3-variedades

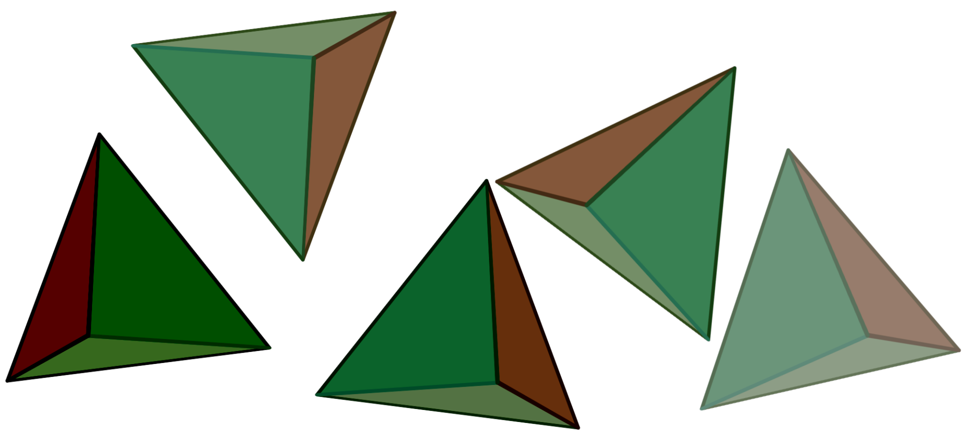
Max Neumann Coto
Instituto de Matemáticas UNAM
Cuernavaca

2. Triangulaciones y descomposiciones

Triangulaciones

Teorema:

Cada 3-variedad puede partirse en pedazos que son homeomorfos a tetraedros y están pegados por sus caras.



(si la variedad es cerrada el numero de tetraedros es finito)

Triangulaciones

Corolario:

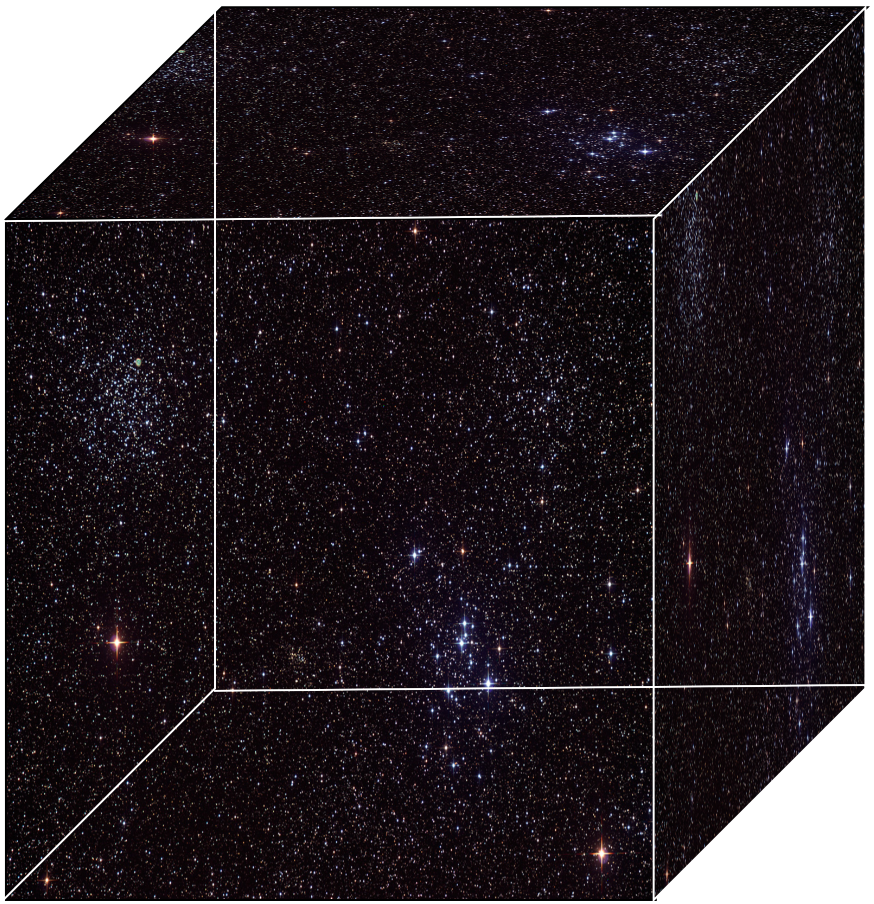
Hay una cantidad a lo mas numerable de 3-variedades cerradas distintas.

(pero hay una cantidad no numerable de variedades abiertas)

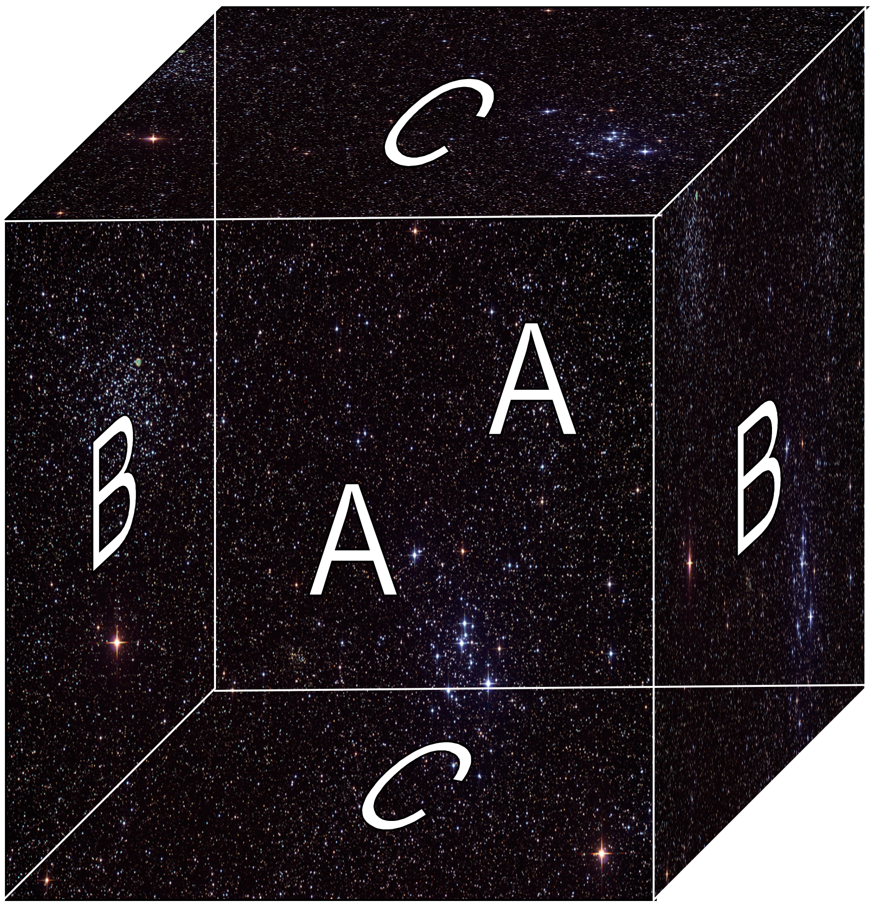
Triangulaciones

Corolario:

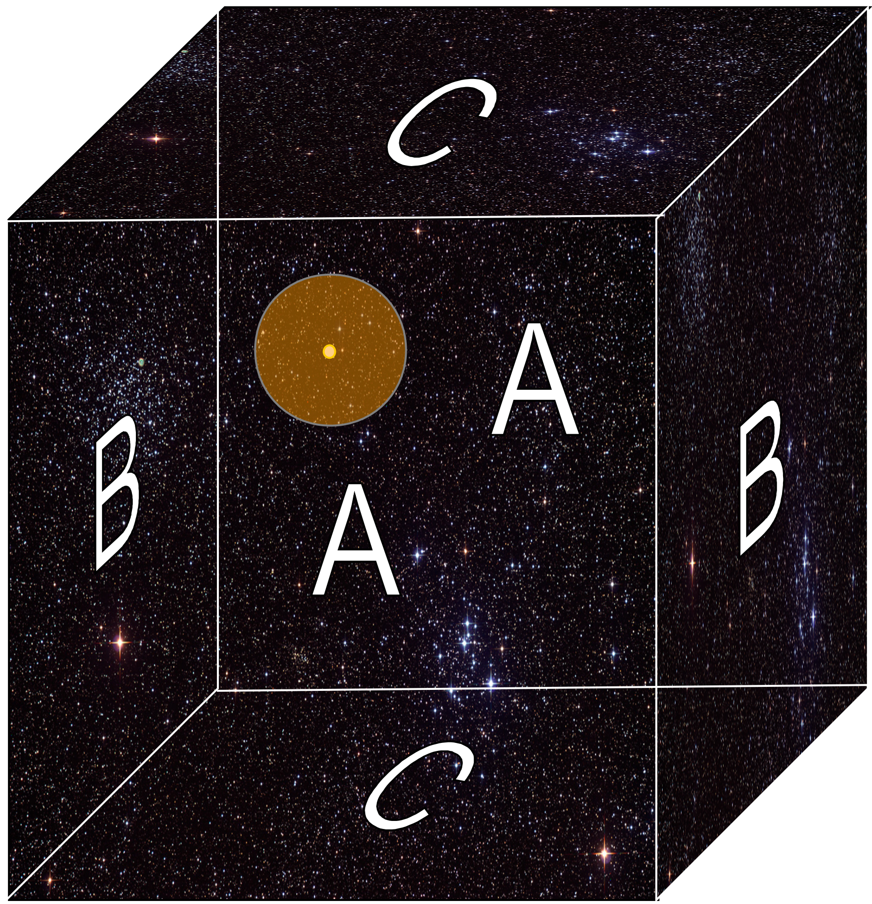
Cada 3-variedad cerrada tiene la forma topológica de un poliedro cuyas caras se identifican por pares.



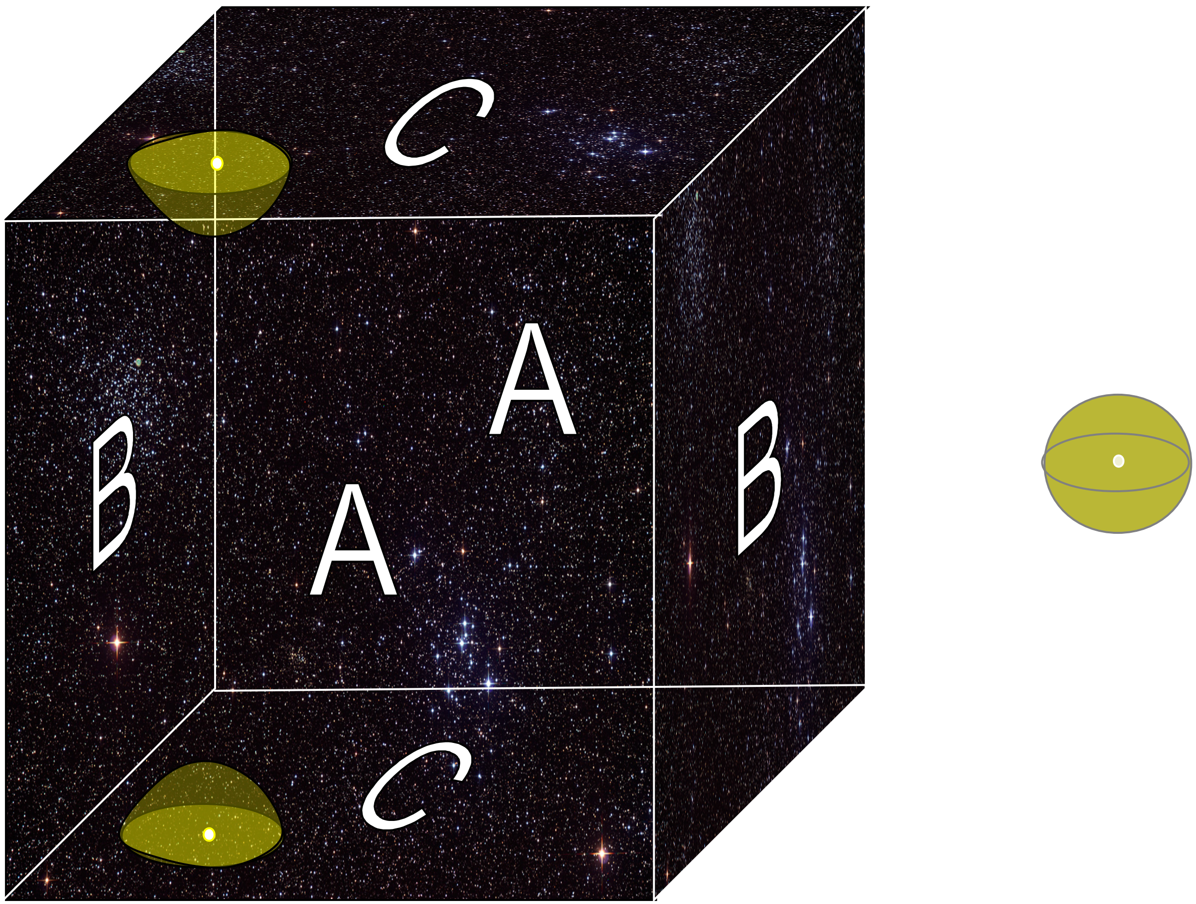
El 3-Toro



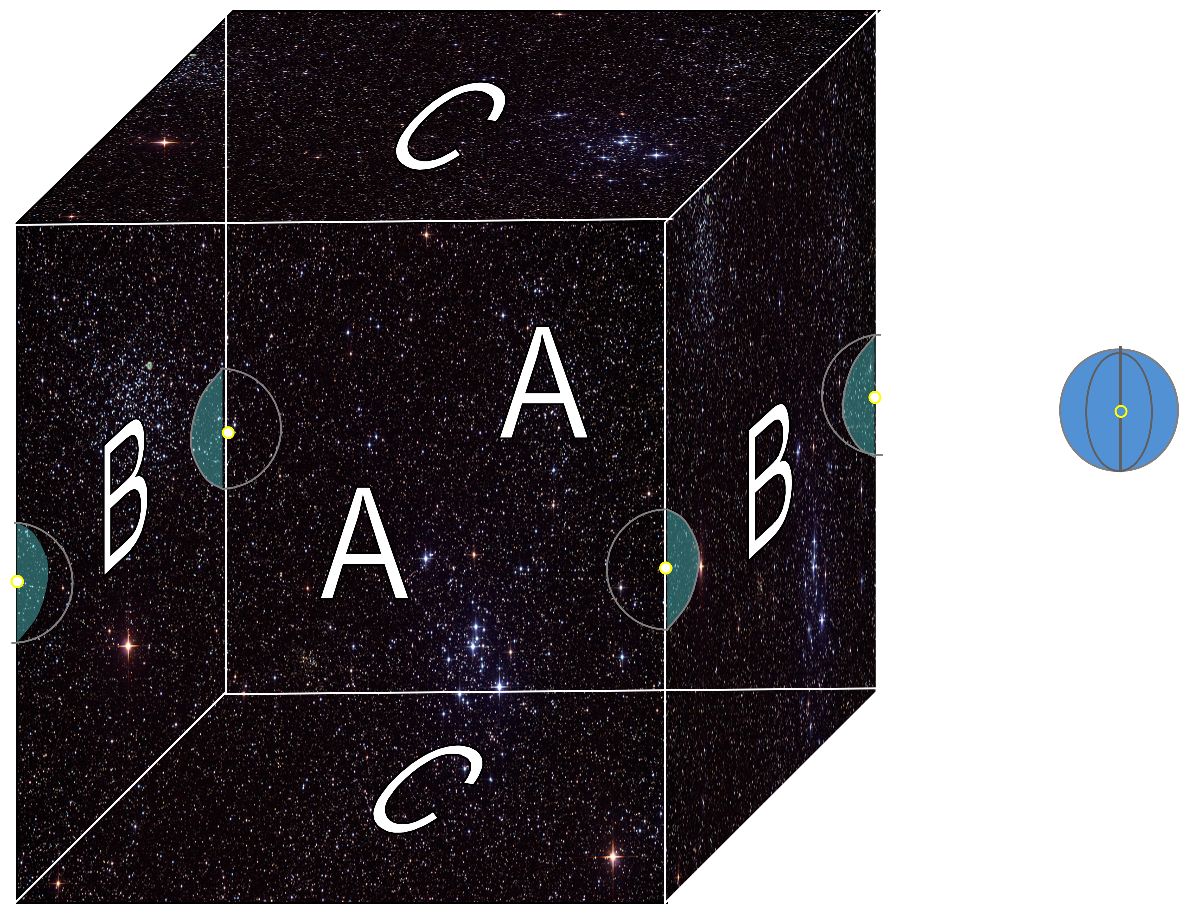
El 3-Toro



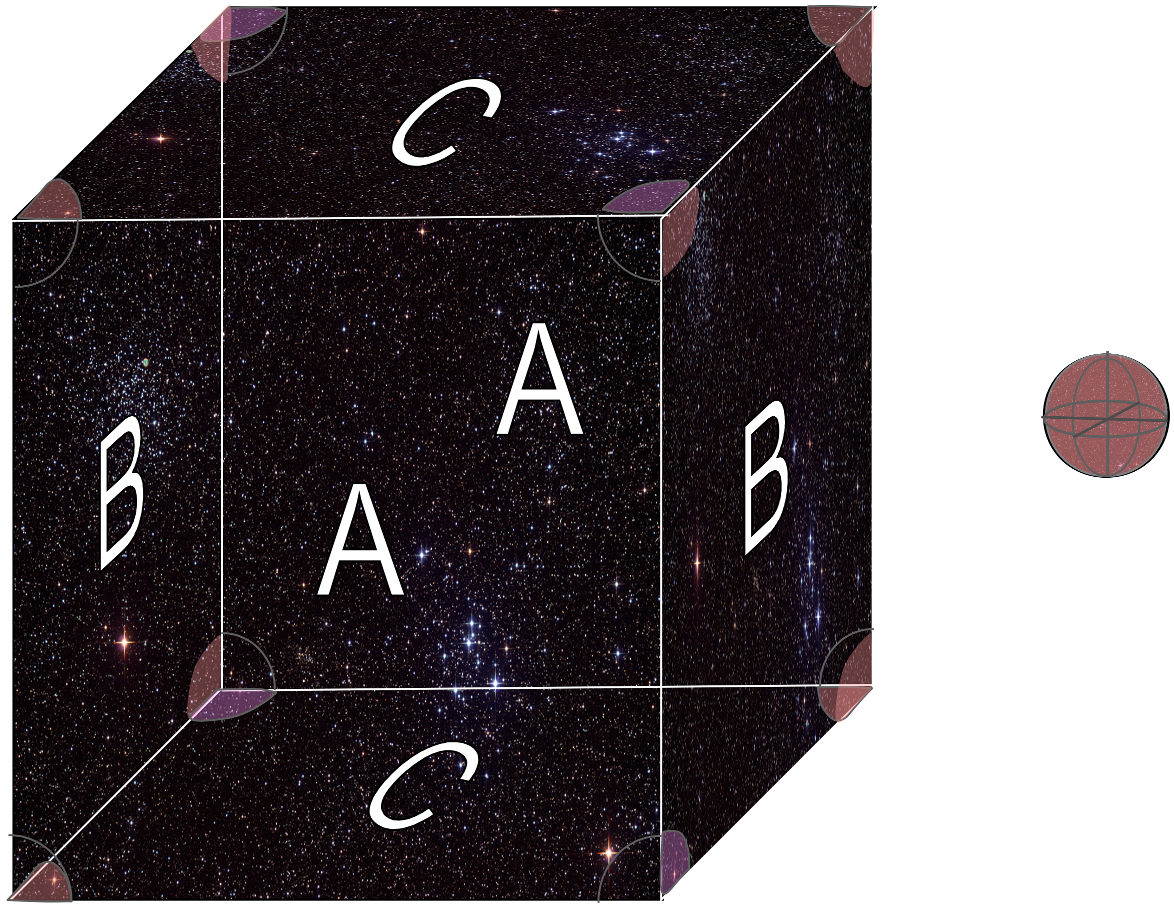
El 3-Toro



El 3-Toro

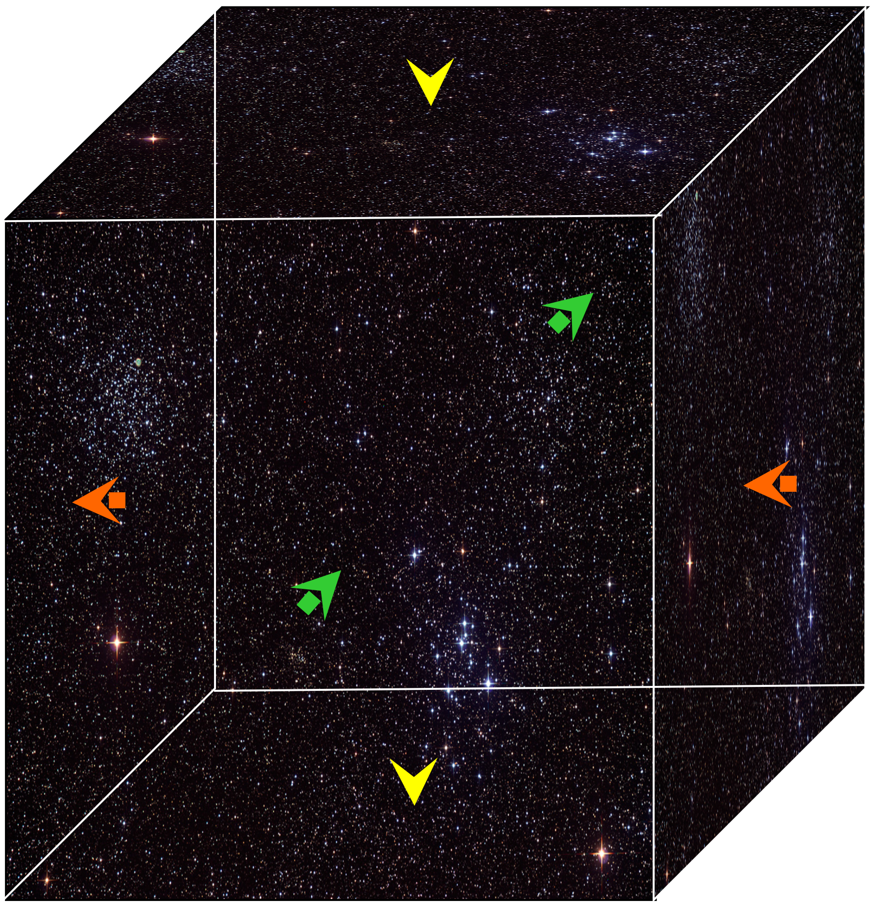


El 3-Toro

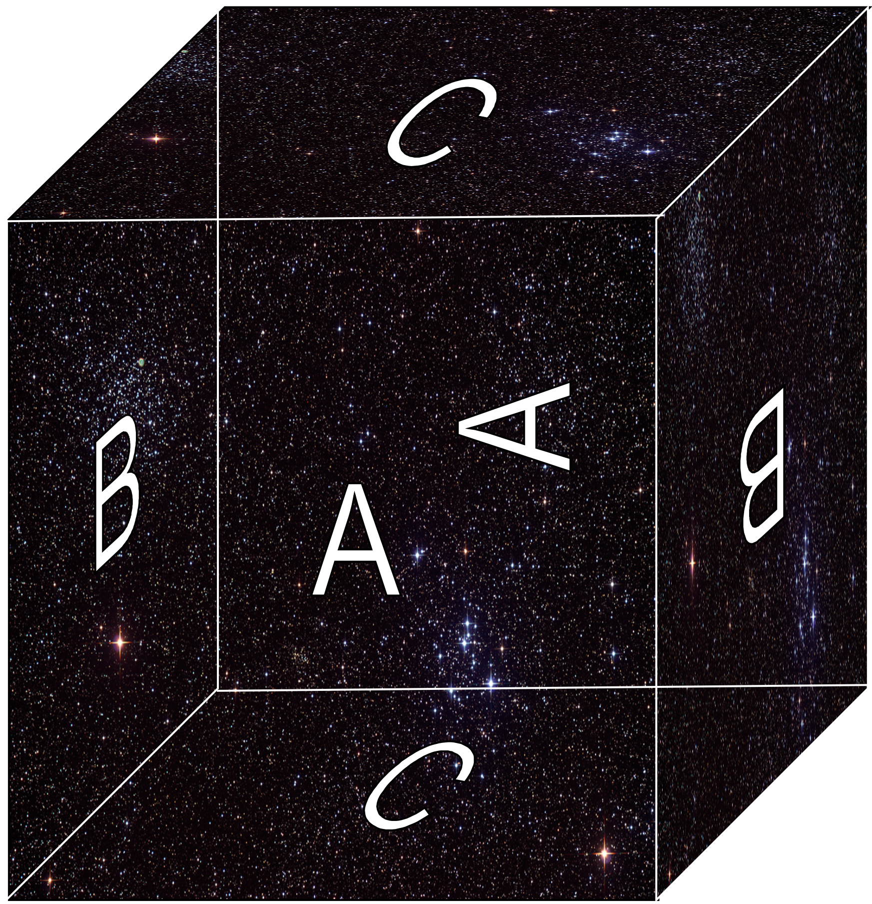


Es localmente idéntico a R³

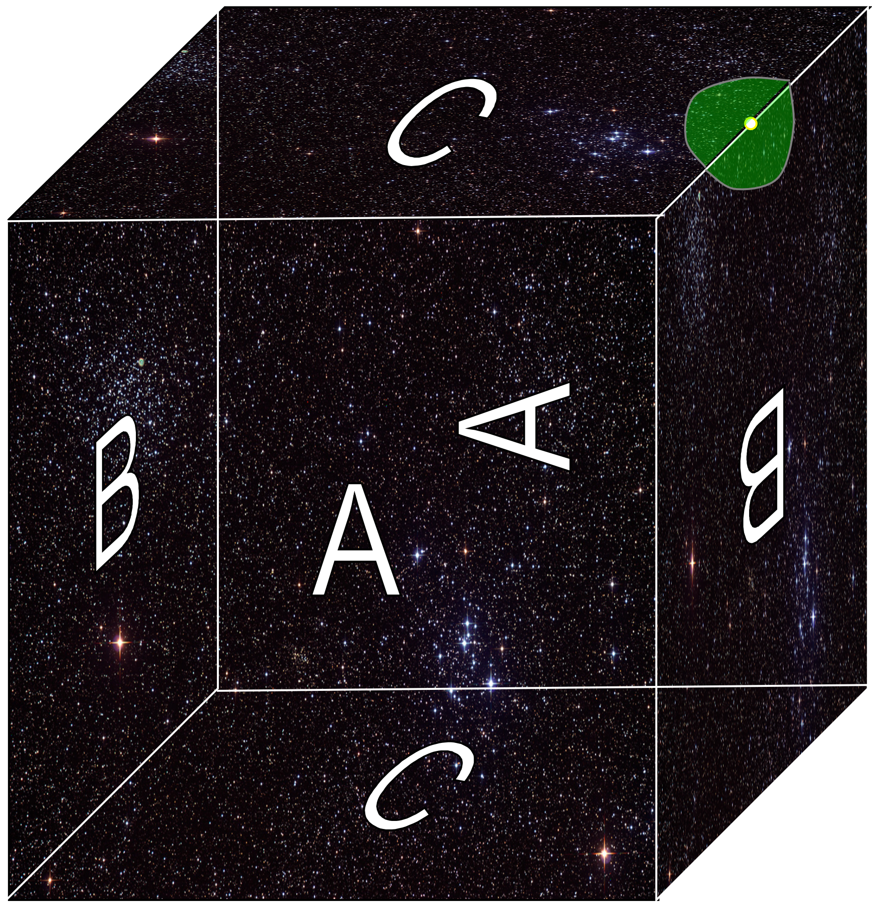
El 3-Toro



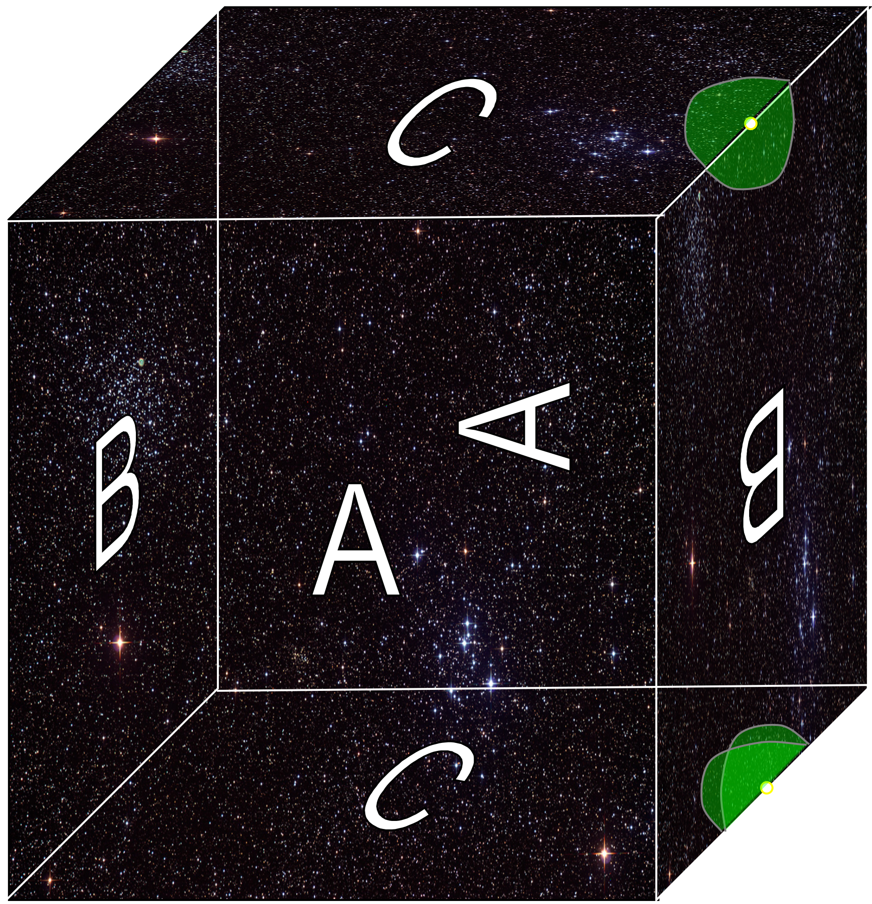
¿Una 3-variedad?



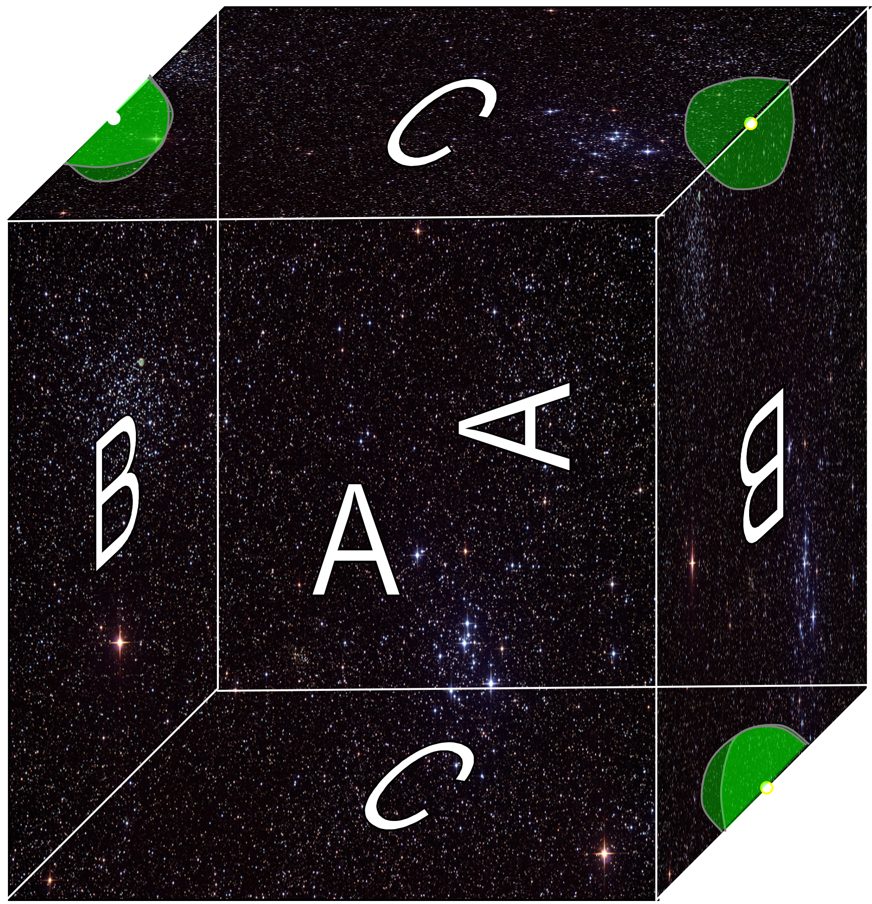
¿Una 3-variedad?



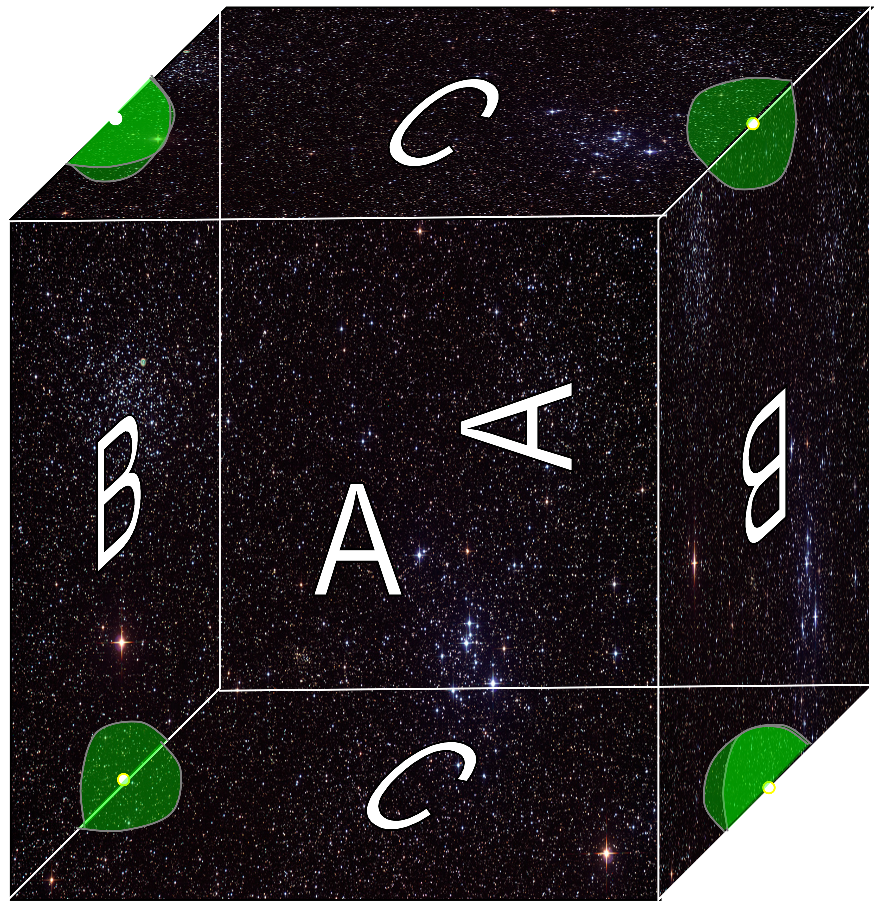
¿Una 3-variedad?



¿Una 3-variedad?

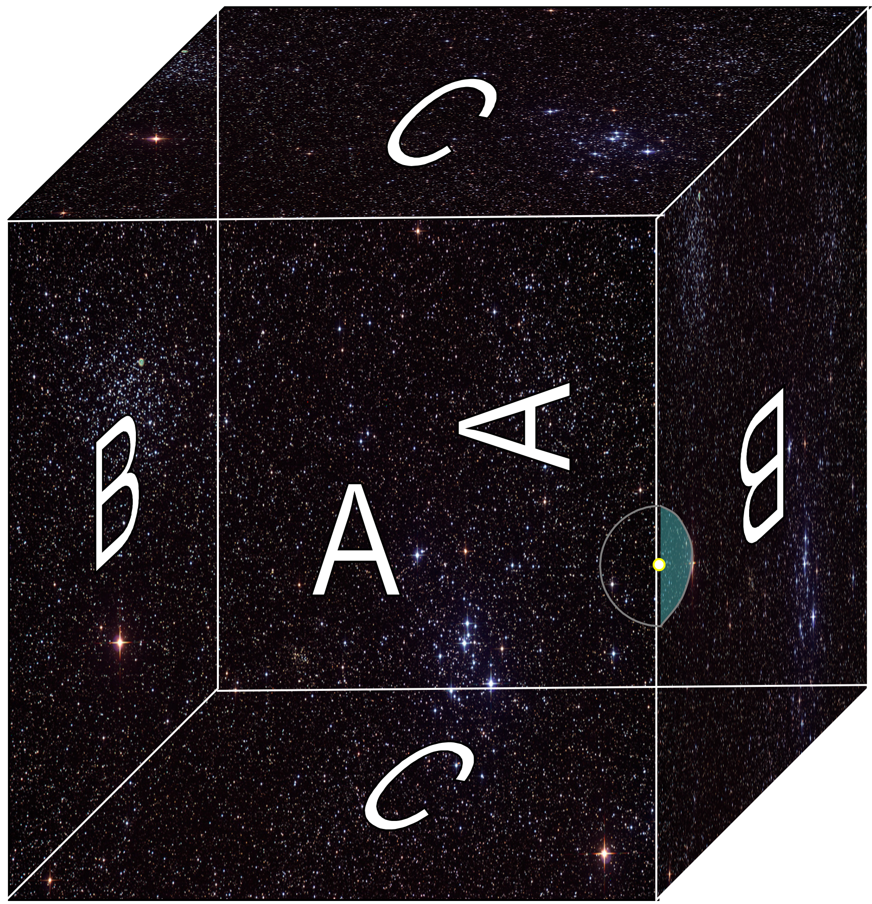


¿Una 3-variedad?

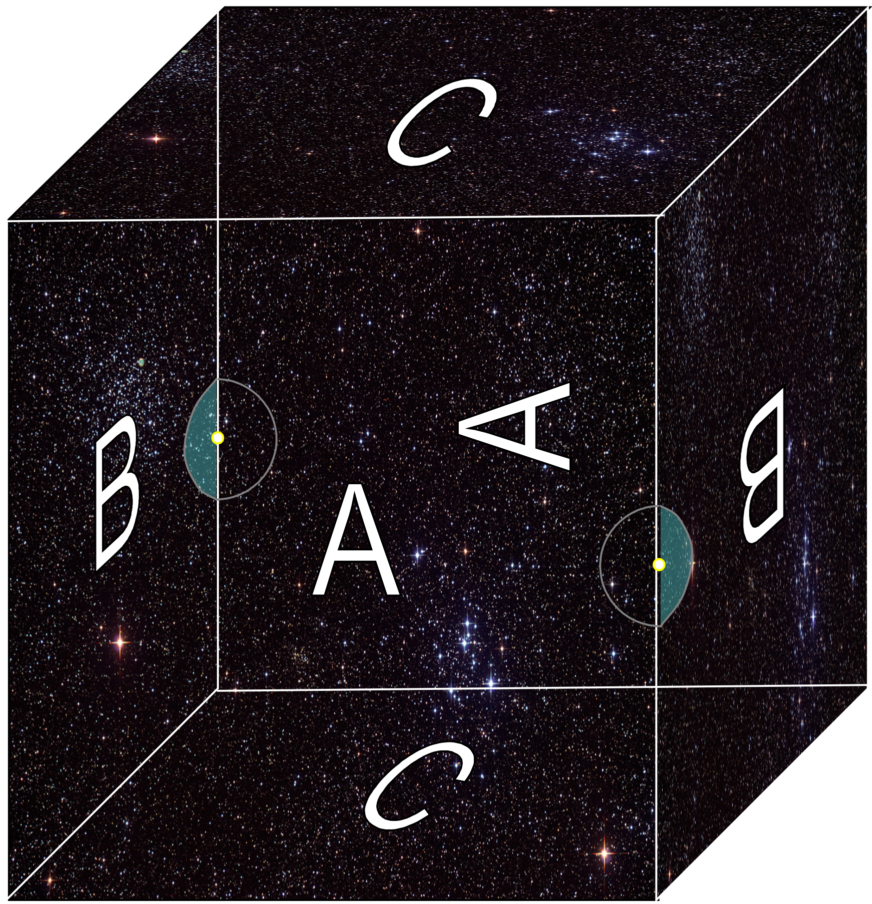


La vecindad del punto esta formada por 4 cuartos de una bola

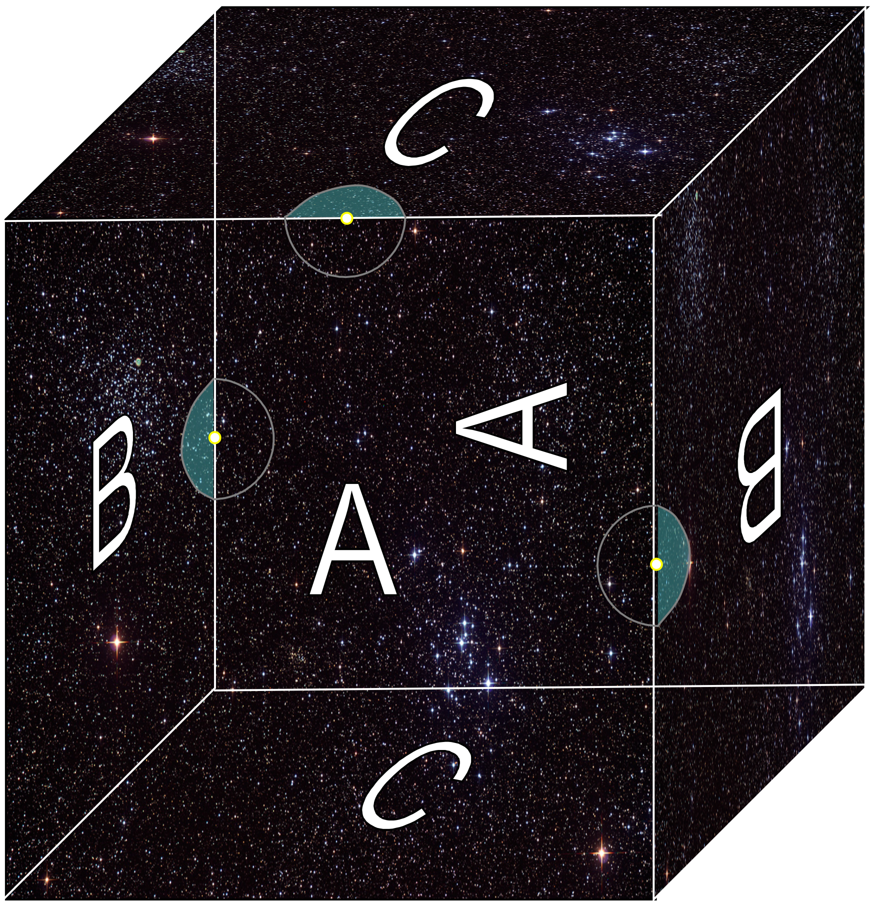
¿Una 3-variedad?



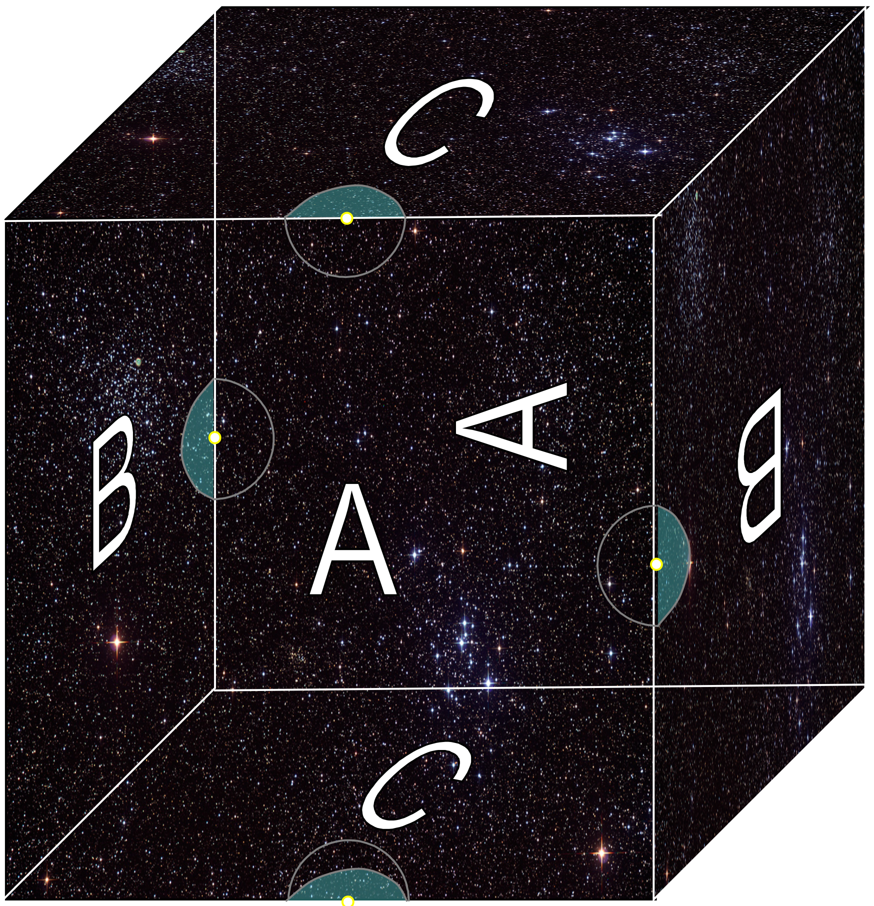
¿Una 3-variedad?



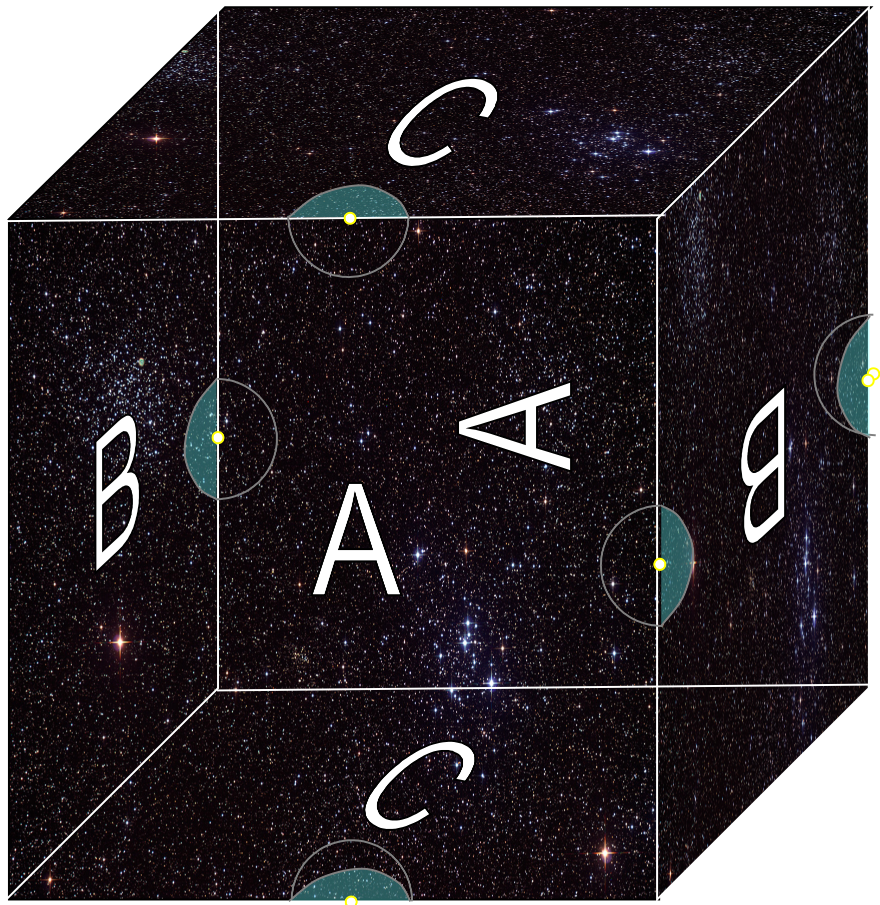
¿Una 3-variedad?



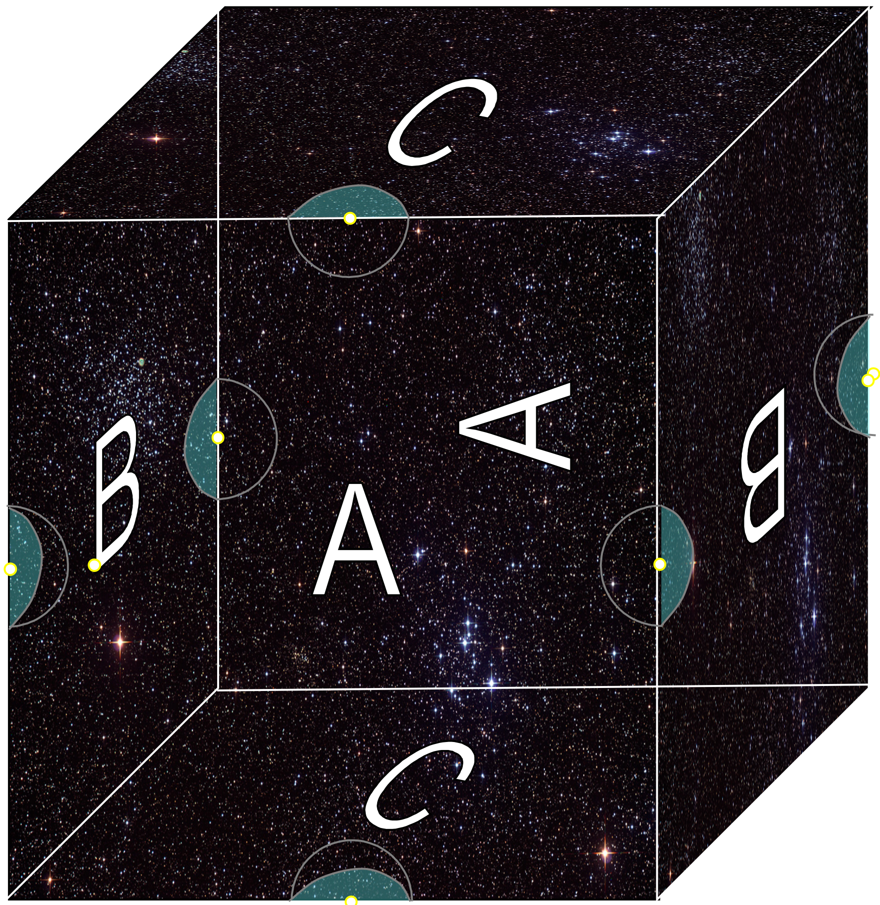
¿Una 3-variedad?



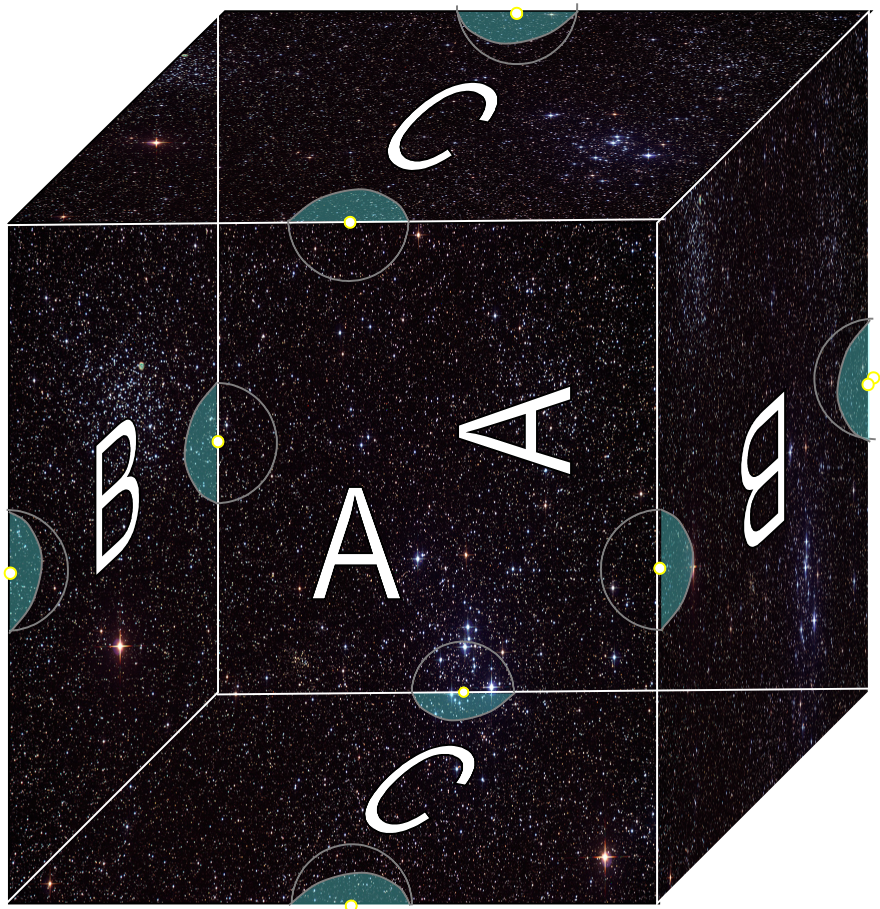
¿Una 3-variedad?



¿Una 3-variedad?

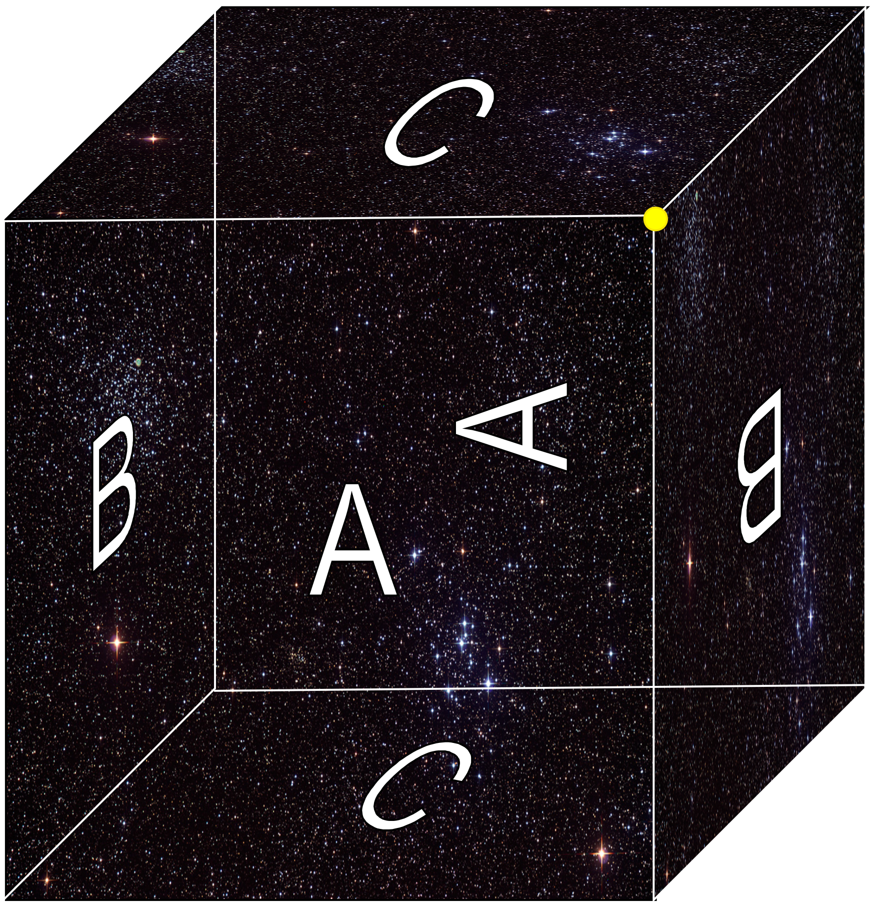


¿Una 3-variedad?

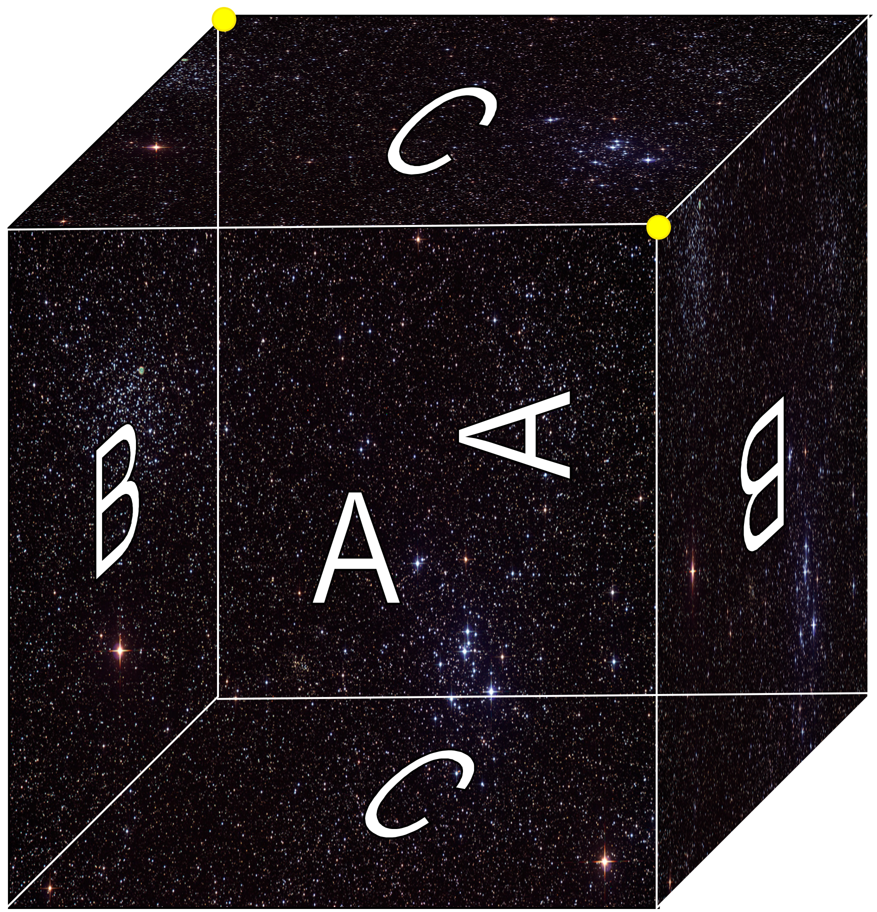


La vecindad del punto esta formada por 8 cuartos de una bola

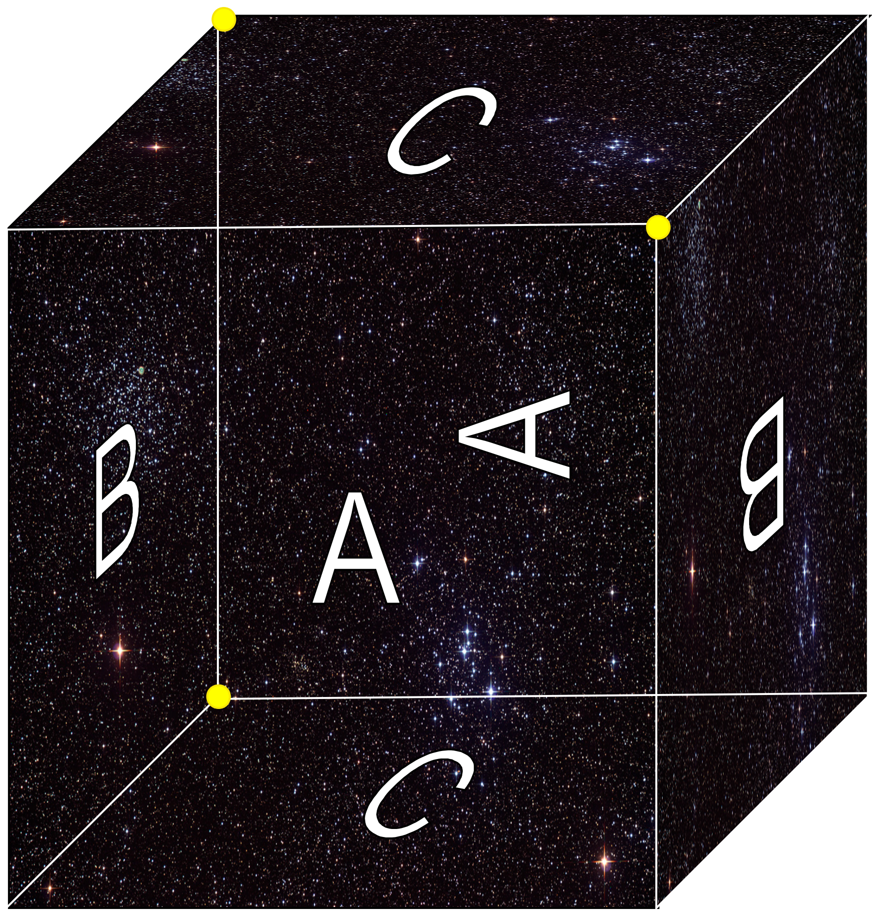
¿Una 3-variedad?



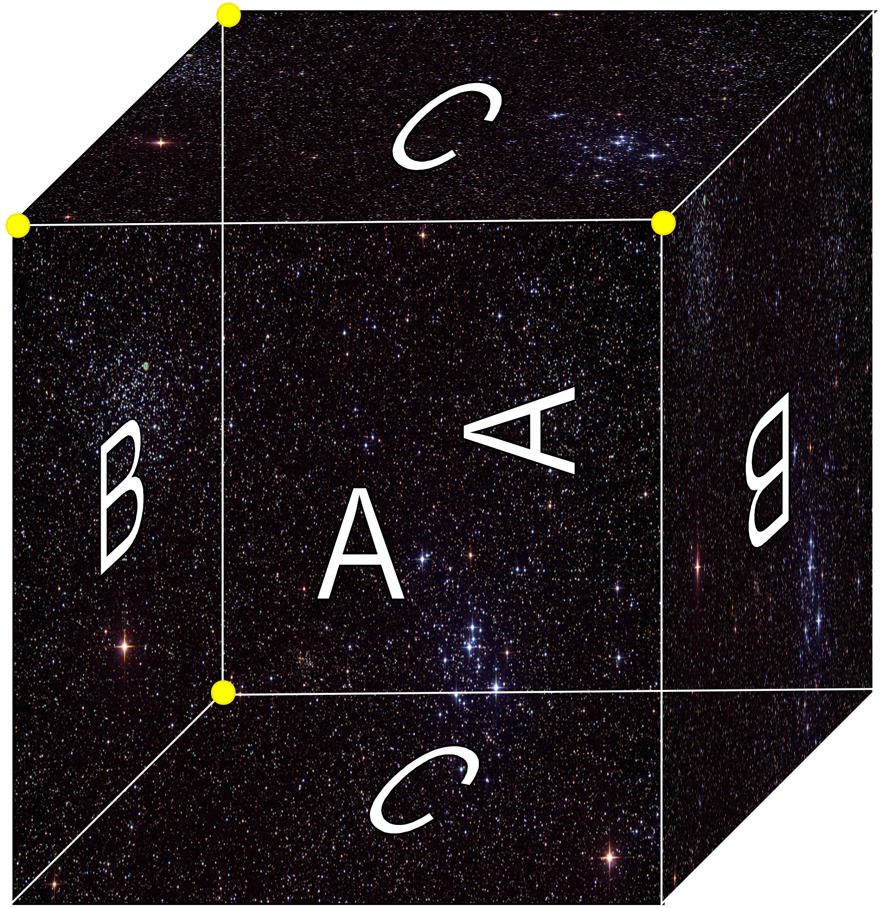
¿Una 3-variedad?



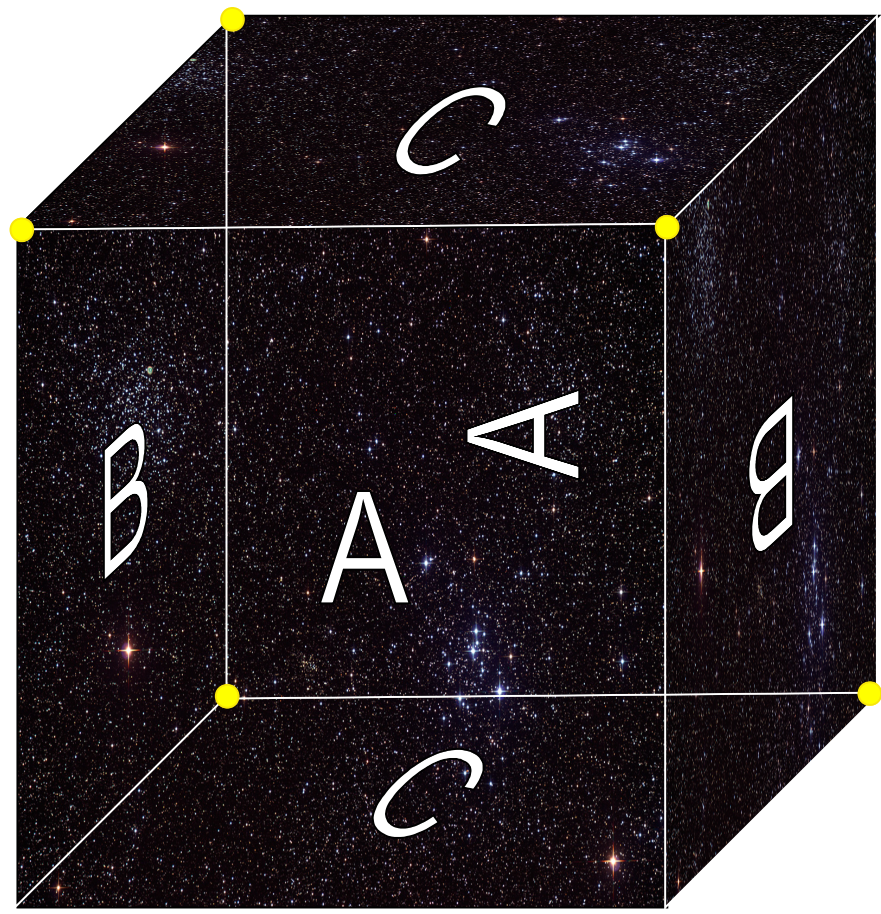
¿Una 3-variedad?



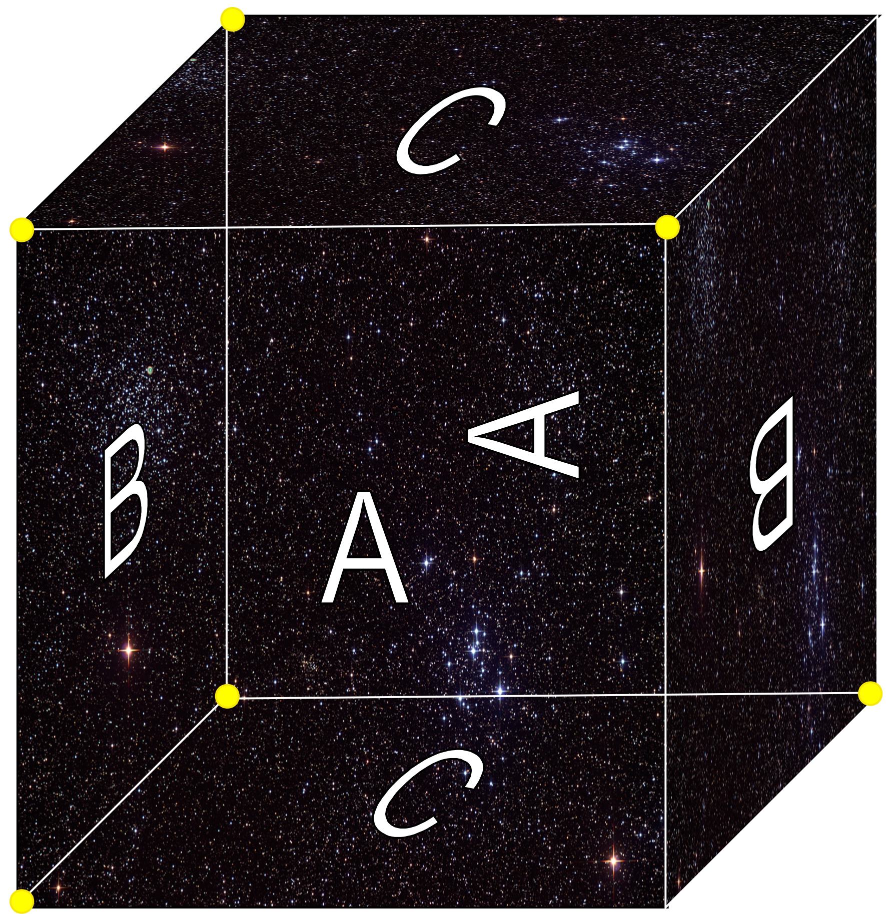
¿Una 3-variedad?



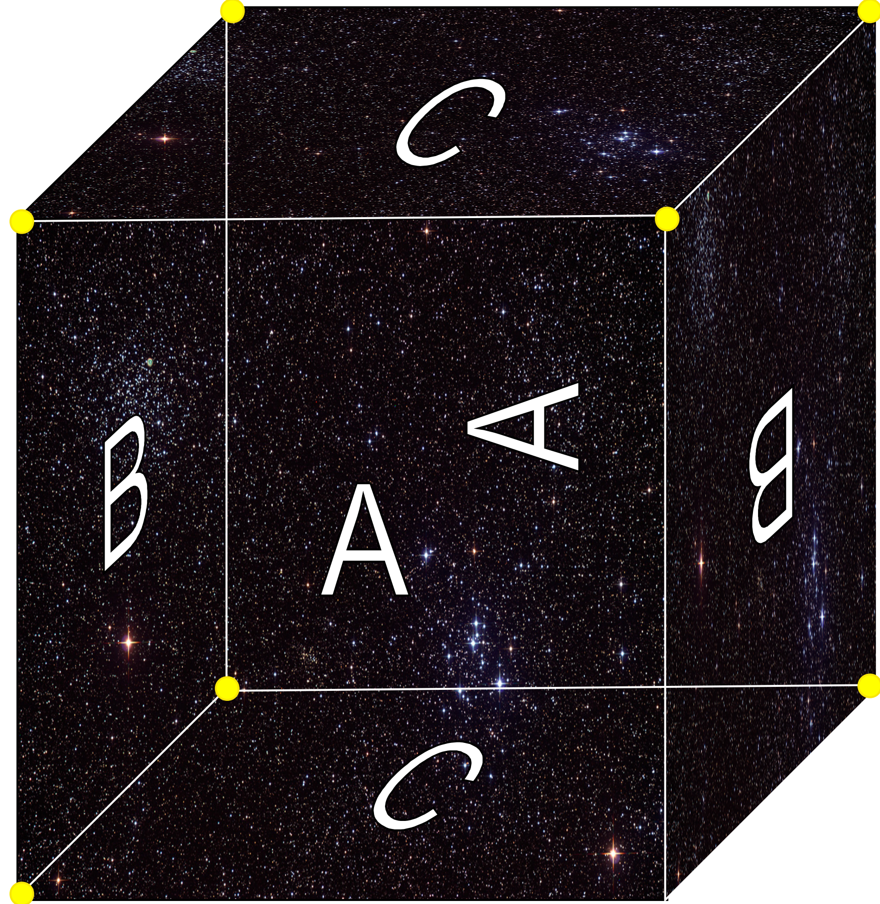
¿Una 3-variedad?



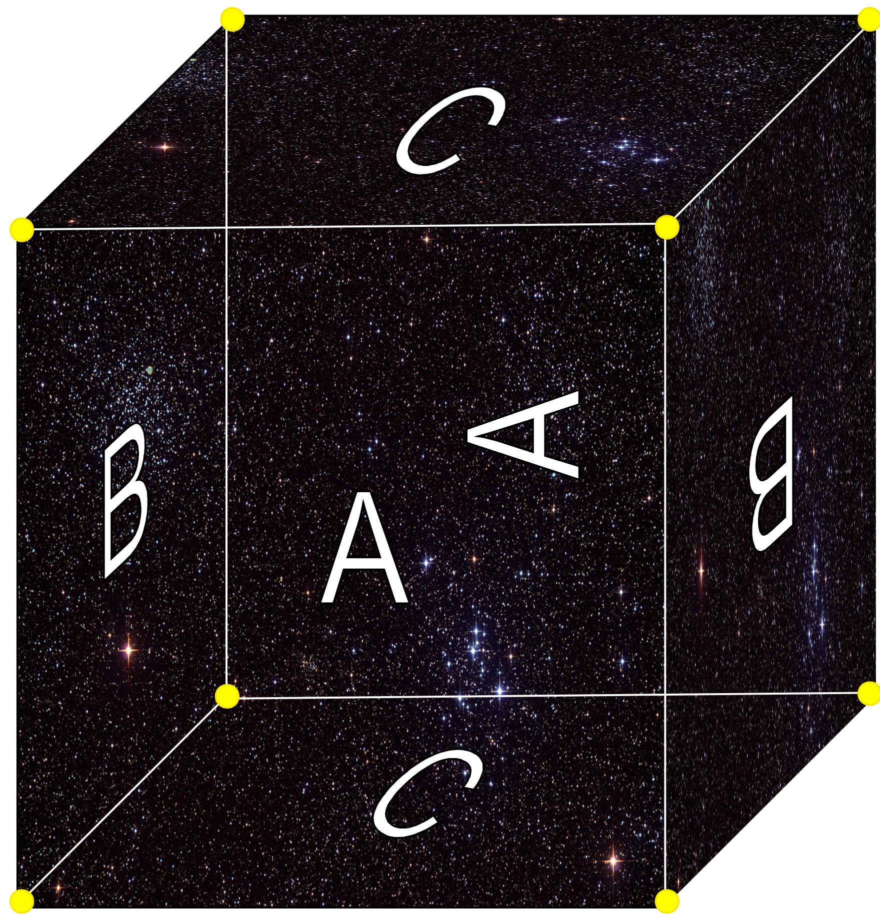
¿Una 3-variedad?



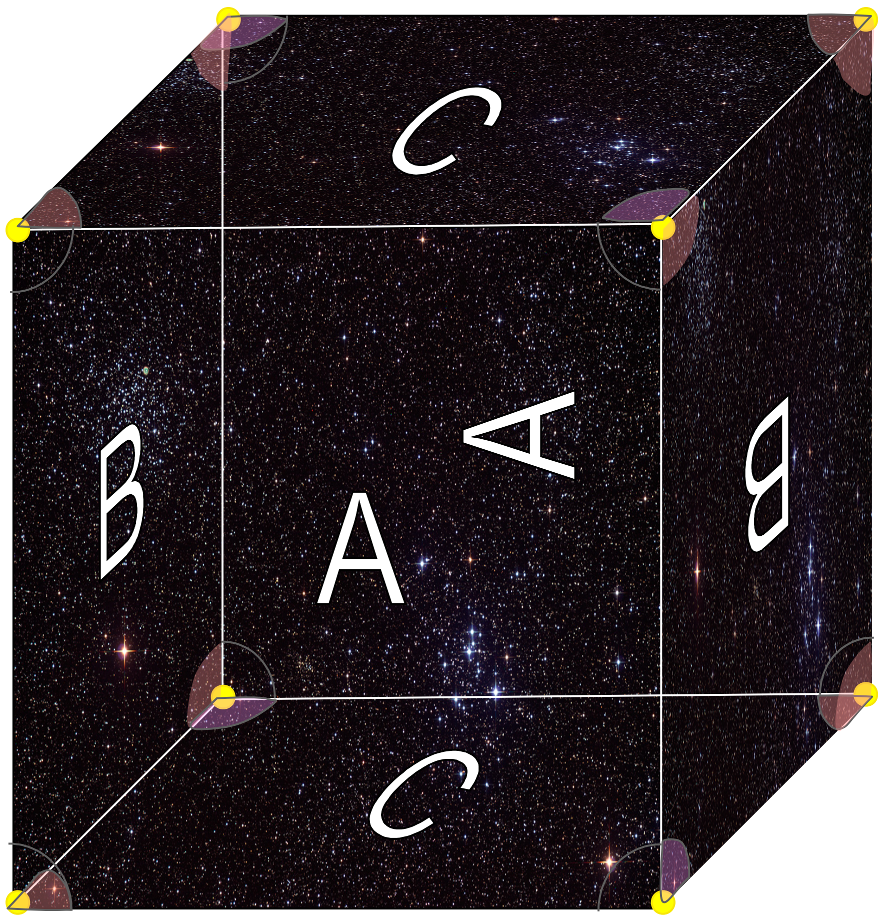
¿Una 3-variedad?



¿Una 3-variedad?



¿Una 3-variedad?



La vecindad del vértice esta formada por 8 octavos de una bola

pero eso no quiere decir que sea una bola

Triangulaciones

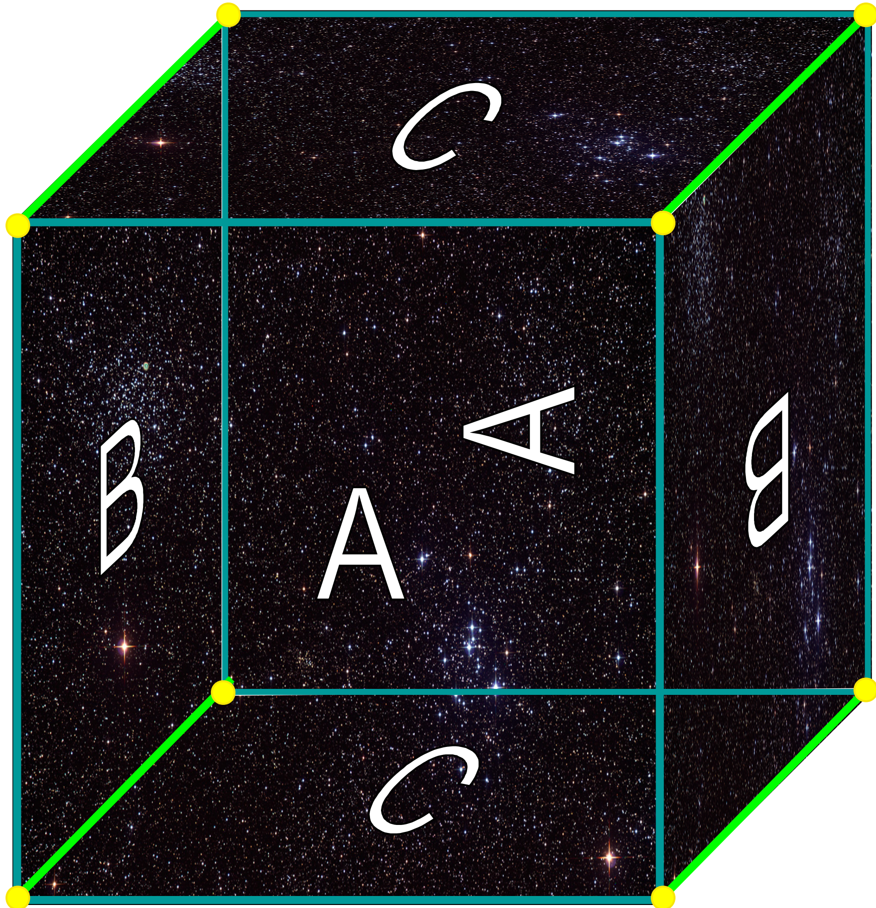
La Característica de Euler de un espacio K formado por un número finito de poliedros pegados por sus caras es

$$\chi(K) = \text{Vértices} - \text{Aristas} + \text{Caras} - \text{Poliedros}$$

(contados ya que están pegados)

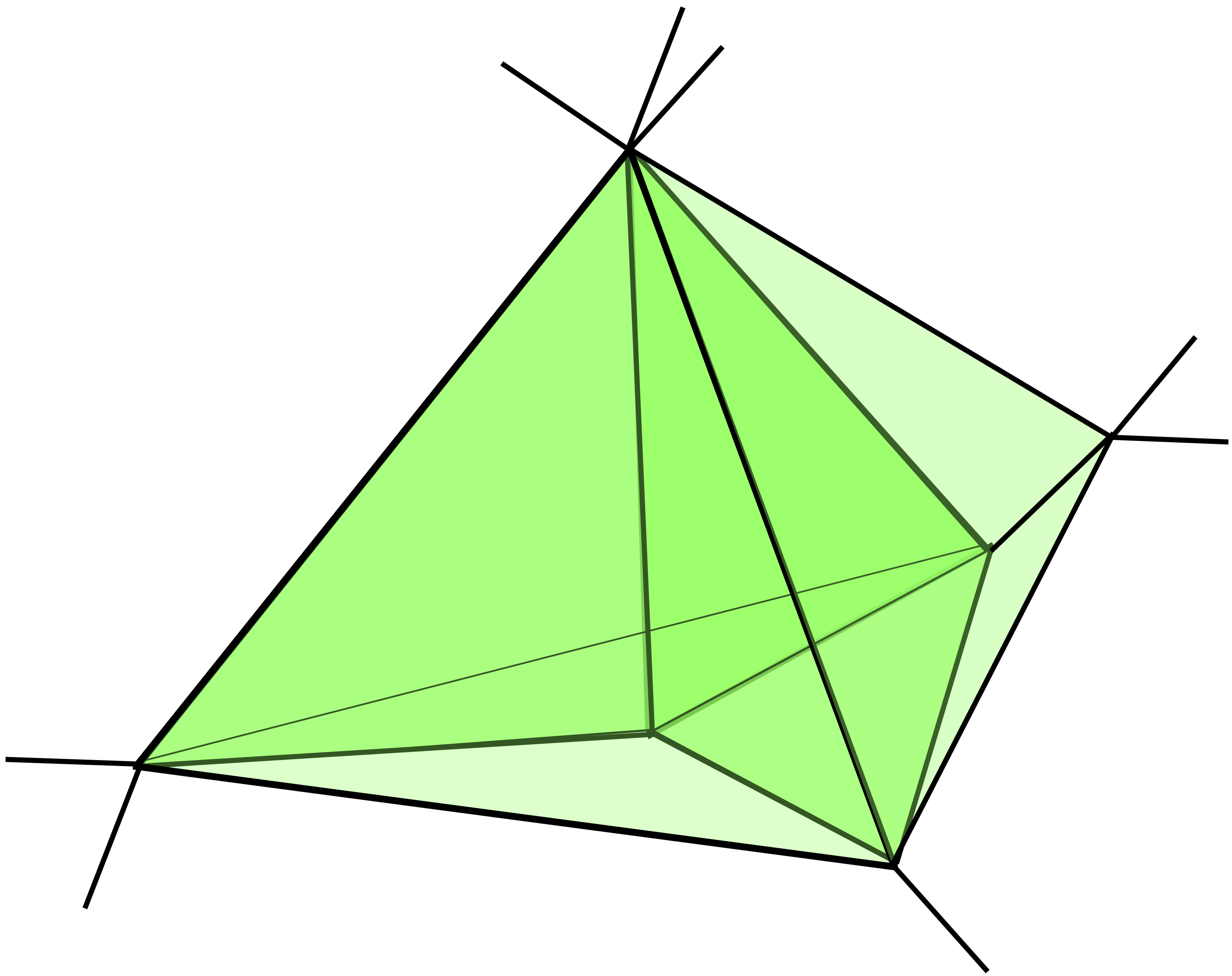
Teorema La característica de K *no depende* de la forma en que K se divide en poliedros.

¿Una 3-variedad?

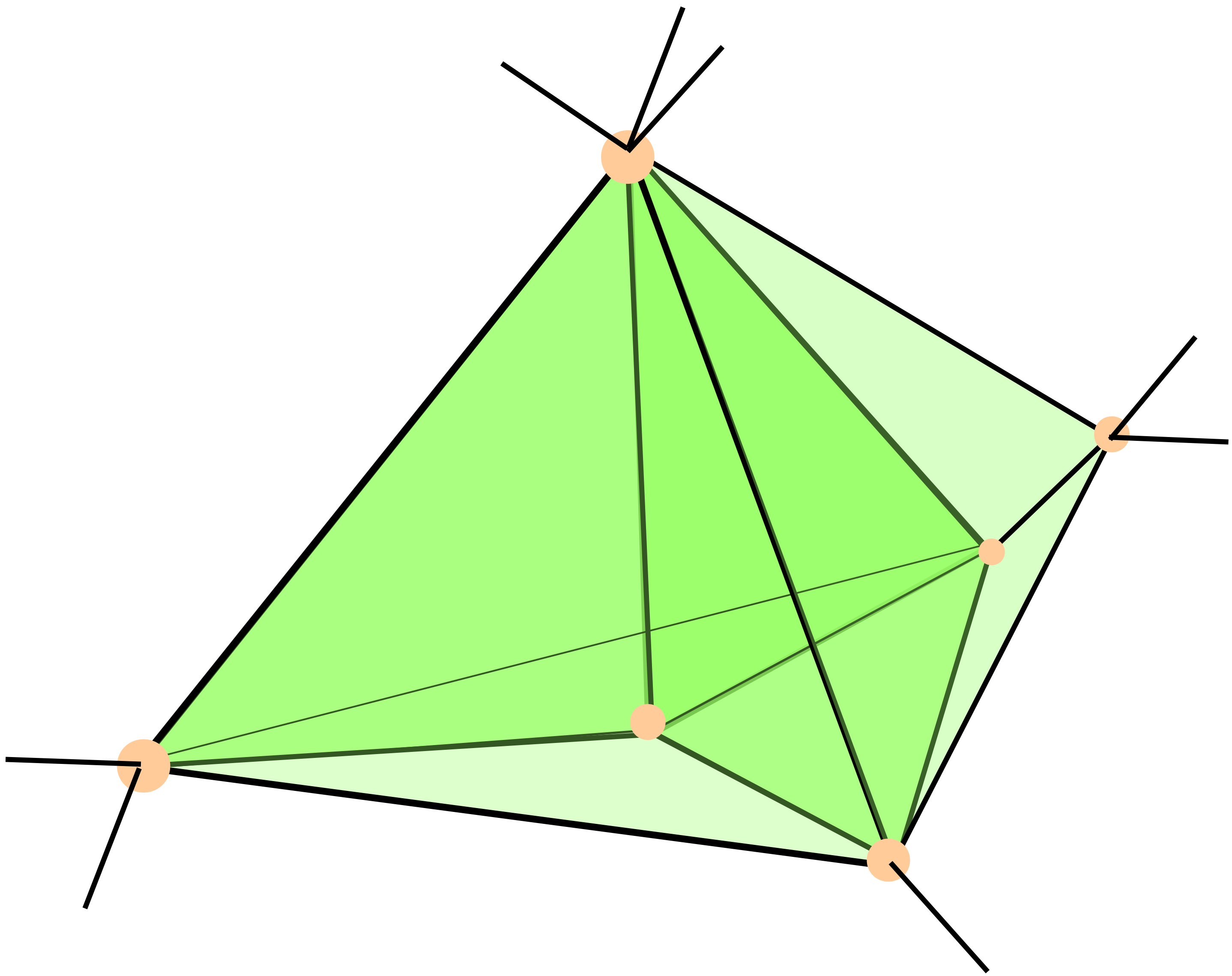


$X = V – A + C - P = 1 – 2 + 3 – 1 = 1$

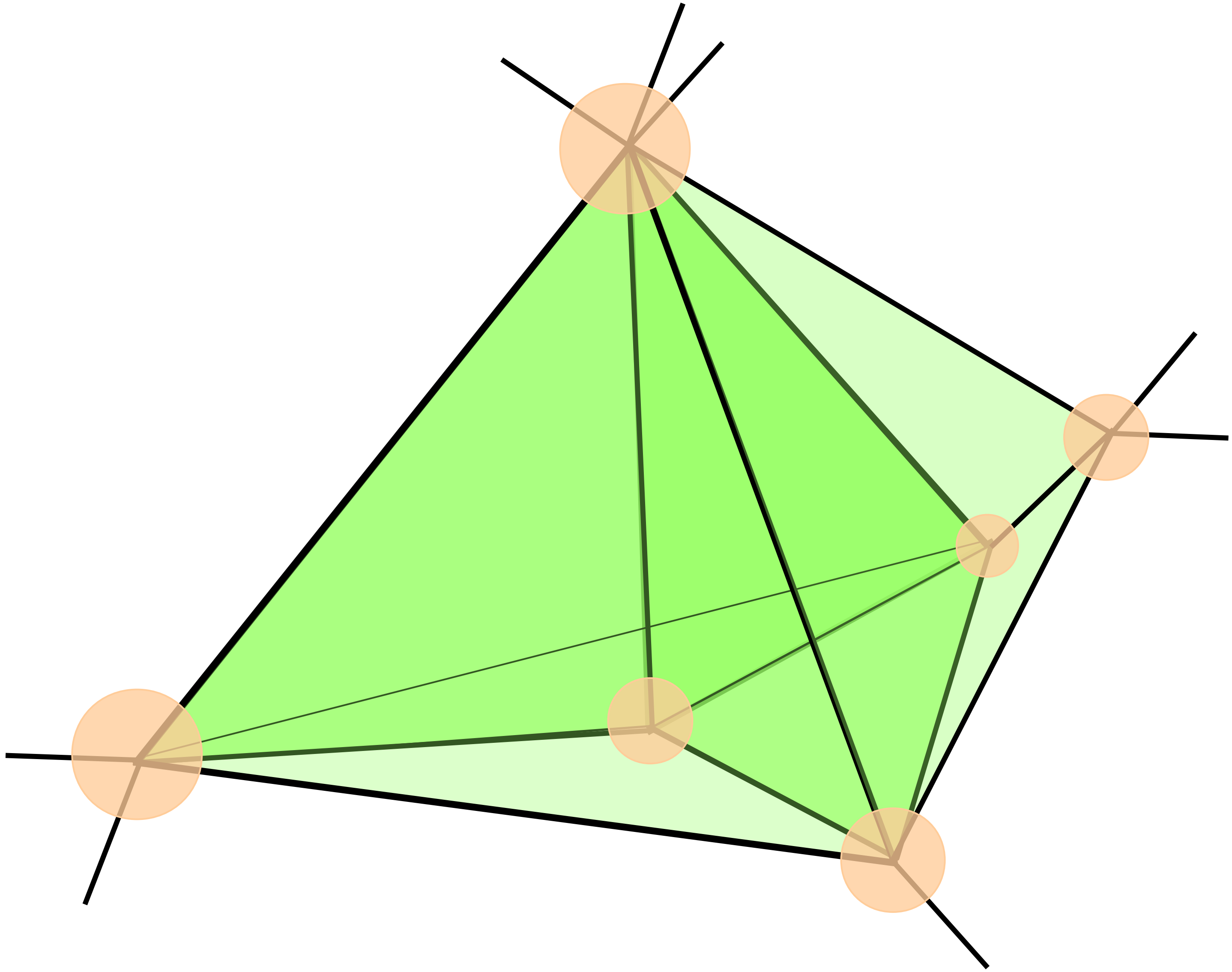
3-Variedad subdividida en tetraedros



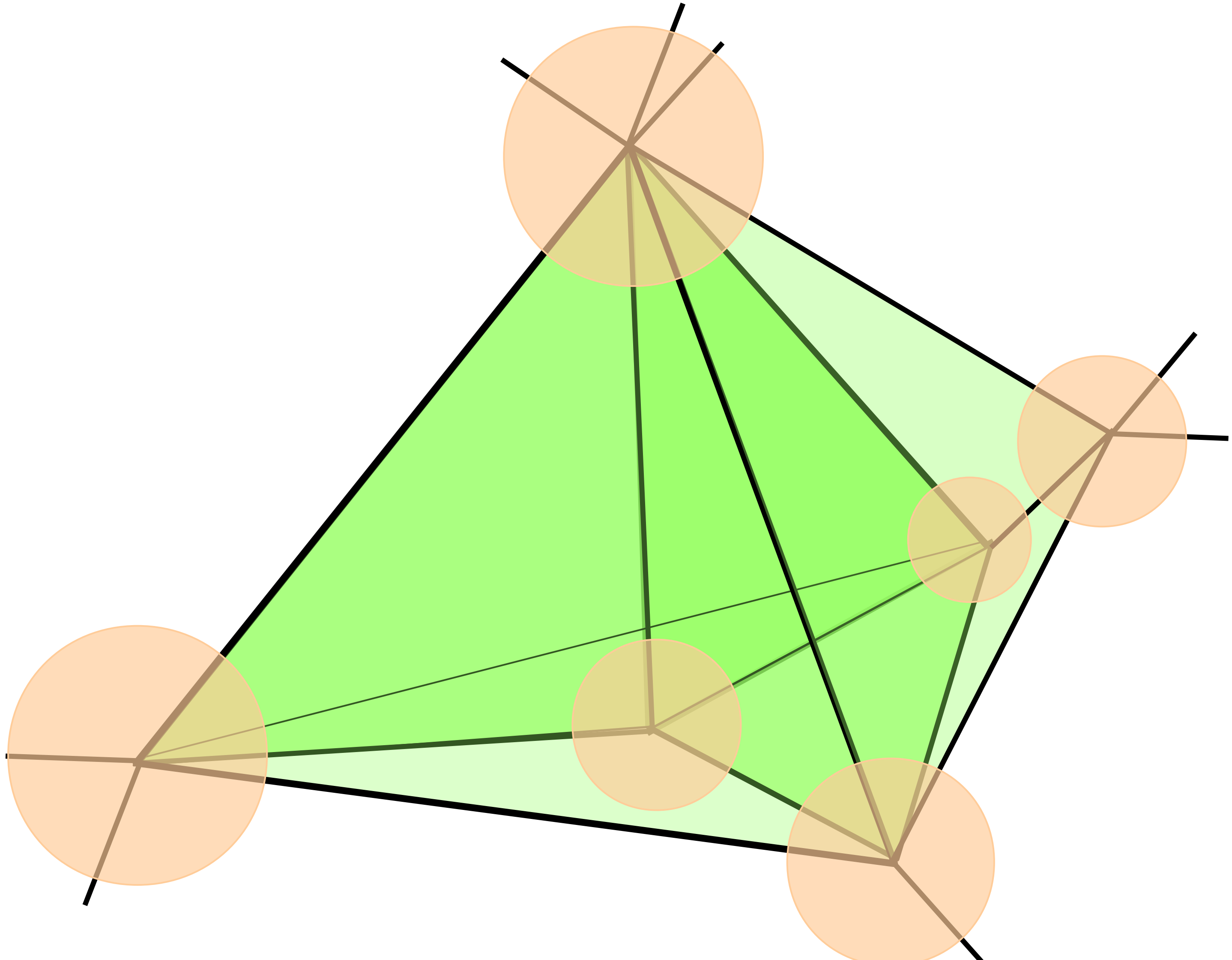
Poner un globo en cada vértice e inflarlos



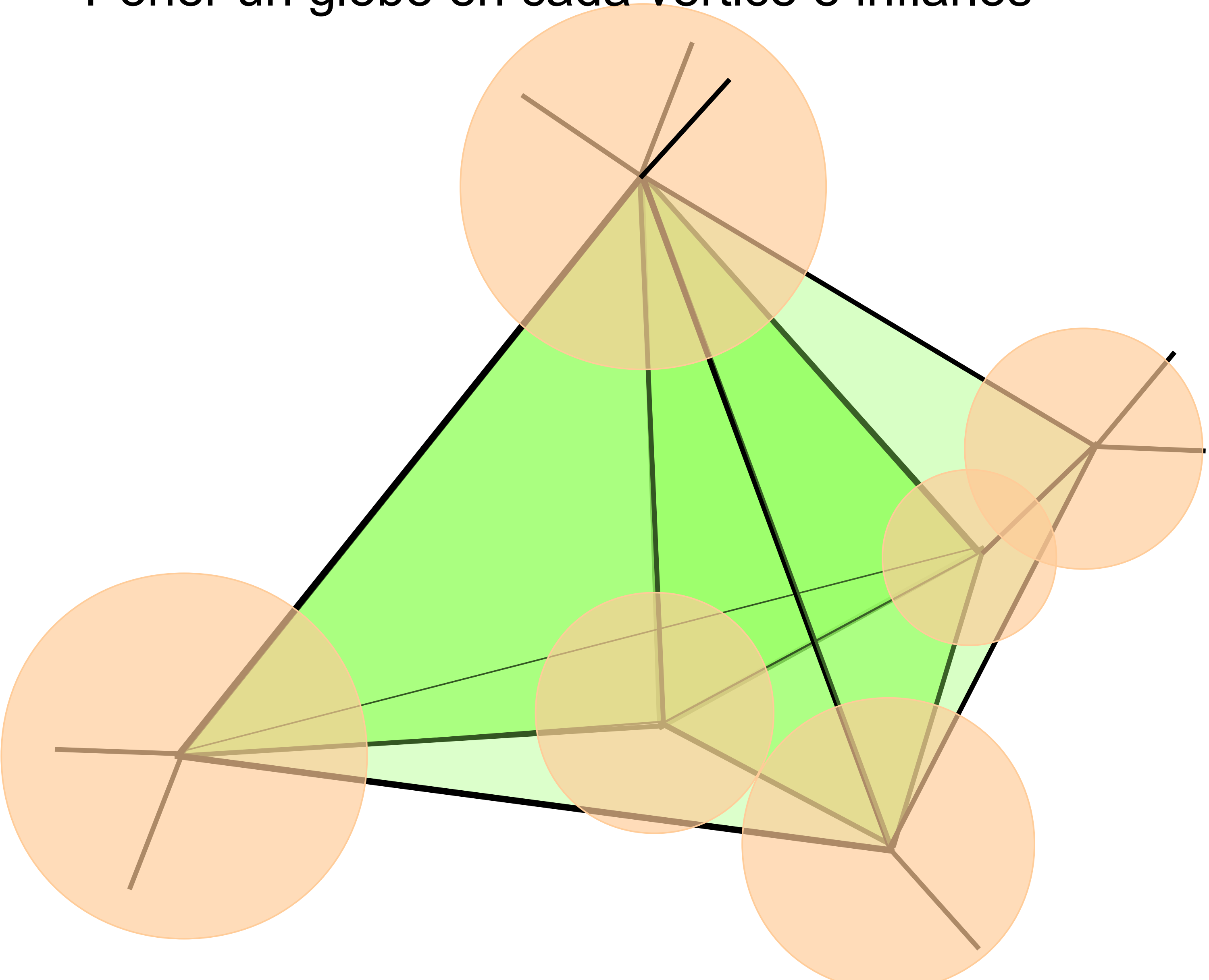
Poner un globo en cada vértice e inflarlos



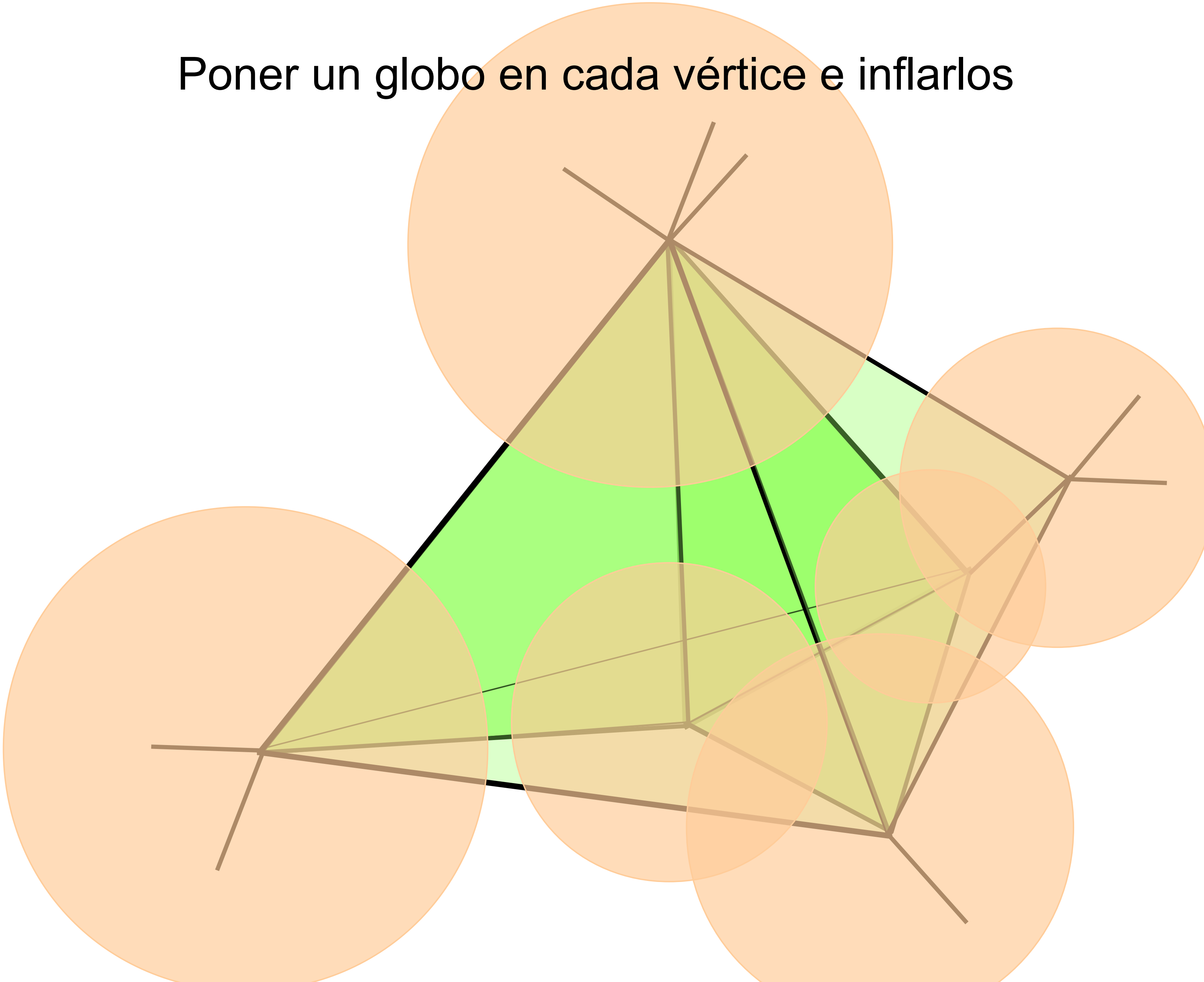
Poner un globo en cada vértice e inflarlos



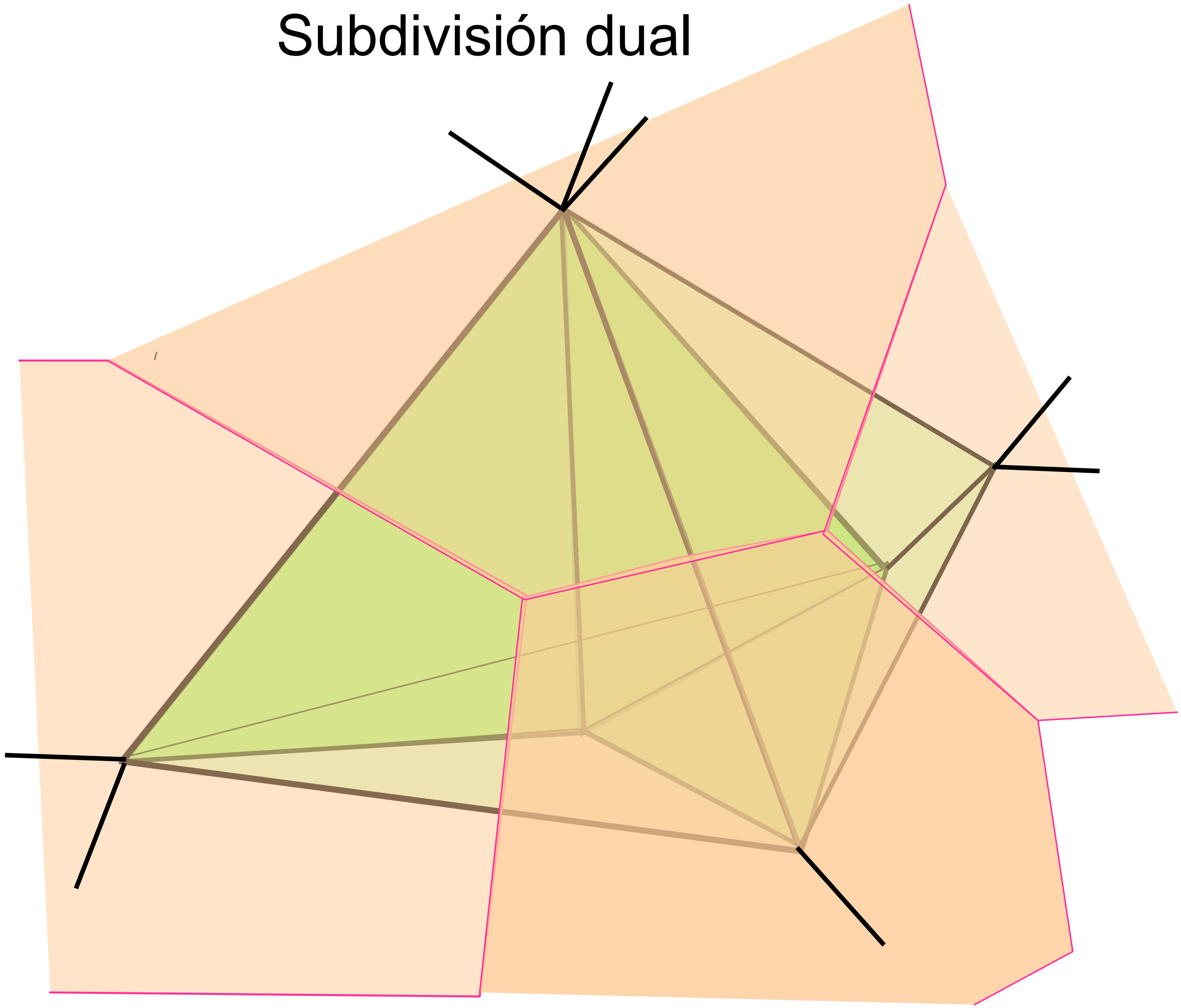
Poner un globo en cada vértice e inflarlos



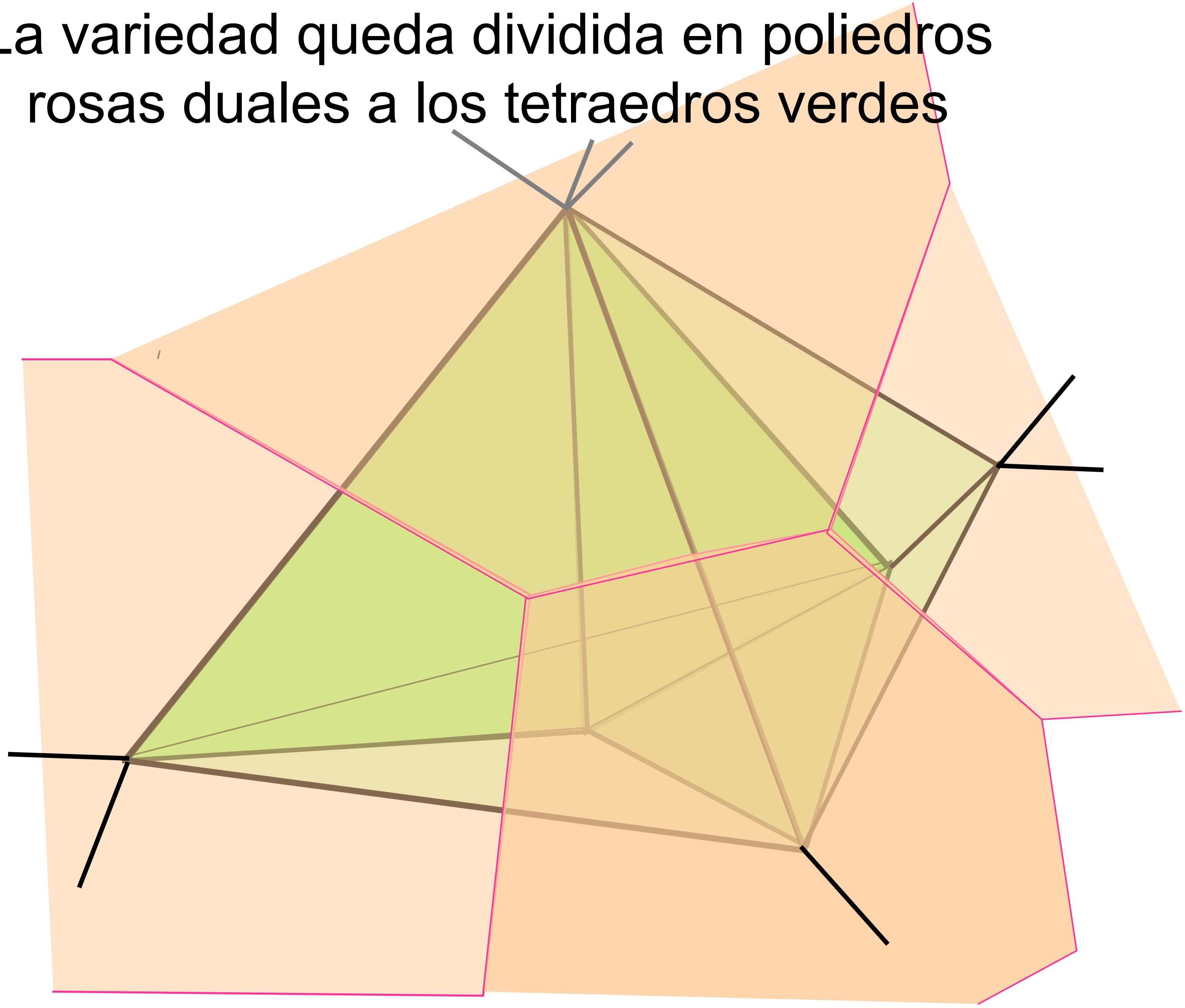
Poner un globo en cada vértice e inflarlos



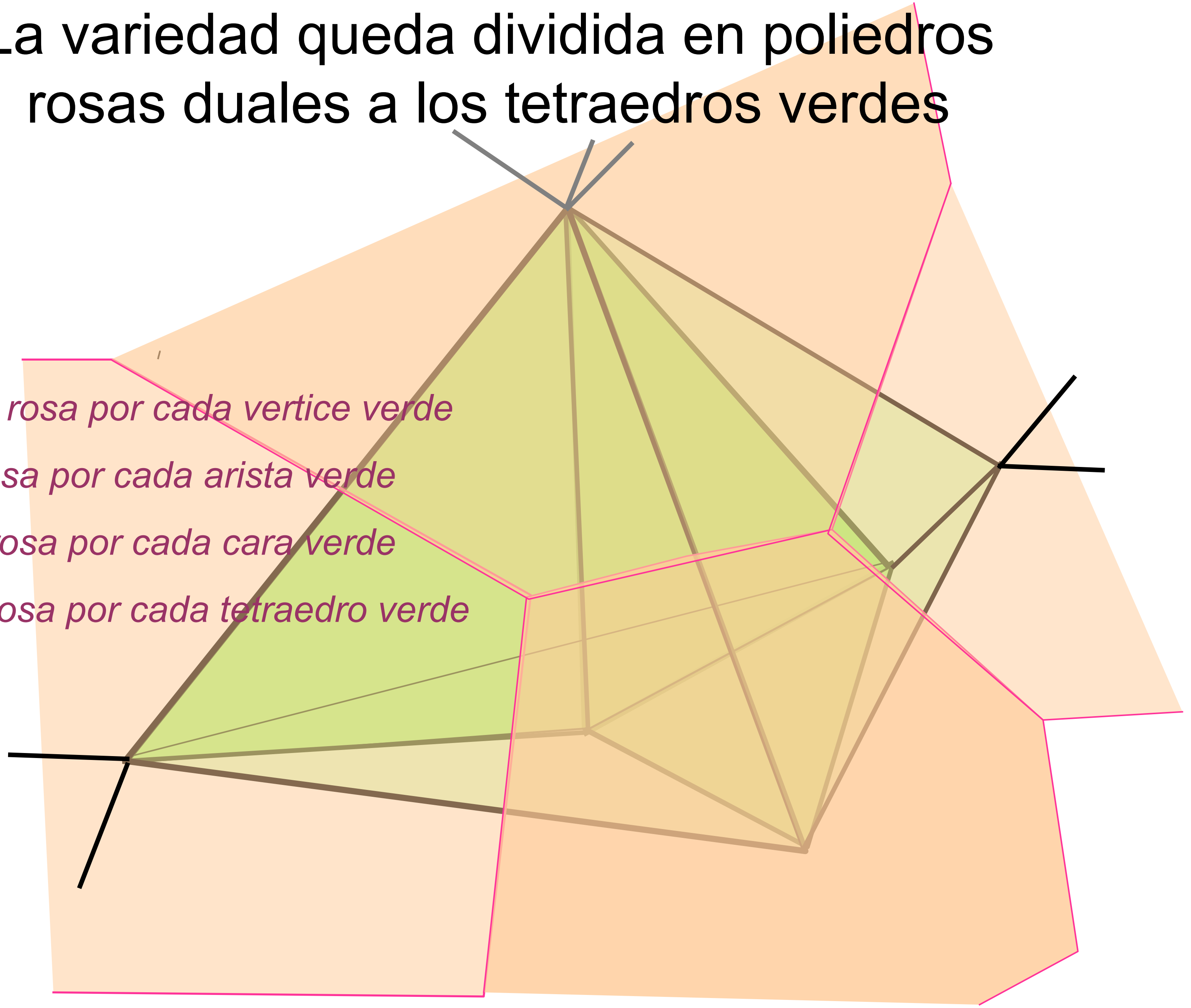
Subdivisión dual



La variedad queda dividida en poliedros rosas duales a los tetraedros verdes



La variedad queda dividida en poliedros rosas duales a los tetraedros verdes



Un poliedro rosa por cada vertice verde

Una cara rosa por cada arista verde

Una arista rosa por cada cara verde

Un vértice rosa por cada tetraedro verde

Triangulaciones

Corolario:

Si M es una 3-variedad cerrada entonces $\chi(M) = 0$

Triangulaciones

Corolario:

Si M es una 3-variedad cerrada entonces $\chi(M) = 0$

Dem.

Calcular $\chi(M)$ usando una subdivisión en tetraedros y la subdivisión dual.

$$\chi(M) = V - A + C - P = P - C + A - V = -\chi(M)$$

Triangulaciones

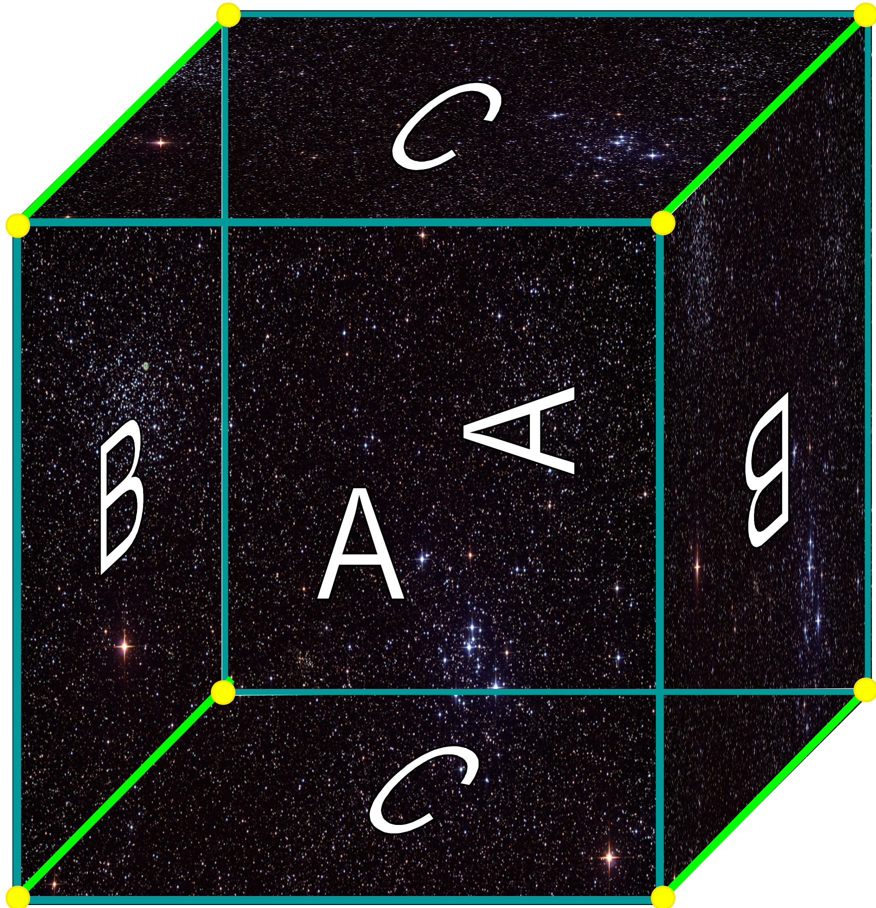
Corolario:

Si M es una 3-variedad cerrada entonces $\chi(M) = 0$

Afirmación:

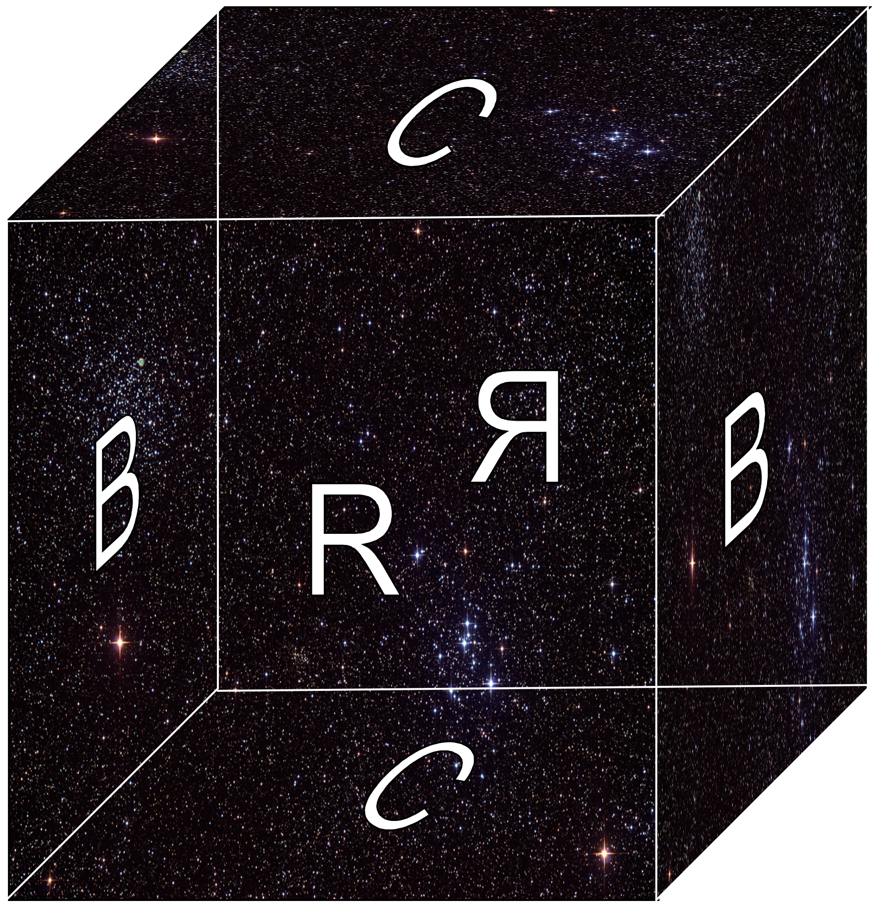
El espacio K obtenido de un poliedro al identificar sus caras por pares es una 3-variedad si y solo si $\chi(K) = 0$

¿Una 3-variedad? NO

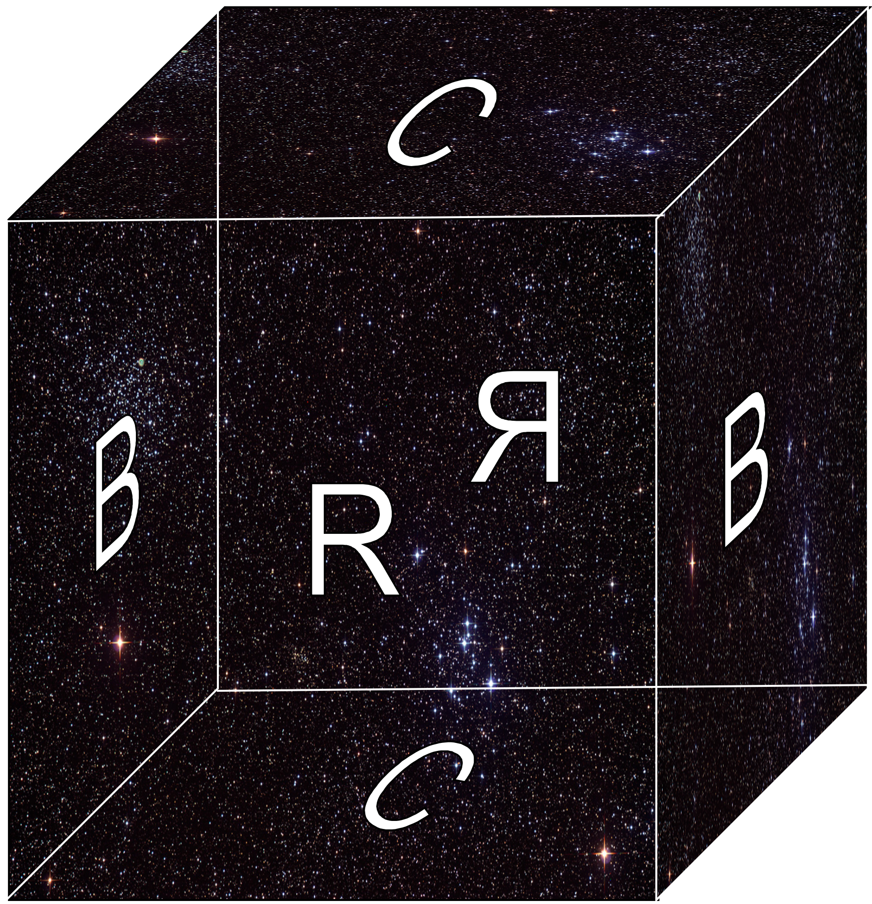


$$X = V - A + C - P = 1 - 2 + 3 - 1 = 1$$

¿Una 3-variedad?



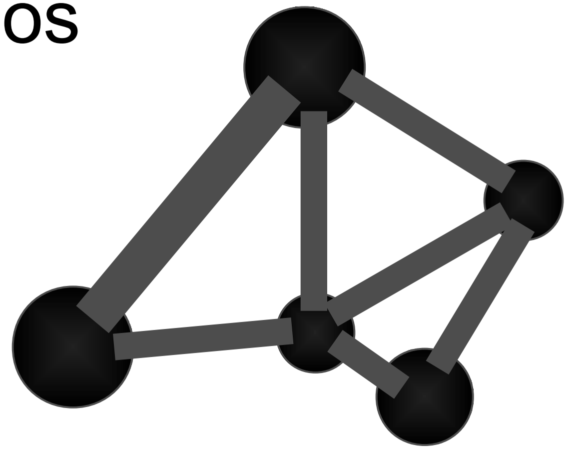
¿Una 3-variedad?

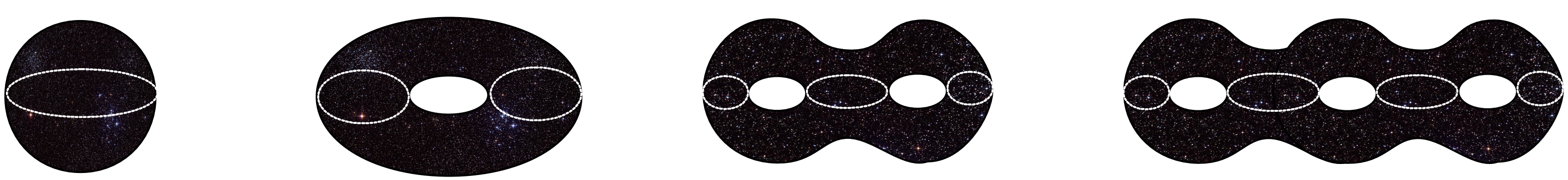


Si, una con una propiedad muy rara: no es orientable

Cubos con asas

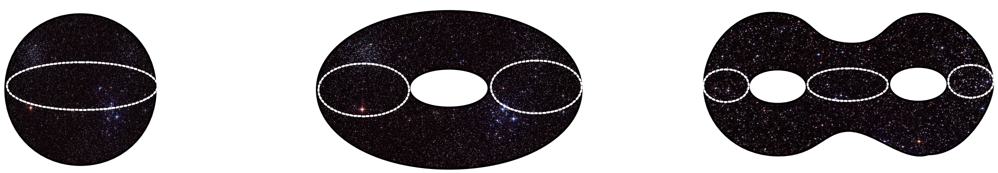
Se obtienen conectando bolas sólidas por medio de cilindros sólidos





Descomposiciones de Heegaard

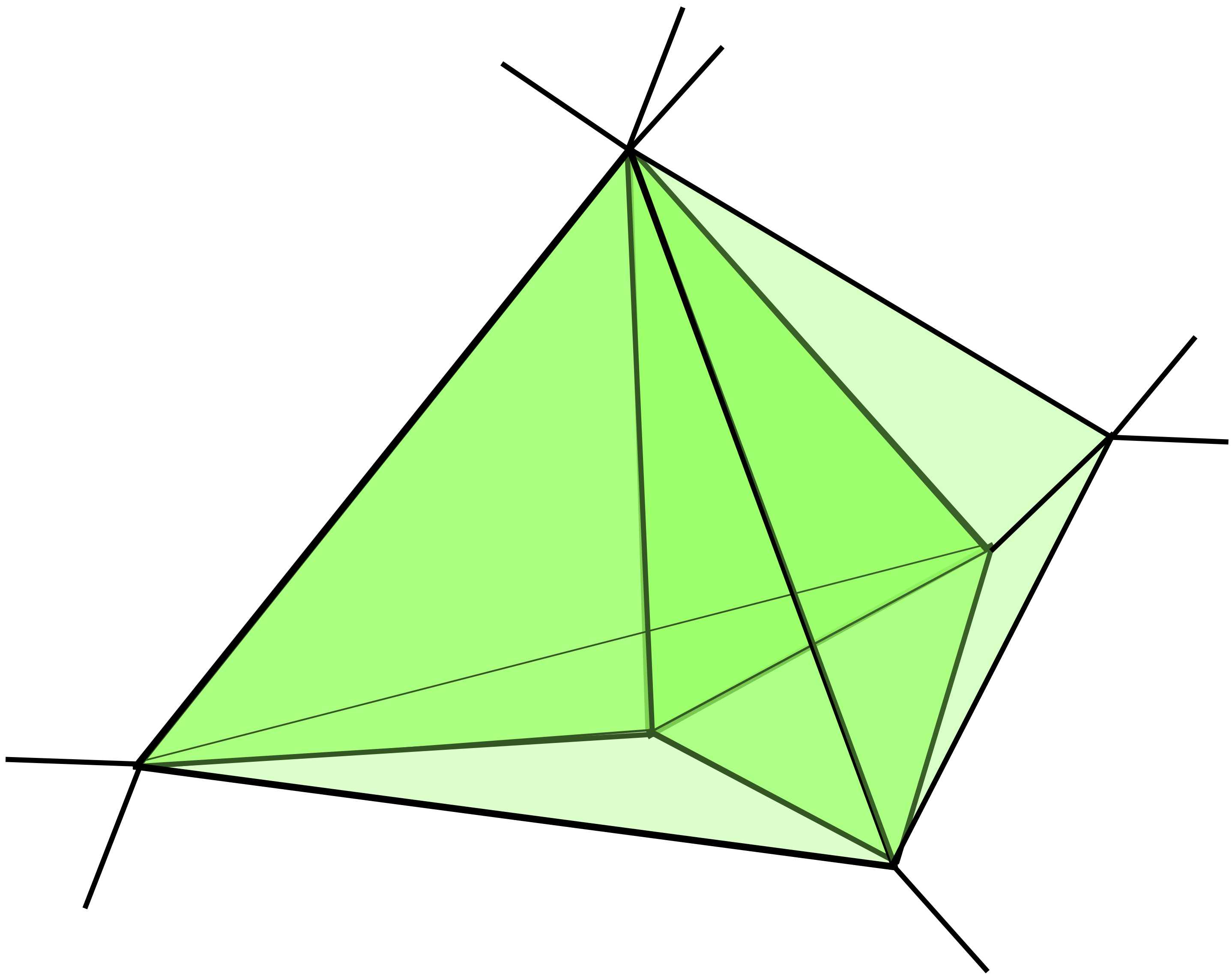
Teorema: Cada 3-variedad cerrada es la unión de dos “cubos con asas” pegados por sus fronteras.

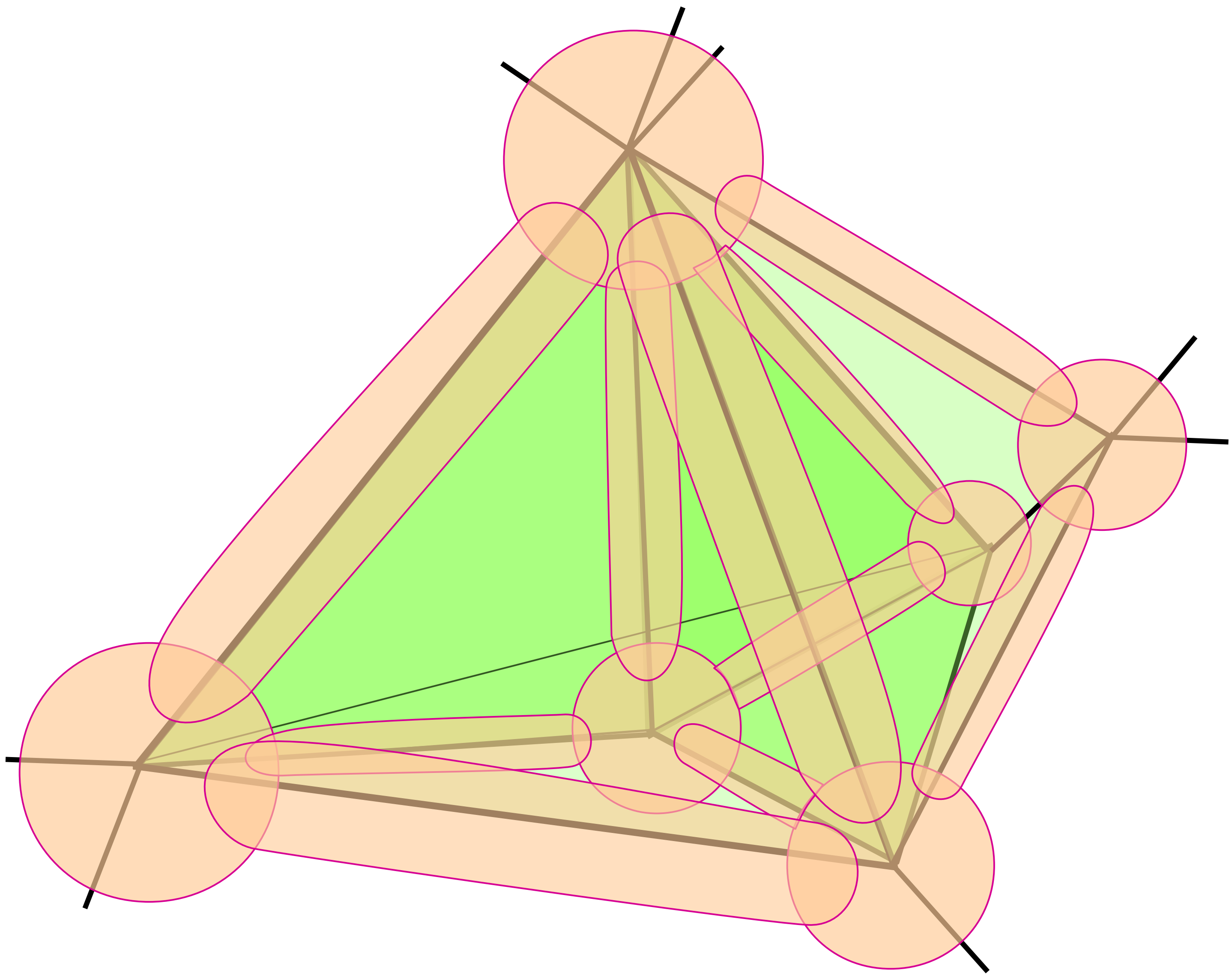


Dem.

Tomar una subdivisión de la variedad en poliedros. Inflar el 1-esqueleto para obtener un cubo con asas. Inflar el 1-esqueleto de la subdivisión dual para obtener el otro.

El 1-esqueleto está formado por los vértices y las aristas



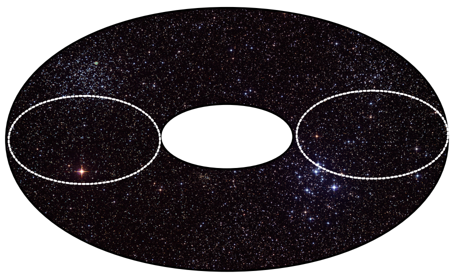
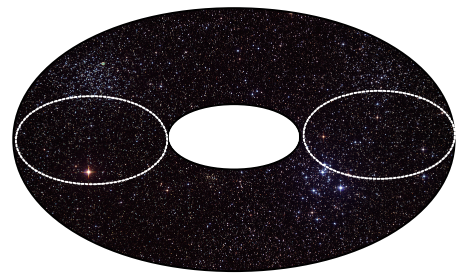


Variedades obtenidas pegando 2 bolas:

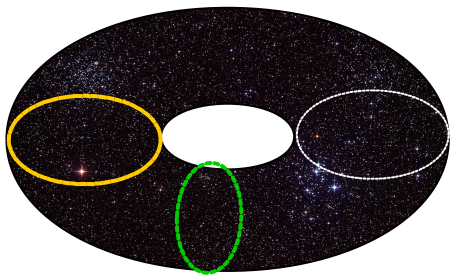
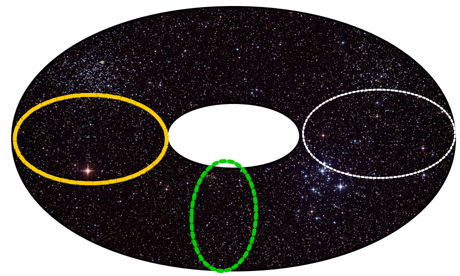
$\cup$

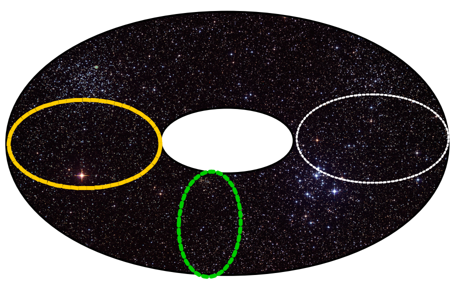
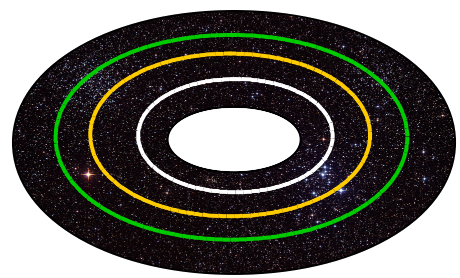
$= S^3$

Variedades obtenidas pegando 2 donas:

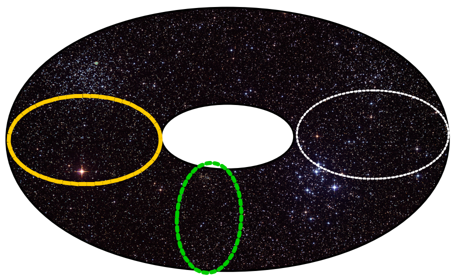
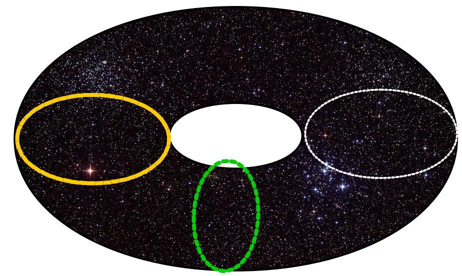
 $\cup$  $= \; ?$

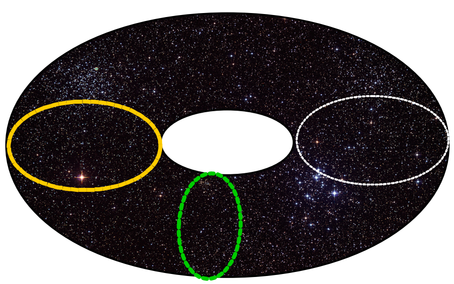
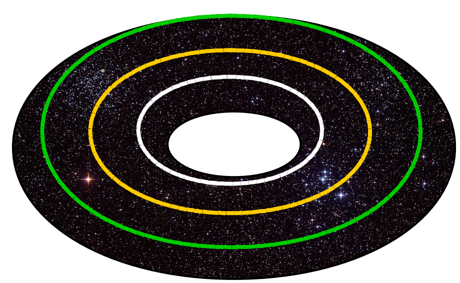
Ejemplos:

 $\cup$  $= ?$

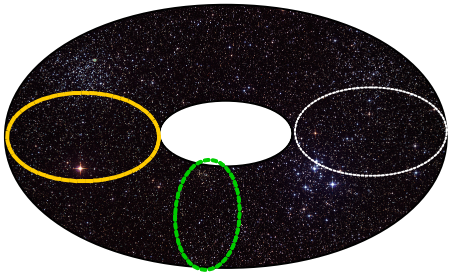
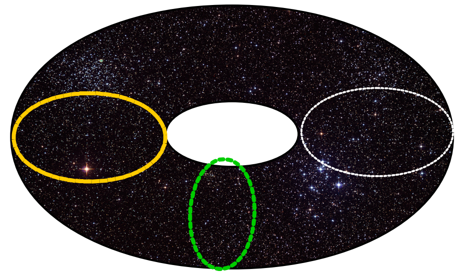
 $\cup$ 

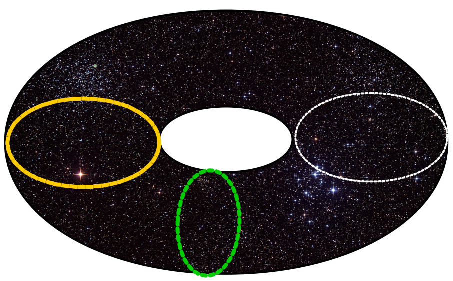
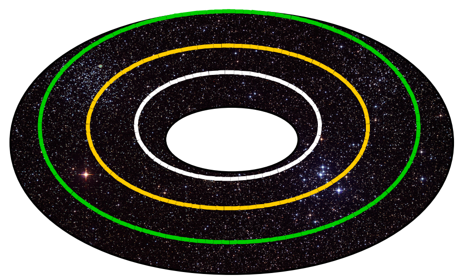
Ejemplos:

 $\cup$  $= S^2 \times S^1$

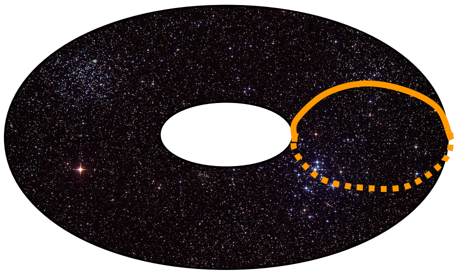
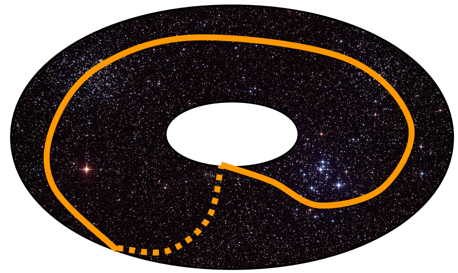
 $\cup$  $= ?$

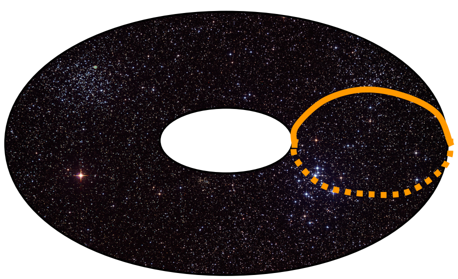
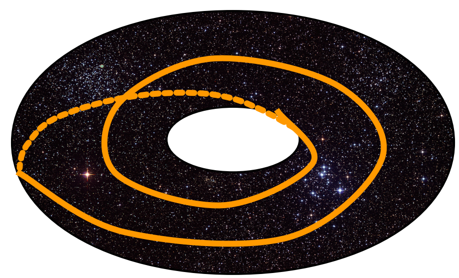
Ejemplos:

 U  $= S^2 \times S^1$

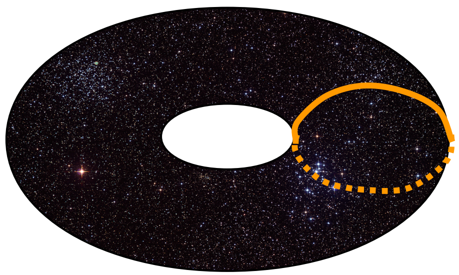
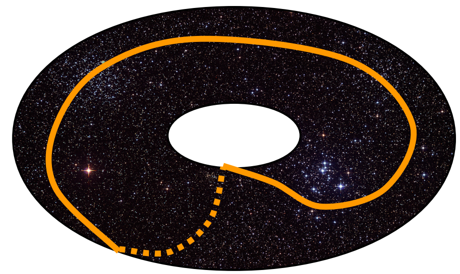
 U  $= S^3$

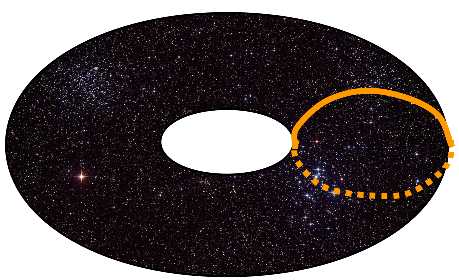
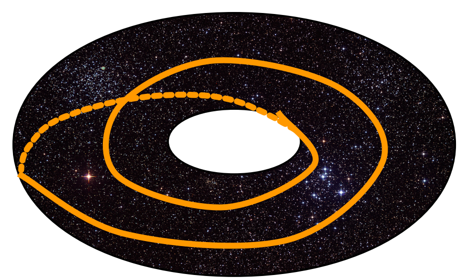
Ejemplos:

 $\cup$  $= ?$

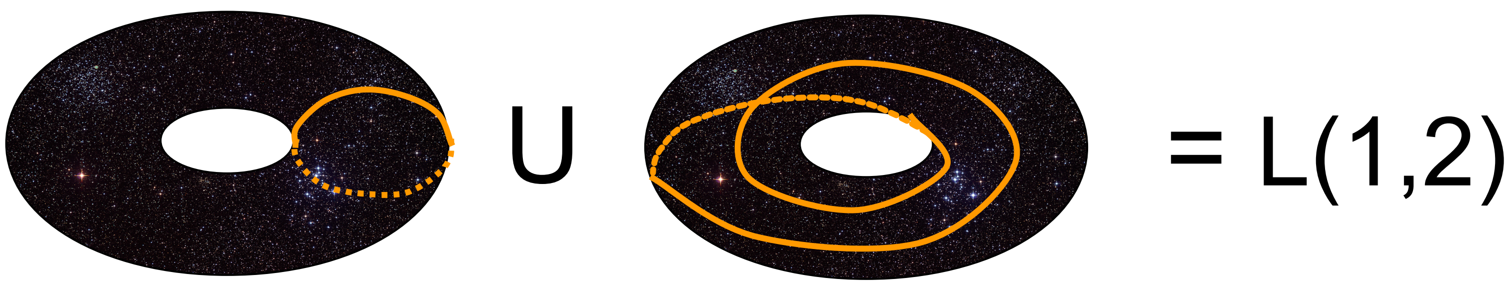
 $\cup$  $= ?$

Ejemplos:

 $\cup$  $= S^3$

 $\cup$  $= ?$

Las variedades obtenidas pegando dos donas se llaman *espacios lente*



Hay tantas curvas distintas en el toro como número racionales