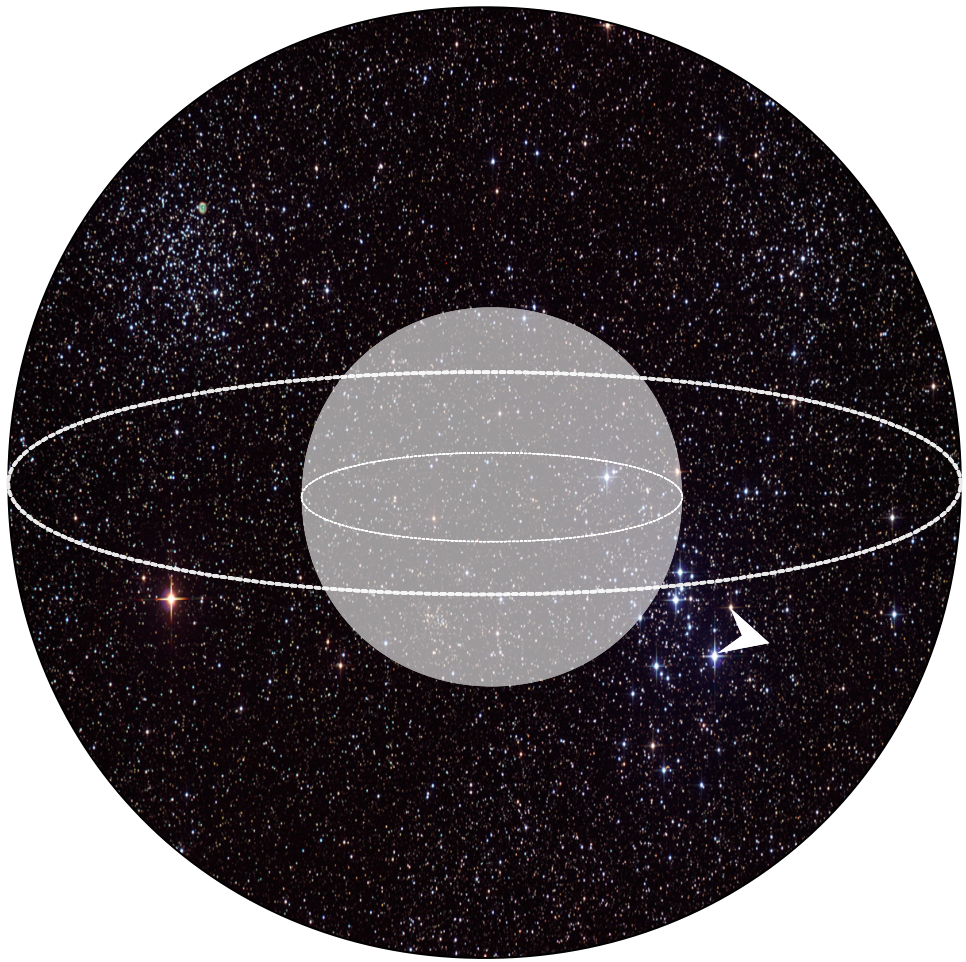
Tomar $S^2 \times [0,1]$ y pegar la esfera $S^2 \times 0$ con la esfera $S^2 \times 1$

$S^2 \times S^1$



Tomar $S^2 \times [0,1]$ y pegar la esfera $S^2 \times 0$ con la esfera $S^2 \times 1$

$S^2 \times S^1$



Tomar $S^2 \times [0,1]$ y pegar la esfera $S^2 \times 0$ con la esfera $S^2 \times 1$

Dos tipos de Variedades

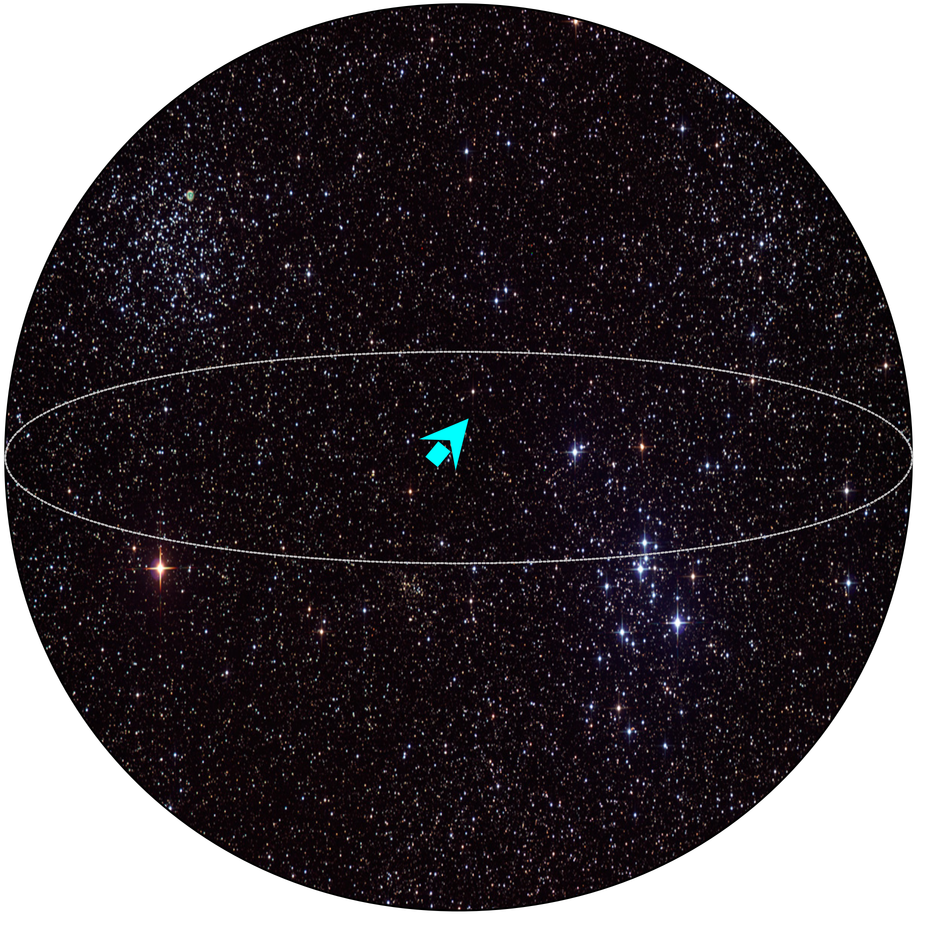
Abiertas: (Infinitas, no compactas)

ej. R^3 , superficie x R

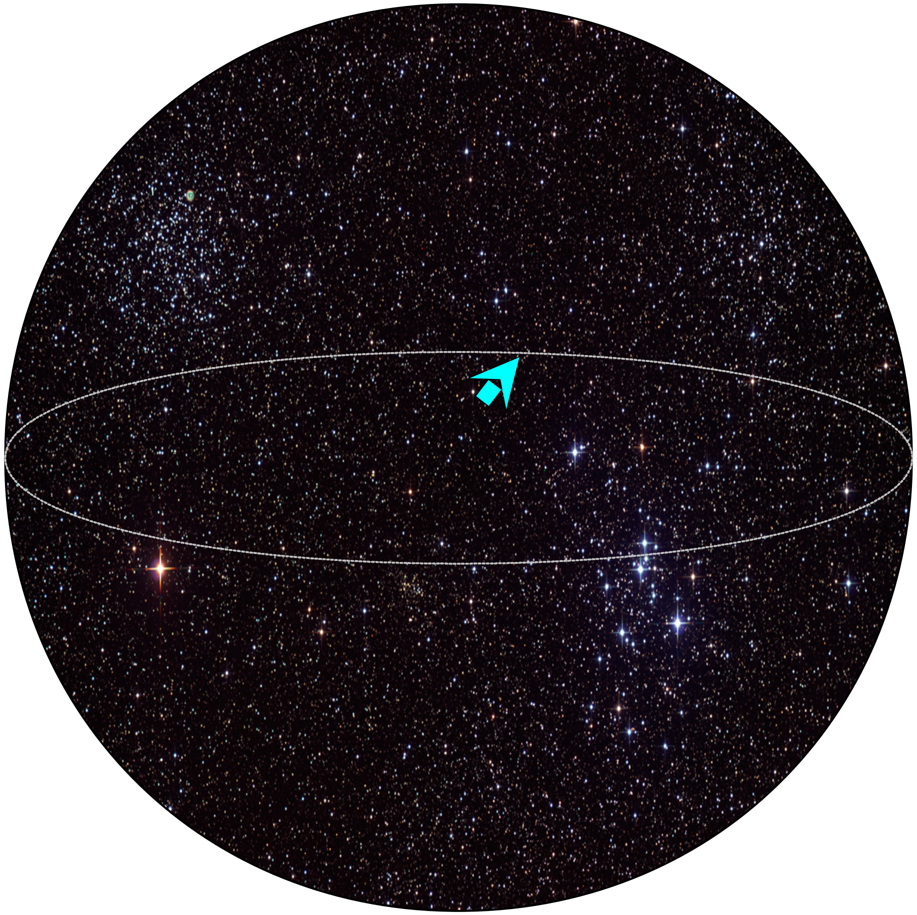
Cerradas: (finitas, compactas)

ej. S^3 , superficie cerrada x S^1

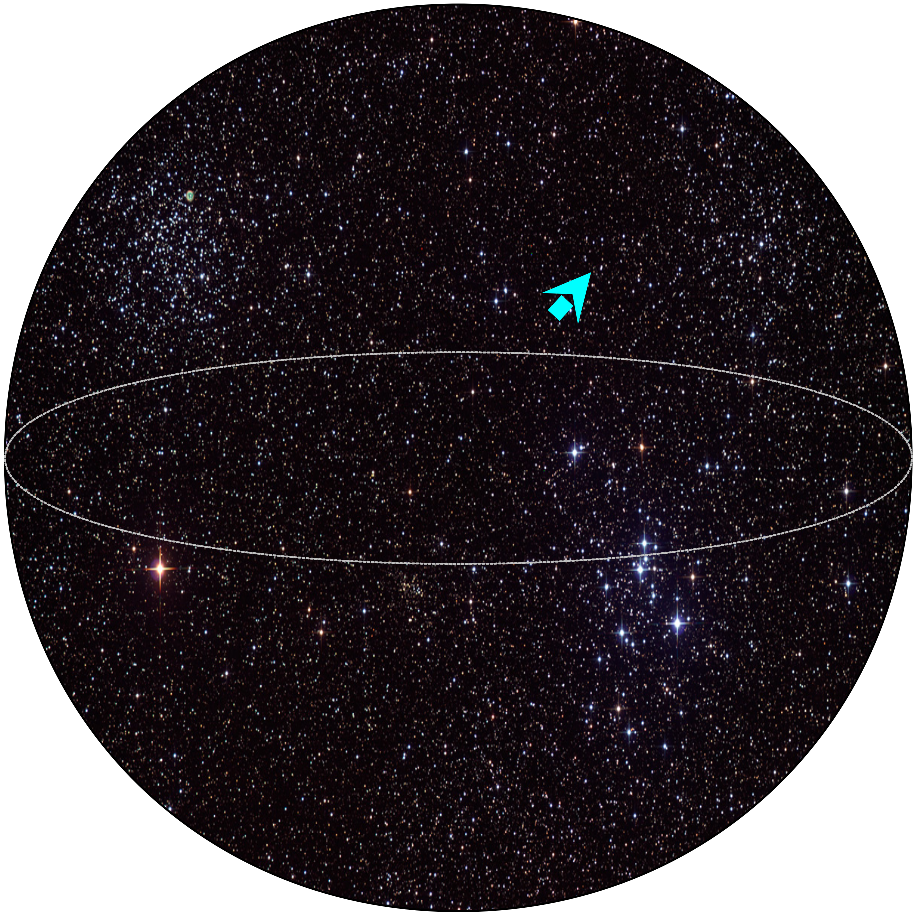
El espacio proyectivo



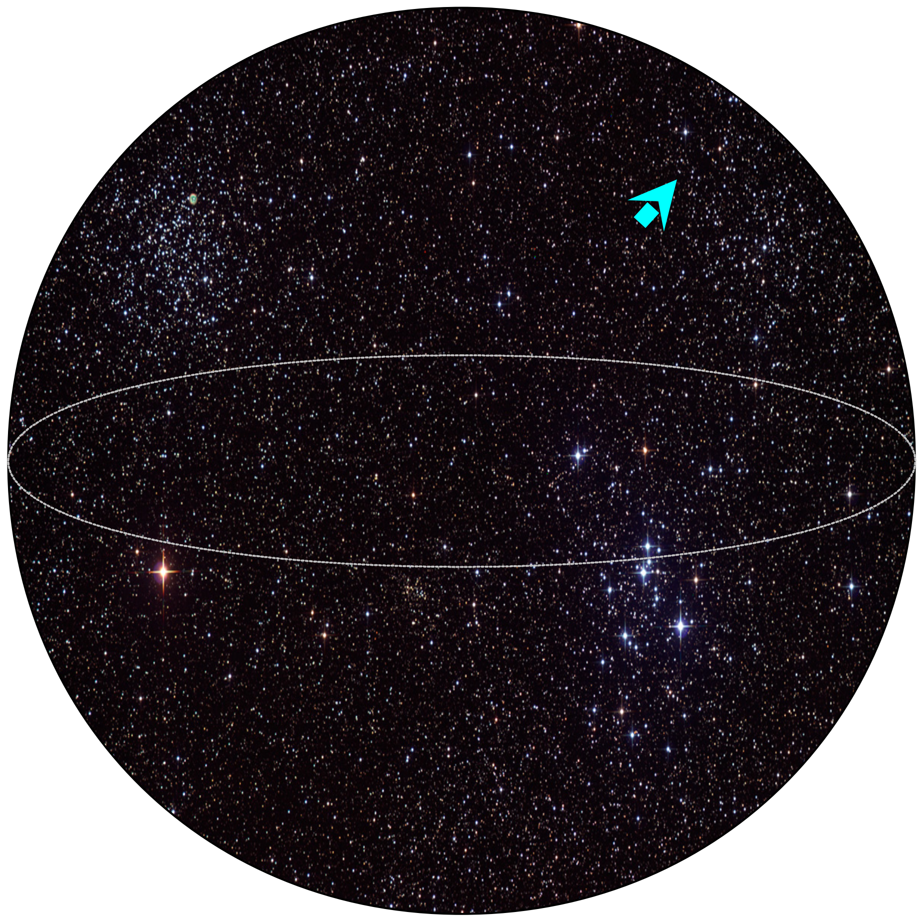
El espacio proyectivo



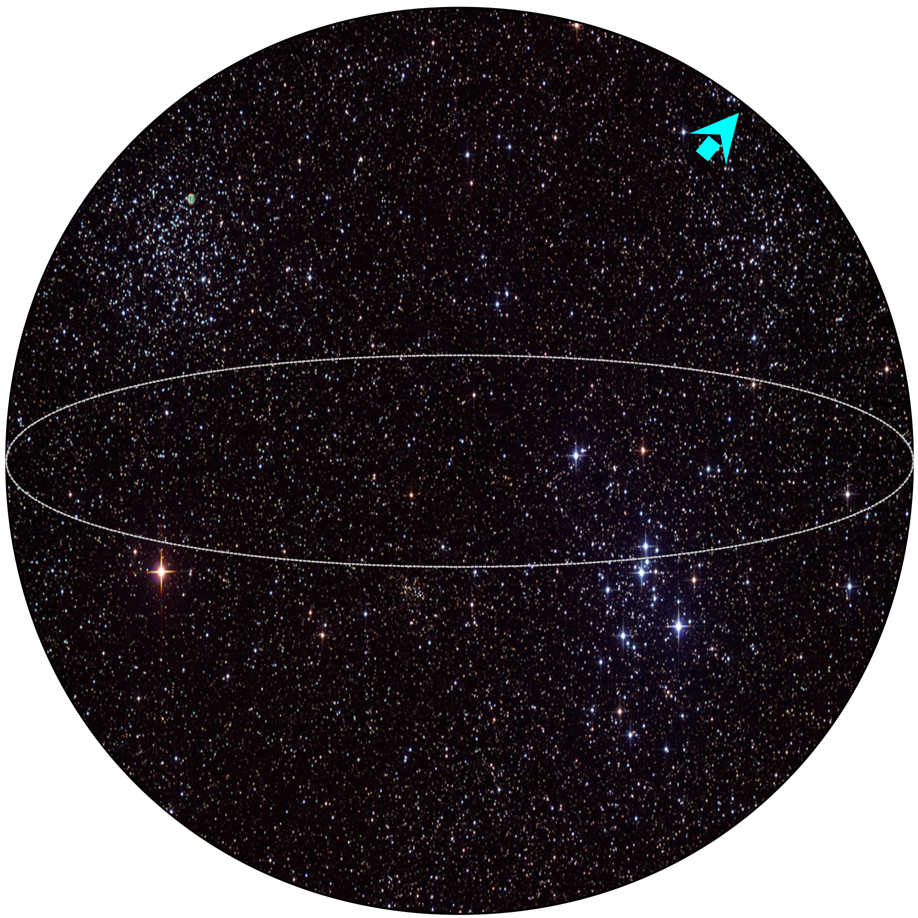
El espacio proyectivo



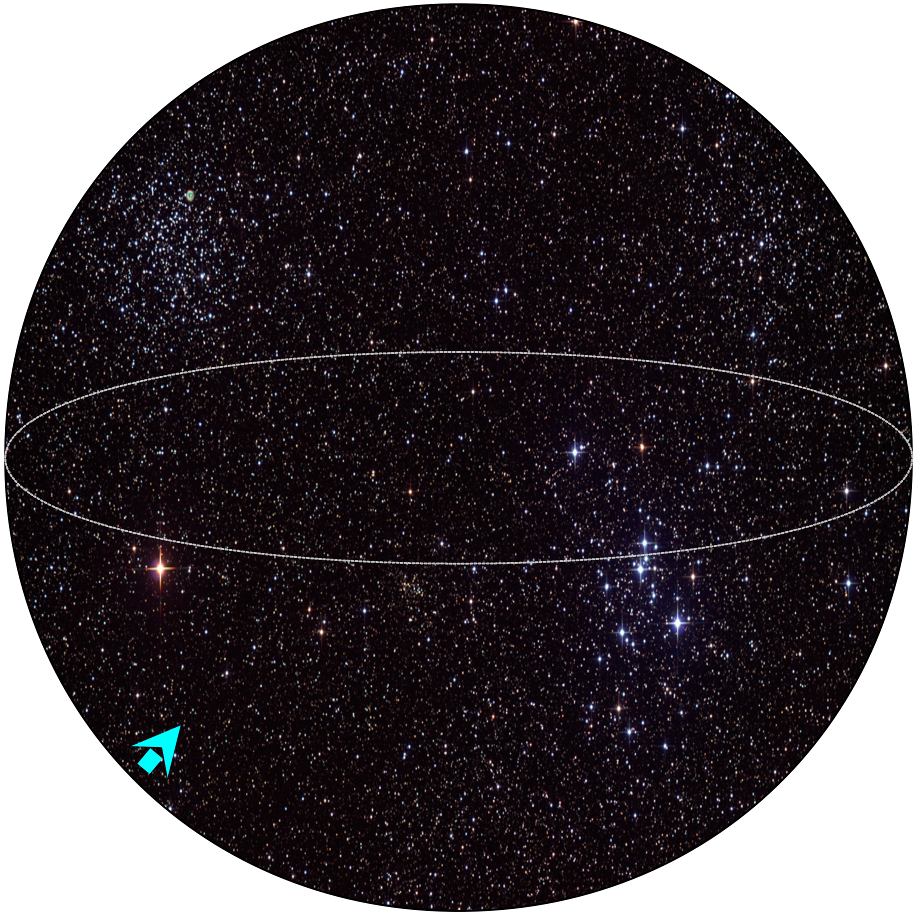
El espacio proyectivo



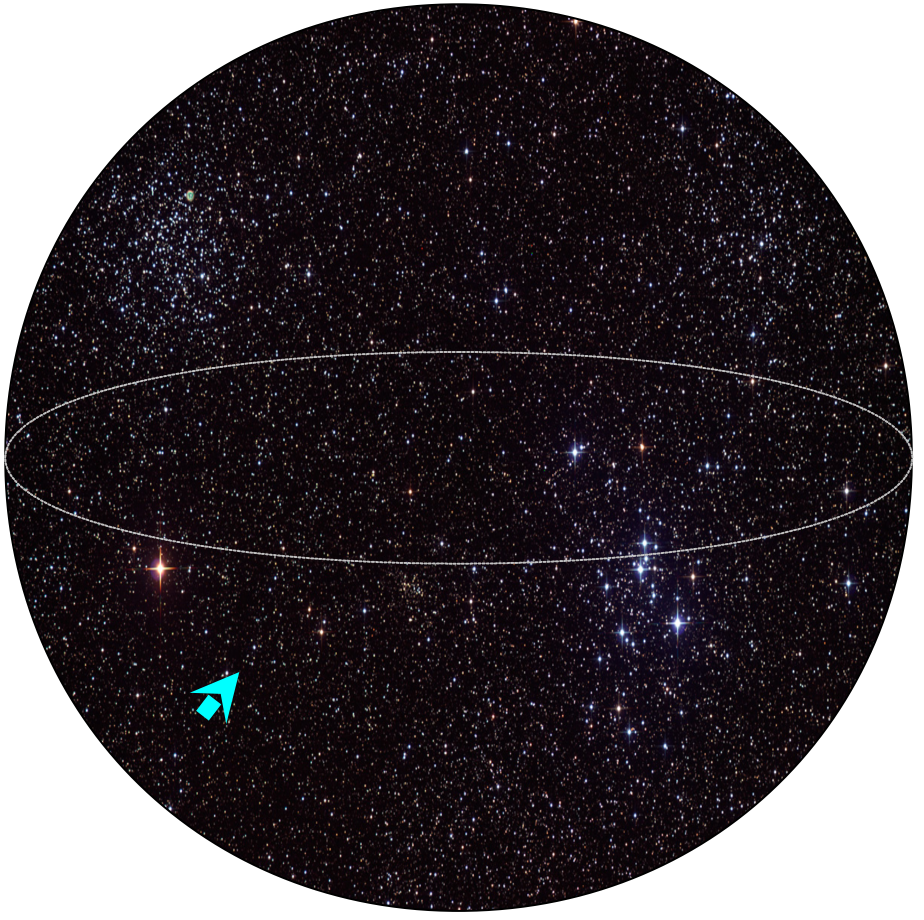
El espacio proyectivo



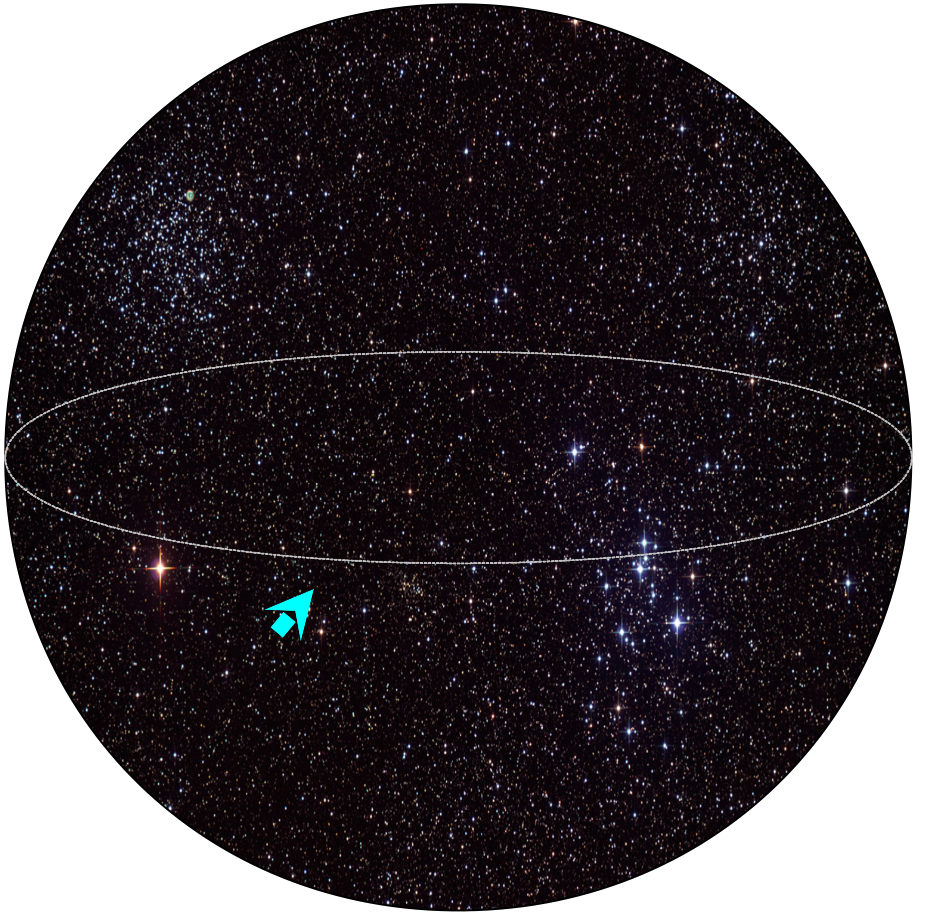
El espacio proyectivo



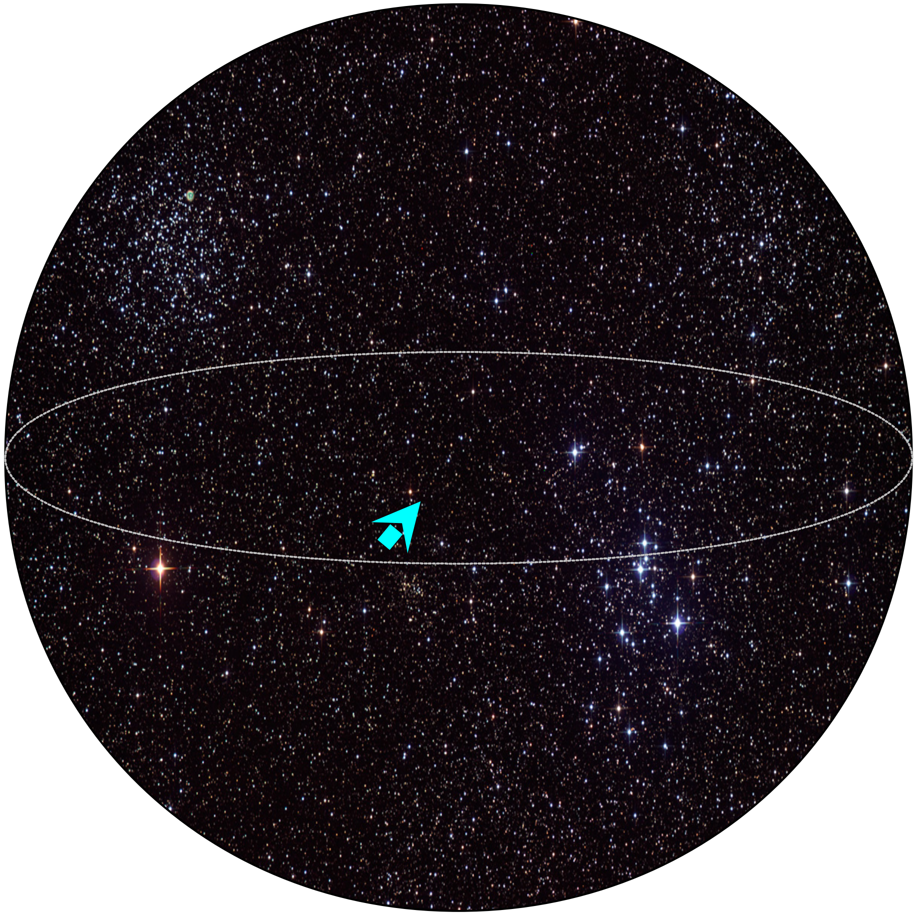
El espacio proyectivo



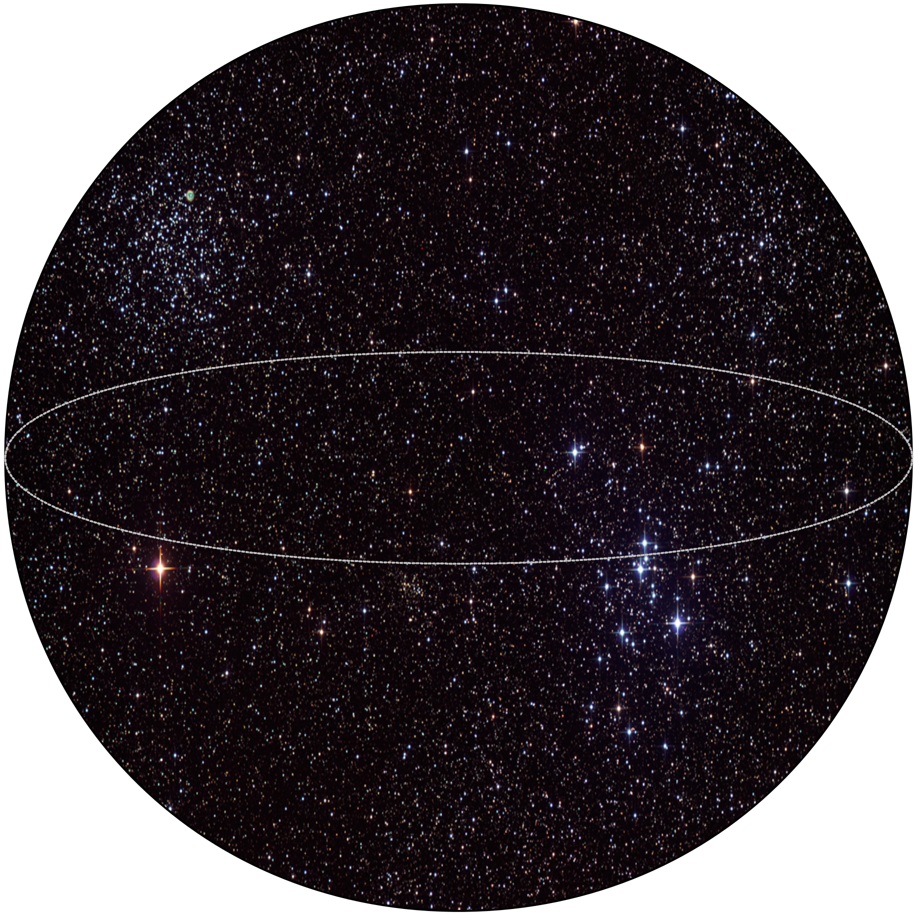
El espacio proyectivo



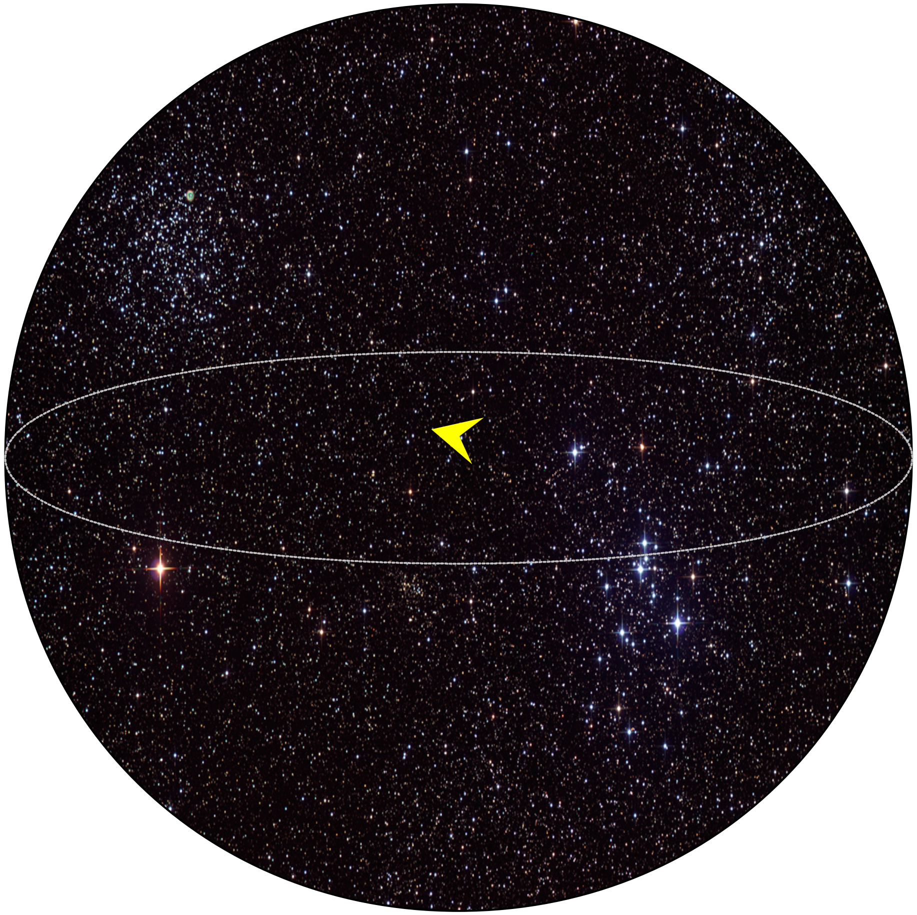
El espacio proyectivo



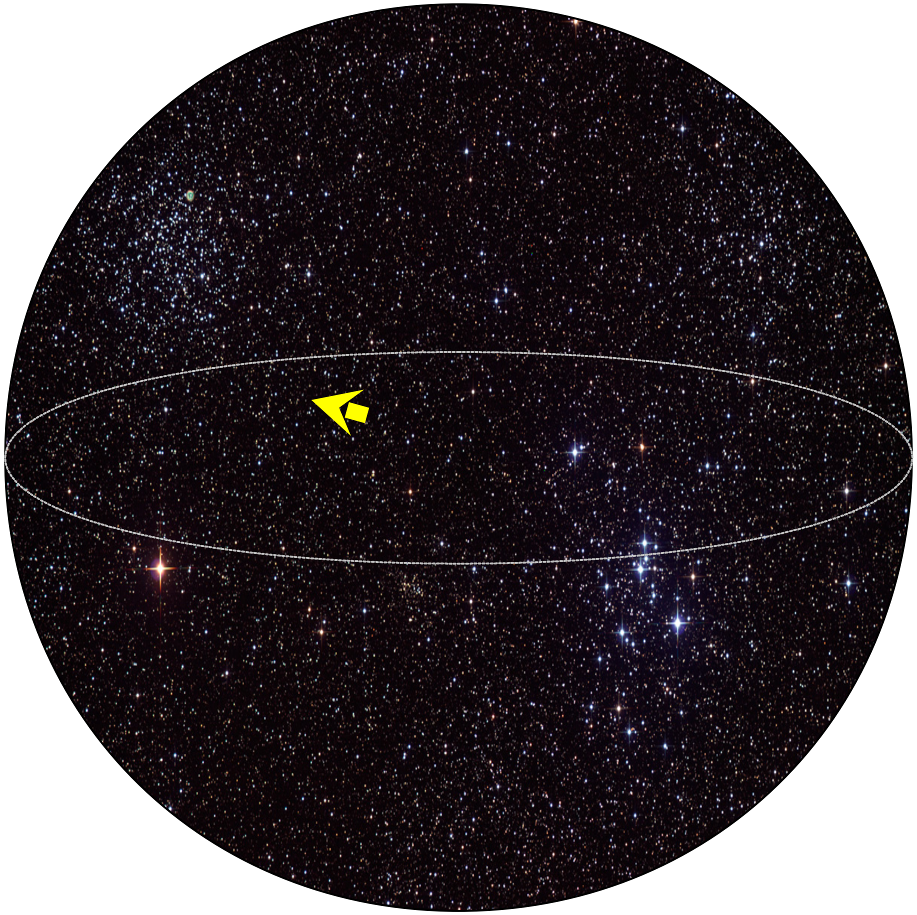
El espacio proyectivo



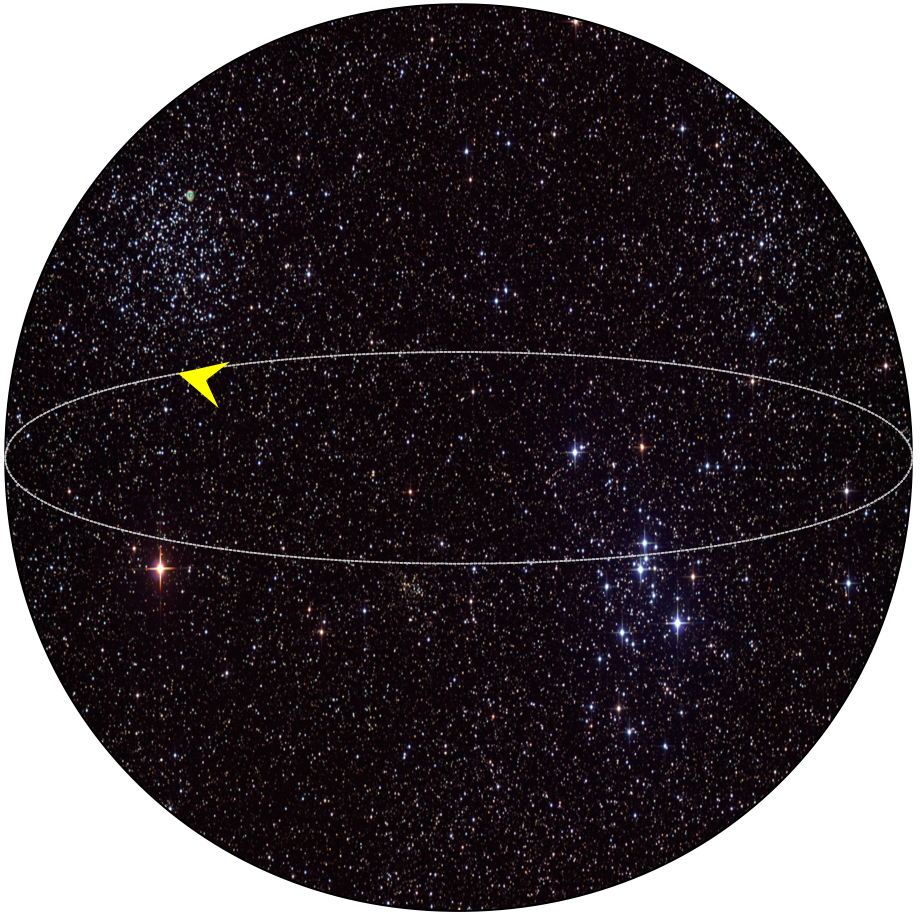
El espacio proyectivo



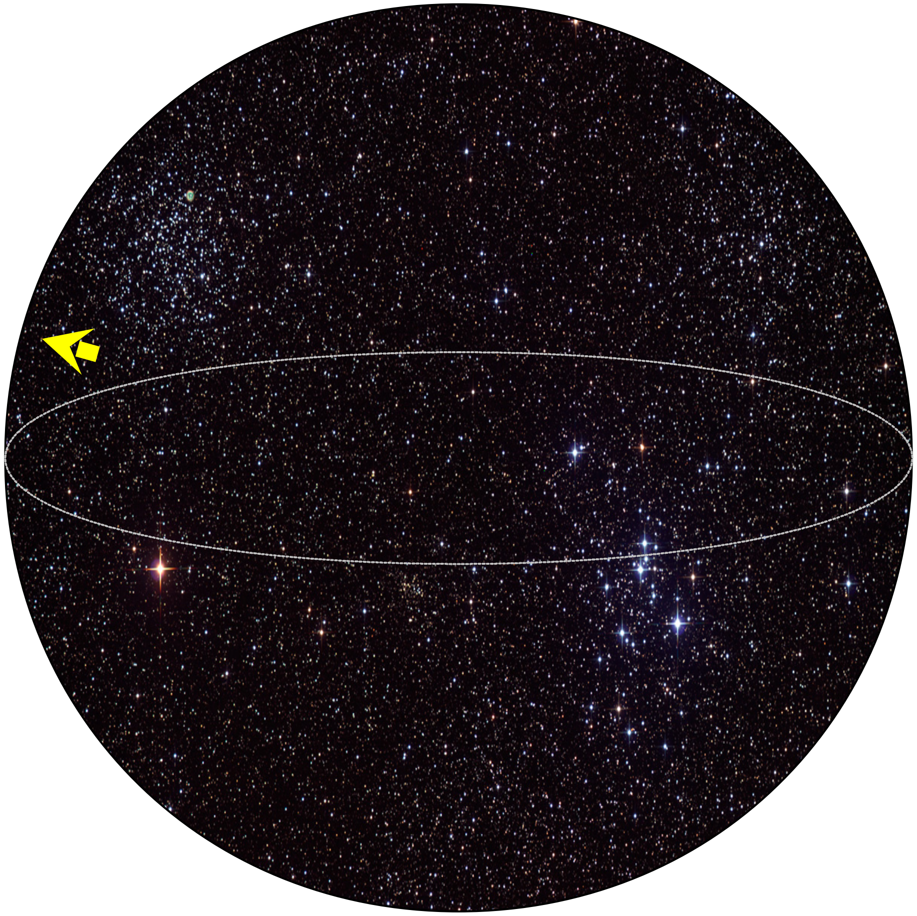
El espacio proyectivo



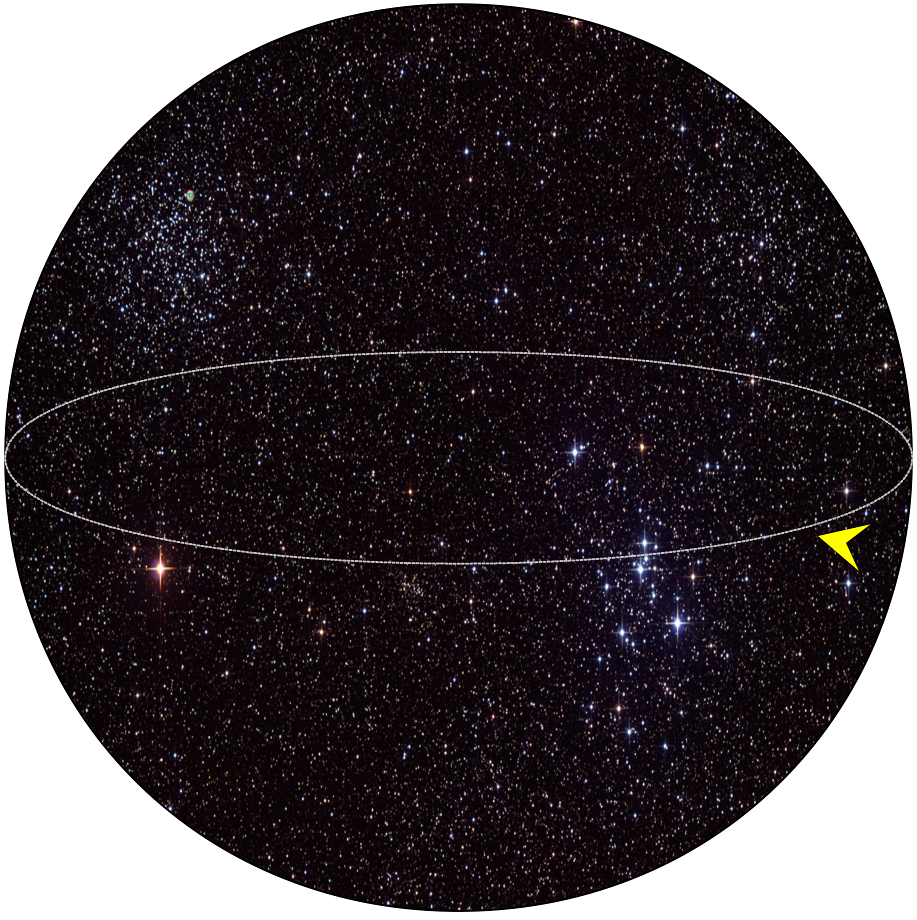
El espacio proyectivo



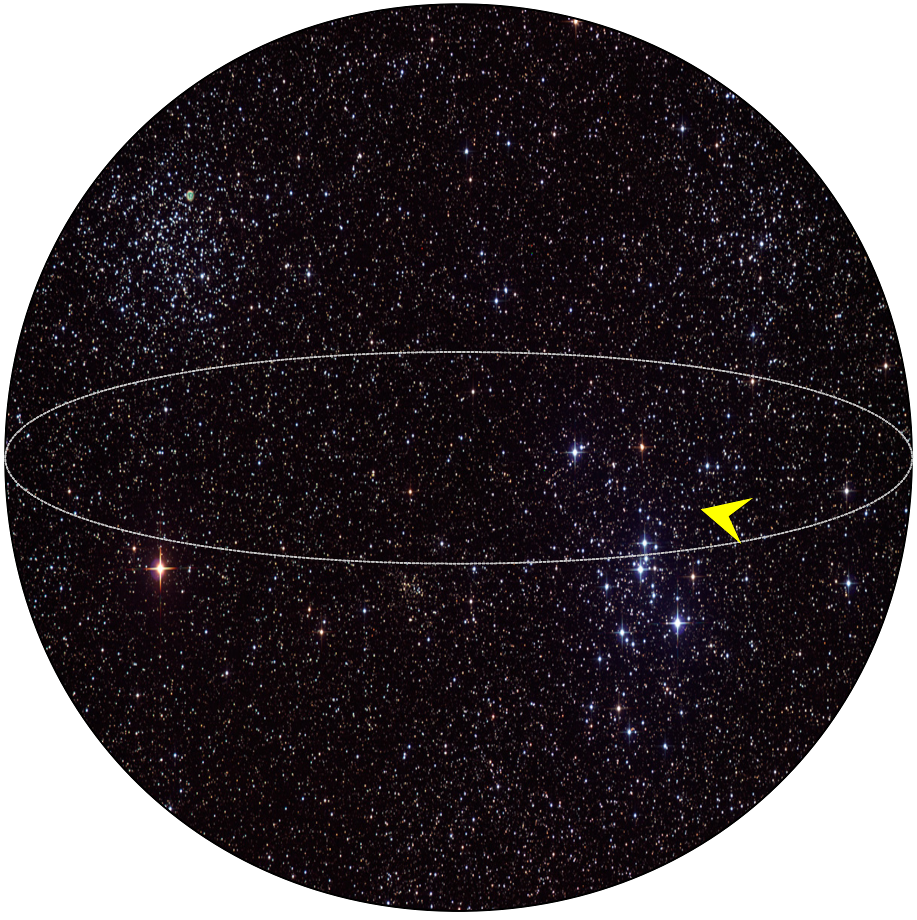
El espacio proyectivo



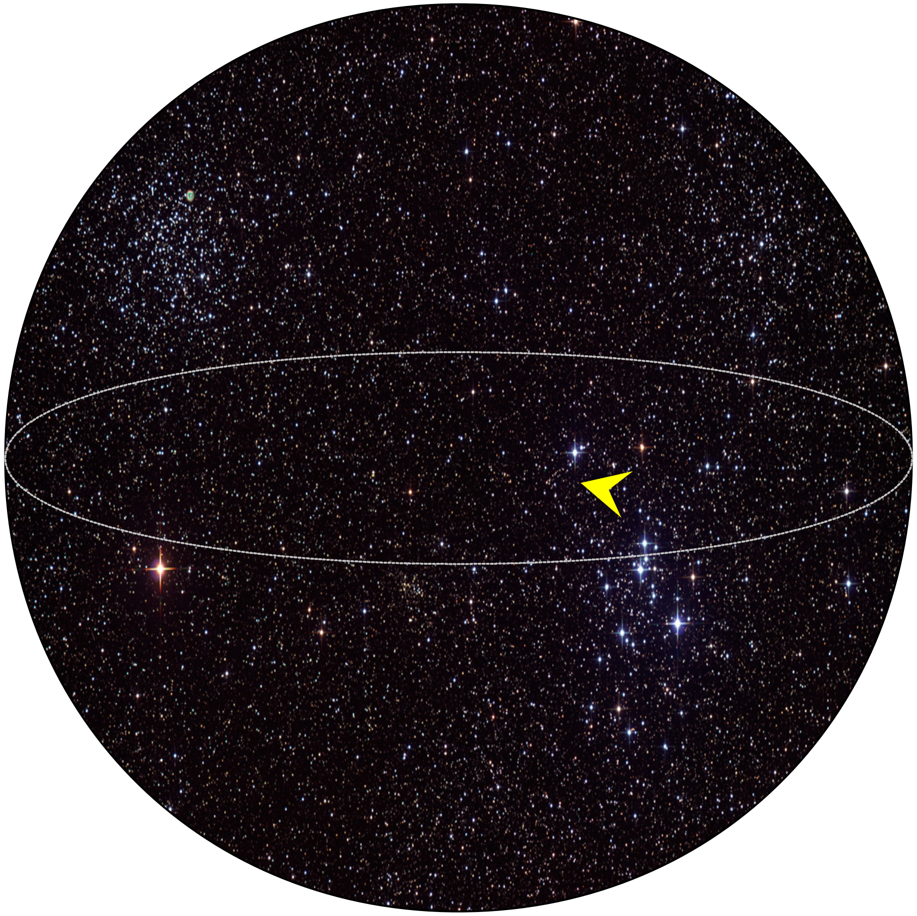
El espacio proyectivo



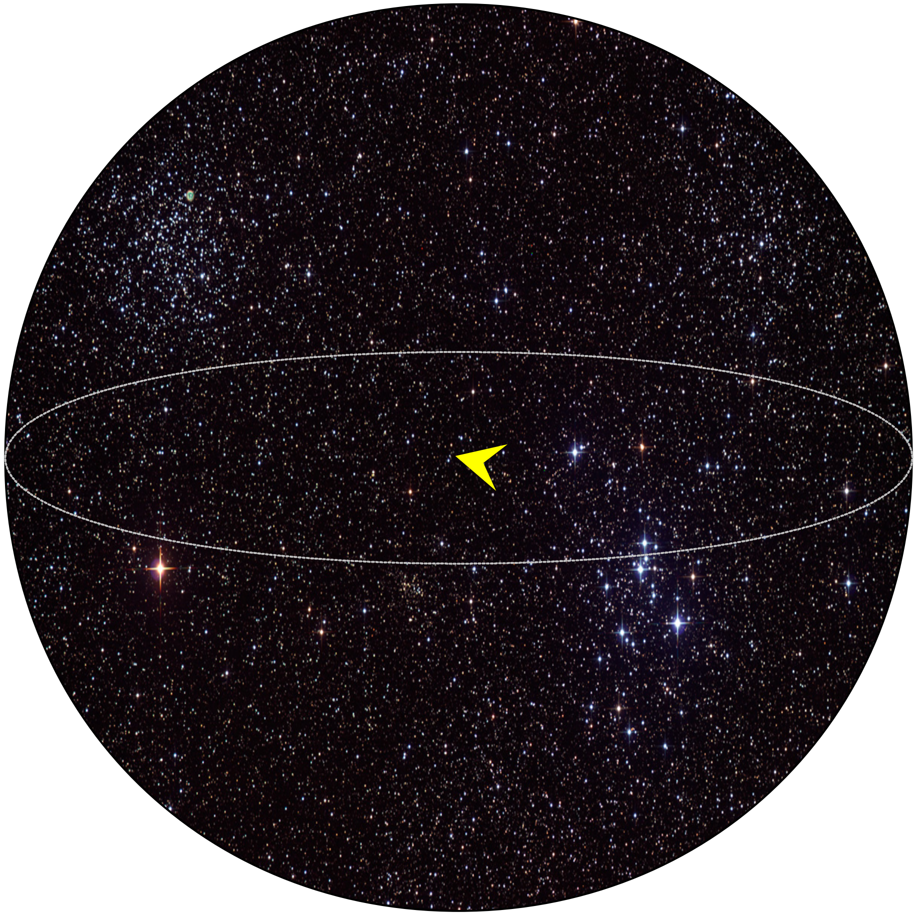
El espacio proyectivo



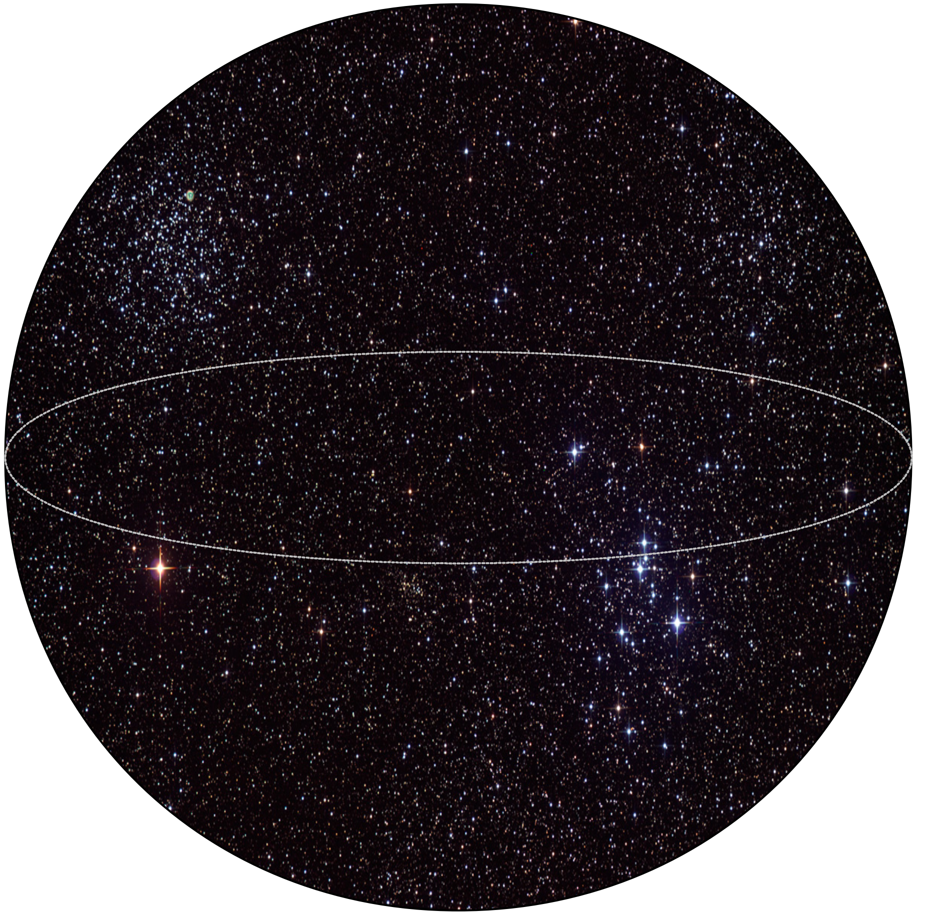
El espacio proyectivo



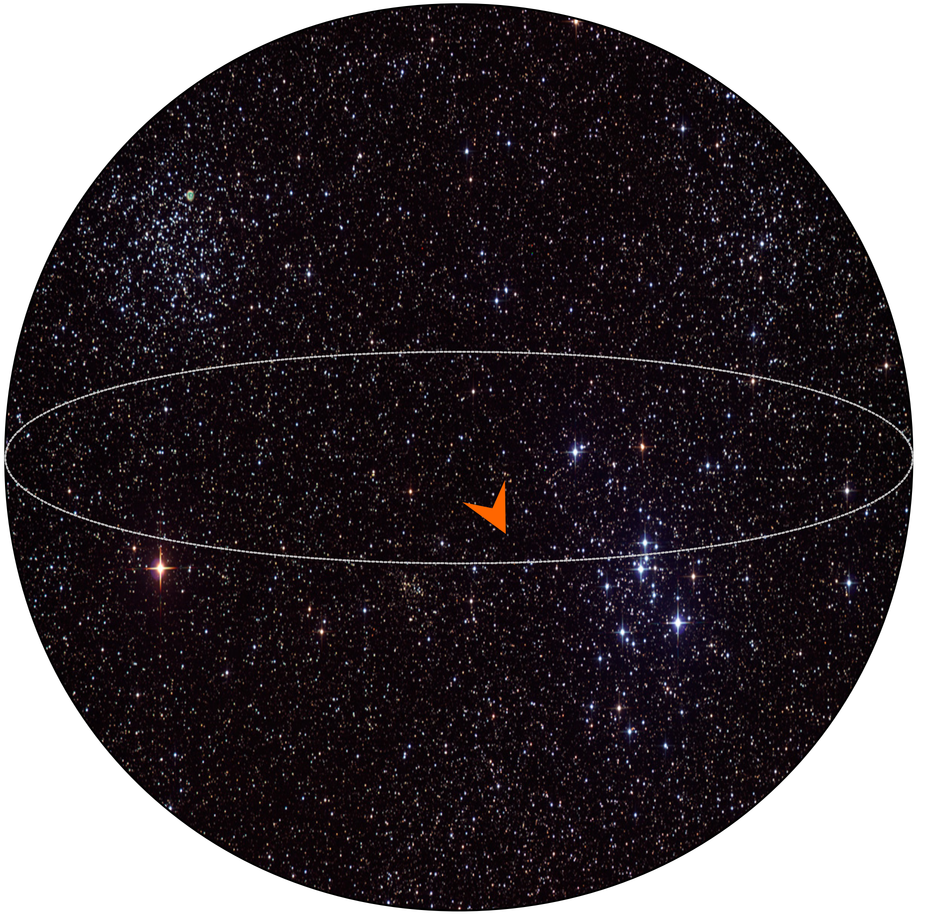
El espacio proyectivo



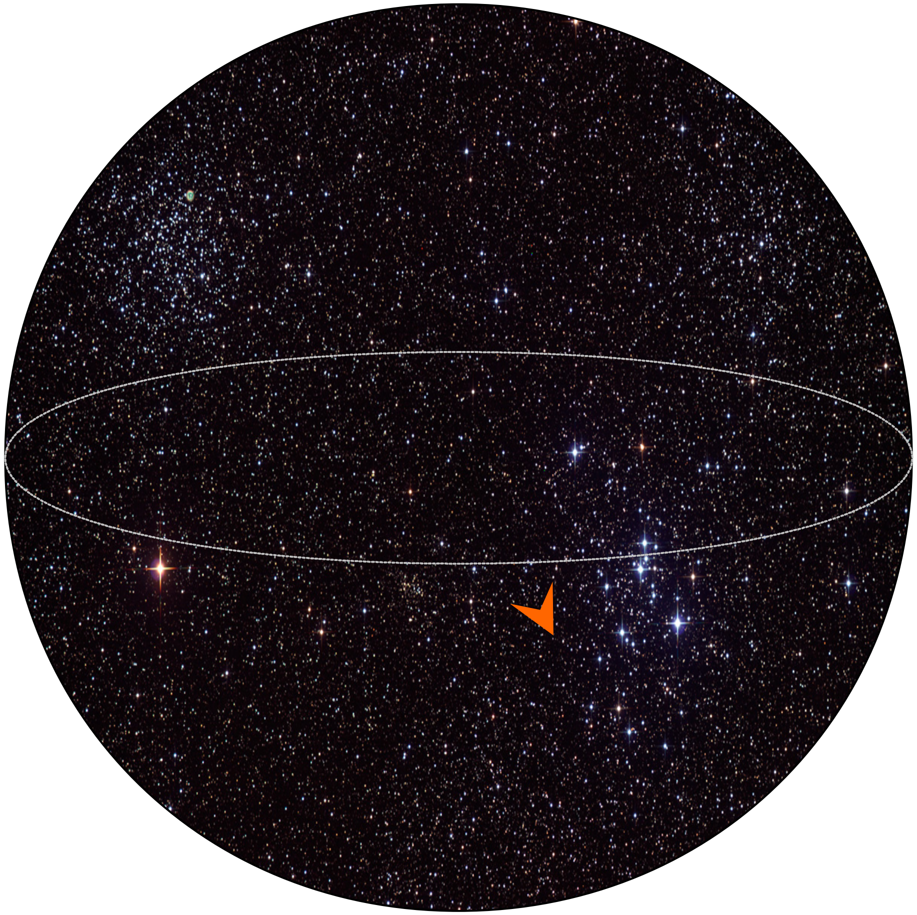
El espacio proyectivo



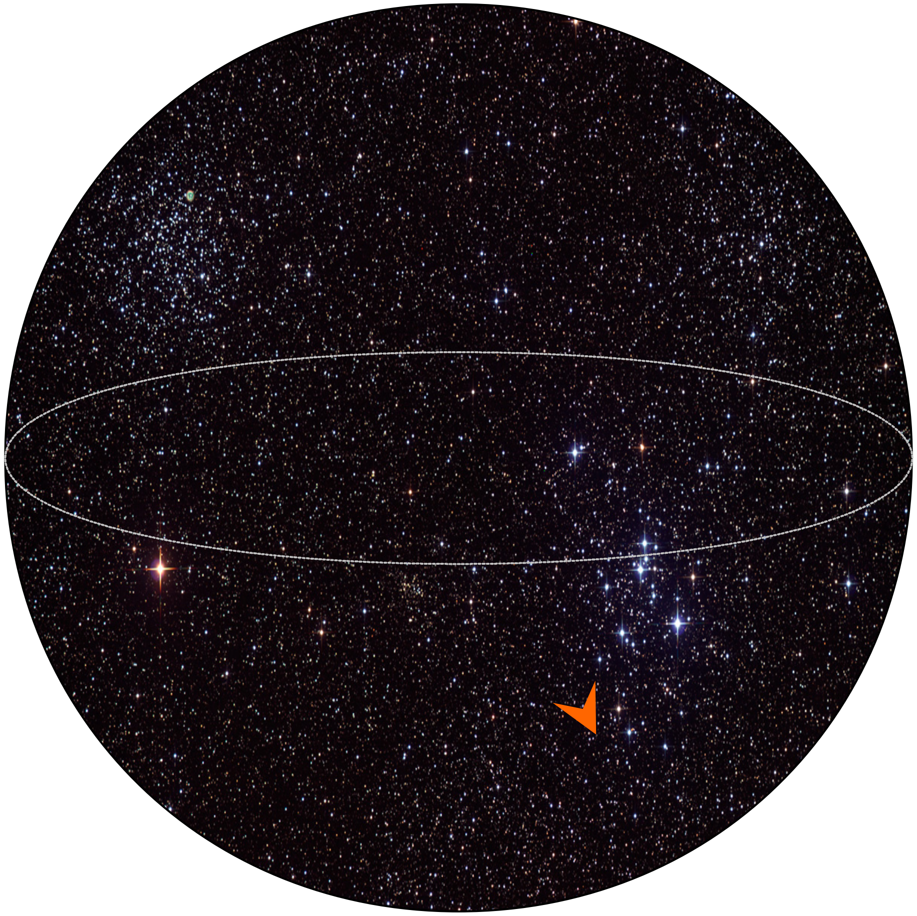
El espacio proyectivo



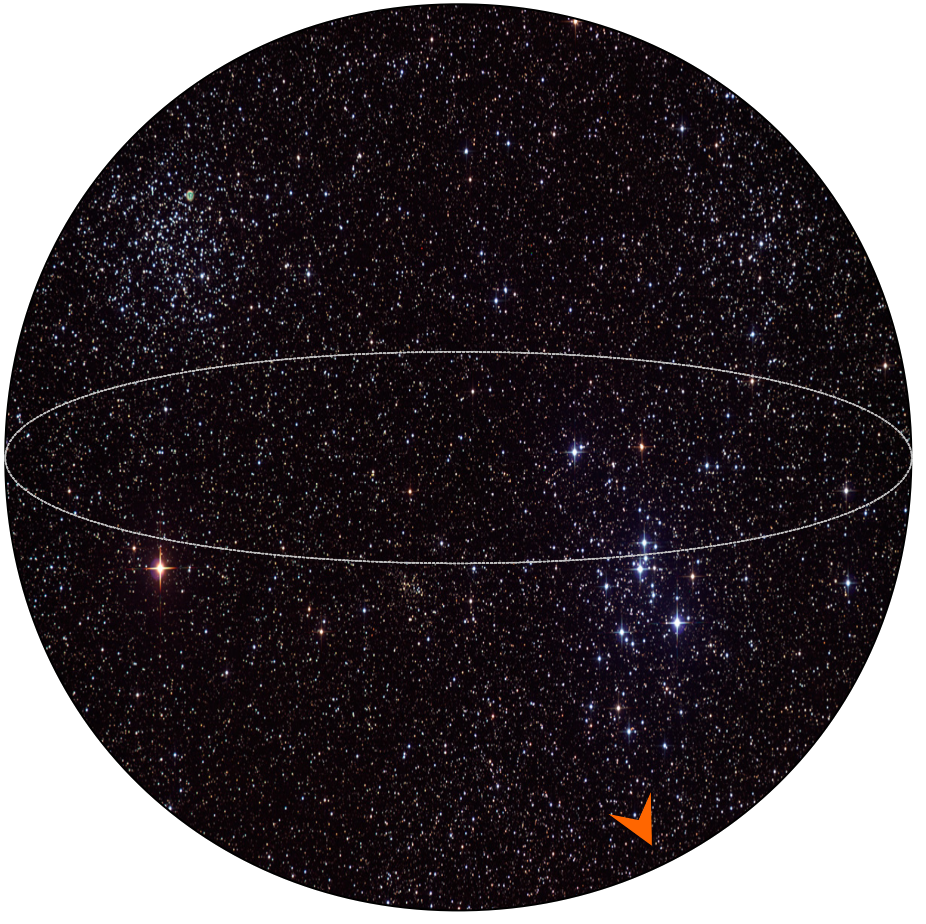
El espacio proyectivo



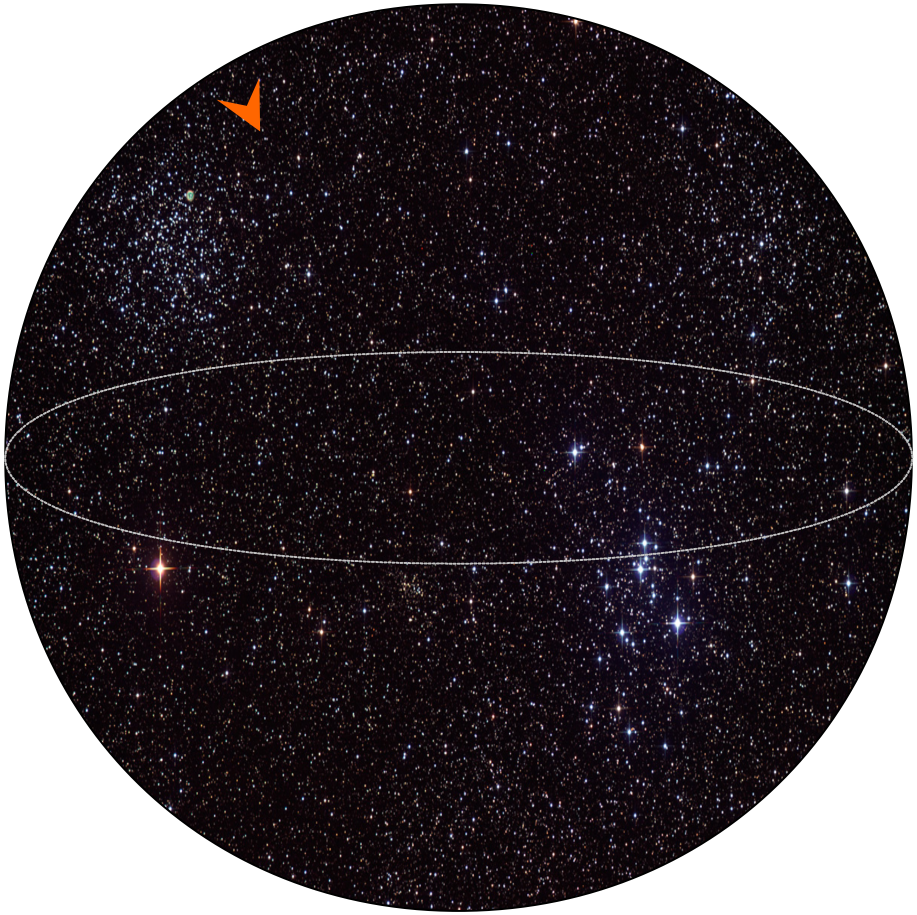
El espacio proyectivo



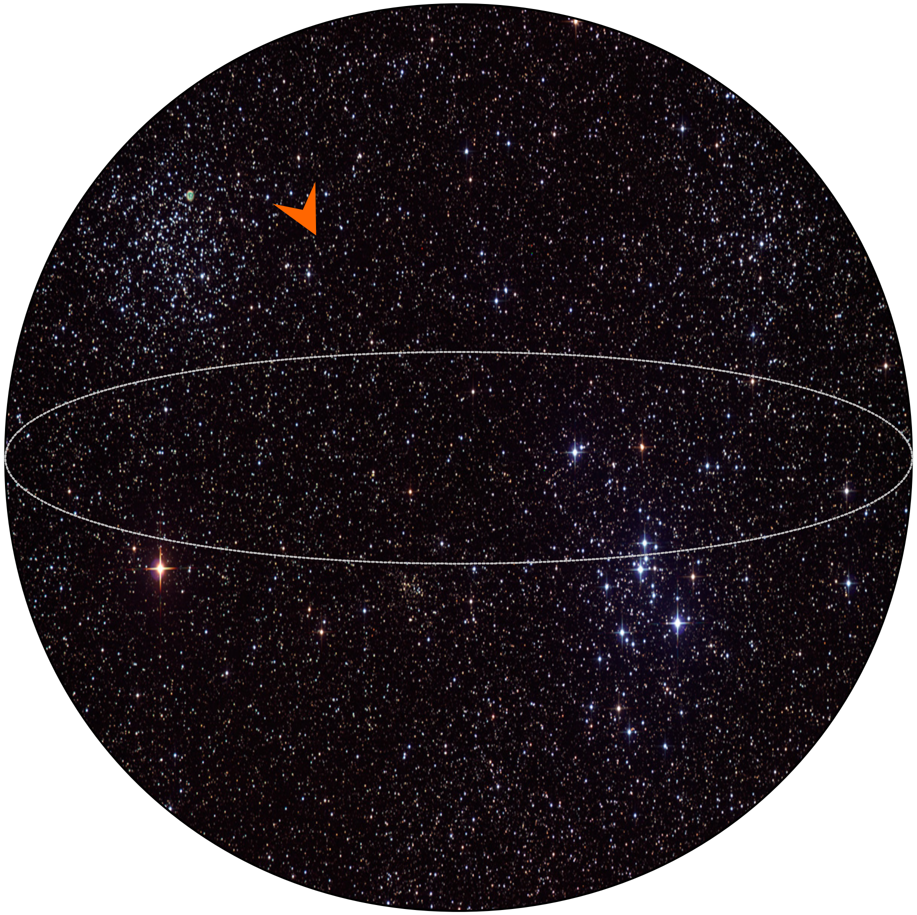
El espacio proyectivo



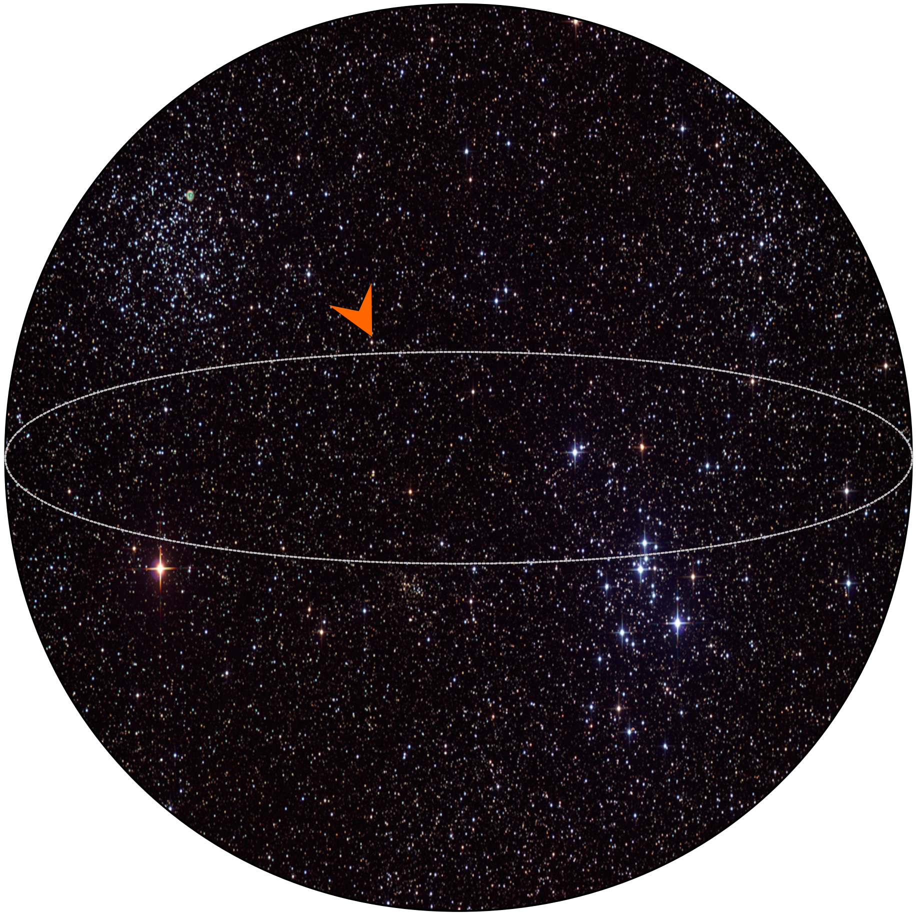
El espacio proyectivo



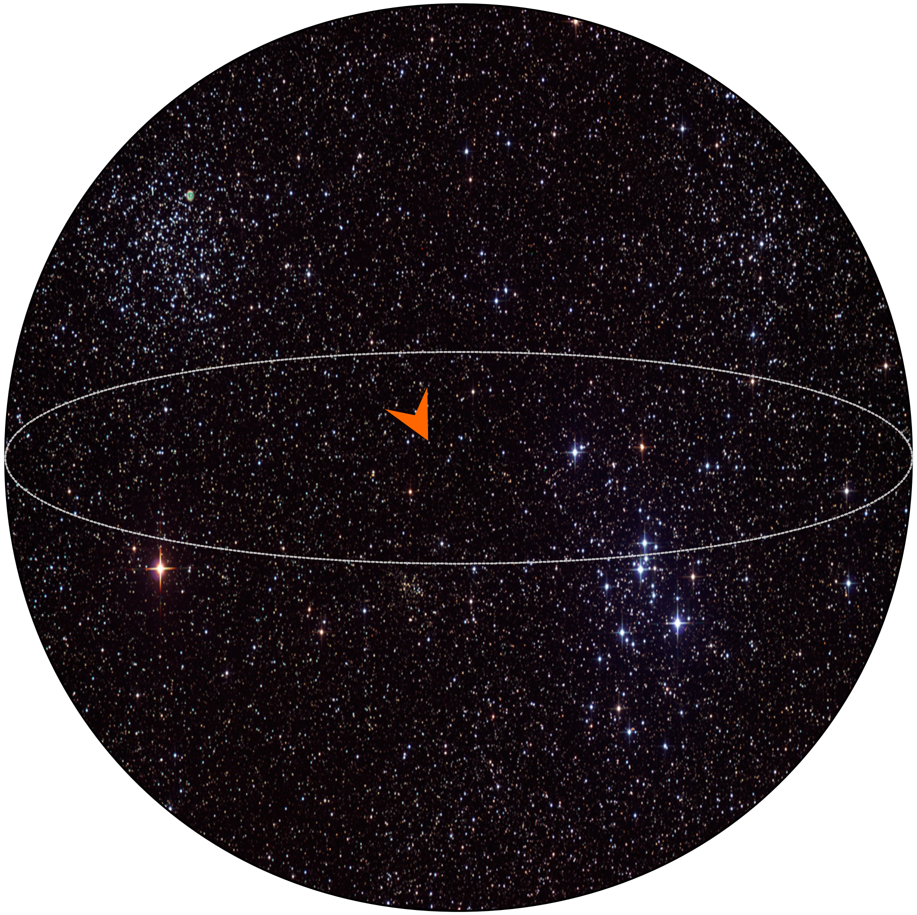
El espacio proyectivo



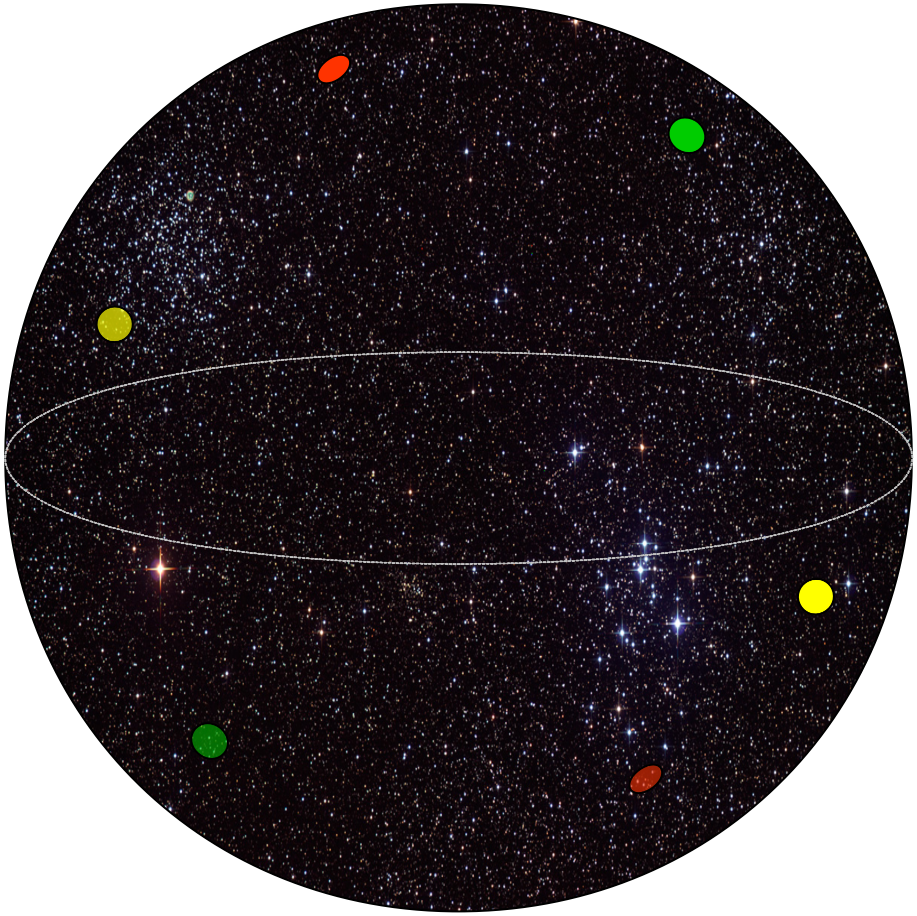
El espacio proyectivo



El espacio proyectivo



El espacio proyectivo RP^3

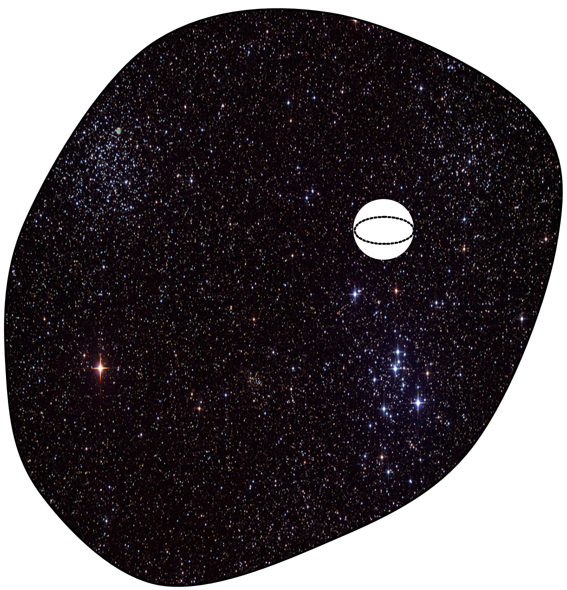


En una bola identificar los puntos antípodas de la cáscara

Suma de variedades

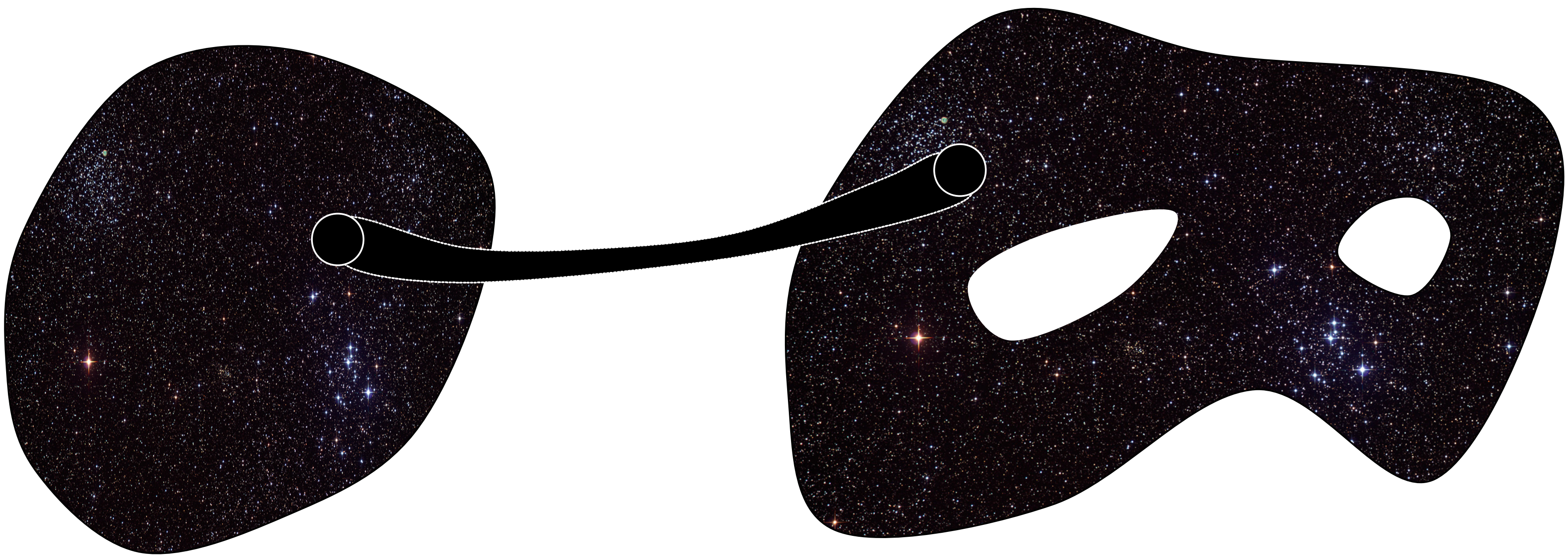
Tomar dos variedades

Suma de variedades



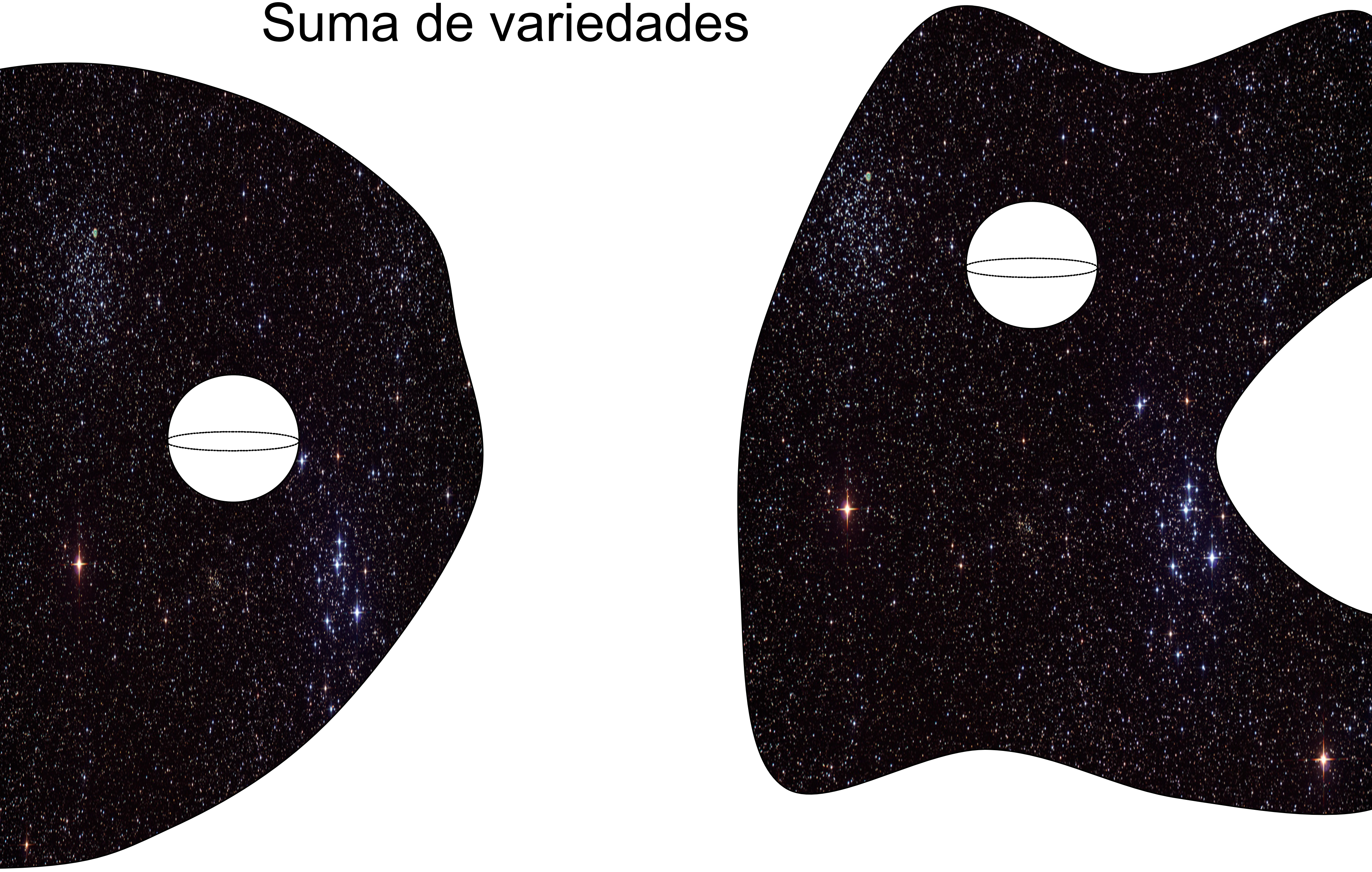
Tomar dos variedades, hacer un hoyo en cada una

Suma de variedades

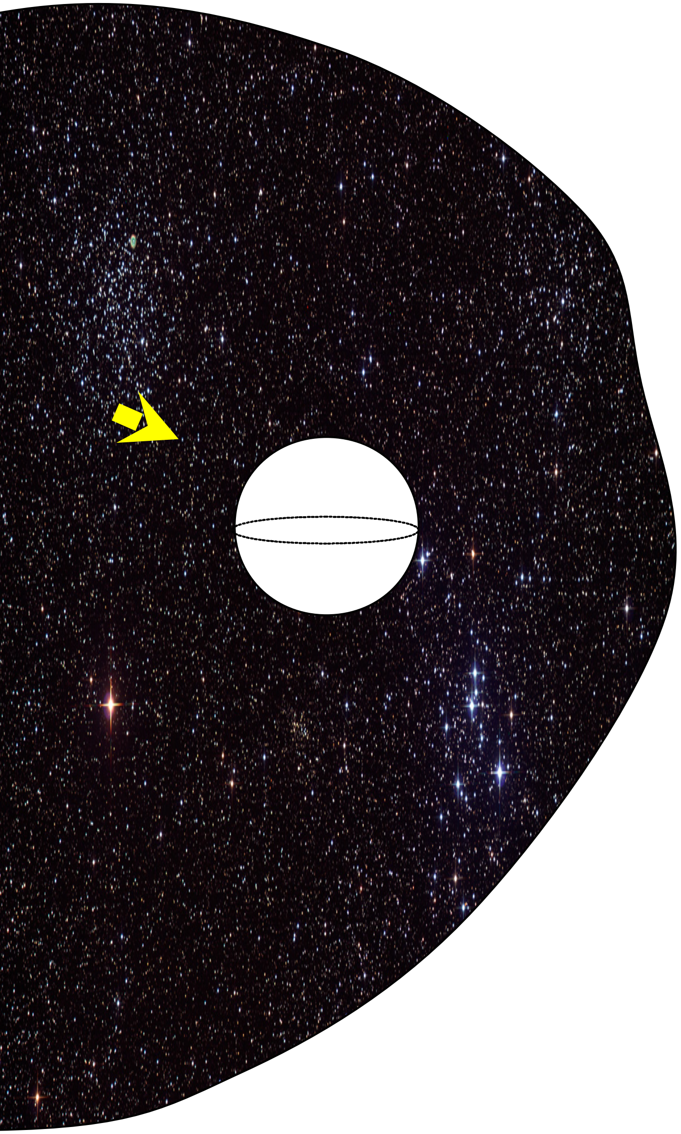


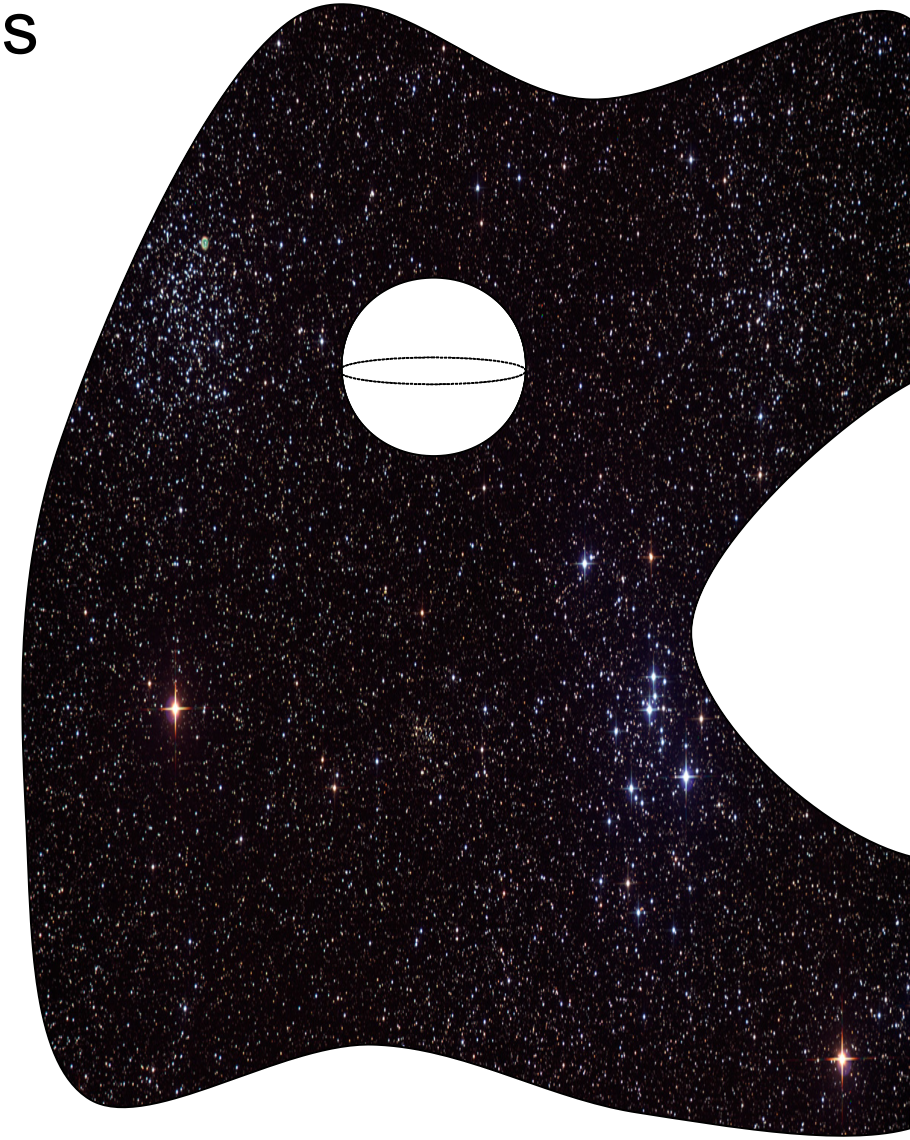
Tomar dos variedades, hacer un hoyo en cada una y conectarlas

Suma de variedades

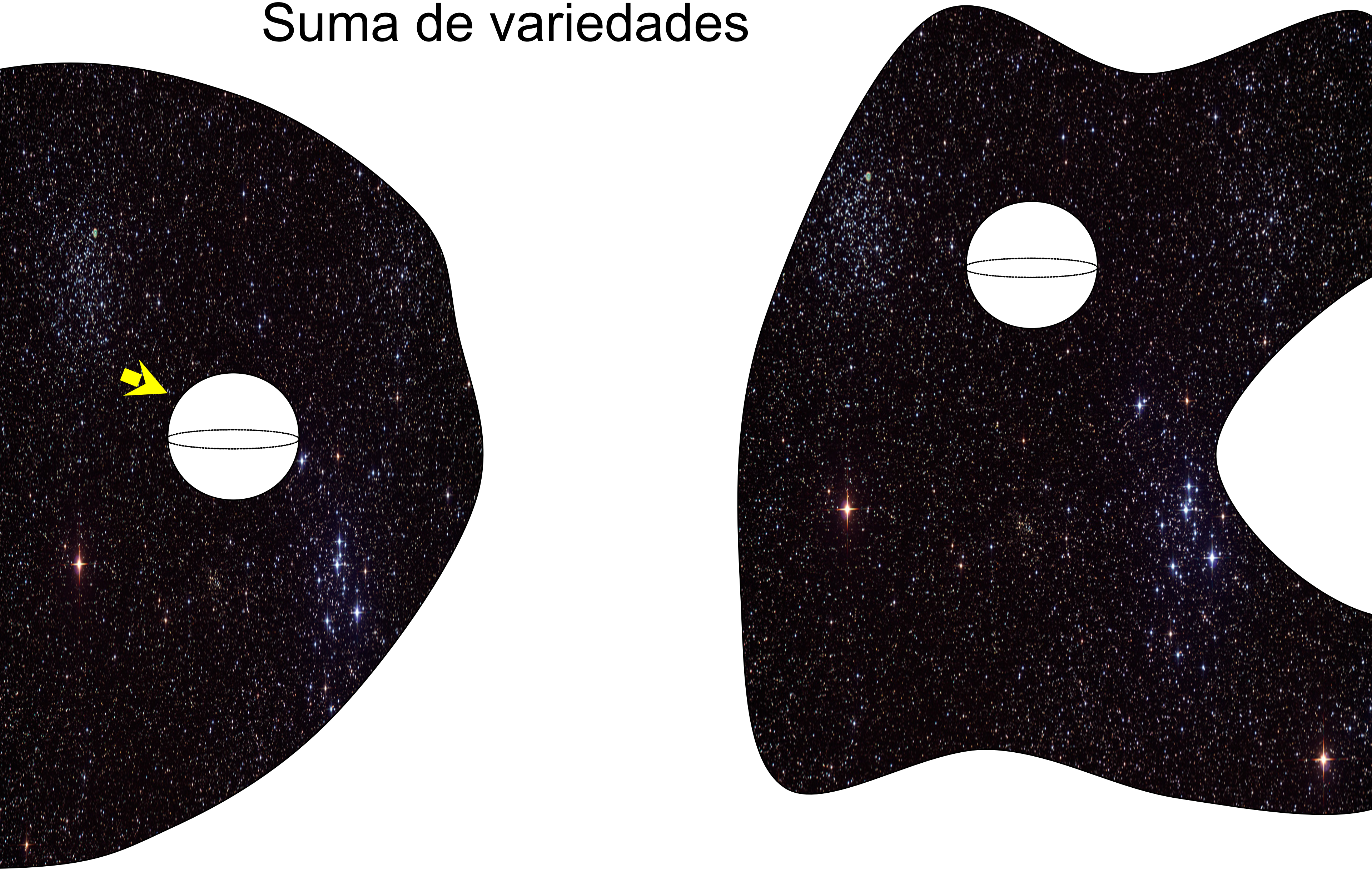


Suma de variedades

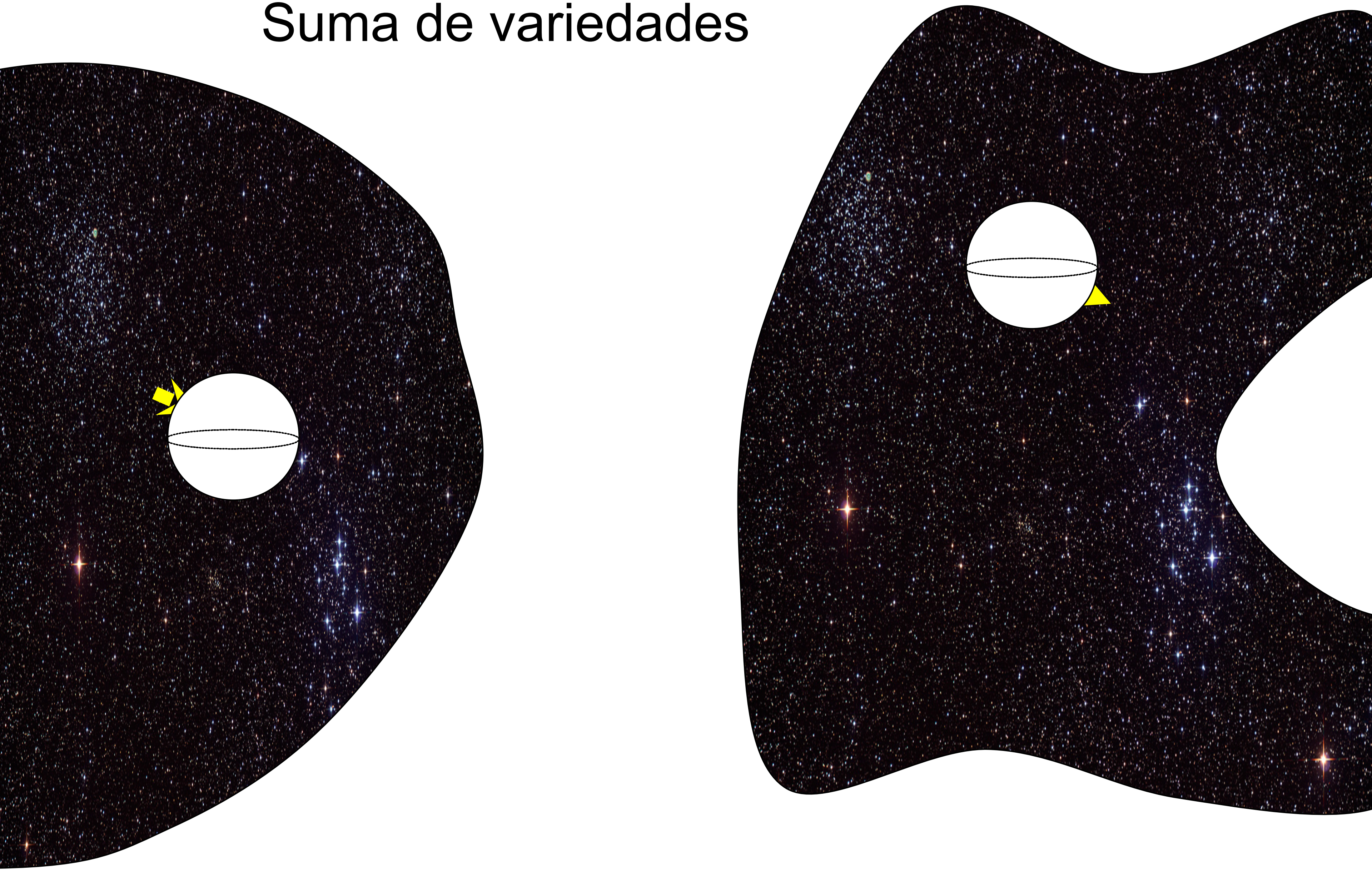




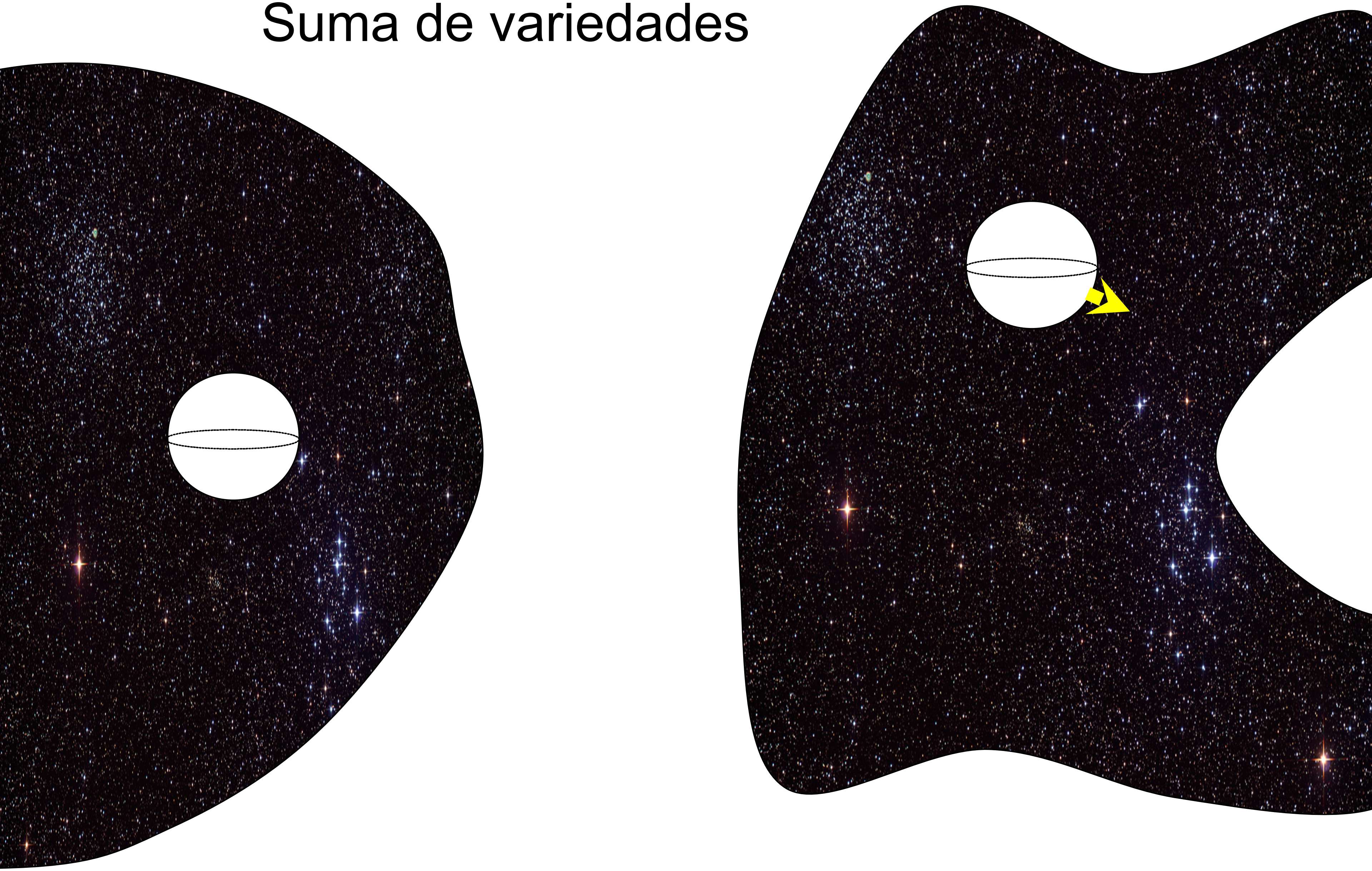
Suma de variedades



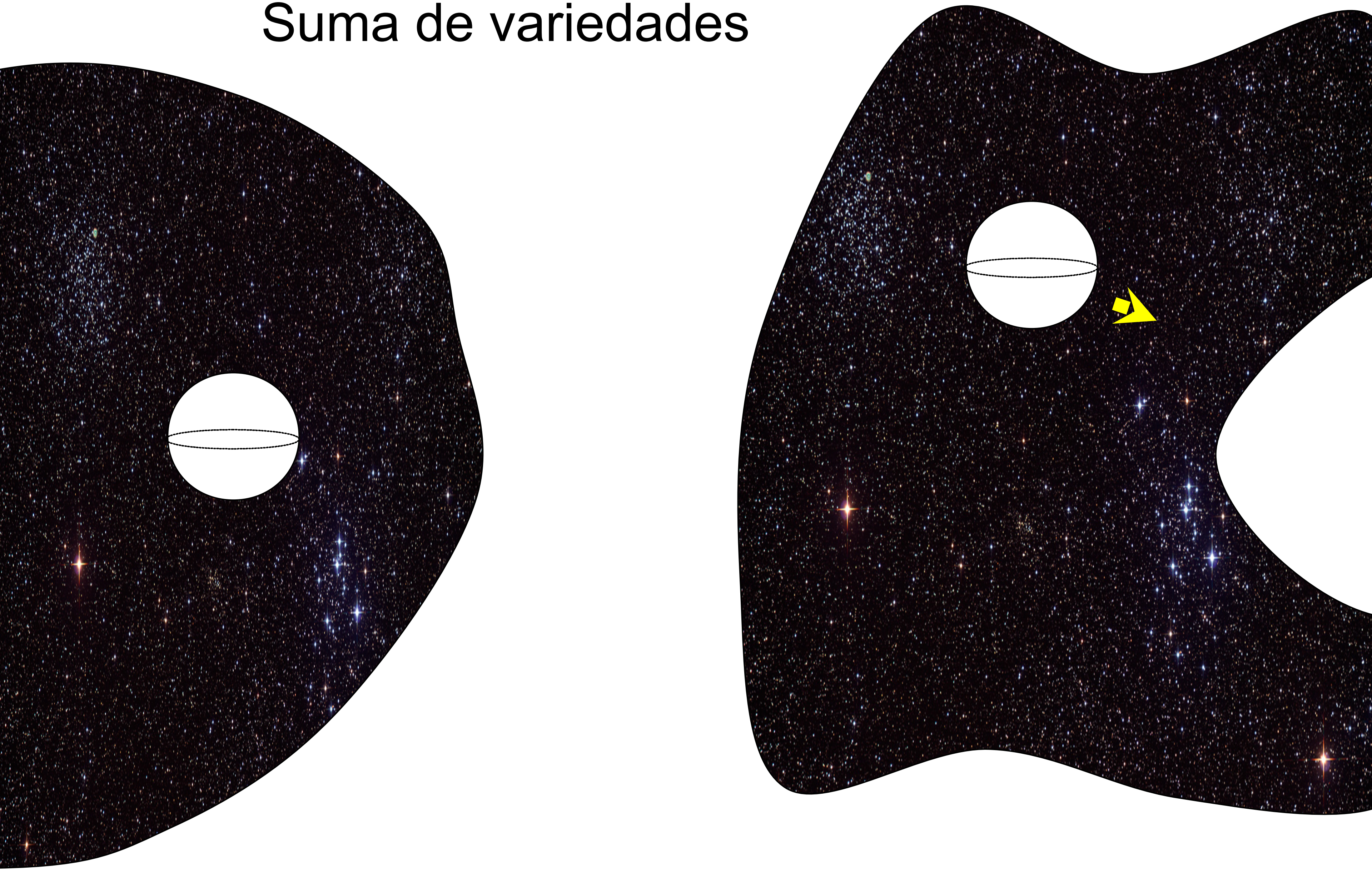
Suma de variedades



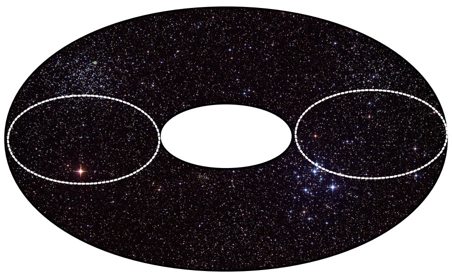
Suma de variedades

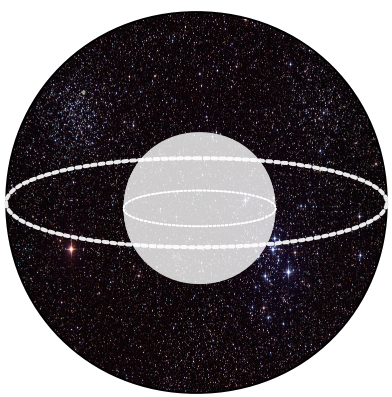


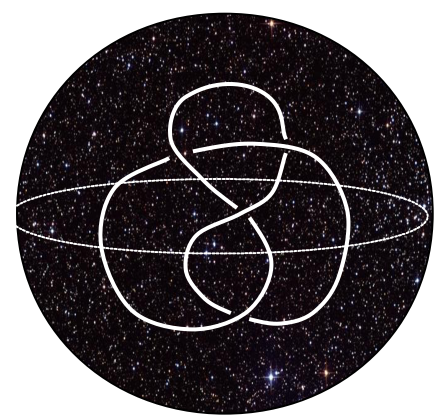
Suma de variedades



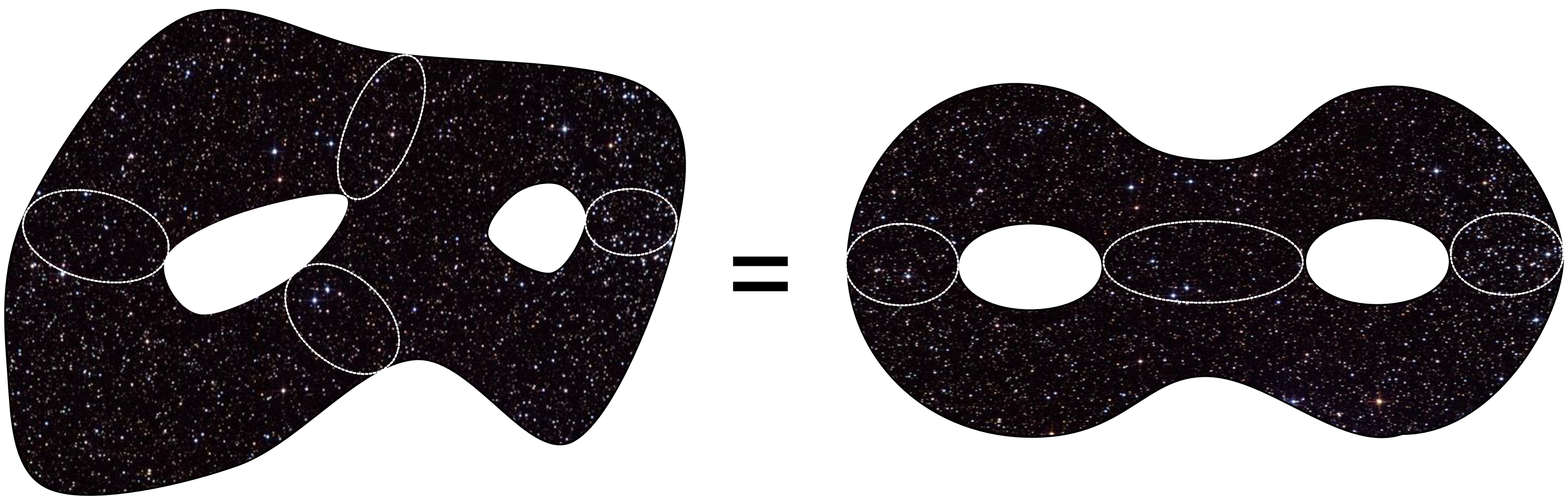
¿Cuantas formas distintas de 3-variedades hay?







(por ahora nos interesa solo la forma topológica)



Dos variedades tienen la misma forma topológica (son *homeomorfas*) si existe una función continua y con inversa continua entre ellas.

Problema de clasificación:

Hallar todas las formas topológicas posibles de las 3-variedades, y dar un método para reconocerlas